

**Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний університет
Факультет комп'ютерних інформаційних технологій**

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни "Фізика"

Освітньо-кваліфікаційний рівень – бакалавр

Галузь знань – 0501 «Інформатика та обчислювальна техніка»

Напрямок підготовки – 6.050102 «Комп'ютерна інженерія»

Фахове спрямування – «Комп'ютерні системи та мережі»

**Укладач
кандидат технічних наук,
доцент Паздрій І.Р.**

Тернопіль – 2013

МЕХАНІКА

Фізика та її роль в комп'ютерній інженерії

Фізика – це те, чим фізики займаються пізно ввечері

Все, що нас оточує, все що існує навколо нас і сприймається за допомогою відчуттів є матерією. Невід'ємною властивістю матерії і формою її існування є рух.

Рух в широкому розумінні – це всеможливі перетворення матерії, від простого переміщення до складних процесів мислення. Різні форми матерії вивчають різні науки в тому числі і фізика.

Дати точне визначення предмету фізики є досить складно, тому що межі між фізикою і суміжними науками умовні. Не можна точно визначити, які питання відносяться до цієї науки, а які ні.

Академік А.Ф. Йоффе (1880-1960р.р, рад. фізик) дав визначення фізики як науки, що вивчає загальні властивості і закони руху речовин і поля. На сьогоднішній день загальноприйнято, що вся взаємодія здійснюється з допомогою полів (гравітаційне, електромагнітне, полів ядерних сил). Поле поряд з речовиною є однією із форм існування матерії. Зв'язок поля і речовини, а також відмінність між їхніми властивостями будемо розглядати по мірі вивчення курсу.

Фізика – наука про найбільш прості і разом з тим найбільш загальні форми руху матерії і їх взаємні перетворення.

Сучасна фізика вивчає найзагальніші властивості і об'єктивні просторово-часові закони руху матерії, кількісні і якісні зміни в матерії, пов'язані з будовою, взаємодією і перетвореннями усіх видів і станів матерії.

Системи одиниць фізичних величин.

Найбільш важливі фізичні закони встановлюють зв'язок між фізичними величинами. Для цього їх (величини) необхідно вимірювати. Вимірювання фіз. величини – це процес знаходження її значення в прийнятих одиницях. Од. фіз. величин можна вибирати довільно, але тоді виникають труднощі під час їх порівняння. Тому доцільно ввести систему одиниць, яка охоплювала б одиниці всіх фізичних величин та дозволяла оперувати ними.

Для створення системи одиниць довільно вибирають одиниці декількох незалежних фізичних величин і теоретичним способом об'єднують їх у певну систему. Ці величини називаються **основними**. Інші ж величини і їх одиниці вимірювання виводяться із законів та називаються **похідними**.

Основна система вимірювання фізичних величин – це СІ (система інтернаціональна). До неї входять сім основних і дві додаткові одиниці.

Основні одиниці: метр (м), кілограм (кг), секунда (с), ампер (А), кельвін (К), моль (моль), кандела (кд). Додаткові одиниці: радіан, стерadian.

Одиниця фізичної величини – це фізична величина, якій за означенням надано числове значення 1.

Метр (м) – довжина шляху, пройденого світлом у вакуумі за $1/299\,792\,458$ с.

Майже у всіх країнах прийнята метрична система, за винятком США і країн Британської співдружності, де використовують дюйм, фут, миля.

$1 \text{ дюйм} = 2,54 \text{ см};$

$1 \text{ миля} = 1,61 \text{ км};$

$1 \text{ м} = 39,37 \text{ дюйма};$

$1 \text{ миля} = 5280 \text{ футів}.$

Еталоном метра служить відстань між штрихами на платиновому стержні, який зберігається в Міжнародній палаті мір та ваг у Севрі, поблизу Парижа.

Кілограм (кг) – маса рівна масі міжнародного прототипу кілограма (платинородієвий) циліндр зберігається в Міжнародному бюро мір і ваг у Севрі поблизу Парижа).

Секунда (с) – час, який дорівнює $9\,192\,631\,770$ періодам випромінювання, що відповідає переходу між двома рівнями основного стану атома цезію-133.

Ампер (А) – сила струму, під час проходження якого по двох прямолінійних, нескінченно довгих, паралельних та безмежно тонких провідниках, що розташовані у вакуумі на відстані 1 м один від одного, виникає сила взаємодії $2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$ на кожний метр довжини.

Кельвін (К) – $1/273,16$ частина термодинамічної температури потрійної точки води.

Моль (моль) – кількість речовини системи, яка містить стільки структурних елементів, скільки атомів мітиться в нукліді ^{12}C масою $0,012 \text{ кг}$.

Кандела (кд) – сила світла в заданому напрямі джерела, яке випромінює монохроматичне світло частотою $540 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$, дорівнює $1/683 \text{ Вт/ср}$.

Радіан (рад) – кут між двома радіусами кола, довжина дуги між якими дорівнює радіусу.

Стерадіан (ср) – тілесний кут з вершиною в центрі сфери, який вирізає на її поверхні площу, що дорівнює площі квадрата із стороною рівною радіусу сфери.

1 Механіка

Механіка – це розділ фізики, який вивчає закони механічного руху, причини його виникнення та зміни.

Механічним рухом називається зміна з часом положення тіла (або його частин) в просторі відносно інших тіл.

Основною задачею механіки є визначення положення тіла в будь-який момент часу.

Для побудови математичних моделей теорій механіки часто використовують поняття, які дозволяють гранично спрощувати аналітичний опис явищ без суттєвого зменшення ваги його практичного використання. До таких понять належить **матеріальна точка** – фізичне тіло, розмірами і формою якого в умовах даної задачі можна знехтувати, маса якого зосереджена в одній геометричній точці. Будь-яке макроскопічне тіло можна умовно розбити на досить малі частинки, які можна розглядати як матеріальні точки, що взаємодіють між собою. Систему жорстко зв'язаних матеріальних точок, які знаходяться на незмінній відстані одна від одної, можна розглядати як **абсолютно тверде тіло**, тобто, це тіло, яке при будь-яких умовах не може деформуватися.

Механічний рух є відносним, тому для його опису необхідно вказати **тіло відліку** – довільно вибране тіло, відносно якого розглядається цей рух. Оскільки рух відбувається в просторі і в часі, то з тілом відліку пов'язується система координат і пристрій для вимірювання часу. Сукупність тіла відліку, зв'язаної з ним системи координат і пристрою для вимірювання часу називають **системою відліку**. Розв'язування задач у механіці починається з вибору системи відліку. Найбільш вживаною є Декартова система координат з трьох ортогональних осей X, Y, Z .

Механіку, зазвичай поділяють на три частини: кінематику, динаміку і статику.

Кінематика вивчає форми руху тіл залежно від часу і незалежно від причин, що зумовлюють цей рух. Динаміка враховує взаємодію тіл, як причину виникнення та зміни стану руху. Статика вивчає закони рівноваги системи тіл.

1.1 Кінематика поступального руху матеріальної точки

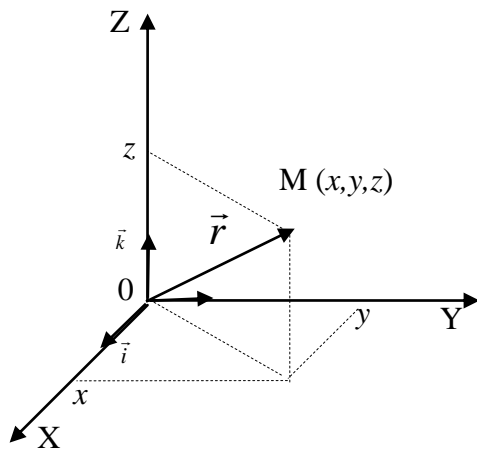
Частина механіки, яка вивчає механічний рух тіл без врахування причин виникнення чи зміни стану руху – називається **кінематикою**.

Рух твердого тіла можна представити як комбінацію поступального і обертального рухів. **Поступальним** називається рух, при якому будь-яка пряма, жорстко зв'язана з тілом, що рухається, переміщується паралельно до свого початкового положення. Цілком очевидно, що для опису поступального руху абсолютно твердого тіла досить записати закон руху будь-якої точки.

Для визначення положення тіла, або матеріальної точки в просторі, потрібно вибрати систему координат. Систем координат існує достатньо багато, але реально використовуються ортогональні системи координат, в яких осі взаємно перпендикулярні. У фізиці найчастіше використовується Декартова

система координат – три взаємно перпендикулярні осі X, Y, Z . Якщо в системі відліку, що зв'язана з тілом, яке розміщене в точці O , вибрана Декартова система координат, то положення матеріальної точки M в даний момент часу визначається координатами x, y, z , що є проєкціями даної точки на відповідні осі. Кількість незалежних координат, які повністю описують положення точки в просторі, називається **числом ступенів свободи**. Якщо матеріальна точка вільно рухається в просторі, то вона володіє трьома ступенями свободи, якщо рухається на площині – двома, а якщо по прямій – однією ступінню свободи.

У механіці досить часто положення матеріальної точки описується також **радіус-вектором** \vec{r} - вектором проведеним з початку координат (т. O) в точку, де в даний момент часу знаходиться матеріальна точка M (точку спостереження).



Для того, щоб пов'язати радіус-вектором \vec{r} , із координатами, тобто проєкціями точки на осі, потрібно помножити відповідно x, y і z на так звані **орти** – одиничні вектори $|\vec{i}|=1, |\vec{j}|=1, |\vec{k}|=1$ напрямлені вздовж відповідних осей X, Y, Z .

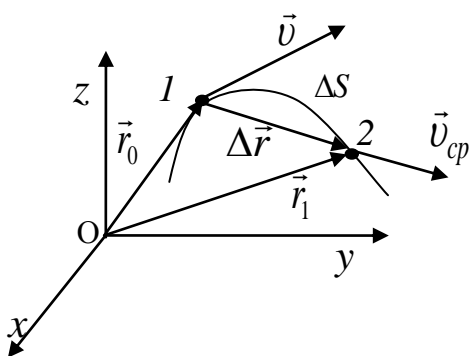
$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

Якщо матеріальна точка рухається в просторі, то з часом її координати змінюються. Рух по довільному шляху вважається описаним, якщо відомі функціональні залежності від часу:

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t), \text{ або } \vec{r} = \vec{r}(t).$$

Скалярні рівняння $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, еквівалентні векторному рівнянню $\vec{r} = \vec{r}(t)$ називаються **кінематичними рівняннями руху** матеріальної точки. Якщо виключити t з кінематичних рівнянь, то можна отримати рівняння траєкторії руху матеріальної точки. **Траєкторія** - лінія, яку описує матеріальна точка, що рухається в просторі і часі. За формою траєкторії рух може бути прямолінійним та криволінійним.

Розглянемо рух матеріальної точки вздовж деякої траєкторії. Відлік часу почнемо, коли матеріальна точка знаходиться в т. 1. Довжина ділянки траєкторії, яку матеріальна точка пройшла з моменту початку відліку часу, називається **довжиною шляху** ΔS і є скалярною функцією від часу $S = S(t)$. Шляхи пройдені точкою за послідовні проміжки часу додаються арифметично.



Під час руху точки положення її радіус-вектора в просторі з часом змінюється. Різниця $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ радіусів-векторів, що характеризують початкове положення точки та положення точки в даний момент часу, називається **вектором переміщення** або **переміщенням**. Модуль вектора переміщення $|\Delta \vec{r}|$ у загальному випадку, не дорівнює довжині шляху ΔS , пройденому точкою.

Лише під час прямолінійного руху вектор переміщення співпадає із відповідною ділянкою шляху і модуль переміщення $|\Delta \vec{r}|$ дорівнює довжині пройденого шляху S . Графік залежності $S = S(t)$ називається графіком шляху.

Приклад. Матеріальна точка рухається від поверхні землі вертикально вгору і після досягнення максимальної висоти H – падає на землю. Вектор переміщення дорівнює нулю, а шлях $2H$ (подвійній висоті підйому).

Приклад. Велосипедист рухається по траєкторії у формі кола радіусом R . За деякий проміжок часу він проїхав половину довжини кола. Модуль переміщення велосипедиста при цьому дорівнює діаметру кола ($2R$), а шлях – половині довжини кола (πR).

Приклад. Нехай матеріальна точка рухається в площині xOy і рівняння її руху мають вигляд: $x = at; y = bt$; a і b – відмінні від нуля $const$. Знайти траєкторію по якій рухається точка. Розв'язуючи дану систему рівнянь знаходимо:

$$y = \frac{b}{a}x;$$

Тобто, це пряма, що проходить через початок координат.

Приклад. Рух матеріальної точки у площині xOy описується наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} x &= a \sin \omega t; \\ y &= a \cos \omega t. \end{aligned} \quad a \text{ і } \omega - \text{сталі величини. Яка форма траєкторії точки?}$$

Із заданих рівнянь знаходимо: $\frac{x}{a} = \sin \omega t$; $\frac{y}{a} = \cos \omega t$.

Піднявши до квадрату і додавши отримані вирази, отримуємо рівняння траєкторії, що не містить часу t :

$$\frac{x^2}{a^2} = \sin^2 \omega t; \quad \frac{y^2}{a^2} = \cos^2 \omega t; \quad x^2 + y^2 = a^2$$

Точка рухається по колу радіусом a . Центр кола співпадає із початком координат.

1.1.1 Швидкість.

Що показує спідометр

Нехай матеріальна точка рухається по деякій криволінійній траєкторії. В момент часу t_0 їй відповідає радіус вектор \vec{r}_0 (див. попередній рис.). На протязі малого проміжку часу Δt точка пройде шлях ΔS і отримає переміщення $\Delta \vec{r}$.

Відношення вектора переміщення точки $\Delta \vec{r}$ до проміжку часу Δt називається **вектором середньої швидкості** \vec{v}_{cp} за проміжок часу Δt :

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Напрямок вектора середньої швидкості співпадає з напрямком вектора переміщення $\Delta \vec{r}$.

При безмежному зменшенні Δt середня швидкість прямує до граничного значення, яке називається **миттєвою швидкістю**:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Миттєва швидкість \vec{v} дорівнює границі відношення приросту радіуса-вектора $\Delta \vec{r}$ до проміжку часу Δt , на протязі якого відбулося переміщення. Таким чином, миттєва швидкість \vec{v} є векторна величина, яка дорівнює першій похідній радіуса-вектора рухомої точки по часу. Оскільки січна в границі співпадає з дотичною, то і вектор швидкості \vec{v} напрямлений по дотичній до траєкторії в напрямі руху.

У міру зменшення Δt шлях ΔS буде наближатися до $|\Delta \vec{r}|$. Тому модуль миттєвої швидкості дорівнюватиме:

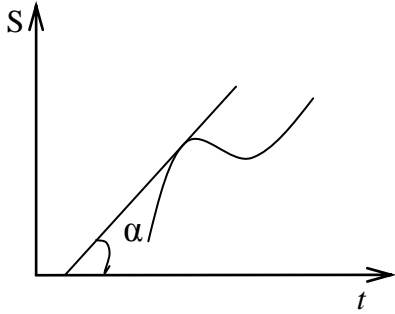
$$v = |\vec{v}_{cp}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

Тобто модуль миттєвої швидкості дорівнює першій похідній шляху по часу.

Вектор миттєвої швидкості напрямлений по дотичній до траєкторії в даній точці руху. Напрямок швидкості називають **напрямом руху точки**.

Як відомо, графічно похідну можна зобразити за tg кута, що його утворює дотична, проведена через дану точку графіка функції $S=f(t)$, із додатнім напрямом осі часу. Тому миттєва швидкість дорівнює:

$$v = \frac{dS}{dt} = tg \alpha.$$



Отже, за графіком шляху можна знайти швидкість матеріальної точки в будь-який момент часу.

Якщо модуль миттєвої швидкості матеріальної точки з часом змінюється, то рух називається **нерівномірним**, або **змінним**. У цьому випадку користуються скалярною величиною v_{cp} – **середньою швидкістю** нерівномірного руху:

$$v_{cp} = \frac{S}{t}.$$

Якщо проінтегрувати вираз $dS = v dt$ по часу в межах від t_1 до t_2 , то отримаємо довжину шляху пройденого точкою за час $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v dt.$$

Якщо числове значення миттєвої швидкості постійне $v = const$, то рух називається **рівномірним**. У цьому випадку пройдений шлях запишеться:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v dt = v(t_2 - t_1) = v \Delta t.$$

Отже, довжина шляху, пройденого матеріальною точкою за проміжок часу від t_1 до t_2 , задається інтегралом: $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

Приклад. Матеріальна точка за час Δt здійснює один повний оберт по колу радіусом R . Середня швидкість точки дорівнює нулю, тому що $\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, а $\Delta \vec{r} = 0$. Середня скалярна швидкість за цей час відмінна від нуля і дорівнює

$$v_{cp} = \frac{2\pi R}{\Delta t}$$

1.1.2 Прискорення та його складові

Розглянемо поступальний нерівномірний рух матеріальної точки. Нехай в момент часу t швидкість точки була \vec{v} . За час Δt швидкість змінилась на нескінченно малу величину $\Delta \vec{v}$. Для оцінки зміни швидкості з часом введено фізичну величину, яка називається **прискоренням**. Векторна величина, що

дорівнює відношенню вектора зміни швидкості до величини проміжку часу, за який відбулась дана зміна, називається **середнім прискоренням** руху:

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Прискорення в певний момент часу, або в даній точці траєкторії називається **миттєвим прискоренням** і визначається границею відношення вектора зміни швидкості $\Delta \vec{v}$ до відповідного проміжку часу Δt :

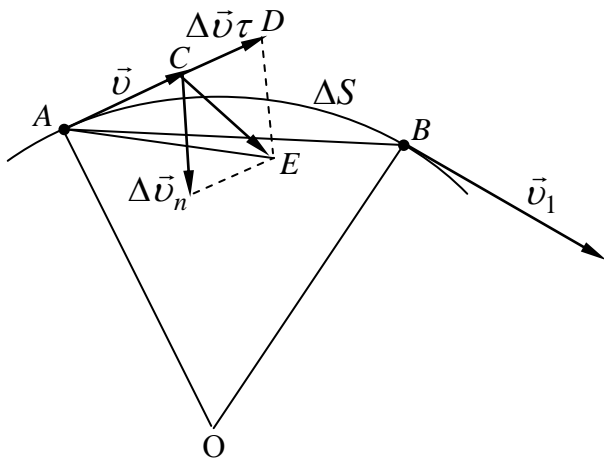
$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Отже, прискорення \bar{a} є векторна величина, яка дорівнює першій похідній швидкості по часу.

Швидкість може змінюватися як за величиною, так і за напрямом. Якщо під час руху матеріальна точка відхиляється від прямолінійної траєкторії (криволінійний рух) нескінченно мале збільшення швидкості $\Delta \vec{v}$ можна розкласти на дві складові: $\Delta \vec{v}_\tau$ - тангенціальну, яка визначає зміну швидкості за модулем та $\Delta \vec{v}_n$ - нормальну, яка визначає зміну швидкості за напрямом.

Складова прискорення $a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$ називається

тангенціальною складовою прискорення і дорівнює першій похідній по часу від модуля швидкості, і визначає зміну швидкості за величиною. Тангенціальна складова прискорення напрямлена по дотичній до траєкторії руху в напрямі швидкості або проти неї, залежно від того збільшується чи зменшується величина швидкості.



Знайдемо другу складову прискорення. Нехай матеріальна точка рухається по криволінійній траєкторії. У т. A її швидкість була \vec{v} , а в т. B - \vec{v}_1 . За нескінченно малий проміжок часу точки B і A будуть достатньо близько. Тоді ΔS можна вважати дугою кола певного радіуса R , і ΔS буде мало відрізнятися від хорди AB . Із подібності $\triangle AOB$ і $\triangle AED$ випливає:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{AD}{AO}, \quad \frac{\Delta v_n}{AB} = \frac{v_1}{R}, \quad \text{але } AB = v \cdot \Delta t, \quad \text{то } \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v v_1}{R}.$$

Переходячи до границь при $\Delta t \rightarrow 0$ отримаємо $\vec{v}_1 \rightarrow v$. Оскільки, $\vec{v}_1 \rightarrow v$

$\angle EAD$ прямує до нуля, а так як $\triangle AED$ рівнобедрений, то $\angle ADE$ між \vec{v} і $\Delta \vec{v}_n$ наближується до прямого. Очевидно, що при $\Delta t \rightarrow 0$ вектори $\Delta \vec{v}_n$ і \vec{v} будуть взаємно перпендикулярні. Оскільки вектор швидкості напрямлений по дотичній до траєкторії, то вектор $\Delta \vec{v}_n$ перпендикулярний до вектора швидкості, та напрямлений до центру кривизни траєкторії руху.

Друга складова прискорення дорівнює

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v v_1}{\Delta t R} = \frac{v^2}{R},$$

називається *нормальною складовою прискорення* та напрямлена по нормалі до траєкторії до центру її кривизни, тому її ще називають *доцентровим прискоренням*.

Знаючи тангенціальну і нормальну складові прискорення, можна знайти величину і напрям повного прискорення руху в даній точці траєкторії, як геометричну суму цих складових:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_\tau}.$$

Тангенціальна і нормальна складові прискорення можуть бути ознаками класифікацій різних рухів:

- 1) $a_\tau = 0$; $a_n = 0$ – прямолінійний рівномірний рух;
- 2) $a_\tau = \text{const}$; $a_n = 0$ – прямолінійний, рівнозмінний рух;
- 3) $a_\tau = f(t)$; $a_n = 0$ – прямолінійний із змінним прискоренням;
- 4) $a_\tau = 0$; $a_n = \text{const}$ – рівномірний по колу;
- 5) $a_\tau = 0$; $a_n = f(t)$ – рівномірний криволінійний;
- 6) $a_\tau = \text{const}$; $a_n \neq 0$ – рівнозмінний, криволінійний;
- 7) $a_\tau = f(t)$; $a_n \neq 0$ – криволінійний із змінним прискоренням.

У випадку прямолінійного руху, коли змінюється лише величина швидкості, прискорення можна знайти, як першу похідну швидкості по часу. Враховуючи, що швидкість у свою чергу є похідною від шляху по часу, можна записати рівність:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

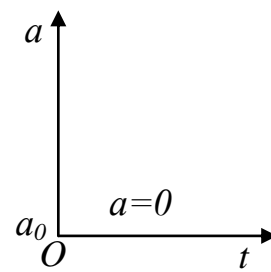
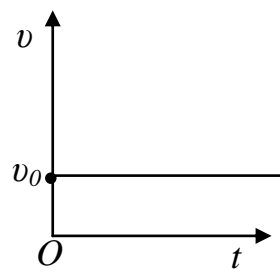
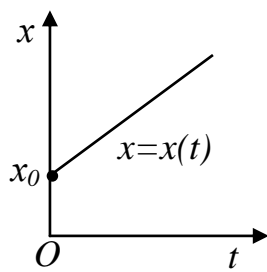
За цим виразом розв'язують задачі двох типів: задачі на знаходження прискорення, коли відомі функції $S = f(t)$ або $v = f(t)$ і задачі на знаходження цих функцій, коли задане прискорення. Задачі першого типу розв'язуються методом диференціювання, а задачі другого типу – методом інтегрування.

Наприклад, для випадку рівнозмінного руху $a = \text{const}$, з виразу $a = \frac{dv}{dt}$ отримуємо $dv = a dt$. Звідси інтегруванням знаходимо відомі формули для швидкості і шляху:

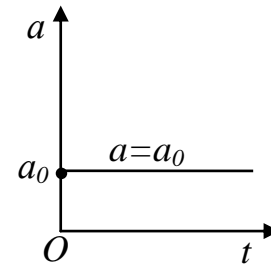
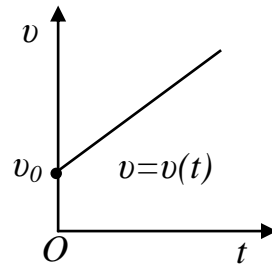
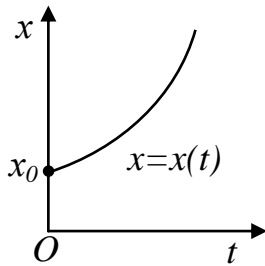
$$v = v_0 + at, \quad S = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Вибравши напрям координати x таким, що збігається з напрямом руху матеріальної точки, можемо зобразити параметри прямолінійного поступального руху графічно.

Зобразимо прямолінійний рівномірний рух графічно.

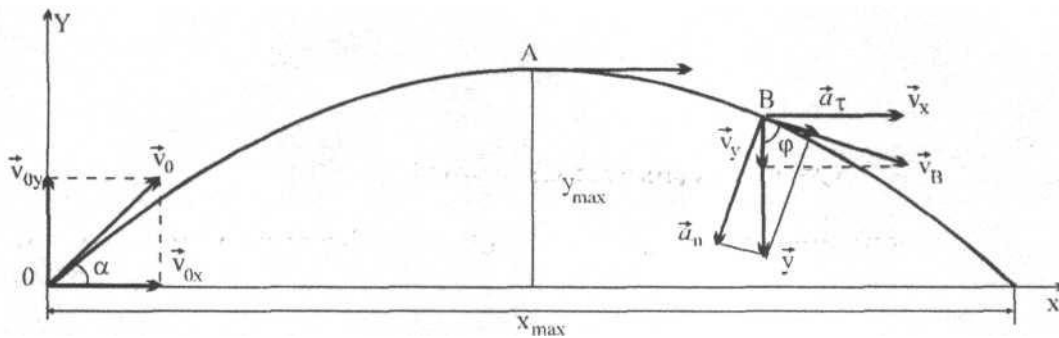


Параметри прямолінійного рівноприскореного руху графічно можна показати наступним чином.



1.1.3 Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

Одним із яскравих прикладів криволінійного руху є рух тіла кинутого під кутом до горизонту.



Початок координат виберемо в точці кидання. Нехай тілу надали початкової швидкості v_0 під кутом α до горизонту. Знайдемо: траєкторію руху тіла, найбільшу висоту, на яку підніметься тіло і дальність польоту.

Із складових швидкості на координатних осях

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha; \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha - gt$$

робимо висновок, що в напрямі осі x тіло рухається рівномірно, оскільки $v_{0x} = \text{const}$, а в напрямі осі y – рівносповільнено, бо v_{0y} рівномірно зменшується з часом. Тому координати точки в будь-якого моменту часу дорівнюватимуть:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \quad (1)$$

де g – прискорення сили земного тяжіння (вільного падіння).

Ці рівняння описують закони руху тіла, кинутого під кутом. Якщо із цих рівнянь виключити час, то дістанемо рівняння траєкторії в явному вигляді.

$$y = tg\alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

Це рівняння параболи, вітки якої напрямлені вниз, а вершина зміщена відносно початку координат. Отже, тіло летітиме по параболічній траєкторії.

Найбільшу висоту, на яку підніметься тіло, знайдемо як максимум координати y , тобто знаходимо похідну і прирівнюємо її до нуля:

$$y' = v_0 \sin \alpha - gt = 0, \quad \text{звідси } t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g},$$

Підставивши це значення в рівняння (1), отримаємо максимальну висоту, на яку підніметься тіло:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Час $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ відповідає найвищому положенню тіла над горизонтом, а

тому це також час підйому та час зниження тіла по траєкторії руху. Тому весь час польоту тіла буде

$$t_n = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g},$$

а дальність польоту

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

З цієї формули випливає, що дальність польоту тіла залежить від кута до горизонту, під яким кинули тіло, і що максимальне значення цієї величини буде при $\alpha = 45^\circ$.

В розглянутому випадку не враховано опору середовища. Насправді в наслідок опору повітря тіла рухаються не по параболі, а по так званій балістичній кривій.

Для визначення нормального і тангенціального прискорення в довільній точці траєкторії розглянемо точки A і B . У найвищій точці траєкторії A проекція вектора швидкості \vec{v} на вісь y дорівнює нулю, а на вісь x — $v_x = v_0 = \text{const}$.

Отже, в точці A тангенціальне прискорення тіла дорівнює нулю, нормальне прискорення $a_n = g$. В точці B (точка знаходиться за вершиною) розкладемо вектор швидкості \vec{v} на v_x і v_y . Швидкість руху тіла в будь-якій точці напрямлена

по дотичній до траєкторії. Як видно з рис. $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, де v_x — горизонтальна складова швидкості, v_y — вертикальна складова. Якщо вертикальна складова

дорівнює $v_y = gt$, а горизонтальна $v_x = v_0$, то $v = \sqrt{v_0^2 - g^2 t^2}$.

Через те, що горизонтальна складова швидкості тіла весь час залишається сталою, тангенціальна складова прискорення дорівнює нулю, а тому повне прискорення тіла весь час дорівнює прискоренню сили тяжіння $a = g$.

Знаючи a_τ і a_n можна знайти модуль і напрям повного прискорення:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_\tau}, \quad \text{де } \varphi = 90 - \alpha.$$

З рисунка видно, що $a_n = g \sin \varphi$, $a_\tau = g \cos \varphi$, де φ – кут між \vec{g} і \vec{a}_τ , причому

$$\sin \varphi = \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}.$$

1.2 Кінематика обертального руху матеріальної точки

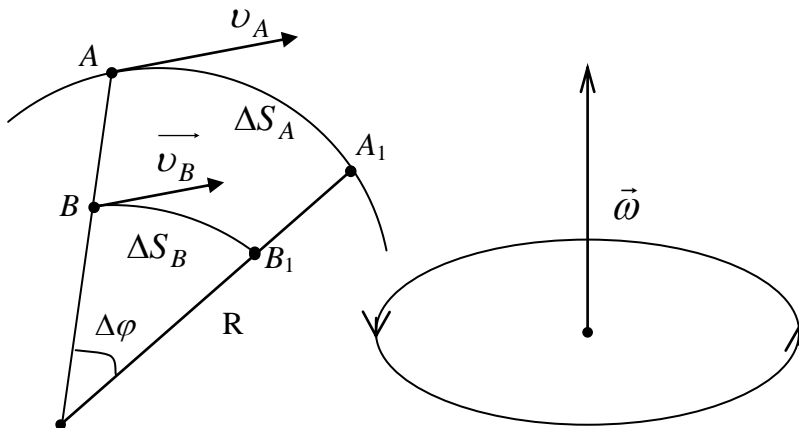
1.2.1 Кутова швидкість

Поширеною різновидністю криволінійного руху є рух по колу. Тут швидкість весь час змінює свій напрям ($a_n \neq 0$), а також може змінюватись за величиною.

Під час обертального руху абсолютно твердого тіла його точки описують кола, розташовані в паралельних площинах. Центри всіх кіл лежать при цьому на одній прямій, перпендикулярній до площин цих кіл і називається ця пряма – *вісь обертання*. Вісь обертання може знаходитись у середині тіла, або за його межами. Звернемо увагу, що коли обертається кілька жорстко зв'язаних точок, вони мають різні лінійні швидкості, але всі точки за проміжок часу Δt зміщуються на такий самий кут $\Delta \varphi$. В цілому їх рух описують **кутовою швидкістю**, яка дорівнює

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Безмежно малі кути обертання розглядаються як вектори. Модуль вектора $d\vec{\varphi}$ дорівнює куту повороту, а його напрям співпадає з напрямом поступального руху свердлика, якщо ручка повертається в напрямі руху точки.



Розмірність $\dim \omega = T^{-1}$, вимірюється в $\text{рад}/\text{с}$.

Кутова швидкість – це вектор, напрямлений по осі обертання в той бік, з якого рух точок спостерігається проти руху годинникової стрілки. Або, інакше, напрям вектора кутової швидкості збігається з поступальним рухом свердлика, коли його ручку повертати за рухом точок.

Отже, кутова швидкість показує швидкість і напрям обертання точки в будь-який момент часу.

Для опису обертальних рухів на практиці, треба знати зв'язок між кутовою і лінійною швидкостями точки. Виразимо кутову швидкість через лінійну. Підставивши у формулу для кутової швидкості $\Delta \varphi = \frac{\Delta S}{R}$ (рад) (для безмежно малих кутів) отримаємо:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta R \cdot \Delta \varphi}{\Delta t} = R \cdot \omega; \quad \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \cdot \frac{1}{R} = \frac{v}{R};$$

$$v = \omega R.$$

У векторній формі формулу для лінійної швидкості можна записати як векторний добуток:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{R}].$$

Якщо $\omega = const$, то рух по колу рівномірний і його можна характеризувати **періодом обертання** T – часом, за який точка здійснить один повний оберт, тобто повернеться на кут 2π . Тоді $\omega = \frac{2\pi}{T}$, або $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Число повних обертів, що здійснює тіло під час рівномірного руху по колу за одиницю часу називається частотою обертання:

$$v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \text{звідси } \omega = 2\pi v.$$

1.2.2 Кутове прискорення

Якщо в обертальному русі кутова швидкість змінюється, цю зміну оцінюють кутовим прискоренням ε – фізичною, векторною величиною, рівною першій похідній кутової швидкості по часу.

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Підставивши значення кутової швидкості запишемо:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Кутове прискорення – це вектор, що збігається із напрямом кутової швидкості у прискорених рухах, і напрямлений проти кутової швидкості у сповільнених рухах.

Тангенціальна складова прискорення:

$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t} = R \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = R \varepsilon.$$

Нормальна складова прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Кутове прискорення може бути ознакою різних видів руху. Наприклад:

- 1) $\varepsilon = 0$ – рівномірний обертальний;
- 2) $\varepsilon = const$ – рівнозмінний обертальний рух;

3 виразу $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ ($d\omega = \varepsilon dt$), інтегруванням знаходимо вирази для кутової швидкості і кута повороту:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

- 3) $\varepsilon \neq 0$ – змінний обертальний рух.

Зв'язок між лінійними і кутовими величинами виражається наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} S &= R\varphi; & v &= \omega R; \\ a_{\tau} &= \varepsilon R; & a_n &= \omega^2 R. \end{aligned}$$

1.3 Динаміка матеріальної точки і поступального руху твердого тіла

Одним із розділів механіки, в якому вивчають умови існування або причини змін руху тіла, є динаміка. В основі динаміки лежать три закони Ньютона, сформульовані ним у 1687р. Їх розглядають як систему взаємопов'язаних законів і експериментально перевіряють не кожний, окремо взятий закон, а систему вцілому.

1.3.1 Закони Ньютона

Перший закон. Ґрунтуючись на своїх дослідах Ньютон дійшов до висновку, що *усяке тіло продовжує перебувати у стані спокою або прямолінійного рівномірного руху поки і оскільки воно не змушується прикладеними силами змінювати цей стан.*

Прагнення тіла зберігати стан спокою або рівномірного прямолінійного руху називається **інерцією**. Тому перший закон Ньютона називають також законом інерції.

Недостатком у формулюванні закону є те, що не вказується відносний характер руху. Механічний рух відносний, і його характер залежить від системи відліку. Перший закон Ньютона виконується не у всіх системах відліку, а ті системи, по відношенню до яких він виконується, називаються **інерційними системами відліку**. Інерційною є така система відліку, яка знаходиться в стані спокою, або рухається рівномірно і прямолінійно по відношенню до іншої інерційної системи. Перший закон Ньютона доводить існування інерційних систем відліку.

Сьогодні перший закон динаміки формулюємо так: *існують системи відліку, відносно яких тіла зберігають стан спокою або прямолінійного рівномірного руху, якщо на них не діють інші тіла або дія інших тіл скомпенсована.*

Дослідним шляхом встановлено, що інерційною можна вважати *геліоцентричну* (зоряну) систему відліку (початок координат знаходиться в центрі Сонця, а осі проведені у напрямі певних зірок). Система відліку, пов'язана із Землею, строго кажучи, неінертна, проте ефекти, обумовлені її неінертністю (Земля обертається навколо власної осі і навколо Сонця), при розв'язуванні багатьох задач дуже малі, і в цих випадках її можна рахувати інерційною.

З досліду відомо, що при однакових діях різні тіла неоднаково змінюють швидкість свого руху, іншими словами, набувають різного прискорення. Прискорення залежить не тільки від величини дії, але і від властивостей самого тіла (від його маси).

Маса тіла - фізична величина, що є однією з основних характеристик матерії, визначаючи її інерційні (*інертна маса*) і гравітаційні (*гравітаційна маса*)

властивості. На даний момент можна вважати доведеним, що інертні і гравітаційні маси рівні (з точністю, не меншою 10^{-12} їх значення).

Щоб описувати взаємодії, згадувані в першому законі Ньютона, вводять поняття **сили**. Під дією сил тіла або змінюють швидкість руху, тобто набувають прискорення (динамічний прояв сил), або деформуються, тобто змінюють свою форму і розміри (статичний прояв сил). В кожний момент часу сила характеризується числовим значенням, напрямом в просторі і точкою прикладання. Пряму, у здовж якої напрямлена сила, називають *лінією дії сили*.

Отже, **сила** - це векторна величина, що є мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл або полів, в результаті якого тіло набуває прискорення або змінює свою форму і розміри.

Статичний і динамічний прояви сили

Результат дії сили в різних практичних прикладах легше пояснити, якщо розрізнити статичний і динамічний її прояви.

Результатом статичного прояву сили є тиск на тіло, які перешкоджають рухові, і їх деформація. За цими результатами дії сили, важільними або пружними терезами здійснюють статичне вимірювання сили. Зрозуміло, що сила, яка є статичною завжди викликає рівну їй за величиною і протилежну за напрямом реакцію опори – силу пружної деформації.

Сили взаємодії між частинами деякої системи тіл називаються *внутрішніми силами*.

Сили дії на тіла цієї системи зі сторони тіл, які не входять до неї, називаються *зовнішніми силами*.

Система тіл, на кожне з яких не діють зовнішні сили, називається *замкненою (ізолюваною) системою*.

Заслуговують на увагу випадки, коли сила одночасно проявляється частково як статична і частково динамічна.

Наприклад, у русі тіла по гладкій похилій площині складова його ваги, перпендикулярна до площини, виявляється статично, а складова ваги, паралельна до площини, виявляється динамічно.

Наприклад. Коли машина проїжджає через опуклий міст, її вага виявляється частково динамічно, як доцентрова сила, і частково статично, як сила тиску на міст. Тому сила тиску автомашини на опуклий міст менша від її ваги.

Різні взаємодії, відомі сучасній фізиці, зводяться до чотирьох типів:

- 1) гравітаційна взаємодія – виникає між усіма тілами у відповідності із законом всесвітнього тяжіння;
- 2) електромагнітна взаємодія – виникає між тілами чи частинками, які несуть електричний заряд;
- 3) сильна взаємодія – існує між частинками, з яких складаються ядра атомів, а також між мезонами та гіперонами
- 4) слабка взаємодія – характеризує процеси перетворення елементарних частинок.

В задачах механіки враховують гравітаційні сили (сили тяжіння) і дві різновидності електромагнітних сил – сили пружності і сили тертя.

Закон всесвітнього тяжіння, закон руху планет (самостійно).

Сила тертя.

Із дослідів відомо, що будь-яке тіло, що рухається по горизонтальній поверхні іншого тіла без наявності дії на нього інших сил, з часом зменшує свій рух і в кінцевому випадку зупиняється. Це пояснюється існуванням сили тертя, спрямованої по дотичній до тертьових поверхонь, перешкоджаючи відносному переміщенню тіл. Тертя буває *зовнішнє* і *внутрішнє*.

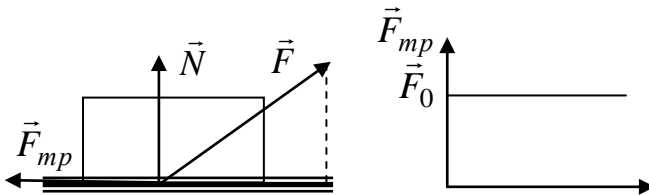
Зовнішнє тертя характеризує поверхневий контакт твердих тіл. Залежно від характеру руху розрізняють *сили тертя спокою, ковзання і кочення*.

Сила тертя спокою перешкоджає початку відносного руху двох тіл, що труться, та дорівнює за модулем проекції прикладеної зовнішньої сили на дотичну до поверхні. Вона може змінюватися від нуля до значення \vec{F}_0 , близького до значення сили тертя ковзання (рис.2.2).

Сила тертя ковзання при малих швидкостях мало залежить від швидкості і пропорційна модулю реакції опори N (не збігаючись з нею за напрямом):

$$F_{mp} = \mu N, \quad (2.2)$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання, який залежить від тертових поверхонь.



Тертя кочення виникає між сферичним або циліндричним тілом, що котиться по твердій поверхні. Сила тертя кочення описується попередньою залежністю (2.2), але, як правило, із значно меншим коефіцієнтом пропорційності.

Внутрішнє тертя виникає під час руху тіла в рідкому середовищі. При невеликих швидкостях сила в'язкого тертя пропорційна швидкості руху і спрямована в протилежний бік:

$$\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}.$$

При великих швидкостях пропорційність швидкості руху може зростати до квадратичної, а під час руху зі швидкістю, яка перевищує швидкість звуку, і до кубічної.

Коефіцієнт k залежить від форми і розмірів тіла. Для невеликих тіл кулястої форми, які рухаються у в'язкому середовищі з невеликими швидкостями, справедлива формула, яку вивів англ. вчений Джорж Габріель Стокс,

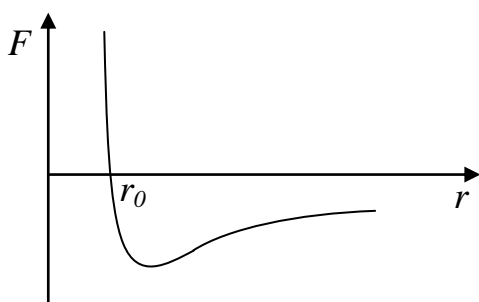
$$\vec{F}_{mp} = -6\pi r\eta\vec{v},$$

де r – радіус кулі, η – в'язкість середовища, v – швидкість руху.

В'язке тертя, як правило, призводить до того, що рух тіл під дією сталої зовнішньої сили швидко переходить у рівномірний.

Сили пружності.

Сили пружності пов'язані з *деформацією* твердих тіл – зміною форми і розмірів під дією прикладених сил. Для твердих тіл розрізняють два крайніх види деформації: *пружну і пластичну*. При абсолютно пружній деформації тіло миттєво повертається у вихідний стан після зняття навантаження. Абсолютно пластичне тіло після зняття навантаження зберігає деформацію незмінною. Реальні тіла так чи інакше поєднують пружні та пластичні властивості, причому їхнє співвідношення залежить від природи тіла і від величини прикладеної сили. На рис.2.3 показана залежність сил відштовхування (додатна область) і сил притягування (від'ємна область) між атомами від відстані між ними.



На відстані r_0 атоми перебувають у рівновазі, тобто сили притягування і відштовхування скомпенсовані. Деформація стиснення або розтягу змінює міжатомні відстані в ту чи іншу сторону, ініціюючи відповідно пружну силу

відштовхування або протягування. У невеликих межах поблизу точки r_0 залежність пружної сили від деформації Δl практично лінійна.

Лінійність пружної сили при невеликих деформаціях вперше описав у 1660 р. англ. вчений Роберт Гук (1635-1703):

$$F_{np} = -k \Delta l, \quad (2.3)$$

де Δl – зміна розміру тіла в напрямку прикладеної зовнішньої сили; k – коефіцієнт жорсткості тіла.

Коефіцієнт жорсткості характеризує властивості матеріалу, проте протабульований бути не може, тому що залежить також і від геометричних розмірів обраного зразка: його початкової довжини l_0 і площі поперечного перерізу S . Формулу 2.3 можна перетворити до наступного вигляду:

$$\sigma = \frac{F_{np}}{S} = \frac{k l_0 \Delta l}{S l_0},$$

де σ зумовлене модулем пружної сили, що припадає на одиницю площі, називатимемо *нормальним напруженням*; величину, що залежить тільки від пружних властивостей матеріалу $E = k l_0 / S$ – *модулем Юнга* або *динамічним модулем*; $\varepsilon = \Delta l / l_0$ – відносним подовженням.

Тоді закон Гука для пружного стержня запишеться у вигляді: $\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma$

Результатом динамічного прояву сили є прискорення – тангенціальне або нормальне. У таких випадках силу визначають за формулою другого закону механіки.

Другий Закон Ньютона.

Другий закон Ньютона - основний закон динаміки поступального руху – дає відповідь на питання, як змінюється механічний рух матеріальної точки, чи системи матеріальних точок, під дією прикладених до неї сил.

Якщо розглянути дію різних сил на одне і те ж тіло, то виявляється, що прискорення, якого набуває система, завжди прямо пропорційне рівнодійній прикладених сил:

$$a \sim F \quad (m = const). \quad (2.1)$$

Якщо одна і та ж сила діє на тіла з різними масами, то набуті ними прискорення будуть різними, а саме:

$$a \sim 1/m \quad (F = const) \quad (2.2)$$

Використовуючи вирази (2.1) і (2.2) і врахувавши, що сила і прискорення-величини векторні, можемо записати:

$$\vec{a} = k \frac{\vec{F}}{m} \quad (2.3)$$

Це співвідношення виражає **другий закон Ньютона**: прискорення, яке набуває система матеріальних точок, прямо пропорційне рівнодійній силі та обернено пропорційне до маси матеріальних точок.

В СІ коефіцієнт пропорційності $k = 1$. Тоді

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \text{або} \quad \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Враховуючи, що маса системи матеріальних точок (тіла) в класичній механіці є величина постійна, то її можна внести під знак диференціалу:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Векторна величина $\vec{p} = (m\vec{v})$, яка чисельно дорівнює добутку маси матеріальної точки на її швидкість і має напрям швидкості, називається **імпульсом** (кількістю руху) цієї матеріальної точки.

Підставляючи цей вираз у попереднє співвідношення, отримаємо:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.4)$$

Це співвідношення - більш **загальне формулювання другого закону Ньютона**: швидкість зміни імпульсу матеріальної точки рівна діючій на неї силі. Формула (2.4) називається **рівнянням руху матеріальної точки**.

Одиниця сили в СІ - ньютон (H): $1H$ це сила, яка масі рівній 1 кг надає прискорення 1 м/с^2 у напрямі дії сили: $1 H = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2$.

З другого закону механіки бачимо, що зміна кількості руху тіла залежить не лише від величини прикладеної сили, але і від часу її дії. Тому результат другої сили визначають добутком сили на час її дії. Цю величину називають **імпульсом сили**. Імпульс сили – це вектор.

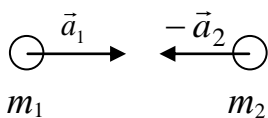
Для задач, де маса тіла незмінна, другий закон механіки можна записати:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}; \quad m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}.$$

За останнім виразом, якщо відоме переміщення, як функція від часу $S = f(t)$, диференціюванням визначають діючу силу. Коли невідома діюча сила, інтегруванням знаходять переміщення точки. Ці співвідношення називають основними рівняннями динаміки матеріальної точки.

Третій закон Ньютона.

Розглянемо взаємодію двох тіл, які можна вважати матеріальними точками



Проводячи досліди, переконуємося в існуванні закону природи, відповідно до якого матеріальні точки при взаємодії рухаються з прискореннями протилежних знаків, спрямованими уздовж прямої, що сполучає ці точки.

Причому відношення модулів прискорень незалежно від природи й інтенсивності взаємодії буде зберігатися в будь-який момент часу, у будь-якій

точці простору: $-\frac{a_1}{a_2} = const$. Константу в правій частині запишемо через

величини, які залежать від властивостей тіл та характеризують здатність тіл до руху. Такими величинами є інертні маси матеріальних точок.

$-\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$. Це співвідношення можна записати у вигляді $m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2$, або

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Третій закон стверджує: дії завжди існує рівна і протилежна протидія, інакше кажучи, сили взаємодії двох матеріальних точок одна на одну рівні за величиною і протилежні за напрямком.

Зауважимо, що сили дії і протидії прикладені до різних тіл, тому не можна думати, що вони мають рівнодійну, до того ж таку, що дорівнює нулю.

Приклади: сили тиску предметів на стіл, зрівноважені силами пружності дерев'яного стола, сили тиску повітря у м'ячі – деформація розтягу стінок м'яча, шальки терезів.

1.4 Закон збереження імпульсу (кількості руху)

Одним із найважливіших законів природи є закон збереження кількості руху. Прояви цього закону вперше помітив Декарт, досліджуючи удар двох тіл. Він прийшов до висновку, що одне тіло, стикаючись з другим тілом, передає йому стільки руху, скільки само при цьому втрачає. Декарт ще помилково розумів під кількістю руху скалярну величину, що дорівнює добутку маси тіла на його швидкість.

Зміст цього закону розкрив Ньютон, сформулювавши другий основний закон механіки. Було з'ясовано, що закон збереження кількості руху при взаємодії тіл в ізольованій системі відображається в суті самих законів механіки.

Справді, якщо вступають у взаємодію дві матеріальні точки з масами m_1 і m_2 і початковими швидкостями v_1 і v_2 , через час Δt їх швидкості стануть іншими v'_1 і v'_2 , а саме:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v'_1 - m_1 \cdot v_1 &= F_1 \Delta t, \\ m_2 \cdot v'_2 - m_2 \cdot v_2 &= F_2 \Delta t, \end{aligned}$$

Але за третім законом механіки

$$\vec{F}_1 \cdot \Delta t = -\vec{F}_2 \cdot \Delta t,$$

тому

$$m_1 \cdot v'_1 - m_1 \cdot v_1 = -(m_2 \cdot v'_2 - m_2 \cdot v_2).$$

Звідси,

$$m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2,$$

тобто сумарна кількість руху точок до і після взаємодії однакова.

Ми говорили, що добуток $F \cdot t$ – це імпульс сили, то цей закон можна сформулювати, як закон збереження імпульсу сили.

Цей висновок можна поширити на довільну кількість матеріальних точок ізольованої системи. Сумування по всіх точках дає імпульс системи

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}.$$

Цей вираз і є **закон збереження імпульсу**: при всяких взаємодіях матеріальних точок ізольованої системи, векторна сума їх імпульсів залишається незмінною (сталюю).

Розглянемо відоме вже співвідношення $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Якщо зовнішні сили відсутні або їхня дія скомпенсована, то $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, $\vec{p} = const$,

тобто імпульс зберігається.

Вираз $\vec{p} = const$ є аналітичним записом закону збереження імпульсу точки.

Нехай два тіла масами m_1 і m_2 , утворюють ізольовану систему, знаходяться у стані спокою. Якщо одне із них набуло швидкості v_1 , то при цьому друге тіло також почало рухатися із швидкістю v_2 . На початку сума імпульсів двох тіл дорівнювала нулю. За законом збереження імпульсу векторна сума їх імпульсів повинна залишатися рівною нулю, тобто

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = 0, \text{ або } m_1 \cdot \vec{v}_1 = -m_2 \cdot \vec{v}_2$$

Знак мінус вказує, що швидкість v_2 має протилежний напрямок. Якщо взяти абсолютні значення швидкостей, отримаємо з цього рівняння, що

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{m_1}{m_2},$$

тобто швидкості набуті тілами обернено пропорційні їх масам.

1.5 Робота і енергія. Закон збереження енергії

У різних явищах природи спостерігається передавання руху і перетворення однієї форми руху в іншу. Процес перетворення відбувається принаймні між двома тілами, одне з яких втрачає певну кількість руху однієї якості, а друге дістає відповідну кількість руху іншої якості. Істотно, що у всіх перетвореннях руху змінюється лише якість.

1.5.1 Енергія

Енергія — це міра руху в явищах перетворення однієї форми руху в іншу. Відповідно до різних форм руху розрізняють механічну енергію, внутрішню, електричну і т. д.

Механічна енергія є мірою механічного руху. Оскільки стан механічного руху системи в будь-який момент часу визначений, якщо відоме взаємне положення тіл і швидкості тіл, то в механіці розрізняють два види енергії: *кінетичну*, що залежить від швидкості тіл, і *потенціальну*, яка залежить від взаємного положення тіл.

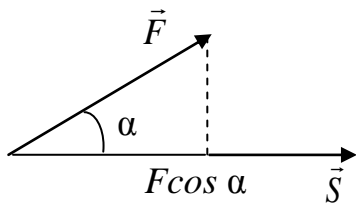
Процеси, в яких змінюється форма руху, отже, енергія перетворюється з одного виду в інший, називають **роботою**. Робота як фізична величина визначає кількість перетвореної енергії з одного виду в інший.

Поняття роботи в механіці пов'язане з поняттями сили і переміщення, тому користуються поняттям робота сили. Якщо під дією незмінної сили \vec{F} тіло отримало переміщення $\Delta\vec{r}$, то механічна робота сили визначається скалярним добутком

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}.$$

Роботою сили \vec{F} , яка діє на матеріальну точку, називають фізичну величину, що дорівнює скалярному добутку вектора діючої сили на вектор переміщення точки $\Delta\vec{r}$.

У випадку прямолінійного переміщення, коли $|\Delta\vec{r}| = s$, отримуємо:



$$A = F \cdot S \cdot \cos \alpha = F_s S. \text{ (рис. 3)}$$

Робота – величина скалярна. Залежно від кута між напрямками діючої сили і переміщення вона може бути додатною ($\alpha < 90^\circ$), від'ємною ($\alpha > 90^\circ$) і може дорівнювати нулю ($\alpha = 90^\circ$).

Нулю дорівнює робота сили, перпендикулярної до напрямку переміщення, зокрема робота доцентрової сили, робота сили тяжіння при русі тіла в горизонтальній площині та ін.

Одиницею роботи в СІ є джоуль – це робота сили в 1Н на шляху в 1метр за умови, що напрям дії сили і напрям переміщення збігаються. В аналітичному записі $1\text{Дж} = 1\text{Н} \cdot 1\text{м} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$.

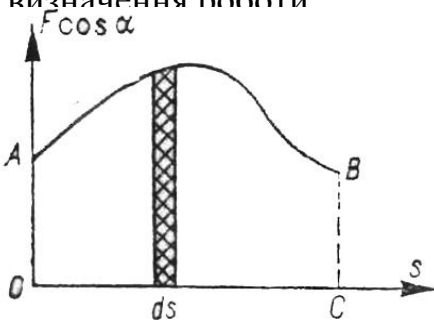
Ми розглянули спосіб обчислення роботи незмінної сили при прямолінійному переміщенні тіла. Якщо сила залежить від положення точки в просторі $\vec{F} = \vec{F}(r)$, то завжди можна вибрати таке мале переміщення, що в його межах силу можна вважати сталою. Знайдемо роботу на елементарному переміщенні:

$$dA = F \cos \alpha \cdot ds.$$

Роботу на всьому шляху знайдемо як суму робіт на всіх елементарних переміщеннях, на які поділено шлях. Ця операція зводиться до знаходження інтеграла

$$A = \int_s F \cos \alpha \cdot ds.$$

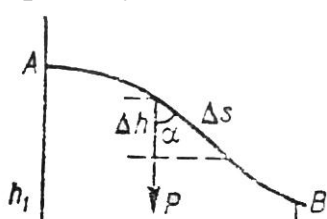
Поряд з аналітичним способом широко використовують графічний спосіб визначення роботи



Відкладаючи по осі у проекцію діючої сили $F \cos \alpha$, а по осі x – пройдений тілом шлях s (рис.4), дістанемо графічну залежність між ними, скажімо, у вигляді кривої AB . Звідси видно, що робота на елементарному переміщенні $dA = F \cos \alpha \cdot ds$ дорівнює площі заштрихованої смужки, а робота на всьому шляху дорівнює площі фігури $OABC$. Наприклад, вимірявши площу фігури визначають роботу газу в циліндрі теплової машини.

1.5.2 Робота в полі сили тяжіння

На тіло, яке переміщується в полі тяжіння, постійно діє сила тяжіння. Ця сила виконує певну роботу. Знайдемо роботу сили тяжіння тіла, яке переміщується по деякій кривій AB (рис. 5).



Поділимо весь шлях на такі малі частини, щоб їх можна було вважати прямолінійними. Робота на одній з них дорівнює:

$$\Delta A = P \cdot \Delta s \cdot \cos \alpha = P \cdot \Delta h$$

Роботу на всьому шляху знайдемо як суму робіт на окремих його частинах

$$A = \sum P \cdot \Delta h = P \cdot \sum \Delta h = P \cdot (h_1 - h_2).$$

Як бачимо, робота сили тяжіння (або робота проти сили тяжіння) для тіла, що переміщується в полі тяжіння, не залежить від форми траєкторії, а тільки від різниці висот початкової і кінцевої точок прикладання. Якби тіло в полі тяжіння описало замкнуту траєкторію, то сумарна робота сили тяжіння дорівнювала б нулю: позитивна робота тіла, коли воно опускається, компенсується від'ємною роботою тіла, коли воно піднімається.

Сили, робота яких не залежить від траєкторії руху тіла, а залежить лише від початкового і кінцевого його положення, називаються *потенціальними*. Такими є, наприклад, сили всесвітнього тяжіння, сили пружності, електростатичні сили. Поля, в яких виявляється дія таких сил, називаються *потенціальними*. Система тіл називається *консервативною*, якщо в ній внутрішні сили взаємодії потенціальні, а зовнішні сили, що діють на ці тіла, стаціонарні й потенціальні.

1.5.3 Потужність

Тепер для виконання роботи використовують різні машини — механічні, теплові, електричні. Їх роботоздатність характеризується потужністю.

Потужністю називають величину, яка дорівнює відношенню роботи до проміжку часу, протягом якого вона виконується. Розрізняють *середню потужність*

$$N = \frac{A}{t}$$

та *миттєву потужність*, тобто потужність у даний момент часу:

$$N = \frac{dA}{dt}$$

Потужністю також характеризують прилади, що споживають або перетворюють певну енергію (наприклад, говорять про потужність електричної лампи, холодильника, вентилятора тощо).

Одиницею потужності в СІ є Вт: $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$.

Великі потужності в практиці вимірюють у кіловатах, мегаватах і кінських силах: $1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт}$, $1 \text{ МВт} = 10^6 \text{ Вт}$, $1 \text{ к. с.} = 736 \text{ Вт}$.

Для вимірювання потужності машин і пояснення їх роботи при різних навантаженнях користуються також виразом потужності через діючу силу і швидкість руху, а саме:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{(\vec{F} d\vec{r})}{dt} = (\vec{F} \vec{v}) = Fv \cdot \cos(\vec{F} \vec{v}).$$

Отже, при даній потужності машина може розвивати більшу силу тяги, коли швидкість менша, і навпаки.

1.5.4 Кінетична і потенціальна енергія

Кінетичною називають ту частину механічної енергії, яка залежить від швидкості руху тіл. Кінетичну енергію матеріальної точки визначають за формулою:

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

Цю формулу можна встановити, дослідивши перетворення механічного руху в інші форми руху, наприклад у внутрішній, що відбувається в результаті непружного удару тіл або в результаті їх гальмування. Кількість теплоти, що виділяється в таких перетвореннях, пропорційна масі й квадрату швидкості тіла.

Потенціальною називають ту частину механічної енергії, яка залежить від взаємного розташування частин системи і їх положення в зовнішньому силовому полі. Потенціальну енергію визначатимемо за тією роботою, яка виконується над системою, щоб перевести її з деякого нульового положення в даний стан. Для прикладу визначимо потенціальну енергію тіла над Землею. Якщо тіло рівномірно піднімається, робота проти сили тяжіння дорівнює збільшенню потенціальної енергії системи тіло — Земля. Коли висота підняття незначна ($h \ll R_3$), силу тяжіння вважаємо сталою, тому можна записати

$$P \cdot h = E_{\Pi} - E_{\Pi_0},$$

де E_{Π} і E_{Π_0} позначають потенціальну енергію тіла відповідно на висоті h і на поверхні Землі. Потенціальну енергію на поверхні Землі беруть за нульовий рівень ($E_{\Pi_0} = 0$), тому формула потенціальної енергії має такий вигляд:

$$E_{\Pi} = mgh. \quad (2)$$

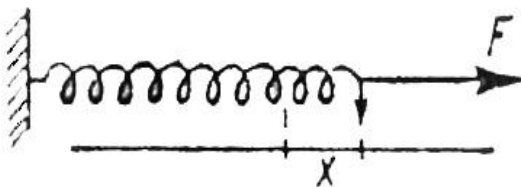
За цією формулою потенціальна енергія тіла, опущеного в шахту, виражається від'ємним числом.

Визначимо **потенціальну енергію пружно деформованого тіла**. Для здійснення деформації треба виконати роботу проти сили пружності. Ця робота буде мірою потенціальної енергії деформації. Розглянемо для прикладу роботу, потрібну для розтягу пружини (рис. 6). Силу пружності, за законом Гука, визначають так:

$$F = -kx,$$

де x — видовження пружини, k — коефіцієнт її пружності. Тому елементарна робота, що виконується при будь-якому розтягу пружини на dx , дорівнюватиме

$$dA = Fdx = k \cdot x \cdot dx.$$



Вся робота, яка виконується при розтягу пружини, дорівнює:

$$A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Так виражається робота будь-якої деформації. Тому формулу потенціальної енергії пружної деформації запишемо так:

$$E_{\Pi} = \frac{kx^2}{2}. \quad (4)$$

Отже, розглянуті приклади обчислення механічної енергії системи дають можливість встановити загальну властивість енергії. З формули кінетичної енергії видно, що величина її залежить від величини швидкості, але не залежить від того,

як тіло набуло даної швидкості. Величина потенціальної енергії тяжіння в свою чергу залежить лише від взаємного положення тіл системи, але не залежить від того, як тіла переводилися в дане положення. Те саме можна сказати про величину енергії пружної деформації.

Отже, енергія системи визначається лише наявним станом системи і не залежить від її попередньої історії. Інакше кажучи, енергія є функцією стану системи.

1.5.5 Закон збереження енергії

Вище були розглянуті системи, в яких робота проти сил тяжіння або сил пружності підвищувала потенціальну енергію.

Відомо, що коли не діють зовнішні сили і, зокрема, сили тертя, тіла під дією згаданих потенціальних сил приводяться в прискорений рух. За рахунок роботи цих сил кінетична енергія тіл збільшується:

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad (1)$$

і одночасно відповідно зменшується потенціальна енергія системи

$$A = E_{п0} - E_{п}.$$

Дослідження таких перетворень механічної енергії показує, що на скільки зменшується потенціальна енергія системи, на стільки збільшується її кінетична енергія і навпаки. Так, кулька, падаючи з висоти h , дістає таку кінетичну енергію, завдяки якій знову може піднятися на висоту h ; рухома кулька, натикаючись на пружину, стискує її до такої міри, що пружина здатна відновити швидкість кульки. Отже, можна записати рівність

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = E_{п0} - E_{п}$$

звідки

$$\frac{mv^2}{2} + E_{п} = \frac{mv_0^2}{2} + E_{п0},$$

Отже, *при всяких змінах в ізольованій консервативній системі її повна енергія залишається незмінною*. Так можна сформулювати **закон збереження енергії** в механічних явищах.

Доведено, що закон збереження енергії справджується в усіх явищах природи. Встановленням цього закону було завершено вчення про зв'язок і взаємне перетворення різних форм руху матерії.

Низький рівень техніки і панування в науці механістичних поглядів на явища природи в епоху Ломоносова не дали йому можливості розкрити якісні перетворення різних форм руху матерії. У цій частині закон збереження був всебічно розкритий пізніше. Якщо Ломоносов лише обґрунтував єдність механічного руху і теплоти, спростовуючи теорію теплецю, то Румфорд (1798 р.) уже довів перетворення механічного руху в теплоту, а використання теплових машин незаперечно свідчило про перетворення теплоти в механічний рух. У 1800 р. Вольт винайшов елемент, який ілюстрував зв'язок хімічних і електричних явищ, а в 1831 р. Фарадей відкрив явище електромагнітної індукції — механічний рух провідника в магнітному полі породжував електричний струм і т. д. Дослідні дані взаємного перетворення різних форм руху матерії узагальнив Р Майєр у 1842—1845 рр. у законі збереження і перетворення енергії.

Відкриття закону збереження і перетворення енергії було одним з найвидатніших досягнень людства на шляху пізнання природи й удосконалення виробничої діяльності. Цим законом було спростовано безплідну ідею створення

вічного двигуна першого роду (perpetuum mobile I), тобто двигуна, який, раз будучи приведений у дію, безупинно зберігав би рух і виконував роботу без споживання енергії ззовні. Закон спрямовував зусилля вчених і винахідників на використання різних джерел енергії для виконання роботи. На основі закону збереження і перетворення енергії проектуються і споруджуються сучасні двигуни й енергетичні станції.

1.6 Застосування законів збереження до центрального удару куль

Явище удару є короткочасною взаємодією тіл, що супроводиться зміною їх руху. Нехай два тіла масами m_1 і m_2 , які мають форму кулі, рухаються в одному напрямі з швидкостями відповідно \vec{v}_1 і \vec{v}_2 вздовж однієї прямої, що проходить через їх центри, зіштовхуються (рис. 1). Такий удар називають **центральним**. Швидкості руху куль після зіткнення позначимо відповідно \vec{u}_1 і \vec{u}_2 .

У граничних випадках розрізняють *абсолютно непружний* і *абсолютно пружний* удари тіл.

1.6.1 Непружний удар куль

Розглянемо ідеально непружний удар куль, тобто такий, після якого обидва тіла залишаються zdeформованими і рухаються як одне ціле. Знайдемо їх спільну швидкість після удару, застосовуючи для цього закон збереження імпульсу, оскільки закон збереження механічної енергії тут не виконується.

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

де \vec{u} – швидкість руху тіла масою $m_1 + m_2$.

Звідки

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Зрозуміло, що на деформацію тіл затрачена деяка енергія, величину якої визначимо з рівняння

$$\Delta E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Ця частина кінетичної енергії тіл перетворилася у внутрішню енергію тіл, що можна підтвердити нагріванням тіл від удару.



1.6.2 Пружний удар куль

Під час ідеально пружного удару в першій стадії тіла деформуються і швидкості тіл вирівнюються, а в другій – тіла повністю відновлюють свою форму. Завдяки силам пружності, що відновлюють форму, швидкості тіл стають різними. Знайдемо швидкості тіл після удару.

Нехай кулі з масами m_1 і m_2 до удару мали швидкості відповідно \vec{v}_1 і \vec{v}_2 , а після удару їх швидкості стали відповідно \vec{u}_1 і \vec{u}_2 ; розглядається центральний удар, тому швидкості до удару і після удару паралельні тій самій прямій.

У цьому випадку виконуються і закон збереження механічної енергії

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

і закон збереження імпульсу системи

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2.$$

Якщо в отриманих рівняннях зібрати зліва і справа члени з однаковими масами, а потім перше рівняння поділити на друге, то дістанемо систему двох лінійних рівнянь, з якої легко знайти швидкості куль після удару. Вони відповідно дорівнюватимуть:

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}; \quad \vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}.$$

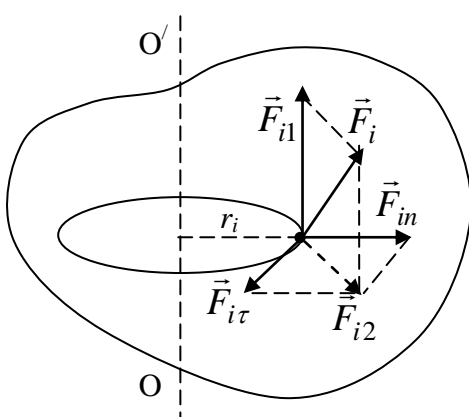
Розглянемо окремі випадки удару:

а) якщо $m_1 = m_2$, то $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$, тобто тіла, ударяючись, обмінюються швидкостями. Це добре спостерігається на більярдних кулях. Найкращим сповільнювачем швидкої частинки, очевидно, буде друга частинка такої самої маси, але з малою швидкістю. Так, наприклад, в атомній фізиці розв'язуються питання про сповільнення нейтронів тощо;

б) якщо $m_2 \rightarrow \infty, v_2 = 0$, то $u_1 = -v_1, u_2 = 0$, тобто перше тіло відскакує від другого з тією самою швидкістю. Так, наприклад, відскакує м'яч, ударяючись об підлогу, тощо.

1.7 Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла

Абсолютно тверде тіло можна представити як систему жорстко зв'язаних матеріальних точок. Розглянемо одну з них масою m_i , що знаходиться на відстані r_i від нерухомої осі обертання, та на ню діє сила \vec{F}_i . Розкладемо силу \vec{F}_i на



складові: паралельну до осі обертання, перпендикулярну до осі обертання та дотичну до траєкторії руху. Дві останні складають проекцію \vec{F}_i на площину, в якій лежить траєкторія. Сили \vec{F}_{i1} та \vec{F}_{i2} не впливають на обертальний рух матеріальної точки. Згідно з другим законом динаміки $\vec{F}_{i\tau} = m_i \vec{a}_{i\tau}$, або $\vec{F}_{i\tau} = m_i [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i]$. Оскільки в динаміці обертального руху основну роль відіграє момент діючої сили, тому помножимо векторно

обидві частини останнього рівняння на \vec{r}_i .

$$[\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = m_i [\vec{r}_i \times [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i]].$$

Векторний добуток в лівій частині даного співвідношення визначає момент сили відносно нерухомої осі обертання. Він спрямований вздовж цієї осі паралельно вектору кутового прискорення

$$\vec{M}_i = m_i r_i^2 \vec{\varepsilon}.$$

Величина $I_i = m_i r_i^2$ називається **моментом інерції** матеріальної точки, що обертається та є мірою її інерційності. Момент інерції – величина скалярна і вимірюється в $кг \cdot м^2$.

Сумування по всіх точках системи дає

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \cdot \vec{\varepsilon}, \text{ або } \vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon},$$

де \vec{M} та I – відповідно сумарні момент сили і момент інерції абсолютно твердого тіла, яке обертається відносно нерухомої осі.

Цей вираз є **основним рівнянням динаміки обертального руху**. Воно нагадує основне рівняння динаміки поступального руху $\vec{F} = m\vec{a}$, тільки аналогом сили тут виступає момент сили, а аналогом лінійного прискорення – кутове прискорення.

Запишемо основне рівняння динаміки обертального руху у вигляді:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Оскільки для твердих тіл, з нерухомою віссю обертання момент інерції I є сталою величиною, то цей вираз можна записати так:

$$\vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}.$$

З визначення моменту імпульсу матеріальної точки маємо:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i],$$

де \vec{r}_i - відстань від осі обертання до точки яка розглядається, $m_i \vec{v}_i$ - імпульс точки. Перейшовши до кутової швидкості, можна записати:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times m_i [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]] = m_i r_i^2 \cdot \vec{\omega} = I_i \cdot \vec{\omega}.$$

Після сумування по всіх точках

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}.$$

Момент імпульсу – це вектор однаково напрямлений з вектором кутової швидкості.

Основне рівняння динаміки обертального руху перепишеться

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Звідси випливає, що результуючий момент сили дорівнює швидкості зміни моменту імпульсу аналогічно тому, як результуюча сила, що діє на точку, дорівнює швидкості зміни імпульсу.

Якщо не діють зовнішні сили, або результуючий момент цих сили дорівнює нулю, то момент імпульсу системи матеріальних точок, яка обертається, залишається незмінним.

$$\vec{M} = 0; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0; \quad \vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \text{const}.$$

Останній вираз є аналітичним записом **закону збереження моменту імпульсу** обертального руху системи матеріальних точок.

1.7.1. Кінетична енергія обертального руху тіла

Різні точки твердого тіла, що перебувають в обертальному русі мають різну лінійну швидкість, тому кінетичну енергію обертального руху тіла знаходитимемо як суму енергій мас точок, на які можна поділити тіло. Кінетична

енергія будь-якої точки: $E_i = \frac{m_i \vartheta_i^2}{2}$. Якщо ввести $\vartheta_i = \omega r_i$, то отримаємо

$E_i = \frac{m_i \cdot \omega_i^2 \cdot r_i^2}{2}$. Кінетична енергія всього тіла, як сума енергій матеріальних

точок, буде дорівнювати
$$E = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega_i^2 r_i^2}{2}.$$

Якщо врахувати, що $m_i r_i^2 = I$ – момент інерції тіла, то кінетичну енергію тіла при обертальному русі навколо осі обертання можна записати $E = \frac{I \omega^2}{2}$.

З цієї формули видно, що вираз кінетичної енергії обертання руху тіла аналогічне виразу поступального руху тіла тільки замість маси **молекулярна енергія**, а замість лінійної – кутова швидкість.

1.8 Механічні коливання (Коливальні рухи)

Коливання – рухи, або процеси, які характеризуються певним повторенням у часі. *Коливання* – обмежені рухи, що повторюються відносно деякого стану, який в окремому випадку буде станом рівноваги.

В залежності від фізичної природи процесу, який повторюється, розрізняються такі коливання: механічні, електромагнітні, електромеханічні тощо. Ми розглядатимемо механічні коливання.

Коливальний рух – рух в якому матеріальна точка або система точок, багатократно відхиляючись від положення рівноваги, щоразу знову повертаються до нього. Коливальний рух, у якому відповідне положення матеріальної точки точно повторюється через рівні проміжки часу називається *періодичними*, а час, за який це повторення відбулося, називається *періодом*.

В залежності від характеру впливу на коливну систему розрізняють вільні коливання, вимушені коливання, автоколивання і параметричні коливання.

Вільними або власними називаються такі коливання, які відбуваються в системі, представленій самій собі після того, як їй був даний поштовх чи вона була виведена зі стану рівноваги (наприклад, коливання кульки, підвішеної на нитці).

Вимушеними називають такі коливання, в процесі яких коливна система піддається впливу зовнішньої періодично змінної сили (наприклад, коливання моста, виникаючі при проходженні по ньому людей, крокуючих в ногу).

Автоколивання, як і вимушені коливання, супроводжуються впливом на коливну систему зовнішніх сил, проте моменти часу, коли здійснюються ці впливи, задаються самою коливальною системою – система сама керує зовнішнім впливом.

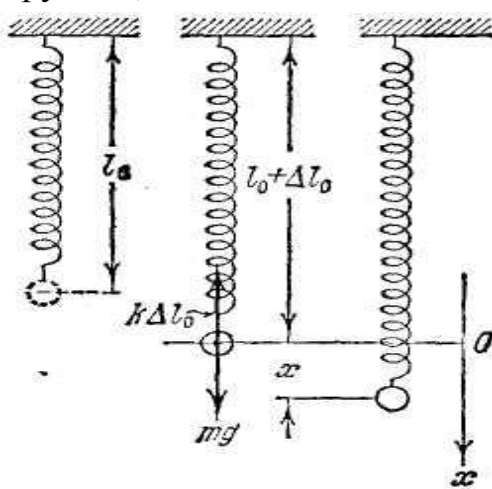
При **параметричних коливаннях** за рахунок зовнішнього впливу здійснюється періодична зміна будь-якого параметра системи (наприклад довжини нитки, на якій підвішена кулька, що здійснює коливання).

Найпростішими є *гармонічні коливання*, тобто такі коливання, при яких коливальна величина (наприклад, відхилення маятника) змінюється з часом за законом синуса чи косинуса. Цей тип коливань особливо важливий з наступних причин: по-перше, коливання в природі чи в техніці часто мають характер, дуже близький до гармонічного, і, по-друге, періодичні процеси іншої форми (з іншою залежністю від часу) можуть бути представлені як накладання декількох гармонічних коливань.

1.8.1 Механічні коливання

Розглянемо механічну систему, положення якої може бути задане за допомогою однієї величини, яку ми позначимо через x . В таких випадках говорять, що система має одну ступінь свободи. Великою x , яка визначає положення системи, може бути кут, відкладений від деякої площини, чи відстань, відкладена вздовж заданої кривої (прямої) лінії тощо.

Розглянемо систему, яка складається з кульки, масою m , підвішеної на пружині, масою якої можна знехтувати порівняно з m (Рис. 1.1).



В положенні рівноваги вага кульки зрівноважується пружною силою $k\Delta l_0$:

$$mg = k\Delta l_0, \quad (1.3)$$

(де Δl_0 - видовження пружини). Зміщення кульки від положення рівноваги будемо характеризувати координатою x , при цьому x направимо по вертикалі вниз, а нуль осі з'єднаємо з положенням рівноваги кульки. Якщо перемістити кульку в положення, що характеризується координатою x , то видовження пружини стане рівним $\Delta l_0 + x$ і проекція результуючої сили на вісь x буде дорівнювати

$$F = mg - k(\Delta l_0 + x).$$

Врахувавши умову (1.3), отримаємо, що

$$F = mg - k(\Delta l_0 + x) = k\Delta l_0 - k\Delta l_0 - kx = -kx. \quad (1.4)$$

Сили типу (1.4), не залежно від їх природи, називаються *квазіпружними*. Не важко здогадатись, що сила, яка описується формулою (1.4) завжди напрямлена до положення рівноваги. Модуль сили пропорційний величині відхилення системи від положення рівноваги. Силу, яка має таку властивість, іноді називають *повертаючою* силою.

Надамо кульці зміщення x , після чого залишимо систему без впливу. Під дією квазіпружної сили кулька буде рухатись до положення рівноваги з постійно зростаючою швидкістю. Досягнувши положення рівноваги, кулька продовжує рухатись по інерції. Цей рух буде сповільнений і припиниться тоді, коли зміщення кульки дорівнюватиме $-x$. Аналогічний процес відбуватиметься під час руху кульки у зворотному напрямі. Якщо тертя в системі відсутнє, повна енергія системи не змінюватиметься і кулька буде рухатись в межах від x до $-x$ необмежено довго.

Запишемо рівняння динаміки руху кульки.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (1.5)$$

Ввівши позначення $\omega_0^2 = k/m$, рівняння (1.5) перепишемо наступним чином:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.6)$$

Отже, за відсутності сил тертя рух під дією квазіпружної сили описується диференціальним рівнянням (1.6).

У будь-якій реальній коливальній системі є сили опору, дія яких призводить до зменшення енергії системи. Амплітуда коливань з часом зменшуватиметься. Найістотніше на амплітуду коливань впливає опір середовища. Коли швидкість руху тіла незначна, то сила опору пропорційна швидкості: $F = -r \frac{dx}{dt}$, де постійна r називається *коефіцієнтом опору*. Знак мінус показує, що напрями сили F і швидкості мають протилежні напрями, а їх проекції на вісь x мають різні знаки.

Рівняння другого закону Ньютона за наявності сил опору матиме вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}. \quad (1.7)$$

Використавши позначення $\omega_0^2 = k/m$, та ввівши позначення $2\beta = r/m$, рівняння (1.7) перепишемо наступним чином:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.8)$$

Це диференціальне рівняння описує затухаючі коливання системи.

Коливання, що описуються рівняннями (1.6) і (1.8), є вільними (або власними): виведена з положення рівноваги чи отримавши поштовх система здійснює коливання, будучи залишеною сама собі.

Тепер нехай коливна система піддається дії зовнішньої сили, яка змінюється з часом за гармонічним законом:

$$F = F_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

В цьому випадку рівняння динаміки руху матиме вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

Використавши раніше введені позначення та позначивши $f_0 = F_0/m$, це рівняння запишемо наступним чином:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (1.9)$$

Рівнянням (1.9) описуються вимушені коливання.

1.8.2 Гармонічний осцилятор без тертя

Розглянемо вільні коливання, які описуються рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{де} \quad \omega_0^2 = k/m. \quad (3.1)$$

Ми показували, що такі коливання здійснює матеріальна точка m , на яку діє лише квазіпружна сила $F = -kx$.

Систему, рух якої описується рівнянням (3.1), називають **гармонічним осцилятором**.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд:

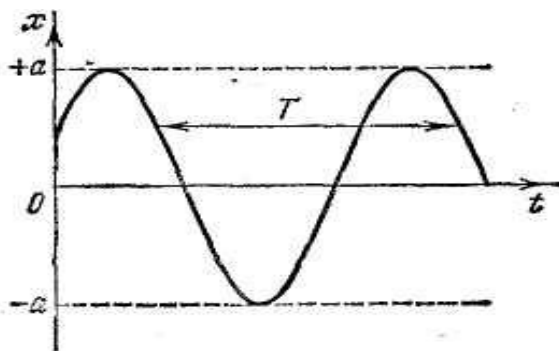
$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (3.7)$$

де A і α – довільні сталі.

Зміщення x змінюється з часом за законом косинуса.

Отже, **гармонічним осцилятором** можна назвати будь-яку систему, яка здійснює гармонічні коливання біля положення рівноваги.

Графік гармонічного коливання, тобто графік функції (3.7), показаний на **рис. 3.1**.



По горизонтальній осі відкладено час t , по вертикальній осі – зміщення x . Оскільки косинус змінюється в межах від -1 до $+1$, значення x лежать в межах від $-A$ до $+A$.

Величина найбільшого відхилення системи від положення рівноваги називається **амплітудою** коливання.

Амплітуда A – постійна додатна величина. Її значення визначається величиною початкового відхилення чи поштовху, яким система була виведена з положення рівноваги.

Величина $(\omega_0 t + \alpha)$, яка знаходиться під знаком косинуса, називається **фазою коливання**. Фаза – це аргумент, який дозволяє визначити числове значення і напрям зміщення, а отже, положення точки в коливальному русі у будь-який момент часу. Константа α являє собою значення фази в момент часу $t=0$ і називається **початковою фазою** коливання. Зі зміною початку відліку часу буде змінюватись і α . Отже, значення початкової фази визначається вибором початку відліку часу. Оскільки значення x не змінюється при додаванні чи відніманні з фази цілого числа 2π , завжди можна добитись того, щоб початкова фаза була по модулю менша π . Тому звичайно розглядають лише значення α , які лежать в межах від $-\pi$ до $+\pi$.

Оскільки косинус – періодична функція з періодом 2π , різні стани системи, яка здійснює гармонічні коливання, повторюються через такий проміжок часу T , за який фаза коливання отримує приріст рівний 2π (**рис 3.1**). Цей проміжок часу T називається **періодом коливання**. Він може бути визначений з наступної умови: $[\omega_0(t + T) + \alpha] = [\omega_0 t + \alpha] + 2\pi$, звідки

$$T = 2\pi/\omega_0. \quad (3.8)$$

Число коливань за одиницю часу називається **частотою коливання** ν . Очевидно, що частота ν пов'язана з тривалістю одного коливання T наступним співвідношенням: $\nu = 1/T$.

За одиницю частоти приймається частота такого коливання, період якого дорівнює 1 с. Цю одиницю називають **герц** (Гц). Частота в 10^3 Гц називається **кілогерц** (кГц), в 10^6 Гц – **мегагерц** (МГц).

З (3.8) випливає, що $\omega_0 = 2\pi/T$. Таким чином, ω_0 визначає кількість коливань за 2π секунди. Величину ω_0 називають **коловою або циклічною частотою**. Вона пов'язана із частотою ν співвідношенням $\omega_0 = 2\pi\nu$.

Продиференціювавши $x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ за часом, отримаємо рівняння швидкості

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}). \quad (3.12)$$

Як видно з (3.12), швидкість також змінюється за гармонічним законом, причому, амплітуда швидкості дорівнює $A\omega_0$. З порівняння (3.7) і (3.12) бачимо, що *швидкість випереджає зміщення за фазою на $\pi/2$* .

Продиференціювавши (3.12) ще раз за часом, знайдемо рівняння прискорення:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \quad (3.13)$$

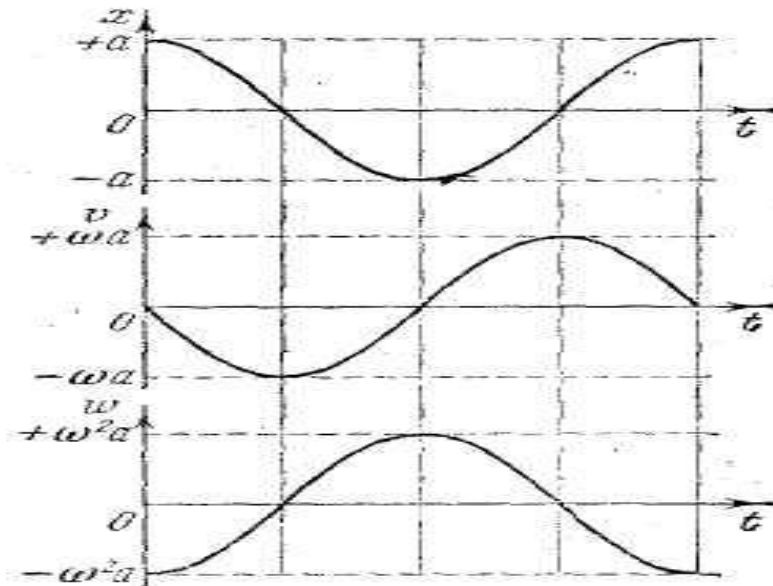
$$a = -\omega_0^2 x.$$

З (3.13) випливає, що прискорення і зміщення знаходяться в протифазі. Це означає, що в момент, коли зміщення набуде найбільшого додатного значення, прискорення набуде найбільшого за величиною від'ємного значення і навпаки.

На **рис. 3.2** співставленні графіки для зміщення, швидкості і прискорення.

З виразу коефіцієнта повертаючої сили можна визначити циклічну частоту та період власних коливань.

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \text{ або } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$



Кожне конкретне коливання також характеризується певними значеннями амплітуди A і початкової фази α . Значення цих величин для даного коливання можуть бути визначені з так званих початкових умов, тобто за значеннями відхилення x_0 і швидкості v_0 в початковий момент часу. Дійсно, підставивши в $x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ і

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad t=0,$$

отримаємо два рівняння:

$$x_0 = A \cos \alpha, \quad v_0 = -A\omega_0 \sin \alpha,$$

з яких знаходимо, що

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0^2/\omega_0^2)}, \quad (3.14)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -v_0/x_0\omega_0. \quad (3.15)$$

Рівняння (3.15) задовольняється двома значеннями α , які знаходяться в інтервалі від $-\pi$ до $+\pi$. З цих значень треба взяти те, при якому виходять правильні знаки у косинуса і синуса.

1.8.3 Енергія коливальної системи

Квазіпружна сила є консервативною. Тому повна енергія гармонічного коливання повинна залишатись постійною. В процесі коливань відбувається перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки, при чому, в моменти найбільшого відхилення від положення рівноваги повна енергія E складається тільки з потенціальної енергії, яка досягає найбільшого значення $E_{\Pi \max}$:

$$E = E_{\Pi \max} = \frac{kA^2}{2}; \quad (3.16)$$

При проходженні ж системи через положення рівноваги повна енергія складається тільки з кінетичної енергії, яка в ці моменти досягає свого найбільшого значення $E_{K \max}$:

$$E = E_{K \max} = \frac{m v_{\max}^2}{2} = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2}. \quad (3.17)$$

(вище було показано, що амплітуда швидкості дорівнює $A\omega_0$).

Оскільки $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ і $m\omega_0^2 = k$, то вирази (3.16) і (3.17) є рівними.

З'ясуємо, як змінюється з часом кінетична і потенціальна енергія гармонічного коливання.

Кінетична енергія дорівнює:

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (3.18)$$

Потенціальна енергія визначається за формулою:

$$E_{\Pi} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (3.19)$$

Додавши (3.18) і (3.19), та прийнявши до уваги, що $m\omega_0^2 = k$ отримаємо формулу для повної енергії:

$$E = E_K + E_{\Pi} = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2}. \quad (3.20)$$

Таким чином, повна енергія гармонічного коливання дійсно залишається постійною.

Використовуючи відомі формули тригонометрії, співвідношення для E_K і E_{Π} можна переписати

$$E_K = E \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = E \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right], \quad (3.21)$$

$$E_{\Pi} = E \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = E \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right], \quad (3.22)$$

де E – повна енергія системи.

З цих формул видно, що E_K і E_{Π} змінюються з частотою $2\omega_0$, тобто з частотою в два рази більшою, ніж частота гармонічного коливання. На [рис. 3.3](#) співставленні графіки для x , E_K і E_{Π} .

Середнє значення квадрата синуса і квадрата косинуса дорівнює, як відомо, половині. Отже, середнє значення E_K співпадає з середнім значенням $E_{\text{П}}$ і дорівнює $E/2$.

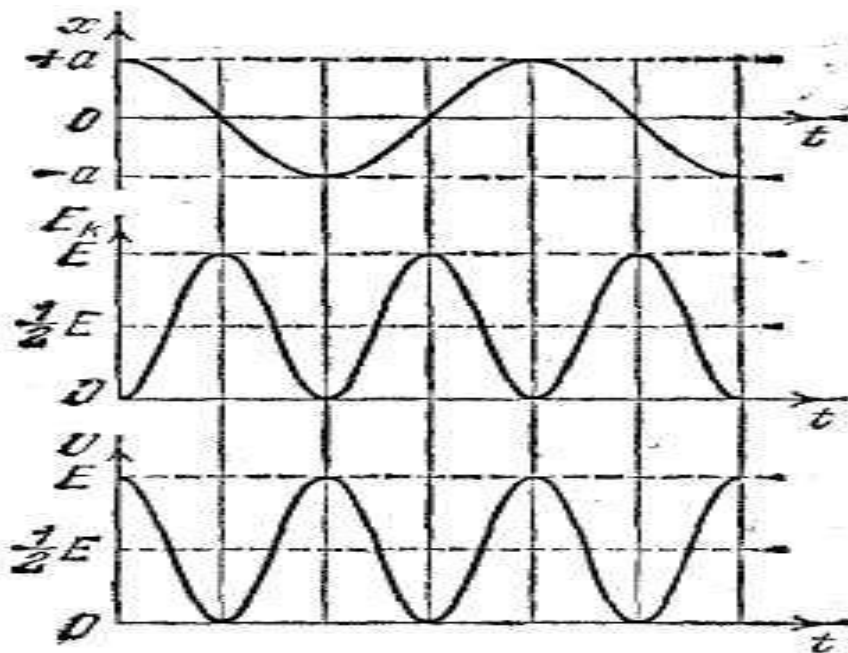


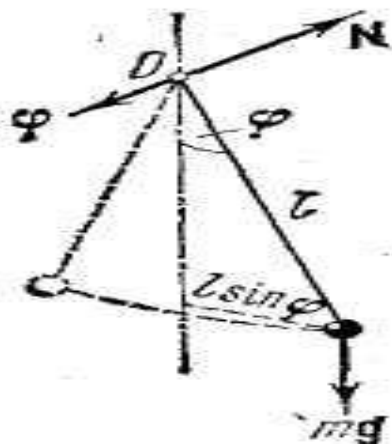
Рис. 3.3

1.8.4 Маятники

В фізиці під маятником розуміють тверде тіло, здійснююче під дією сили тяжіння коливання навколо нерухомої точки чи осі. Прийнято розрізняти математичний і фізичний маятники.

Математичним маятником називають ідеалізовану систему, що складається з невагомої, нерозтяжної, безмежно довгої нитки, на якій підвішена матеріальна точка, що коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння. Прикладом наближенням до математичного маятника може бути невелика кулька, підвішена на довгій, нерозтяжній, тонкій нитці.

Відхилення маятника від положення рівноваги будемо характеризувати кутом φ , утвореним ниткою з вертикаллю (рис 4.1).



При відхиленні маятника від положення рівноваги виникає обертальний момент сили тяжіння, який дорівнює:

$$M = -mgl \sin \varphi, \quad (4.1)$$

де m – маса, а l – довжина маятника.

Він має такий напрям, що прагне повернути маятник в положення рівноваги, і в цьому відношенні аналогічний квазіпружній силі. Тому моменту M і кутовому зміщенню φ потрібно приписувати протилежні знаки.

Напишемо, для маятника, рівняння динаміки обертального руху: $M = \varepsilon I$. Записавши кутове прискорення $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ і враховуючи, що момент інерції маятника рівний $I = ml^2$, отримаємо:

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi.$$

Останнє рівняння можна звести до вигляду

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (4.2)$$

Обмежимося розглядом малих коливань. В цьому випадку можна припустити $\sin \varphi \approx \varphi$. Ввівши крім того позначення $\frac{g}{l} = \omega_0^2$ (4.3), прийдемо до рівняння

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (4.4)$$

яке ідентичне до рівняння (1.6), що описує вільні гармонічні коливання системи.

Його розв'язок запишеться:

$$\varphi = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (4.5)$$

Отже, при малих коливаннях кутове відхилення математичного маятника змінюється з часом за гармонічним законом.

За формулою (3.8) з врахуванням (4.3) виходить відомий зі шкільного курсу вираз для періоду коливань математичного маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}. \quad (4.6)$$

З формули періоду коливань випливає, що частота коливань математичного маятника залежить лише від довжини маятника і від прискорення сили тяжіння і не залежить від маси маятника.

Якщо тіло, яке коливається, не можна представити як матеріальну точку, маятник називається фізичним.

Фізичним маятником називають фізичне, абсолютно тверде тіло довільної форми, що коливається під дією сили тяжіння навколо горизонт осі. Вісь обертання знаходиться вище від центра мас тіла.

При відхиленні маятника від положення рівноваги на кут φ виникає обертальний момент, який намагається повернути маятник в положення рівноваги. Цей момент дорівнює:

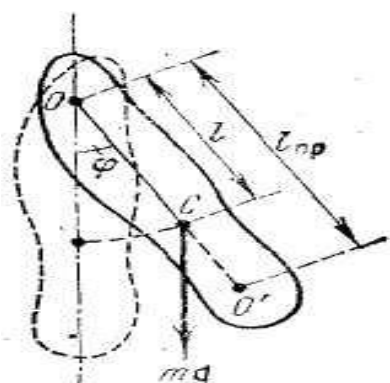
$$M = -mgl \sin \varphi, \quad (4.7)$$

де m – маса маятника, а l – відстань від точки підвісу O до центра мас маятника C (рис.4.2). Знак «-» має те ж саме значення, що і у випадку математичного маятника (формули 4.1).

Позначивши момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку підвісу, буквою I , можна написати:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi. \quad (4.8)$$

Рівняння (4.8) переходить у вже відоме нам рівняння:



$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (4.9)$$

Тут через ω_0^2 позначена наступна величина:

$$\omega_0^2 = mgl/I.$$

Звідси маємо, що
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}. \quad (4.10)$$

З рівнянь (4.9) і (4.10) випливає, що при малих відхиленнях від положення рівноваги фізичний маятник здійснює гармонічні коливання, частота яких залежить від маси маятника, моменту інерції маятника відносно осі обертання і відстані між віссю обертання і центром мас маятника.

Період коливань фізичного маятника визначається із співвідношення (4.10) і дорівнює:

$$T = 2\pi\sqrt{I/mgl}. \quad (4.11)$$

Із співставлення формул (4.6) і (4.11) виходить, що математичний маятник з довжиною

$$l_{зв} = I/ml \quad (4.12)$$

буде мати такий період коливань, як і даний фізичний маятник. Величину (4.12) називають **зведеною довжиною** фізичного маятника. Таким чином, *зведена довжина фізичного маятника – це довжина такого математичного маятника, період коливань якого співпадає з періодом даного фізичного маятника.*

Точка на прямій, яка сполучає точку підвісу з центром мас, що лежить на відстані зведеної довжини від осі обертання, називається **центром коливання** фізичного маятника (див. точку O' на **рис 4.2**).

Можна показати, що при підвішенні маятника в центрі коливання O' зведена довжина, а значить, і період коливання не зміниться. Отже, точка підвісу і центр коливання володіють властивістю взаємності: при перенесенні точки підвісу в центр коливання колишня точка підвісу стає новим центром коливання.

На цій властивості базується визначення прискорення вільного падіння за допомогою так званого *оберненого маятника*. Оберненим називається такий маятник, у якого є дві паралельні одна одній, закріплені поблизу його кінців опорні призми, за які він може по чергову підвішуватись. Вздовж маятника можуть переміщуватись і закріплюватись на ньому важкі тягарі. Переміщенням тягарців добиваються того, щоб при підвішуванні маятника за будь-яку з призм період коливань був однаковий. Тоді відстань між опорними ребрами призм буде дорівнювати $l_{зв}$. Вимірявши період коливань маятника і знаючи $l_{зв}$, можна знайти прискорення вільного падіння g , а саме:

$$T = 2\pi\sqrt{l_{зв}/g}.$$

1.8.5 Затухаючі коливання

Затухаючі коливання описуються рівнянням:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0, \quad \text{де} \quad 2\beta = r/m, \quad \omega_0^2 = k/m, \quad (8.1)$$

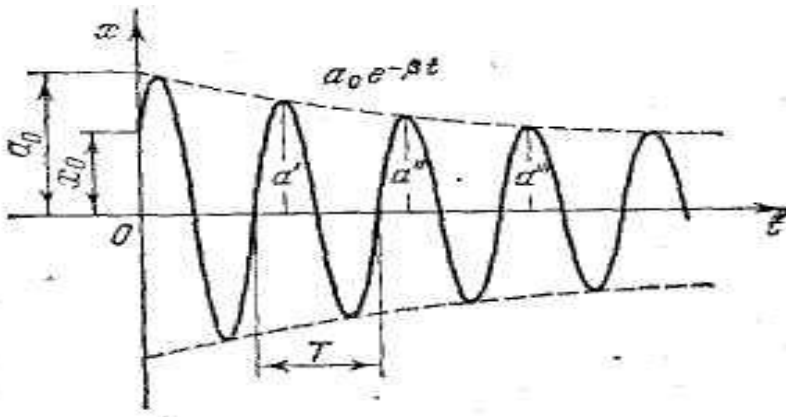
Масу m , коефіцієнт опору r (коефіцієнт пропорційності між швидкістю $\frac{dx}{dt}$ і силою опору) та коефіцієнт квазіпружної сили k називають *параметрами* коливальної системи.

За невеликого затухання загальний розв'язок рівняння (8.1) матиме вигляд

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (8.7)$$

Тут A_0 і α – довільні постійні, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – умовна циклічна частота затухаючого коливання, ω_0 – власна частота, це частота, з якою здійснювались би вільні коливання системи за відсутності опору середовища (при $r = 0$).

На рис. 8.1 поданий графік функції (8.7). Пунктирними лініями показані межі, в яких знаходиться зміщення коливної точки x .



Згідно з виглядом функції (8.7) рух системи можна розглядати як гармонічне коливання частотою ω з амплітудою, яка змінюється за законом $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$.

Верхня з пунктирних кривих на рис. 8.1 дає графік функції $A(t)$, при чому, величина A_0 являє собою амплітуду в початковий момент часу.

Початкове зміщення x_0 залежить, крім A_0 , також від початкової фази α :

$$x_0 = A_0 \cdot \cos \alpha.$$

Швидкість затухання коливань визначається величиною $\beta = r/2m$, яку називають *коефіцієнтом затухання*. Знайдемо час τ , за який амплітуда зменшиться в e разів. За визначенням $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$, звідки $\beta\tau = 1$. Отже, коефіцієнт затухання обернений за величиною до проміжку часу, протягом якого амплітуда зменшиться в e разів.

Згідно формули $T = \frac{2\pi}{\omega}$ період затухаючих коливань дорівнюватиме:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (8.8)$$

Запишемо відношення значень амплітуд, які відрізняються на період.

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}.$$

Це відношення називають *декриментом затухання*, а його логарифм – *логарифмічним декриментом затухання*:

$$\lambda = \ln e^{\beta T} = \beta T \quad (8.9)$$

Для характеристики коливальної системи зазвичай використовуються логарифмічний декримент затухання λ .

Виразивши відповідно з (8.9) β через λ і T , закон зменшення амплітуди з часом можна записати у вигляді:

$$A = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T}t}.$$

За час τ , протягом якого амплітуда зменшується в e разів, система встигає здійснити $N_e = \tau/T$ коливань. З умови $e^{-\frac{\lambda\tau}{T}} = e^{-1}$ виходить, що $\lambda \frac{\tau}{T} = \lambda N_e = 1$.

Отже, логарифмічний декремент затухання обернений до кількості коливань, які здійснюються за час, протягом якого амплітуда зменшується в e разів.

Для характеристики коливальної системи часто використовується також величина

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e, \quad (8.10)$$

яка називається **добротністю** коливальної системи. Як видно з її визначення, добротність пропорційна кількості коливань N_e , які здійснюються системою за час τ . Проміжок часу τ протягом якого амплітуда коливань зменшується в e разів називається **часом релаксації**.

1.8.6 Вимушені коливання

Для того, щоб коливання не затухали, енергію коливальної системи необхідно постійно поповнювати. Це можна здійснювати за рахунок зовнішньої сили.

Колівання, які відбуваються за рахунок дії зовнішньої сили, що змінюється за періодичним законом називаються **вимушеними**. Така періодично змінна сила називається **змушувальною**.

У випадку, коли змушувальна сила змінюється за гармонічним законом, коливання описуються наступним диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t. \quad (10.1)$$

Тут $2\beta = r/m$, $\omega_0^2 = k/m$, $f_0 = \frac{F_0}{m}$, β – коефіцієнт затухання, ω_0 – власна частота системи, F_0 – амплітуда змушувальної сили, ω – частота зміни сили.

Диференціальне рівняння (10.1) є неоднорідним. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок однорідного рівняння ми вже знаємо. Воно має вигляд:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \text{де } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Залишається знайти частинний розв'язок рівняння (10.1).

Припустимо, що часткове рішення рівняння (10.1) має вигляд

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (10.10)$$

Провівши математичні прийоми, а саме: взявши першу та другу похідні по часу

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi), \quad (10.11)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi), \quad (10.12)$$

підставивши вирази (10.10) – (10.12) в рівняння (10.1), розглянувши \sin та \cos суми, піднявши до квадрату, додавши праві ті ліві частини рівняння, отримуємо

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A^2 + 4\beta^2\omega^2 A^2 = f_0^2,$$

звідки

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (10.14)$$

Також

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (10.15)$$

Вимушені коливання є гармонічними, частота яких дорівнює частоті змушувальної сили. Залежність амплітуди вимушених коливань від частоти змушувальної сили приводить до того, що при певній, визначеній для даної системи, частоті амплітуда коливань досягає максимального значення. Це явище називається **резонансом**, а відповідна частота – **резонансною частотою**.

Щоб визначити резонансну частоту $\omega_{рез}$, потрібно знайти максимум функції (10.14), або мінімум виразу, який стоїть під коренем в знаменнику. Продиференціювавши цей вираз по ω і прирівнявши до нуля, ми отримуємо умову, що визначає $\omega_{рез}$:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

Рівняння (10.16) має три розв'язки: $\omega = 0$ і $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Рішення, що дорівнює нулю, відповідає максимуму знаменника. З інших двох рішень від'ємне має бути відкинуто, як таке, що не має фізичного змісту (частота не може бути від'ємною). Таким чином, для резонансної частоти виходить одне значення:

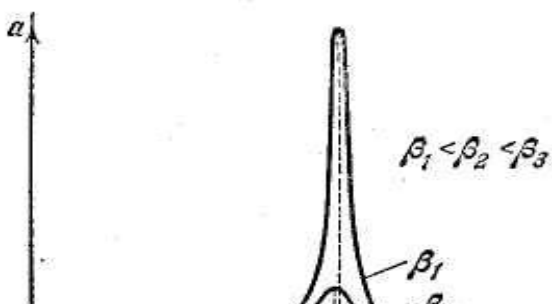
$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (10.17)$$

Підставивши це значення частоти в (10.14), отримаємо вираз для амплітуди при резонансі:

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (10.18)$$

З (10.18) слідує, що при відсутності опору середовища амплітуда при резонансі прямувала б у нескінченність. Згідно (10.17) резонансна частота за тих же умов (при $\beta = 0$) співпадає з власною частотою коливань системи ω_0 .

Залежність амплітуди вимушених коливань від частоти змушувальної сили (те ж саме, від частоти коливань) показано графічно на **рис. 10.3**. Окремі криві на графіці відповідають різним значенням параметра β .



У відповідності з (10.17) і (10.18), чим менше β , тим вище і правіше лежить максимум даної кривої. За дуже великого згасання (такому, що $2\beta^2 > \omega_0^2$) вираз для

резонансної частоти стає уявним. Це означає, що за таких умов резонанс не спостерігається – зі збільшенням частоти амплітуда вимушених коливань монотонно зменшується (див. нижню криву на рис. 10.3).

Зображена на рис. 10.3 сукупність графіків функції (10.14), що відповідають різним значенням параметра β , називається **резонансними кривими**.

За резонансними кривими можна зробити ще наступні висновки. За прямування ω до нуля всі криві приходять до одного і того ж, відмінного від нуля, граничного значення, рівному $F_0/m\omega_0^2$, тобто F_0/k . Це значення являє собою зміщення від положення рівноваги, яке отримує система під дією постійної сили величиною F_0 . За прямування ω до безмежності всі криві асимптотно прямують до нуля, так як за великої частоти сила так швидко змінює свій напрям, що система не встигає помітно зміститись з положення рівноваги. Наостанок, відмітимо, що чим менше β , тим сильніше змінюється з частотою амплітуда поблизу резонансу, тим «гостріше» виходить максимум.

З рис. 10.1 видно, що вимушені коливання відстають за фазою від вимушеної сили, при чому величина відставання φ лежить в межах від 0 до π . Залежність φ від ω за різних значень β показана графічно на рис. 10.4.

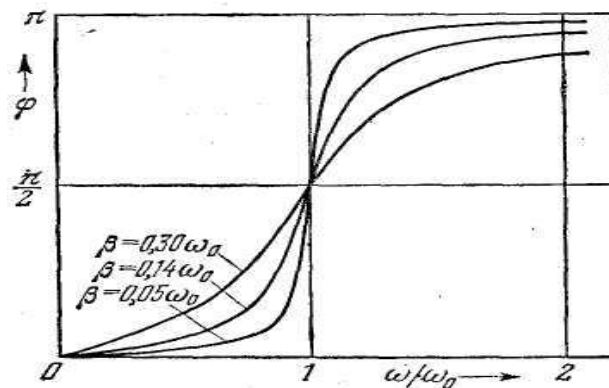


Рис.10.4

Частоті ω_0 відповідає $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Резонансна частота менша, ніж власна (див.

(10.17)). Отже, в момент резонансу $\varphi < \frac{\pi}{2}$. При слабкому затуханні $\omega_{рез} \approx \omega_0$, і

значенні φ при резонансі можна рахувати рівним $\frac{\pi}{2}$.

З явищем резонансу приходится рахуватись при конструюванні машин і різного роду споруд. Власна частота коливань цих пристроїв ні в якому випадку не повинна бути близька до частоти можливих зовнішніх впливів. Так, наприклад, власна частота вібрацій корпусу корабля чи крил літака повинна сильно відрізнятись від частоти коливань, які можуть бути викликані обертанням гребного гвинта чи пропелера. В іншому випадку виникають вібрації, які можуть викликати катастрофу. Відомі випадки, коли падали мости при проходженні по ним крокуючої колони солдат. Це траплялось тому, що власна частота коливань моста опинялась близькою до частоти, з якою крокувала колона.

Разом з тим явище резонансу часто опиняється досить корисним, особливо в акустиці, радіотехніці тощо.

11. Параметричний резонанс (самостійне опрацювання)

В розглянутому в попередньому параграфі випадкові прикладена ззовні вимушена сила зумовлювала безпосередньо зміщення системи з положення рівноваги. Виявляється, існує інший вид впливу ззовні, за допомогою якого можна сильно розгойдати систему. Цей вид впливу заключається в здійснюваній в такт з коливаннями періодичній зміні якого-небудь параметра системи, внаслідок чого саме явище називається **параметричним резонансом**.

Візьмемо для прикладу найпростіший маятник – кульку на нитці. Якщо періодично змінювати довжину маятника l , збільшуючи її в моменти, коли маятник знаходиться в крайніх положеннях, і зменшуючи, в моменти, коли маятник знаходиться в середньому положенні (рис. 11.1), то маятник сильно розгойдається. Збільшення енергії маятника при цьому відбувається за рахунок роботи, яку здійснює сила, діюча на нитку.

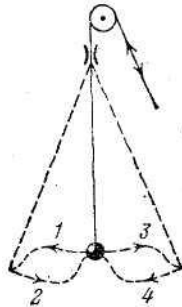


Рис. 11.1

Сила натягу нитки при коливаннях маятника не постійна: вона менша в крайніх положеннях, коли швидкість дорівнює нулю, і більша в середньому положенні, коли швидкість маятника максимальна. Тому негативна робота зовнішньої сили при подовженні маятника стає меншою за величиною, ніж позитивна робота, яка здійснюється при вкороченні маятника. В результаті робота зовнішньої сили за період **опиняється** більше нуля.

1.8.7 Автоколивання (самостійно)

При затухаючих коливаннях енергія системи витрачається на подолання опору середовища. Якщо поновлювати цю втрату енергії, коливання стануть незатухаючими. Поповнення енергії системи може здійснюватись за рахунок поштовхів ззовні, проте ці поштовхи повинні надаватись системі в такт з її коливаннями, інакше вони можуть послабити коливання і навіть припинити їх зовсім. Можна зробити так, щоб коливальна система сама керувала зовнішнім впливом, забезпечуючи узгодженість наданих їй поштовхів з своїм рухом. Така система називається **автоколивною**, а здійснювані нею незатухаючі коливання – **автоколиваннями**.

В якості прикладу автоколивної системи розглянемо годинниковий механізм. Маятник годинника насаджений на одну вісь з вигнутим важелем – анкером.(рис.9.1).

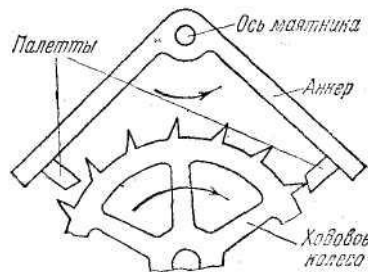
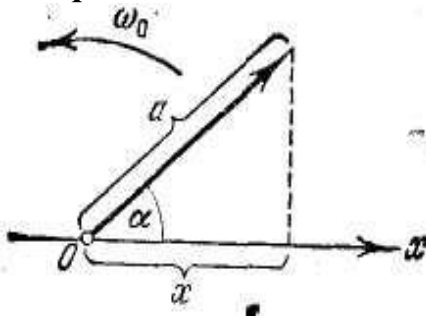


Рис. 9.1

На кінцях анкера знаходяться виступи спеціальної форми, що називаються *палеттами*. Зубчате ходове колесо знаходиться під дією ланцюга з гирею чи закрученої пружини, які намагаються повернути його за годинниковою стрілкою. Проте більшу частину часу колесо впирається одним з зубців в бокову поверхню тої чи іншої палети, що ковзається при гойданні маятника по поверхні зубця. Тільки в моменти, коли маятник знаходиться поблизу середнього положення, палети перестають перешкоджати шлях зубцям і ходове колесо повертається, штовхаючи анкер зубцем, що ковзає своєю вершиною по скошеному торцю палети. За повний цикл коливання маятника (за період) ходове колесо повертається на два зубця, при чому кожна з палет отримує по поштовхові. За допомогою цих поштовхів за рахунок енергії піднятої гирі чи закрученої пружини і поповнюється втрата енергії маятника, виникаюча в результаті тертя.

1.8.8 Векторна діаграма

Вирішення ряду питань, зокрема додавання декількох коливань однакового напрямку (те ж саме, додавання кількох гармонічних функцій), значно полегшується і стає наочним, якщо зображувати коливання графічно у вигляді векторів на площині. Отримана таким чином схема називається *векторною діаграмою*.



Візьмемо вісь Ox (рис. 5.1). З точки O , взятої на осі, відкладемо вектор довжини A , утворюючий з віссю кут α . Якщо цей вектор обертати з кутовою швидкістю ω_0 , то проекція кінця вектора на вісь x буде переміщуватись в межах від $-A$ до $+A$, при чому координата цієї проекції буде змінюватись з часом за законом

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

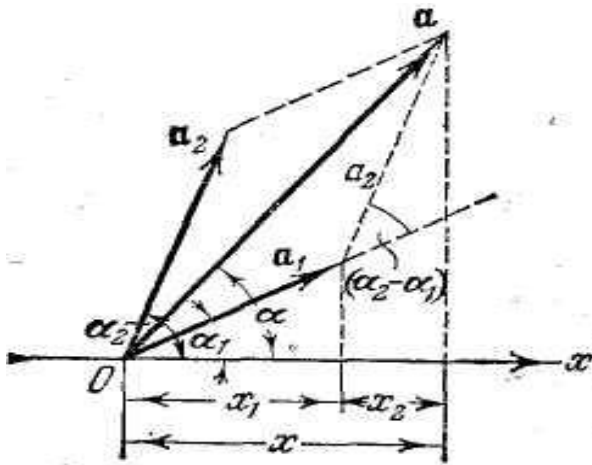
Отже, проекція кінця вектора на вісь буде здійснювати гармонічні коливання з амплітудою, яка дорівнює довжині вектора, з циклічною частотою рівною кутовій швидкості обертання вектора, і початковою фазою, рівною куту, утвореному вектором з віссю в початковий момент часу.

Із сказаного випливає, що гармонічне коливання може бути задане за допомогою вектора, довжина якого дорівнює амплітуді коливання, а напрям вектора утворює з віссю x кут, рівний початковій фазі коливання.

Розглянемо результуючий рух матеріальної точки, яка бере участь у двох гармонічних коливань однакового напрямку та однакової частоти. Нехай гармонічні коливання задані наступними рівняннями:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \quad (5.1)$$

Представимо обидва коливання за допомогою векторної діаграми (рис. 5.2).



Побудуємо за правилами додавання векторів результуючий вектор \vec{A} . Легко побачити, що проекція цього вектора на вісь x дорівнює сумі проекцій векторів – доданків:

$$x = x_1 + x_2.$$

Отже, вектор \vec{A} являє собою результуюче коливання. Цей вектор обертається з тією ж кутовою швидкістю ω_0 , як і вектори \vec{A}_1 та \vec{A}_2 , так що результуючий рух буде гармонічним коливанням з частотою ω_0 , амплітудою A і початковою фазою α . З побудови видно, що

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (5.2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (5.3)$$

Отже, представлення гармонічних коливань за допомогою векторів дає можливість звести додавання декількох коливань до операції додавання векторів. Цей прийом буває особливо корисним, наприклад, в оптиці, де світлові коливання в деякій точці визначаються як результат накладання багатьох коливань, які проходять в дану точку від різноманітних ділянок хвильового фронту.

Формули (5.2) і (5.3) можна, звісно, отримати, додавши вирази (5.1) і виконавши відповідні тригонометричні перетворення. Але використаний нами спосіб отримання цих формул відрізняється простотою і наочністю.

Проаналізуємо вираз (5.2). З нього випливає, що результуюча амплітуда залежить від різниці фаз. Якщо різниця фаз обох коливань $\alpha_2 - \alpha_1$ дорівнює нулю, то амплітуда результуючого коливання дорівнює сумі амплітуд:

$$A = A_1 + A_2.$$

Якщо різниця фаз $\alpha_2 - \alpha_1$ дорівнює $+\pi$ чи $-\pi$, тобто обидва коливання знаходяться в протифазі, то амплітуда результуючого коливання дорівнює

$$A = |A_1 - A_2|.$$

Якщо частоти коливань x_1 та x_2 неоднакові, вектори \vec{A}_1 та \vec{A}_2 , будуть обертатися з різною швидкістю. В цьому випадку результуючий вектор \vec{A} змінюється за величиною і обертається із змінною швидкістю. Отже, результуючим рухом буде в цьому випадку не гармонічне коливання, а деякий складний коливальний процес.

1.8.9 Додавання однаково напрямлених гармонічних коливань

Особливий інтерес представляє випадок, коли два однаково напрямлені гармонічні коливання, що додаються, мало відрізняються за частотою. Як ми зараз покажемо, результуючий рух при таких умовах можна розглядати як

гармонічне коливання з пульсуючою амплітудою. Таке коливання називається **биттям**.

Позначимо частоту одного з коливань буквою ω , частоту другого коливання через $\omega + \Delta\omega$. За умови $\Delta\omega \ll \omega$. Амплітуди обох коливань будемо вважати однаковими і рівними A . Щоб не ускладнювати без необхідності формул, припустимо, що початкові фази обох коливань дорівнюють нулю. Тоді рівняння коливань будуть мати наступний вигляд:

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

Додаючи ці вирази і використовуючи тригонометричну формулу для суми косинусів, отримуємо:

$$x = x_1 + x_2 = (2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t) \cos \omega t \quad (6.1)$$

(у другому множнику нехтуємо членом $\frac{\Delta\omega}{2}$ в порівнянні з ω).

Графік функції (6.1) зображений на рис. 6,а. Графік побудований для $\frac{\omega}{\Delta\omega} = 10$.

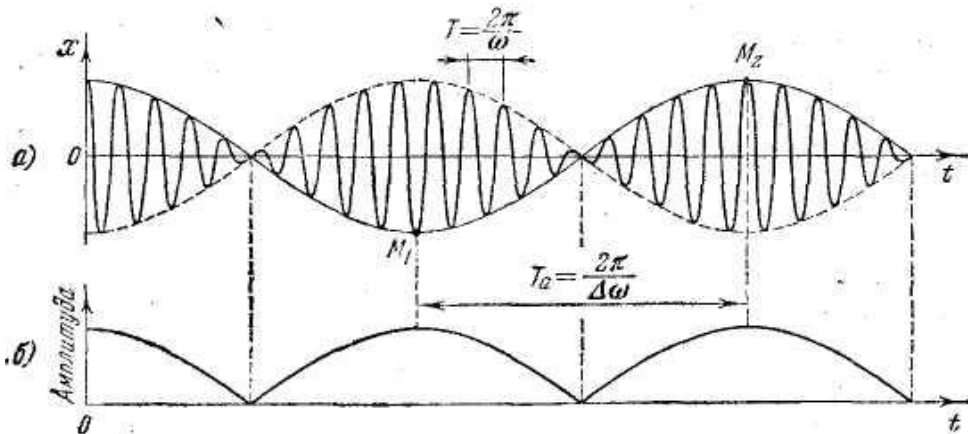


Рис.6

Множник в дужках у формулі (6.1) змінюється значно повільніше, ніж другий множник. Зважаючи на умову $\Delta\omega \ll \omega$ за той час, за який множник $\cos \omega t$ здійснює декілька повних коливань, множник, який знаходиться в дужках, майже не змінюється. Це дає нам підставу розглядати коливання (6.1) як гармонічне коливання частоти ω , амплітуда якого змінюється по деякому періодичному закону. Вираженням цього закону не може бути множник, який знаходиться в дужках, так як він змінюється в межах від $-2A$ до $+2A$, в той час як амплітуда за визначенням – додатна величина. Графік амплітуди показаний на рис. 6, б. Аналітичне вираження амплітуди, очевидно, має вигляд

$$\text{амплітуда} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (6.2)$$

Функція (6.2) – періодична функція з частотою, в 2 рази більшою, ніж частота виразу, який стоїть під знаком модуля, тобто з частотою $\Delta\omega$. (рис. 6.2, на якому співставленні графіки косинуса і його модуля)

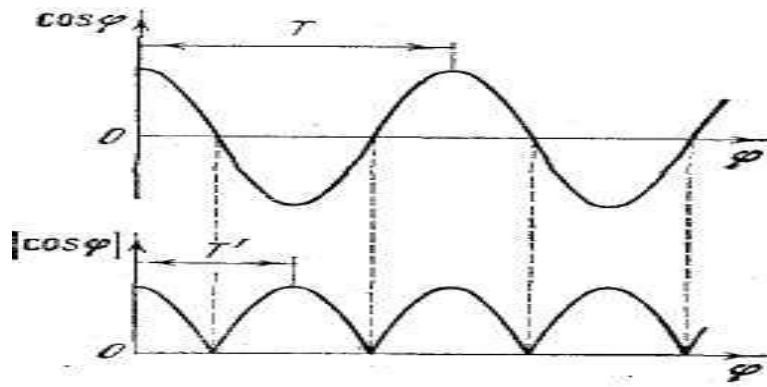


Рис. 6.2

Таким чином, частота пульсацій амплітуди – її називають **частотою биття** – рівна різниці частот коливань, які додаються.

Відзначимо, що множник $2A \cos \frac{\Delta\omega}{2}t$ не лише визначає амплітуду, але і впливає на фазу коливань. Це проявляється, наприклад, в тому, що відхилення, які відповідають сусіднім максимумам амплітуди, мають протилежні знаки (див. точки M_1 та M_2 на рис. 6, а)

1.8.10 Додавання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань

Припустимо, що матеріальна точка може здійснювати коливання як вздовж осі x , так і вздовж перпендикулярної до неї осі y . Якщо збудити обидва коливання, матеріальна точка буде рухатись по деякій криволінійній траєкторії, форма якої залежить від різниці фаз обох коливань.

Виберемо початок відліку часу так, щоб початкова фаза першого коливання була рівна нулю. Тоді рівняння коливань запишуться наступним чином:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos(\omega t + \alpha), \quad (7.1)$$

де α – різниця фаз обох коливань.

Вирази (7.1) представляють собою задане в параметричній формі рівняння траєкторії, по якій рухається матеріальна точка, яка бере участь в обох коливаннях. Щоб отримати рівняння траєкторії в звичайному вигляді, потрібно виключити з рівнянь (7.1) параметр t . З першого рівняння маємо, що

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}. \quad (7.2)$$

Отже,

$$\sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \quad (7.3)$$

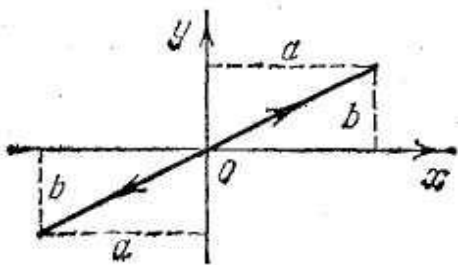
Тепер розкладемо косинус в другому з рівнянь (7.1) по формулі для косинуса суми, підставляючи при цьому замість $\cos \omega t$ і $\sin \omega t$ їх значення (7.2) і (7.3). Після нескладних перетворень отримаємо:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (7.4)$$

Останнє рівняння є, загалом кажучи, рівняння еліпса, осі якого повернуті відносно координатних осей x та y . Орієнтація еліпса і величина його півосей залежать досить складним чином від амплітуд A та B і різниці фаз α .

Визначимо форму траєкторії для деяких окремих випадків.

1. Різниця фаз α дорівнює нулю.



В цьому випадку рівняння (7.4) приймає вигляд

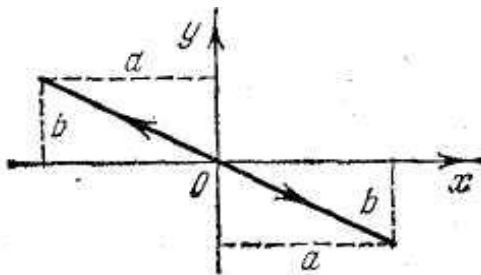
$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

звідки виходить рівняння прямої

$$y = \frac{B}{A}x. \quad (7.5)$$

Результуючий рух є гармонічним коливанням вздовж цієї прямої з частотою ω і амплітудою, яка рівна $\sqrt{A^2 + B^2}$ (рис. 7.1).

2. Різниця фаз α рівна $\pm\pi$.



Рівняння (7.4) має вигляд

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0. \quad (7.6)$$

Звідси виходить, що результуючий рух представляє собою гармонічне коливання вздовж прямої (рис. 7.2)

$$y = -\frac{B}{A}x.$$

3. При $\alpha = \pm\pi/2$ рівняння (7.4) переходить в

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (7.7)$$

тобто в рівняння еліпса, приведенного до координатних осей, при чому півосі еліпса рівні відповідним амплітудам коливань. При рівності амплітуд A і B еліпс вироджується в коло.

Випадки $\alpha = +\pi/2$ та $\alpha = -\pi/2$ відрізняються напрямом руху по еліпсу чи по колу. Якщо $\alpha = +\pi/2$, рівняння (7.1) можна записати наступним чином:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = -B \sin \omega t. \quad (7.8)$$

В момент $t=0$ тіло знаходиться в точці 1 (рис. 7.3). В наступні моменти часу координата x зменшується, а координата y стає від'ємною. Отже, рух здійснюється за годинниковою стрілкою.

При $\alpha = -\pi/2$ рівняння коливань мають вигляд

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \sin \omega t. \quad (7.9)$$

Звідси можна зробити висновок, що рух виникає проти часової стрілки.

Із сказаного випливає, що рівномірний рух по колу радіуса R з кутовою швидкістю ω може бути представлено як сума двох взаємно перпендикулярних коливань:

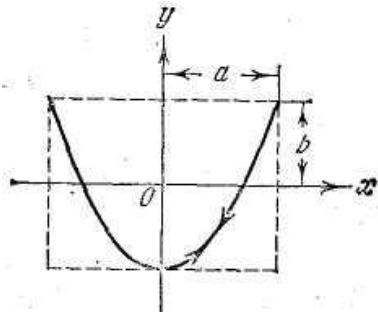
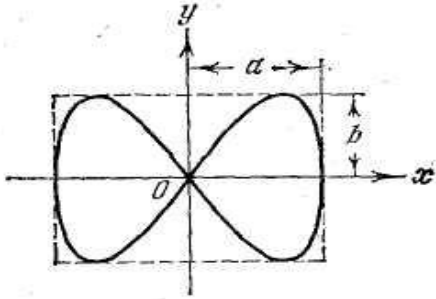
$$x = R \cos \omega t, \quad y = \pm R \sin \omega t \quad (7.10)$$

(знак «+» у виразі для y відповідає рухові проти годинникової стрілки, знак «-» - рухові за годинниковою стрілкою).

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань не рівні, то траєкторія результуючого руху має вигляд досить складних кривих, що називають **фігурами**

Ліссажу. На рис. 7.4 показана одна з найпростіших траєкторій, яка виходить при відношенні частот 1:2 і різниці фаз $\pi/2$. Рівняння коливань мають вигляд:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos \left(2\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$



За той час, поки вздовж осі x точка встигає переміститись з одного крайнього положення в друге, вздовж осі y , вийшовши з нульового положення, вона встигає досягти одного крайнього положення, потім другого і повернутись в нульове положення.

При відношенні частот 1:2 і різниці фаз, рівній нулю, траєкторія вироджується в незамкнену криву (рис. 7.5), по якій точка рухається туди і назад.

Чим ближче до одиниці раціональний дріб, що виражає відношення частот коливань, тим складніше опиняється фігура Ліссажу.

На рис. 7.6 для прикладу показана крива для відношення частот 3:4 і різниці фаз $\pi/2$.

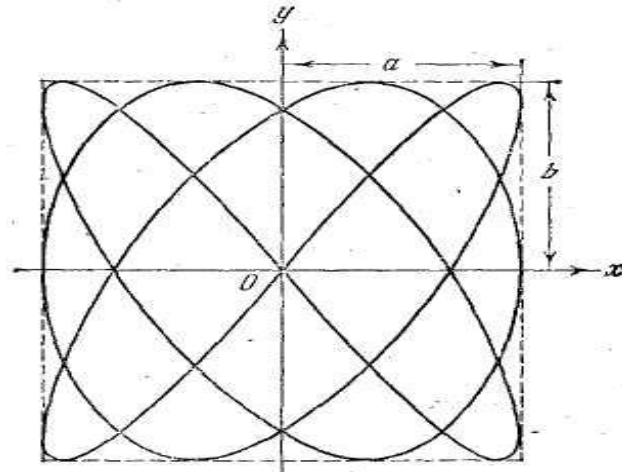


Рис. 7.6

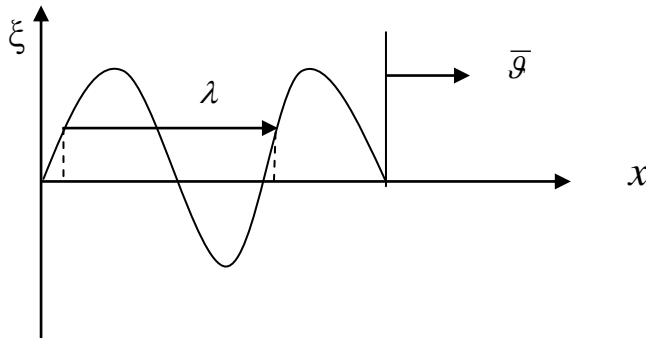
1.9 Механічні хвилі

Коливання, породжені в будь-якій точці середовища поширюються в ньому з певною швидкістю, яка залежить від властивостей середовища. При вивченні поширення хвиль не враховується дискретність середовища (молекулярна будова), а розглядається як суцільне, неперервно розподілене і характеризується пружними властивостями. Процес поширення коливань в суцільному середовищі називають **хвильовим процесом** або **хвилею**. При поширенні хвилі частинки не рухаються разом з хвилею, а коливаються навколо положення рівноваги. Від частинки до частинки передається лише енергія коливального руху і тому основною характеристикою хвиль є перенесення енергії без переносу речовини.

Серед різних хвиль є: хвилі на поверхні рідини, пружні хвилі та електромагнітні хвилі.

1.9.1 Пружні хвилі

Пружними хвилями називаються механічні збурення, які поширюються в пружному середовищі. Пружні хвилі бувають *поздовжні* та *поперечні*. У поздовжніх хвилях частинки середовища коливаються в напрямку поширення хвилі, а в поперечних – у площинах перпендикулярних до напрямку поширення хвилі. Коли відповідні частини середовища коливаються гармонічно, то пружну хвилю називають *гармонічною*.



Графічно зобразимо поперечну хвилю, що поширюється зі швидкістю v вздовж осі X , тобто покажемо залежність між зміщенням частинок середовища, які беруть участь у хвильовому процесі і відстанню x цих частинок від джерела коливань для деякого фіксованого моменту часу t .

Відстань між двома найближчими частинками, які коливаються в однаковій фазі називається **довжиною хвилі**. Довжина хвилі дорівнює шляху поширення певної фази коливання за період T .

$$\lambda = vT, \quad T = \frac{1}{\nu}, \quad \lambda = \frac{v}{\nu}.$$

Хвильовий процес охоплює не тільки частинки, розташовані вздовж осі X , але і сукупність частинок в деякому об'ємі. Поширюючись хвиля охоплює все нові об'єми простору. Геометричне місце точок, до яких доходять коливання в деякий момент часу називається **хвильовим фронтом**.

Геометричне місце точок, які коливаються в однаковій фазі називається **хвильовою поверхнею**.

Фронт хвилі може бути плоским (плоска або одновимірна хвиля), сферичним (сферична хвиля) або мати складнішу геометричну форму.

Швидкістю поширення хвилі або **фазовою швидкістю** називається фізична величина, що чисельно дорівнює відстані, яку за одиницю часу проходить довільна точка хвильової поверхні.

$$\lambda = vT; \quad v = \frac{\lambda}{T}.$$

Вектор швидкості напрямлений перпендикулярно до хвильової поверхні і в сторону поширення хвилі.

Швидкість поширення енергії є визначеною і не може перевищувати швидкості світла у вакуумі. Це – впливає із основних тверджень теорії відносності. На фазову швидкість це обмеження не поширюється.

Швидкість поширення поздовжніх хвиль у пружному середовищі, пов'язаних з деформацією середовища, залежить від його пружності та густини:

$$v_{\text{позд}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \text{де } E \text{ – модуль Юнга.}$$

Швидкість поперечних хвиль визначається деформацією зсуву G :

$$v_{\text{попер}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Швидкість поширення поверхневих хвиль у рідинах визначається співвідношенням:

$$v_{\text{позд}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{4\pi} + \alpha \frac{2\pi}{\rho\lambda}},$$

де g – прискорення вільного падіння, α – коефіцієнт поверхневого натягу, λ – довжина хвилі.

Швидкість поширення пружних хвиль у газах залежить від абсолютної температури газу і визначається співвідношенням:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}},$$

R – універсальна газова стала, γ – стала для даного газу, μ – молярна маса газу.

1.9.2 Плоска біжуча хвиля

Вираз, який визначає зміщення будь-якої точки, збудженої хвилею, як функцію від часу та відстані від початкової точки (джерела) називається **рівнянням хвилі**.

Якщо зміна величини у джерелі коливань відбувається за законом $\xi = A \cos(\omega t + \varphi)$ з амплітудою A , циклічною частотою ω і початковою фазою φ , то коливання частинок фронту плоскої хвилі у точці на відстані x від джерела запізнюються в часі на Δt :

$$\xi_x = A \cos[\omega(t - \Delta t) + \varphi].$$

При цьому припускаємо, що не відбувається затухання, тобто амплітуда залишається $A = \text{const}$. Якщо врахувати, що $\Delta t = \frac{x}{v}$, то отримаємо:

$$\xi_x = \cos(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \varphi) \quad (1),$$

або, якщо ввести $k = \frac{\omega}{v}$, то співвідношення запишеться: $\xi_x = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$.

Останнє рівняння описує **плоску (одновимірну) біжучу хвилю**.

З рівняння (1) випливає, що амплітуда плоскої незатухаючої хвилі в даній точці середовища залишається постійною. Кожна точка середовища здійснює гармонічні коливання $\xi_x = A \cos(\omega t + \alpha)$, з фазою α , яка залежить від відстані до джерела коливань. Фаза $\alpha = \varphi - kx$, де k – хвильове число, яке визначає кількість довжин хвиль, які вміщуються на відрізьку 2π .

Якщо фаза const , то фазова швидкість дорівнює:

$$\omega t - kx = \omega(t - \frac{x}{v}) = \text{const}, \quad 1 - v \frac{dx}{dt} = 0, \quad v = \frac{dx}{dt}.$$

1.9.2 Енергія та інтенсивність хвилі.

В процесі поширення хвилі кожна частинка середовища, до якої доходить хвиля коливається і має енергію. Нехай у певному об'ємі пружного середовища поширюється хвиля з амплітудою A і циклічною частотою ω . Якщо розглянути його кінетичну і потенціальну енергію, то отримаємо, що вони однакові.

$$E_K = E_{II} = \frac{1}{2} \rho V \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi).$$

На відміну від коливань ізольованої матеріальної точки кінетична та потенціальна енергії у хвильовому процесі змінюються в одній фазі і мають однакові амплітудні значення. Тому для повної енергії коливального об'єму можемо записати

$$E = E_K = E_{II} = \rho V \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi).$$

Енергія виділеного об'єму хвилі пропорційна квадрату амплітуди коливання, квадрату частоти та густині середовища.

Введемо поняття **об'ємної густини енергії хвилі** – енергії хвилі, сконцентрованої в одиниці об'єму.

Середнє значення квадрата синуса за період дорівнює 1/2, тому середнє значення густини енергії буде дорівнювати:

$$w_{cp} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2.$$

Енергія, що переноситься через деяку поверхню, перпендикулярну до напряму поширення хвилі за одиницю часу, називається **потокем енергії**:

$$\Phi = w_{cp} \nu S.$$

Поділивши цей вираз на площу поверхні (потік енергії через одиничну площу), отримаємо величину, яка визначає **густину потоку енергії** або **вектор Умова**: *густина потоку енергії дорівнює добутку середньої густини енергії на швидкість поширення хвилі і спів напрямлена з цією швидкістю.*

$$\vec{I} = w_{cp} \vec{\nu}.$$

У сферичної хвилі площа поверхні фронту хвилі зростає прямо пропорційно r^2 - відстані до джерела коливань, і тому інтенсивність сферичної хвилі зменшується пропорційно r^2 . Оскільки енергія хвилі пропорційна квадрату амплітуди, то впливає, що амплітуда сферичної хвилі не залишається постійною, а залежить обернено пропорційно радіусу фронту хвилі:

$$\xi_r = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi),$$

де A_0 – амплітуда хвилі у точках середовища, які знаходяться на одиничній відстані від джерела.

Це **рівняння сферичної хвилі**.

2.0 Ефект Доплера

Ефектом Доплера називається зміна частоти коливань прийнятих приймачем під час руху джерела коливань відносно приймача.

Для розгляду ефекту припустимо, що джерело і приймач рухаються вздовж прямої лінії причому швидкості джерела (приймача) будуть додатні, коли приймач (джерело) наближаються і від'ємні, коли віддаляються.

Власну частоту коливань джерела позначимо ν_0 .

Оберемо перший варіант: джерело і приймач знаходяться в стані спокою відносно середовища:

$$1. \quad \nu_{дж} = 0; \quad \nu_{пр} = 0 \quad \lambda = \nu \cdot T; \quad T = \frac{1}{\nu_0}; \quad \lambda = \frac{\nu}{\nu_0}; \quad \nu_0 = \frac{\nu}{\lambda}.$$

2 приймемо, що приймач наближається до джерела, яке знаходиться у стані спокою: $\mathcal{G}_{дж} = 0; \mathcal{G}_{пр} > 0$

в цьому випадку швидкість поширення хвилі відносно приймача буде рівна.

$$v + v_{пр}$$

Частота, яку сприйме приймач:

$$\mathcal{G} = \frac{\mathcal{G} + \mathcal{G}_{пр}}{\lambda} = \frac{v + v_{пр}}{v} \frac{1}{T} = \frac{\mathcal{G} + v_{пр}}{\mathcal{G}} v_0.$$

Коли приймач наближається до джерела, то частота коливань зареєстрована ним буде $y = \frac{\mathcal{G} + \mathcal{G}_{пр}}{\mathcal{G}}$ разів більша ніж власна частота коливань.

3 джерело наближається до приймача, який знаходиться в стані спокою. Швидкість поширення коливань залежить лише від властивостей середовища. За час, що дорівнює періоду коливань джерела хвиля пройде в напрямі до приймача відстань, яка дорівнює довжині хвилі незалежно від того рухається джерело чи знаходиться в стані спокою. За цей самий час джерело прийде до приймача в напрямі поширення хвилі відстань рівну $\mathcal{G}_{дж} T = \ell$. Довжина хвилі в напрямі руху зменшиться і стане рівною.

$$\lambda = \lambda - \mathcal{G}_{дж} T$$

$$\lambda' = (v - v_{дж}) T$$

$$\mathcal{G} = \frac{\mathcal{G}}{\lambda'} = \frac{\mathcal{G}}{(\mathcal{G} - \mathcal{G}_{дж}) T} = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G} - \mathcal{G}_{дж}} \mathcal{G}$$

частота коливань приймається збільшена у $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G} - \mathcal{G}_{дж}}$ разів.

Коли джерело і приймач рухаються один відносно одного. Використовують результати отримані в 2 і 3 випадках. Можна записати формулу для визначення частоти коливань прийнятих приймачем:

$$\mathcal{G} = \frac{\mathcal{G} \pm \mathcal{G}_{пр}}{\mathcal{G} \mp \mathcal{G}_{дж}} \mathcal{G}_0$$

Верхній знак береться коли джерело і приймач приближаються, а нижній коли відбувається їх взаємне віддалення.

Ефект Доплера залежить від того чи рухається джерело чи приймач.

Якщо напрям швидкості приймача та джерела, не співпадають з прямою, що їх з'єднує. Тоді замість цих швидкостей треба брати їх проекції на цю пряму.

ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНО - КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ.

Молекулярно – кінетичною теорією (МКТ) називається вчення яке описує будову і властивості тіл рухом та взаємодією атомів, молекул та іонів, які складають тіла. В основі МКТ лежать такі положення:

1. *Всі тіла складаються з частинок: молекул, атомів та іонів, до складу яких входять елементарні частинки;*

2. Елементи перебувають у безперервному хаотичному русі.

3. Між частинками тіла існують сили взаємодії, зокрема сили зчеплення, від цих сил залежить міцність тіл.

Ці твердження підтверджуються явищами дифузії, а також дослідженнями елементарної фізики.

Атом – це найменша частинка хімічного елемента, кожному хімічному елементу відповідають певні атоми, які зберігають хімічні властивості даного елемента.

Молекула – найменша стійка частинка даної речовини, яка володіє його основними хімічними властивостями складається з одного чи кількох атомів, однакових, або різних хімічних елементів.

Атоми з'єднуються у молекулу за рахунок хімічних зв'язків що існують, за рахунок взаємодії зовнішніх (валентних) електронів.

Число атомів в молекулах може змінюватись від одного до ста і навіть тисячу, як атом так і молекула електронно нейтральні. Молекула складається з одного або кількох атомів одного чи різних хімічних елементів. Атоми з'єднуються в молекули за рахунок хімічних зв'язків, що існують за рахунок взаємодії зовнішніх валентних електронів. Число атомів в молекулах може змінюватись від одного до сто або до тисячі. Як атом так і молекула електронно нейтральні містять однакову кількість протилежно заряджених частинок.

Кількість речовини – фізична величина, що визначається числом структурних елементів, з яких складається речовина, так як маси структурних елементів відрізняються тому однакова кількість речовин мають різну масу. Маса не є мірою кількості речовини. Одиницею кількості речовини є моль. Число атомів, що є в одному молі називається числом Авогадро . Об'ємом одного моля називається молярним об'ємом

$$V_m = V\mu$$

V – питомий об'єм, μ - маса одного моля.

Сили взаємодії між молекулами.

Між молекулами речовин одночасно діють сили взаємного протягування та відштовхування, які називаємо міжмолекулярними взаємодіями. Існування стійких та твердих тіл пов'язані із силами міжмолекулярної взаємодії. Ядра та електрони атомів взаємодіють між собою електрично.

Потенціальну енергію взаємодії двох молекул називається частина енергії системи двох молекул, яка залежить від відстані між їх центрами. Молекула та її електричні властивості можна розглядати, як електричний диполь. Між електричними диполями існує взаємодія, тому сили міжмолекулярної взаємодії мають електричне походження. Розподілення сил взаємодії між молекулами протягування і відштовхування. Сили притягання – від'ємні сили, відштовхування – додатні сили. Дві молекули вільні від всяких взаємодій крім сили молекулярної взаємодії повинні наближуватися або віддалятися одна від одної в залежності від

того яка сила переважає при певній відстані між молекулами. Рівнодійна сила міжмолекулярної взаємодії $=0$. Молекули в стані рівноваги Потенціальна енергія взаємодії двох молекул називається частина енергії з системи двох молекул яка залежить від відстані їх центрів величина потенціальної енергії вимірюється роботою яка задається рівнодійною силою міжмолекулярної взаємодії час зміни відстані між молекулами прийнято, що на відстані яка дорівнює безкінечності, потенціальна енергія дорівнюватиме нулю. Вибір нульового значення потенціальної енергії зумовлений тим, що дві молекули які знаходяться на великій відстані не взаємодіють.

Кінетична енергія ідеального газу.

Молекулярна теорія ідеального газу – газ між молекулами якого відсутні сили взаємного протягування прийнято, що при зіткненнях між собою та стінками посудини молекули такого газу абсолютно пружні, визначені малих розмірів. Зіткнення відбуваються за законами абсолютних пружних ударів. Існування визначення малих мас та розмірів молекул пов'язано з дією сил відштовхування. Ідеальним назвемо газ, між молекулами якого відсутні сили взаємного притягання. Існування визначених, хоча й малих мас та розмірів молекул пов'язано з дією сил відштовхування. Ми будемо розглядати ідеальний газ який складається з одного атома. В дійсності газу при не досить низьких температурах і малих тисках – розріджені газу за своїми властивостями близькі до ідеальних газів. Рух кожної молекули газу може бути описаний законами механіки. Але число молекул в будь-якому газу велике. Сили міжмолекулярної взаємодії вимагають великої кількості рівнянь. Для дослідження застосовують статистичний метод знаходження середнього значення фізичної величини, що характеризує рух всіх молекул. Для всіх молекул зручно ввести деякі середні швидкості, що характеризують газ при певній температурі. Введена середньо арифметична швидкість руху, що по модулю дорівнює

$$g = \frac{g_1 + g_2 + g_n}{N}$$

N – Загальне число молекулярного газу. Величина $\bar{g} = \sqrt{\frac{8RT}{\mu\pi}}$ - середня

арифметична швидкість R – Універсальна газова стала. Середня квадратична

швидкість руху молекул $g^2 = \frac{g_1^2 + g_2^2 + g_n^2}{N}$

$$U = \sqrt{\bar{g}^2}$$

Середня довжина вільного пробігу молекул.

Називається середня відстань, яку молекула проходить без зіткнень, це відстань між двома послідовними зіткненнями, вважається що молекула рухається прямолінійно та рівномірно. Вона прямо пропорційна середній арифметичній швидкості та обернено пропорційна середньому числу зіткнень молекули за 1

$$\text{часу } \bar{l} = \frac{\bar{g}}{\bar{Z}} .$$

Середнім часом вільного пробігу молекул називається час, на протязі якого молекули рухаються без зіткнень, тобто це середній час між двома послідовними зіткненнями: $\bar{Z} = \frac{\bar{l}}{g}$.

Для певного газу при незмінній температурі середня довжина вільного пробігу обернено пропорційна тиску газу: $p_1 \cdot \bar{l}_1 = p \cdot \bar{l}_2$.

Середня довжина вільного пробігу: $\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \cdot n \cdot d^2}$

n – кількість молекул в одиниці об'єму.

d – діаметр молекул.

Основні рівняння кінетичної теорії газів.

Основні рівняння кінетичної теорії газів показують залежність між тиском газу,

$$pV = \frac{2}{3} E_K$$

його об'ємом, та кінетичною енергією поступального руху молекул

$$E_K = \sum_{i=1}^N \frac{m g_i^2}{2}$$

Якщо ввести середню квадратичну швидкість тоді $E_K = \frac{1}{2} N \cdot m \cdot \bar{g}^2$.

N – кількість молекул газу.

m – маса газу (частинки)

Якщо рахувати, що кількість частинок і масу частинки: $E_K = \frac{1}{2} M \cdot \bar{g}^2$, якщо

врахувати це то отримаємо:

$$pV = \frac{1}{3} M \cdot \bar{g}^2$$

$$p = \frac{1}{3} \rho \bar{g}^2$$

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{M}{V} \cdot \bar{g}^2$$

Якщо розглянути 1 моль газу, то $pV\mu = \frac{1}{3} N_A \cdot m \bar{g}^2$.

Кінетична енергія характеризує середню кінетичну енергію хаотичного теплового руху молекул газу.

Порівняння цих рівнянь з рівнянням Менделєєва – Клапейрона для одного моля газу приводять, до молекулярно кінетичного тлумачення абсолютної температури.

$E_K = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_A} \cdot T$ в цій формулі $\frac{R}{N_A}$ - стала Боцмана.

Ця формула кінетичної енергії дозволяє розкрити фізичну суть абсолютної температури.

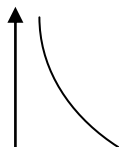
Основні газові закони.

Для ідеального газу справджуються закони:

Закон Бойля – Маріотта говорить про те, що при сталій температурі pV є величина стала, алоє залежить від маси газу і температури. $pV = \text{const}$. Процес зміни стану, при сталій температурі називається ізотермічним процесом

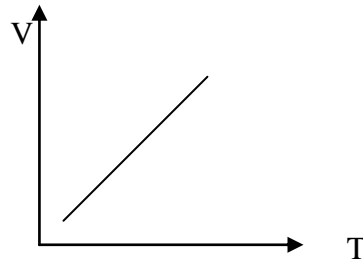
$pV = \text{const}$

$T = \text{const}$

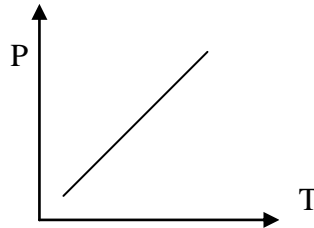


Це рівняння ізотермічного процесу.

2 Закон Гейлюсака: при сталому тиску відношення об'єму газу до абсолютної температури є величина, стала $\frac{V}{T} = const$ при $p = const$. Процес зміни стану газу є ізобарним.



3 Закон Шарля – при $V = const$ відношення тиску до температури є величина стала $\frac{P}{T} = const$ при $V = const$.



Це є ізохорний процес

Фізичні закони термодинаміки.

Термодинаміка вивчає фізичні та хімічні явища в газах, рідинах та твердих тілах з точки зору енергетичних перетворень характерно, що в цих процесах інші видимі енергії можуть повністю перетворюватись у внутрішні тоді, як повне перетворення внутрішньої енергії в іншу неможливе. Пояснюється, це тим, що хаотичний рух молекул-більш ймовірний ніж напрямлені рухи інших видів енергій. Об'ємні дослідження в термодинаміці у загальному вигляді називають термодинамічною системою. Під цією системою розуміють деяку речовину, задану параметрами її стану, оскільки вона бере участь у процесах зміни та перетворення енергії.

До основних понять і величин у термодинаміці належать: внутрішня енергія, робота та кількість теплоти. Під внутрішньою енергією системи розуміють сумарну енергію всіх видів частинок з яких складається система. Сюди входять кінетична і потенціальна енергія молекул, енергія коливальних рухів атомів у молекулах внутрішньоядерна енергія. До внутрішньої енергії не відноситься енергія системи, як цілого енергія не відноситься, яку система має внаслідок механічного руху, або внаслідок взаємодії з іншими тілами, або системами. Інакше чи кажучи внутрішню енергію називають сумарну енергію мікрочастинок з яких складається система. В межах термодинамічних процесів внутрішня енергія змінюється тільки за рахунок зміни енергії теплового руху частинок та потенціальної взаємодії між ними. Щодо теплової енергії, під якою розуміють енергію всіх видів теплового руху, то для реальної системи відокремлювати її від інших частин внутрішньої енергії недоцільно і часто неможливо, тому розглядатимемо зміну внутрішньої енергії системи в цілому.

Робота.

Поняття роботи в термодинаміці набуває широкого змісту, бо стан системи і відповідно її внутрішню енергію, як формулою стану можна змінювати завдяки виконанню макроскопічної роботи. Макроскопічна робота здійснюється без будь

якого видимого переміщення тіл – називається теплообміном. Кінцевим результатом теплообміну є передавання теплового руху від одного тіла до іншого. Ця передача здійснюється через процес перетворення одних форм в інші і тому теплообмін є процесом мікроскопічної роботи. Він може відбуватись через дотик тіл і на відстані. Макроскопічна робота і теплообмін – це способи зміни внутрішньої енергії. Кількісною мірою процесу макроскопічної роботи є фізична величина, яка називається *теж роботою*. Кількісною мірою процесу теплообміну є фізична величина, що називається *кількістю теплоти*. Кількість теплоти і робота. Як величини, що визначають зміну внутрішньої енергії системи у реальних процесах можуть бути взаємопов'язані і визначають одна одну.

Перший принцип термодинаміки.

Він виражає закон збереження і перетворення енергії в застосуванні до теплових процесів. Для встановлення аналітичного виразу першого принципу термодинаміки слід враховувати, що внутрішня енергія системи може змінюватись або в результаті теплообміну або в результаті виконання роботи, тому приріст внутрішньої енергії системи дорівнює сумі одержаної кількості теплоти і виконаної над системою роботи:

$$\Delta U = Q + A$$

Ця рівність складена відповідно до закону збереження енергії і є одним із виразів першого принципу термодинаміки. Будемо враховувати, що зміна енергії системи виконується проти зовнішніх сил.

$$\Delta U = Q - A$$

$U = \Delta Q + A$ - перший закон термодинаміки.

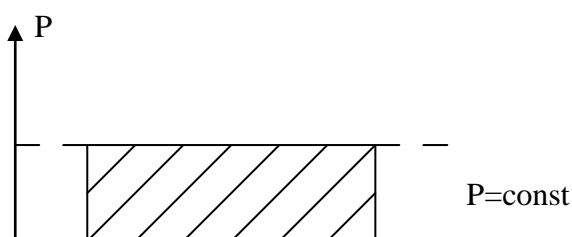
Кількість теплоти, яку дістає система ззовні йде на збільшення внутрішньої енергії системи роботи проти зовнішніх сил. З третього принципу термодинаміки зовсім не впливає, що завжди коли система дістає певну кількість теплоти її внутрішня енергія збільшується. Може стати, що система дістала теплоту ззовні, а її внутрішня енергія зменшується. Виконану роботу, або кількість теплоти, яку дістала система в різних процесах розбивають на ряд елементарних процесів, так щоб до кожного з них можна було застосувати перший принцип термодинаміки в диференціальній формі, а процес в цілому оцінюють за інтегральною сумою результатів усіх елементарних процесів: $\delta Q = dU + \delta A$

Характерно, що у виразі першого принципу термодинаміки тільки внутрішня енергія системи є функцією стану, а кількість теплоти і виконана робота зокрема не є функціями стану. Ці величини (Q і A) залежать від способу переходу системи з одного стану в інший.

Розглянемо ізобарний процес ($p = \text{const}$)

Щоб визначити роботу в ізобарному процесі запишемо елементарну роботу газу: $dA = pdV$. Для визначення повної роботи про інтегруємо: $A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p(V_2 - V_1)$

Якщо графіком зобразити ізобарний процес площі фігури, то це буде виглядати так



V_1

Якщо ж розглянути ізотермічний процес, тобто кили $T = \text{const}$, то роботу визначають за формулою: $A = R \cdot T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$, $A = RT \ln \frac{V_2}{V_1}$, при ізохорному процесі

$V = \text{const}, dV = 0, A = 0$.

Теплота.

В ізобарному процесі кількість теплоти за формулою: $Q = C_p(T_2 - T_1)$.

Кількість теплоти при ізобарному процесі: $Q = A$.

При ізохорному процесі $Q = C_v(T_2 - T_1)$.

C_p, C_v - молекулярна теплоємність газу при сталому об'ємі і тиску.

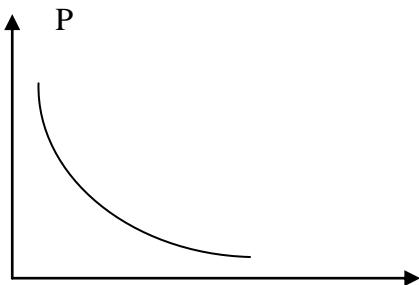
Адіабатний процес.

Процес, що відбувається при теплообміну з навколишнім середовищем називається адіабатним. Характеристикою такого процесу є $dQ = 0$. Застосовуючи до цього процесу перший принцип термодинаміки отримаємо $A = -dV$, тобто в адіабатному процесі робота виконується за рахунок внутрішньої енергії системи. У випадку ідеального газу можна записати, що $dA = -C_v dT$.

Газ виконує роботу проти зовнішніх сил, в результаті адіабатного процесу температура газу буде зменшуватись і навпаки при адіабатному стисканні температура газу буде підвищуватись. При адіабатному процесі одночасно змінюється всі три параметри газу (P, V, T), залежність між цими параметрами описується рівняннями Менделєєва - Клапейрона. Додатково до цього процесу справджується рівняння, яке виражає залежність між тиском та об'ємом в цьому адіабатному процесі.

$$pV^\gamma = \text{const}, \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

γ – залежить від роду газу. Якщо зобразити адіабатний процес, то ми отримаємо гіперболу, яку називають адіабатною.



Роботу в адіабатному процесі можна визначити за формулою: $A = \frac{C_v}{R}(P_1V_1 - P_2V_2)$

Другий принцип термодинаміки.

Перший принцип термодинаміки вказує на кількісне збереження енергії в явищах перетворення, але не вказує на напрям термодинамічних процесів, тому першому принципу термодинаміки не досить для побудови теорії теплових процесів. Цей

недолік усувається другим принципом термодинаміки. Другий принцип термодинаміки має декілька формулювань, але всі вони за своєю сутністю ідентичні.

1 Теплота не може переходити сама по собі від тіла з нижчою температурою до тіла з вищою температурою.

2 Неможливо побудувати періодичну діючу машину, вся діяльність якої зводилась би до забирання теплоти від теплового резервуару і перетворення її в механічну роботу.

3 Неможливо створити такий двигун, який виконував би роботу, за рахунок охолодження навколишніх тіл.

Для отримання кількісного, виразу другого принципу термодинаміки необхідно відмінити цикл Карно, що складається з оборотних процесів, для нього справджується рівність:

$$\frac{Q_1 Q_2}{Q_2} = \frac{T_1 T_2}{T_2}$$

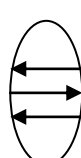
Якщо цей вираз перетворити, то можна записати:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Відношення теплоти до температури, при якій розглядається ця теплота називається зведеною теплотою.

Якщо ж процес не оборотний, то сума зведених кількостей теплоти буде від'ємною.

Якщо зобразити оборотний процес, то він буде мати вигляд.

	<p><u>Завжди</u></p> <hr style="width: 100%;"/> <p><u>оборотний процес</u></p> <p><u>можна розбити на нескінченну</u> велику кількість елементарних циклів Карно. Для оборотного процесу після розбиття ми отримаємо ряд адіабат. Беручи суму зведених кількостей теплоти для всіх елементарних циклів, тобто інтегруючи по замкнутому контурі ми отримаємо вираз $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$ для</p>
---	--

всього оборотного циклу. Якщо цикл необоротний, то цей вираз переписеться $\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$. Якщо об'єднати два цих вирази(процеси), то отримаємо, що $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$ називається нерівність Клаузіуса, яка є кількісним виразом другого принципу термодинаміки. Цей вираз може бути критерієм оборотності або необоротності процесу. З нерівності Клаузіуса випливає, що для оборотних процесів сума зведених кількостей теплоти дорівнює 0. з математики відомо, що коли криволінійний інтеграл узятий по замкнутому контуру дорівнює 0, то існує така

функція від змінних інтегрування, повним диференціалом якого дорівнює підінтегральному виразу. Цю функцію називають ентропією ($dS = \frac{\delta Q}{T}$).

Ентропія є функцією стану речовини оскільки її значення не залежить від шляху інтегрування, а лише від початкових і кінцевих параметрів стану. Енергія будь-якої речовини при температурі абсолютного нуля дорівнює нулю. Другі принцип термодинаміки можна записати через змінну ентропії, де ентропія є мірою необоротності процесу $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$.

Якщо розглянути ізольовану систему, тобто систему, яка немає теплообміну із зовнішнім середовищем, то для такої системи $\delta Q = 0$ і $dS \geq 0$.

Для ізольованої системи ентропія може зростати або залишатися незмінною. В такій системі може відбуватися лише такі процеси, які ведуть до зростання ентропії, тобто до вирівнювання температур.

З Е Л Е К Т Р И К А І М А Г Н Е Т И З М

Мислитель Фалес Мілетський за шість століть до нашої ери звернув увагу на спостереження ткачів за здатністю янтарних човників притягувати легкі тіла. Від грецького слова “електрон” – янтар придворним лікарем англійської королеви Єлизавети У. Гільбертом введений у 1600р., термін “електрика”.

С. Грей у 1792р. поділив тіла на провідники і непровідники електрики, а пізніше показав, що однойменні електричні заряди відштовхуються, а різнойменні – притягуються.

При електризації тіл тертям одночасно електризуються обидва тіла, причому одне з них дістає позитивний заряд, а друге – негативний. Позитивний заряд виникає наприклад, на склі, натертому шкірою, а негативний – на янтарі натертому шкірою.

Позитивний заряд першого тіла завжди точно дорівнює негативному заряду другого тіла, якщо до електризації обидва тіла не були заряджені. Це положення відоме під назвою **закону збереження електричного заряду**: *електричні заряди не виникають та не зникають, вони можуть лише передаватись від одного тіла до іншого або переміщуватися всередині даного тіла.*

З цього закону випливає, що в будь-якій нейтральній речовині є заряди обох знаків до того ж в однакових кількостях. Внаслідок стикання двох тіл при терті частина зарядів переходить від одного тіла до іншого. Рівність суми позитивних і негативних зарядів порушується і вони заряджаються різнойменно.

Наелектризувати тіла можна не лише тертям, але й помістивши поблизу них електрично заряджене тіло (*електризація через вплив*). При електризації тіла в наслідок впливу в ньому порушується рівномірний розподіл зарядів. Заряди перерозподіляються так, що в одній частині тіла виникає надлишок позитивних зарядів, а в іншій негативних.

На основі дослідів було встановлено, що електричний заряд будь-якого тіла складається з цілого числа елементарних зарядів, що дорівнює $1,6 \times 10^{-19} \text{ Кл}$. Носієм елементарного заряду є електрон, масою $9,1 \times 10^{-31} \text{ кг}$. Найменша стабільна частинка, що має найменший електричний позитивний заряд – протон, маса $1,67 \times 10^{-27} \text{ кг}$.

Всі тіла поділяються на провідники і діелектрики. Провідником називається тіло, що містить вільні електричні заряди, які можуть рухатися по всьому об'єму. В металах провідність зумовлена лише рухом електронів. Якщо провідником є газ чи рідина, то в них рухаються як позитивні так і негативні частинки: позитивно та негативно заряджені іони й електрони.

Діелектриком є будь-яке середовище (газ, рідина або тверде тіло), в якому тривалий час може існувати електричне поле. На відміну від провідників в діелектриках відсутні вільні електричні заряди. Зовнішнє електричне поле спричиняє в них поляризацію атомів, молекул або іонів, сумарне електричне поле яких є оберненим полем поляризації.

3.1 Закон Кулона

Кулон встановив, що сила взаємодії F між двома невеликими зарядженими металевими кульками обернено пропорційна квадрату взаємодії між ними і залежить від величини зарядів q_1 та q_2 .

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Закон Кулона справедливий лише для взаємодії точкових електричних зарядів, тобто таких заряджених тіл, лінійними розмірами яких можна знехтувати порівняно з відстанню між ними. Крім того він визначає силу взаємодії між нерухомими електричними зарядами, тобто цей закон електростатичний. **Закон Кулона** твердить, що *сила електричної взаємодії між двома точковими електричними зарядами прямо пропорційна добутку величини зарядів, обернено пропорційна квадрату відстані між ними і напрямлена вздовж прямої, що з'єднує ці заряди.*

Кулон вивчав взаємодії між зарядами, що перебували в повітрі. Наступні експериментальні дослідження показали, що при інших однакових умовах сила електричної взаємодії між двома точковими зарядами залежить від властивостей середовища, в якому ці заряди перебувають. Вплив середовища на силу електростатичної взаємодії між зарядами враховує в законі Кулона коефіцієнтом k , який також залежить від вибору одиниць вимірювання величин, які входять в формулу закону Кулона. $k = k_1 / \varepsilon$, де k_1 – коефіцієнт який залежить від вибору системи одиниць; ε – відносна діелектрична проникність середовища – безрозмірна величина, що характеризує його електричні властивості.

$$k_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} ; \quad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2} ; \quad F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2} ,$$

$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ – електрична стала (діелектрична проникність вакууму).

Систему, яка складається з двох точкових зарядів однакових за величиною і протилежних за знаком відстань між якими l називають **диполем**. Добуток позитивного заряду на відстань між зарядами називається **електричним моментом диполя**.

$$p = ql \qquad \vec{p} = q \vec{l}$$

Якщо відстань між зарядами розглядати як вектор від мінуса до плюса, то електричний момент диполя буде також вектором, $\vec{\ell}$ – плече диполя.

3.2 Електростатичне поле

Простір в якому перебуває електричний заряд, характеризується певними фізичними властивостями. Так, на довільний заряд, внесений в цей простір, діють електростатичні сили Кулона. А якщо в просторі діють інші сили, то вважають, що існує силове поле. Поле є видом матерії, що здійснює взаємодію між частинками речовини. Для характеристики електричного поля вводять фізичну величину, що дістала назву його **напруженості**. *Напруженість електростатичного поля в даній точці називають величиною, що дорівнює відношенню сили, з якою поле діє на позитивний заряд, вміщений в цю точку, до величини заряду q , тобто*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} .$$

Напрямок вектора напруженості збігається з напрямком сили, що діє на позитивний заряд, вміщений в дану точку поля

$$E = \frac{q_0}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$$

Напруженість електричного поля системи точкових зарядів дорівнює векторній сумі напруженості полів, утворених кожним із цих зарядів окремо.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Цю властивість називають *принципом незалежності* дії електричних полів, або *принципом суперпозиції* їх.

3.2.1 Розподіл електростатичних зарядів у просторі

Нерухомі електричні заряди в просторі можуть розміщуватися або дискретно – окремих точках, або неперервна – вздовж якоїсь лінії, на поверхні будь-якого тіла, або в якомусь об'ємі. Для випадку неперервного розподілу електричних зарядів вводиться поняття про густину заряду.

При неперервному розподілі зарядів вздовж лінії вводять *лінійну густину електричних зарядів*.

$$\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$$

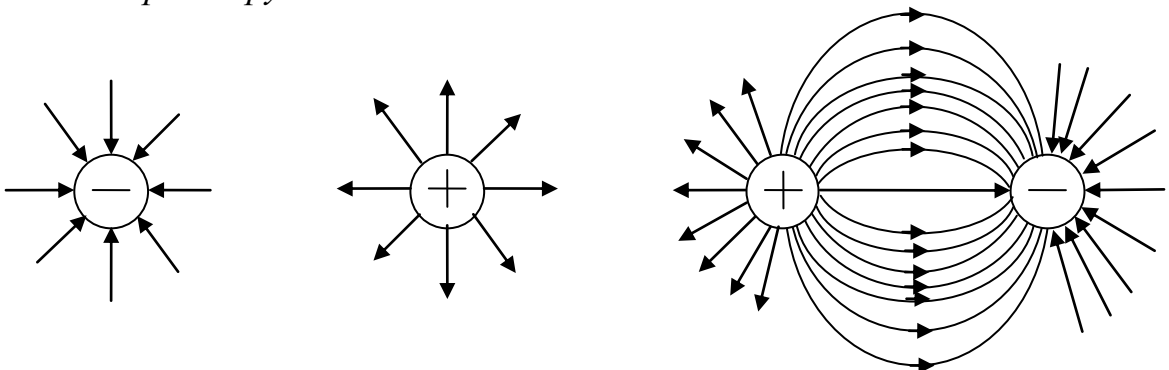
Якщо заряд неперервно розміщений по будь-якій поверхні, користуються *поверхневою густиною зарядів*.

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{ds}$$

Неперервний розподіл зарядів в будь-якому об'ємі характеризується *об'ємною густиною зарядів*.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

Електростатичне поле однозначно визначене, якщо відомий вектор напруженості в кожній його точці. Це завдання можна розв'язати, аналогічно виражаючи залежність напруженості поля від координат у вигляді формул або графічно. Для графічного вираження використовують силові лінії (лінії напруженості). *Силові лінії – це криві, дотичні до яких у кожній точці збігаються з напрямком вектора напруженості поля.*



Умовно прийнято, що вони починаються на позитивних зарядах, а закінчуються на негативних. Траєкторія руху тіла характеризується властивістю,

за якою в кожній її точці по дотичній до неї напрямлена швидкість тіла. По дотичній до силової лінії напрямлена сила, що діє на заряджене тіло, а отже, і на прискорення, з яким воно рухається. Заряджені тіла рухаються вздовж силових ліній тільки тоді, коли силові лінії прямолінійні, а початкові швидкості тіл збігаються за напрямком з силовими лініями або дорівнюють 0.

3.2.2 Вектор електричної індукції. Теорема Остроградського - Гаусса

Припустимо, що точковий заряд q міститься в центрі сферичного повітряного пухирця, який сам перебуває в певному середовищі, наприклад у маслі, діелектрична проникність якого $\varepsilon=2$. Напруженість електричного поля поблизу межі розподілу повітря – масло на відстані r від заряду, меншій за радіус пухирця, дорівнюватиме

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

Напруженість електричного поля у точці, що знаходиться в маслі як завжди близько до межі розподілу, буде меншою у ε разів ($\varepsilon=2$):

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

Напруженість на межі між двома середовищами стрибкоподібно змінюється. Якщо середовище в якому реалізується електростатичне поле, неоднорідне, тобто характеризується різними значеннями діелектричної проникності, то для характеристики поля зручніше використати іншу величину, яка на відміну від напруженості, не змінюється стрибкоподібно поблизу поверхні розподілу двох різних діелектриків. Цю величину називають **вектором електричної індукції** \vec{D} . Вона пов'язана із вектором напруженості співвідношенням

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}.$$

Індукція при переході через межу поділу двох діелектриків залишається незмінною. Зміна \vec{E} при переході з вакууму у середовище з діелектричною проникністю ε компенсується відповідним множником.

Оскільки для вакууму і практично для повітря $\varepsilon=1$, то для них

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}.$$

За аналогією з силовими лініями для графічного зображення електричних полів використовують лінії електричної індукції. Число ліній індукції, що проходить через довільну поверхню, проведenu в полі, називають **потокм вектора електричної індукції** через поверхню.

Обчислимо потік вектора електричної індукції \vec{N} через поверхню радіуса r , в центрі якої міститься заряд q , що створює електричне поле. Оскільки напруженості електричного поля в кожній точці сферичної поверхні

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$, то через одиницю поверхні проходить E ліній напруженості або D

ліній індукції, що пронизують поверхню сфери радіуса r , можна визначити так:

$$N = D \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = q.$$

Неважко довести, що знайдений результат справедливий не тільки для випадку сферичної поверхні. Він справедливий також для будь-якої замкненої поверхні, в середині якої в довільній точці міститься точковий заряд q .

Попередню формулу можна узагальнити і на випадок, коли поле створене системою точкових зарядів. Враховуючи принцип суперпозиції електричних полів, дістанемо:

$$N = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = \sum_{i=1}^n q_i$$

Теорема Остроградського-Гаусса: потік вектора електричної індукції через довільну замкнену поверхню не залежить від діелектричних властивостей середовища і дорівнює алгебраїчній сумі електричних зарядів, що містяться в середині цієї поверхні. Теорему застосовують для розрахунку індукції (або напруженості) полів, які створюються довільним зарядом, оскільки будь-який заряд можна подати у вигляді суми нескінченно великої кількості точкових зарядів.

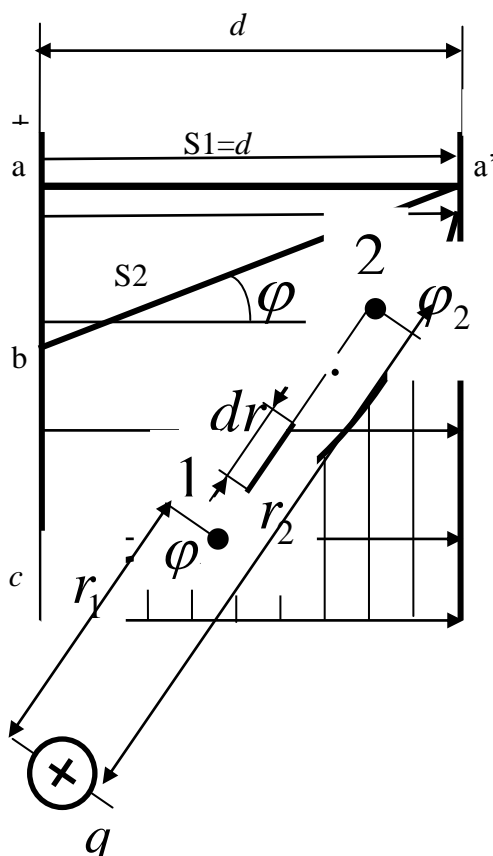
3.2.3 Робота в електростатичному полі

Розглянемо однорідне електричне поле утворене двома зарядженими нескінченно великими паралельними площинами.. Практично можна вважати однорідним електричне поле між скінченими паралельними площинами, якщо розміри їх значно більші від відстані d між ними. Розглянемо переміщення полем позитивного заряду q в трьох випадках.

Нехай поле переміщує цей заряд з точки a в точку a' . Робота поля в цьому випадку: $A = F \cdot S_1 = qEd$.

Якщо поле переміщує заряд з точки b в точку a' , то робота дорівнюватиме:

$$A = F \cdot S_2 \cdot \cos \varphi = F \cdot d = qEd$$



Тепер обчислимо роботу поля з переміщення електричного заряду з точки c в точку a' . Розіб'ємо криву S_3 на велику кількість ділянок, кожна з яких можна з великою точністю прийняти за пряму. Нехай таких ділянок буде n . Тоді

$$A = \sum_{i=1}^n F s_i \cos \alpha_i = F \sum_{i=1}^n d_i = Fd = qEd$$

Оскільки поле однорідне, то сила F залишається сталою для всіх ділянок.

З наведених прикладів можна зробити висновок, що робота електростатичного поля не залежить від шляху: вона для трьох випадків однакова, хоч траєкторія переміщення електричного заряду різна.

Нехай електричне поле утворене точковим зарядом q . Обчислимо роботу сил поля, яка виконується при переміщенні вздовж

силової лінії заряду q_0 з точки 1, що знаходиться на відстані r_1 , від джерела поля, в точку 2 – на відстань r_2 від нього (рис. 5,4). Робота dA з переміщення заряду на нескінченно малому шляху dr визначиться: $dA = Fdr$. Оскільки $F = q_0E$, то $dA = q_0Edr$.

Напруженість поля точкового заряду $E = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$, тому

$$dA = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q_0q}{r^2} dr.$$

Тоді вся робота з переміщення заряду q_0 з точки 1 в точку 2 буде дорівнювати:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} dr = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = q_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} \right).$$

Величини $\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1}$ і $\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2}$ позначаються як φ_1 і φ_2 і називаються

потенціалами точок 1 і 2 відповідно.

Отже, $A = q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Робота з переміщення заряду в електростатичному полі дорівнює добутку заряду на різницю потенціалів між початковою і кінцевою точками.

Звідси видно також, що ця робота не залежить від форми шляху. Якщо

$r_2 = \infty$, то $A = q_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} = q_0\varphi_1$, звідки

$$\varphi_1 = \frac{A}{q_0}.$$

Отже, **потенціал** — це фізична величина, що чисельно дорівнює роботі, яку виконує електричне поле з переміщення одиничного позитивного заряду з даної точки поля на нескінченність. Або, потенціал даної точки поля — це величина, що чисельно дорівнює роботі, яку повинна виконати зовнішня сила з переміщення одиничного позитивного заряду із нескінченності в дану точку. Потенціал даної точки поля визначає потенціальну енергію одиничного позитивного заряду, поміщеного в цю точку. Якщо кожний із зарядів q_1, q_2, \dots, q_n утворює в даній точці поле з потенціалом відповідно $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, то потенціал поля, утвореного у цій точці всіма зарядами, дорівнюватиме алгебраїчній сумі потенціалів полів, утворених кожним зарядом окремо:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n.$$

На практиці потенціал Землі умовно взято таким, що дорівнює нулю. Тому заземлений провідник має нульовий потенціал. У теоретичних розрахунках зручніше нульовий потенціал пов'язати з точкою, що міститься на нескінченності.

Одиницю різниці потенціалу можна ввести, скориставшись формулою

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q_0}.$$

В СІ за одиницю різниці потенціалів взято вольт (В). Це різниця потенціалів між такими двома точками, перенесення заряду в один кулон між якими супроводиться виконанням роботи в один джоуль:

$$1B = \frac{1\text{Дж}}{1\text{Кл}}.$$

У системі СГСЕ за одиницю різниці потенціалів взято різницю потенціалів між такими двома точками, перенесення заряду в одну абсолютну електростатичну одиницю заряду між якими супроводиться виконанням роботи в 1 ерг:

$$1\text{СГСЕ}_q = \frac{1\text{ерг}}{1\text{СГСЕ}}.$$

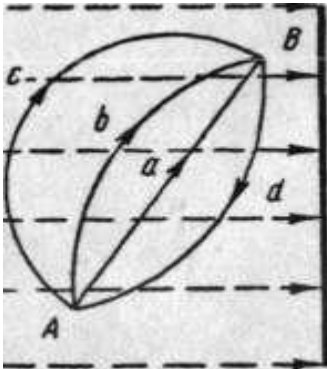
Оскільки $1\text{Дж} = 10^7\text{ерг}$ і $1\text{Кл} = 3 \cdot 10^9\text{СГСЕ}_q$, то $1B = \frac{1}{300}\text{СГСЕ}_q$.

Часто користуються позасистемною одиницею роботи і енергії, яка називається електронвольтом (eV). Один електронвольт дорівнює роботі, яка виконується при переміщенні заряду, що дорівнює заряду електрона, між двома точками поля з різницею потенціалів у 1 вольт. Заряд електрона дорівнює $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, тоді $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{Кл} \cdot 1\text{В} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{Дж} = 1,6 \cdot 10^{-12}\text{ерг}$.

Запишемо значення роботи однорідного електричного поля з переміщення електричного заряду q на відстань d з точки з потенціалом φ_1 в точку з потенціалом φ_2 . Тоді

$$A = qEd = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}.$$

Геометричне місце точок з однаковим потенціалом називається **еквіпотенціальною поверхнею**. Зрозуміло, що робота, яку виконує поле з переміщення електричного заряду по тій самій еквіпотенціальній поверхні, дорівнює нулю. Оскільки сила, що діє з боку поля на заряд, не дорівнює нулю, то рівність нулю роботи з переміщення заряду можлива тільки у випадку, коли



напрямок дії сили перпендикулярний до напрямку переміщення. Враховуючи, що напрямок дії сили на заряд збігається з напрямком вектора напруженості поля, можна зробити висновок про перпендикулярність ліній напруженості до еквіпотенціальних поверхонь.

Електростатичне поле можна зобразити графічно не тільки за допомогою силових ліній, а й за допомогою еквіпотенціальних поверхонь. Навколо кожної системи зарядів можна провести нескінченну множину еквіпотенціальних поверхонь. Прийнято їх проводити так, щоб різниці потенціалів між будь-якими сусідніми еквіпотенціальними поверхнями були однакові.

Знаючи розміщення силових ліній електростатичного поля, можна побудувати еквіпотенціальні поверхні і, навпаки, за відомим розміщенням еквіпотенціальних поверхонь можна в кожній точці поля визначити розміщення силових ліній.

Оскільки робота електростатичного поля з переміщення заряду не залежить від форми шляху, а визначається тільки потенціалами кінцевих точок, то виходить, що робота по замкненому контуру (рис. 5.5) в електростатичному полі ($AaBdA$, $AbBdA$, $AcBdA$) дорівнює нулю.

Поля, для яких робота по замкненому контуру дорівнює нулю, називаються **потенціальними**.

3.2. 4 Електроємність

Розглянемо спочатку відокремлений провідник, тобто такий, що містить досить далеко від інших тіл. Якщо такому провіднику надавати різні заряди $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, то він заряджатиметься відповідно до потенціалів $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$. Із збільшенням заряду q зростатиме і потенціал φ , який змінюється так, що відношення заряду до потенціалу є величиною сталою:

$$\frac{q_1}{\varphi_1} = \frac{q_2}{\varphi_2} = \dots = \frac{q_n}{\varphi_n} = C$$

Це відношення називається *електроємністю*, або просто ємністю провідника. Отже:

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

Електроємністю відокремленого провідника називається фізична величина, яка чисельно дорівнює електричному заряду, що змінює його потенціал на одиницю.

За одиницю ємності в СІ взято ємність конденсатора, напруга між обкладками якого 1 В при заряді 1 Кл. Ця одиниця називається *фарад*:

$$1\Phi = \frac{1\text{Кл}}{1\text{В}}$$

Одиниця електроємності в системі СГСЕ дорівнює:

$$1\text{СГСЕ}c = \frac{1\text{СГСЕ}q}{1\text{СГСЕ}\varphi}$$

Неважко переконатися, що розмірність електроємності в системі СГСЕ збігається з розмірністю довжини. Тому одиницею електроємності в системі СГСЕ є сантиметр. Можна довести, що в СГСЕ одиниця електроємності дорівнює електроємності ізольованої кулі, радіус якої 1 см.

Оскільки $1\text{Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЕ}q$ і $1\text{В} = \frac{1}{300} \text{ СГСЕ}\varphi$, то $1\Phi = 9 \cdot 10^{11} \text{ см}$. На практиці використовують і інші одиниці електроємності:

$$1 \text{ мікрофарада (1 мкФ)} = 10^{-6} \Phi = 9 \cdot 10^5 \text{ см};$$

$$1 \text{ пікофарада (1 пФ)} = 10^{-12} \Phi = 0,9 \text{ см}.$$

Якщо підрахувати електроємність Землі, вважаючи її провідною кулею радіуса 6400 км, то вона дорівнюватиме 711 мкФ.

Електроємність провідників не залежить від матеріалу, а залежить від їхніх розмірів і форми, діелектричних властивостей навколишнього середовища, а також наявності поблизу провідника інших провідників.

Поняття електроємності можна застосувати і до системи провідників, найпростішого з яких є плоский конденсатор – система з двох металевих паралельних пластин, розділених шаром діелектрика товщиною d , і однаково наелектризованих різнойменними зарядами.

При наданні обкладкам конденсатора зарядів $+q$ і $-q$ вони заряджуються до потенціалів φ_1 і φ_2 . Електроємністю конденсатора називають відношення заряду q на одній з його обкладок до різниці потенціалів між обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Виходячи з теореми Остроградського – Гауса, можна визначити напруженість однорідного електричного поля плоского конденсатора

$$E = k_1 \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} = k \frac{4\pi\sigma}{S\varepsilon}$$

де S – площа обкладок; $\sigma = q/S$ – поверхнева густина зарядів на обкладках;

k_1 - коефіцієнт, що залежить від вибору одиниць вимірювання (в СІ $k_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$).

Для однорідного поля справедливе співвідношення (5,25), тому

$$\varphi_1 + \varphi_2 = Ed = qd / (\varepsilon_0 \varepsilon S).$$

Підставивши цей вираз у (5,29), дістанемо формулу для обчислення електроємності плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

На практиці доводиться з'єднувати конденсатори в батареї. При паралельному з'єднанні конденсаторів їхня загальна ємність дорівнює сумі

ємностей:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_n.$$

Ємність батареї послідовно з'єднаних конденсаторів визначають за формулою:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_n}.$$

Отже, при паралельному з'єднанні конденсаторів ємності їх додаються, при послідовному – додаються величини, що обернені до їхніх ємностей.

Сферичний конденсатор складається з двоє концентричних сферичних обкладок, розділених сферичним шаром діелектрика. Якщо внутрішній обкладці такого конденсатора надати заряд $-q$, то на зовнішній обкладці, що заземлена, наводиться заряд $+q$. Поле сферичного конденсатора зосереджене між його обкладками і є таким, ніби заряд зосереджений в центрі сфери. Тому потенціал обкладок обчислюється за формулами:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1r_1}; \quad \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2r_2}.$$

Тоді різниця потенціалів між обкладками

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q(r_1 - r_2)}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2},$$

А електроємність сферичного конденсатора відповідно до формули (5,29),

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1r_2}{r_2 - r_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}{1 - \frac{r_1}{r_2}}.$$

Якщо зовнішній радіус сферичного конденсатора набагато більший за внутрішній ($r_1 \gg r_2$), то формула (5,34) спрощується і має такий вигляд:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1r_1.$$

Якщо $r_2 \rightarrow \infty$, то внутрішню обкладку сферичного конденсатора можна розглядати, як відокремлену кулю, а формула (5,35) визначатиме її електроємність. У системі СГСЕ ємність відокремленої кулі вимірюється величиною її радіуса r , якщо $\varepsilon = 1$

3.2.5 Енергія електростатичного поля. Густина енергії

В усіх висновках ми припускаємо, що окремий електричний заряд q , притаманні сегнетоелектричні властивості. Щоб зарядити будь-який провідник, треба здійснити певну роботу проти кулонівських сил відштовхування між однойменними електричними зарядами. Ця робота йде на збільшення електричної енергії зарядженого провідника.

Нехай ми маємо провідник, електроємність, заряд і потенціал якого відповідно C , q , φ . Робота, що виконується проти сил електростатичного поля при перенесенні заряду dq із нескінченності на провідник,

$$dA = -\varphi dq = -C\varphi d\varphi.$$

Щоб зарядити тіло до потенціалу φ , потрібно виконати роботу

$$A = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = -\frac{C\varphi^2}{2}.$$

Енергії зарядженого провідника W_ε визначається за формулою

$$W_\varepsilon = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Вираз $\frac{C\varphi^2}{2}$ називають *власною енергією* зарядженого тіла. Проте

електростатичне поле пов'язане з зарядом провідника. Тому формула (5,38) виражає енергію електростатичного поля. Очевидно, що енергія зарядженого конденсатора також визначається формулою (5,38), де φ - різниця потенціалів між його обкладками.

Визначимо енергію електричного поля плоского конденсатора спочатку для випадку $\varepsilon = 1$, якщо відомі E – напруженість його поля, d – відстань між пластинами конденсатора, S – їхня площа,

$$W_E = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}; \quad C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}; \quad \varphi_1 - \varphi_2 = Ed$$

де V – об'єм простору між пластинами конденсатора. Тоді в загальному випадку, коли $\varepsilon = 1$, енергія електричного поля конденсатора визначатиметься формулою

$$W_E = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V. \quad W_E = \frac{\varepsilon_0 S E^2 d^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V.$$

Звідси неважко визначити об'ємну густину енергії однорідного електричного поля

$$\omega_E = \frac{W_E}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}.$$

У випадку неоднорідного електричного поля об'ємна густина енергії в будь-якій точці поля визначається так:

$$\omega_E = \lim_{\Delta V \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta W_E}{\Delta V} \right)$$

де ΔW - енергія поля в об'ємі ΔV

3.3 Постійний електричний струм. Закони постійного струму

Якщо в провіднику створити постійне електричне поле, то носії зарядів почнуть рухатись упорядковано: носії позитивних зарядів у напрямі поля, негативні – у протилежний бік. Упорядкований рух зарядів називають **електричним струмом**. Його характеризують **силою струму** – скалярною величиною, що дорівнює кількості заряду, яка проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \frac{dq}{dt},$$

де dq – електричний заряд, що проходить через переріз провідника за нескінченно малий проміжок часу dt .

У загальному випадку електричний струм може бути обумовлений як рухом позитивних, так і негативних зарядів. При цьому перенесення позитивного заряду в одному напрямі еквівалентне перенесенню такого самого за величиною негативного заряду в протилежному напрямі. Якщо за час dt через деякий переріз провідника позитивні носії переносить заряд $dq+$, а негативні в протилежному напрямі $dq-$, то

$$I = \frac{dq+}{dt} + \frac{dq-}{dt}.$$

За напрям струму беруть напрям руху позитивних зарядів. Електричний струм називають постійним, якщо з часом залишаються сталими сила струму та його напрям.

Одиниця сили струму в СІ — ампер (А) — визначається на основі електромагнітної взаємодії двох паралельних прямолінійних провідників, по яких проходить постійний струм.

Розрізняють *струм провідності* і *конвекційний струм*. Струм провідності зумовлюється напрямленим переміщенням заряджених частинок (електронів, іонів) всередині нерухомого провідника (твердого, рідкого або газоподібного) при наявності в ньому електричного поля. Проте впорядкований рух електричних зарядів можна здійснити й іншим способом, а саме: переміщенням у просторі зарядженого макроскопічного тіла (провідника або діелектрика). Такий струм називається *конвекційним*. Прикладом конвекційного струму може бути орбітальний рух Землі, яка має надлишок негативних зарядів.

Для появи та існування струму провідності необхідні такі умови:

1) наявність в даному середовищі електричних зарядів, які б мали можливість у ньому рухатись. Такими зарядами у випадку металевих провідників є вільні електрони, в напівпровідниках — електрони і «дірки», в електролітах — позитивні і негативні іони, в газах — переважно позитивні іони і електрони;

2) наявність у даному середовищі електричного поля, енергія якого витрачається на переміщення зарядів. Отже, повинна мати місце різниця потенціалів між двома точками провідника. Для того щоб струм був тривалим, енергію електричного поля потрібно поповнювати, тобто підтримувати різницю потенціалів на кінцях провідника. Для цього до кінців провідника приєднують – спеціальний пристрій — джерело струму. Отже, для утворення неперервного електричного струму треба створити електричне коло.

Електричним колом називається сукупність джерел струму, споживача електричної енергії, вимірювальних і регулювальних приладів, вимикачів та інших елементів, з'єднаних провідниками. Найпростіше електричне коло складається з провідника, кінці якого під'єднано до джерела струму. В такому електричному колі струм проходить по зовнішній його частині — провіднику і внутрішній — джерелу струму. Джерело струму має два полюси: позитивний і негативний. При розімкненому зовнішньому колі на негативному полюсі джерела струму буде надлишок електронів, на позитивному — їх не вистачатиме. Зрозуміло, що таке розділення зарядів у межах джерела струму відбувається під дією сил, що мають некулонівську природу, оскільки під впливом кулонівської сили різнойменні заряди притягуються. Ці додаткові сили неелектричного походження, що діють у межах джерела струму, називаються *сторонніми*. Природа сторонніх сил може бути хімічною (гальванічні елементи, акумулятори), тепловою (термоелементи) тощо.

Розділення і перенесення зарядів у межах джерела струму гальмується його внутрішнім електричним полем і опором з боку середовища джерела струму. Тому у випадку замкненого електричного кола сторонні сили джерела струму виконуватимуть роботу A , величина якої складається з роботи A_1 , що виконується проти сил електричного поля джерела струму, і роботи A' , яка здійснюється проти механічних сил опору середовища цього джерела:

$$A = A_1 + A' \quad (5.45)$$

Роботу, яку виконують сторонні сили при переміщенні одиничного позитивного електричного заряду, називають *електрорушійною силою* (ЕРС) і визначають так:

$$\varepsilon = \frac{A}{q} = \frac{A_1 + A'}{q}. \quad (5.46)$$

ЕРС в одиницях СІ вимірюється у *вольтах*. Термін «електрорушійна сила» є невдалим, оскільки електрорушійна сила характеризує джерело струму з енергетичного боку.

Якщо полюси джерела струму розімкнені, то $A' = 0$, оскільки в цьому випадку стороння сила не переміщує зарядів, а тільки підтримує їх розподіл. Тоді:

$$\varepsilon = \frac{A}{q}. \quad (5.47)$$

Проте за визначенням, робота проти сил електричного поля буде

$$A_1 = q(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (5.48)$$

$$\varepsilon = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (5.49)$$

Отже, *електрорушійна сила дорівнює різниці потенціалів на полюсах розімкненого джерела струму.*

У випадку замкненого електричного кола на будь-якій ділянці його зовнішньої частини має місце деяка різниця потенціалів $\varphi' - \varphi'' = U$, її називають *напругою*, або спадом напруги на цій ділянці кола.

У 1826р. німецький фізик Г. Ом дослідно встановив, що сила струму в провіднику прямо пропорційна напрузі на кінцях провідника і обернено пропорційна опору цього провідника:

$$I = \frac{U}{R} \quad (5.50)$$

Співвідношення (5.50) називається *законом Ома для ділянки кола*. Користуючись ним, можна дістати одиницю опору. В СІ опір провідника вимірюється в *омах*. Ом — опір такого провідника, в якому виникає сила струму в один ампер, коли різниця потенціалів на його кінцях становить один вольт.

Якщо замкнене коло складається з джерела струму з ЕРС ε і внутрішнім опором r і зовнішньої частини з опором R , то сила струму в колі визначається співвідношенням

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R} \quad (5.51)$$

Співвідношення (5.51) називають *законом Ома для повного кола*.

Дослід показує, що опір провідника залежить від його геометричних розмірів, матеріалу, зовнішніх умов (особливо температури). Згідно з експериментальними дослідженнями Ома опір однорідного провідника прямо пропорційний його довжині і обернено пропорційний площі поперечного перерізу:

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

Коефіцієнт пропорційності ρ , що характеризує матеріал, з якого виготовлено провідник, називають *питомим опором* речовини провідника. Питомий опір, а тому і опір провідника, залежить від температури. В загальному випадку така залежність досить складна. Проте у металевих провідників для невеликих інтервалів температур можна користуватись наближеними формулами:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t); \quad R = R_0(1 + \alpha t).$$

Тут ρ_0 і R_0 — відповідно питомий опір при 0°C ; t — температура в градусах Цельсія; α — температурний коефіцієнт опору. При точних розрахунках треба враховувати залежність α від температури.

При дуже низьких температурах, близьких до абсолютного нуля (0,5—8К), опір деяких металів (алюміній, цинк, свинець та ін.) стрибкоподібно зменшується майже до нуля. Таке явище називають *надпровідністю*.

Проходження струму через провідник, якщо він не перебуває в стані надпровідності, супроводжується його нагріванням. Це пояснюється тим, що електричні заряди, рухаючись напрямлено, зазнають опору в середовищі провідника. Вивчаючи теплову дію струму, англійський фізик Д. Джоуль (1818—1889) і російський фізик Е. Х. Ленц (1804—1865) незалежно один від одного дійшли до такого висновку: кількість *теплоти* Q , що виділяється на певній ділянці провідника, прямо пропорційна силі струму I , що проходить через провідник, напрузі на його кінцях U і часу t проходження струму:

$$Q = UIt. \quad (5.54)$$

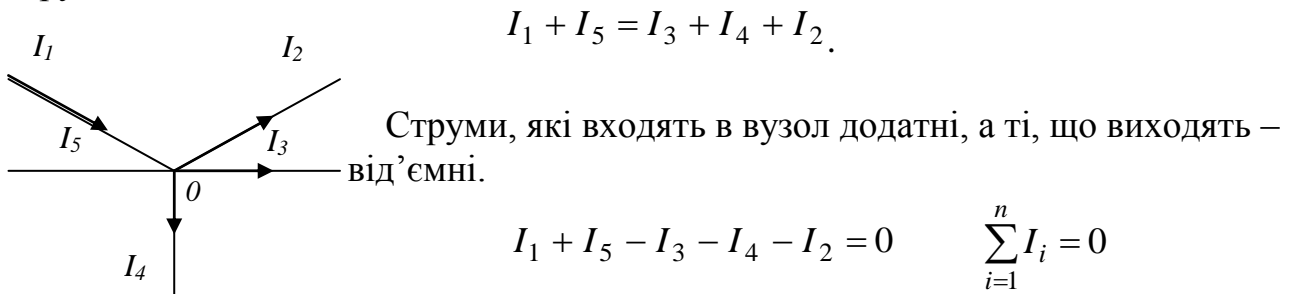
Цей висновок називається *законом Джоуля—Ленца*. Якщо силу струму взято в амперах, напругу в вольтах, а час у секундах, то кількість теплоти, що виділяється, вимірюється джоулями.

Окрім нагрівання провідників, енергія електричного струму може зазнавати найрізноманітніших перетворень. Так, при наявності в зовнішньому колі електродвигуна, частина електричної енергії джерела струму перетворюється в механічну енергію. Проходження електричного струму через провідник другого роду — електроліт — супроводиться перетворенням частини енергії джерела в хімічну. Коли ж зовнішня частина електричного кола складається лише з металевих провідників, то у випадку великих температур енергія електричного струму частково йтиме на випромінювання.

Правила Кірхгофа Розрахунок електричних лінійних кіл постійного струму

1. Вузлом називається точка в якій сходяться не менше трьох струмів.

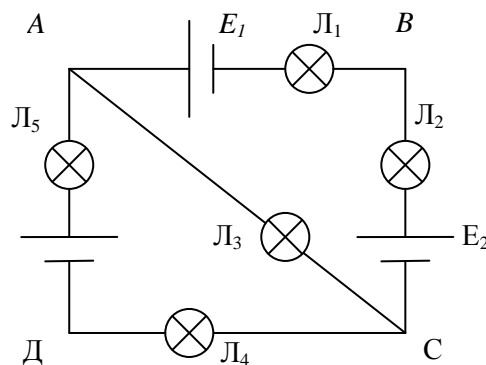
Нехай вузловій точці O сходяться I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 , тоді перше правило Кірхгофа для вузла буде: сума всіх струмів, які входять в точку розгалуження дорівнює сумі струмів, які виходять з цієї точки.



Алгебраїчна сума величин всіх струмів в кожній вузловій точці елементарного кола дорівнює 0. Завжди можна скласти $n-1$ незалежних рівнянь.

1. В цьому складному колі, ми повинні виділити контур. Для кожної ділянки запишемо склад напруг.

$$\begin{aligned} I_1 \cdot R_1 &= \varphi_A - \varphi_B + E_1 \\ I_2 \cdot R_2 &= \varphi_B - \varphi_C + E_2 \\ I_3 \cdot R_3 &= \varphi_C - \varphi_A \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 &= E_1 + E_2 \\ \sum_{i=1}^n I_i R_i &= \sum_{k=1}^m E_k \end{aligned}$$



Будь-якому замкненому контуру довільно вибраному в розгалуженому елементарному колі, алгебраїчна сума добутків величин струмів на опори відповідних ділянок кола дорівнює алгебраїчній сумі електрорушійних сил, що діють тут.

Сума має зміст алгебраїчної тому, що знаки їх членів залежать від напрямку обходу. Додатними будуть ті струми, які збігаються з напрямом обходу, а від'ємними, які напрямлені протилежно. Додатними будуть ті електрорушійні сили власний струм яких збігається за напрямом обходу, тобто ті які в напрямі

обходу будуть зорієнтовані від негативного до позитивного полюса. Правила Кірхгофа застосовують як для постійного так і для змінного струму.

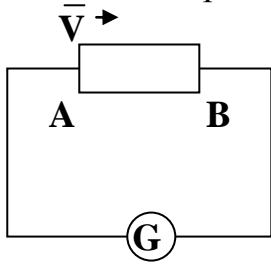
3.4 Електропровідність

3.4.1 Електричний струм в металах

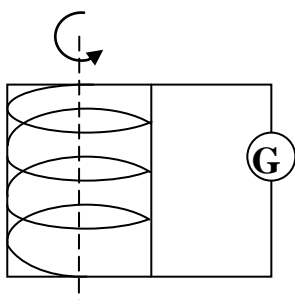
Першу спробу встановити механізм електропровідності металів зафіксовано:

1) в дослідженнях Рікке (1901р.), де було складено послідовно три різних циліндри: два мідних і один алюмінієвий, щільно притиснуті один до одного. Практично протягом року по колу пропускали струм, за цей час було перенесено $3,5 \cdot 10^6$ Кл електрики. По закінченні експерименту ні хімічний аналіз, ні ретельне зважування, ні спостереження під мікроскопом не виявили проникнення одного з металів в середовище іншого. *Носії електричного заряду не зв'язані з атомами і однакові для всіх металів.*

2) при дослідженні інерційних властивостей носіїв електричного струму. Металевий стержень АВ, що переміщується зі швидкістю V різко загальмовується, при цьому чутливий гальванометр фіксує короточасний електричний струм. Це пояснюється тим, що в процесі руху стержня носії струму захоплюються кристалічною решіткою і набувають швидкості, а в момент гальмування продовжують рухатись і породжують електричний струм. Це показує, що *носії електричного струму мають певну масу.*



3) для дослідження інерційних властивостей носіїв електричного струму був проведений дослід з котушкою. До котушки, яка оберталась навколо осі, був під'єднаний гальванометр. В момент гальмування котушки було зафіксоване короточасне відхилення стрілки гальванометра. За напрямом відхилення стрілки, вдалося встановити, що в металі рухаються і утворюють струм негативно заряджені частинки. Також їх питомий заряд дорівнює: $\frac{e}{m} = \frac{l \cdot v}{q \cdot R}$, де l – довжина провідника; v – швидкість, з якою рухається провідник; R – опір провідника; q – заряд провідника. В правій частині q визначається за допомогою балістичного гальванометра.



Було встановлено, що носіями електричного струму в металах є вільні електрони, які хаотично рухаються між вузлами кристалічної решітки і утворюють своєрідний електронний газ. Наявність вільних електронів в металах пояснюється тим, що зовнішні електрони, які слабо взаємодіють з атомами, перестають бути зв'язані з окремими атомами і переходять від одного до іншого.

Експериментальним шляхом були встановлені маса і питомий заряд електрона, але теорія провідності, в яку вкладено теорію газів не могла дати відповідь на певні явища. Теорію електронної провідності створили П. Друде і

Г.Лоренц. Вони вважали, що електронний газ в металах поводить себе як одноатомний ідеальний газ, який описується законами Больцмана: $\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}RT$.

Така теорія була справедлива для пояснення закону Ома і Джоуля – Ленца: $j = \sigma \cdot E$; $\omega^2 = \sigma \cdot E^2$; $\omega^2 = \omega_0 = \omega$.

Розглянемо закон Джоуля–Ленца. Для отримання закону можна міркувати так, що взаємодія електронів з іонами кристалічної решітки є виникненням електричного опору. Електрони провідності, взаємодіючи з іонами кристалічної решітки, втрачають набуту електричну енергію, внаслідок цього збільшується амплітуда коливань іонів кристалічної решітки, тому підвищується температура. Якщо врахувати кінетичну енергію електрона в кінці вільного пробігу та врахувати кількість зіткнень електрона за одиницю часу і заг. кількість зіткнень в об'ємі провідника, то в розрахунку на одиницю металу за одиницю часу кристалічна решітка отримує енергію: $\omega^2 = \sigma \cdot E^2$; $\sigma = \frac{1}{\rho}$.

$$\omega_i = \sigma E^2$$

Це співвідношення виражає *закон Джоуля – Ленца* у диференціальній формі: $Q = I \cdot U \cdot t$.

Класична електронна теорія була зручною для пояснення явищ і властивостей речовин. Поряд з цим були виявлені істотні розходження між теорією і фактами. Це стосується твердження Відемана – Франца, згідно якого в певному інтервалі температур, а особливо при низьких температурах спостерігаються значні відхилення. Класична теорія не змогла пояснити залежність опору провідника від температури. За даними питомий опір $\rho = \frac{1}{\sigma}$;

$\rho = \frac{mv}{en\lambda}$, m – маса, v – швидкість, e – заряд, n – концентрація, λ – довжина вільного пробігу (шлях електрона без зіткнення).

Але згідно МКТ, v_C пропорційна $\bar{v} = \sqrt{T}$, звідси $\rho \sim \sqrt{T}$. Експериментально встановлено, що $\rho = \rho_0(1 + \alpha T)$, крім цього, якщо виходити з того, що середня довжина пробігу в металах = порядку сталої решітки, підрахунками можна показати, що питомий опір металевих провідників в сотні разів більший від справжнього. Третя суперечність теорії з дослідними даними стосується теплоємності твердих тіл. За теорією Дюлона, при звичайних температурах теплоємність 1 кмоль простих твердих тіл $\approx 25 \cdot 10^3$ Дж/кмоль*К, якщо врахувати, що в метал. речовині існує газ, то їх теплоємність повинна бути на $12 \cdot 10^3$ більшою, тобто $37 \cdot 10^3$ Дж/кмоль*К.

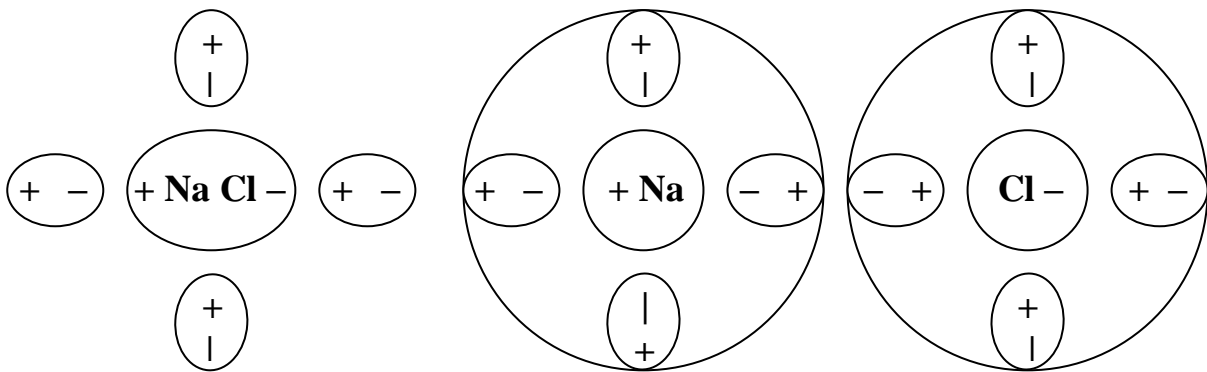
Цієї розбіжності не змогла пояснити класична електронна теорія, і на зміну їй прийшла квантова теорія провідності твердих тіл.

3.4.2 Струми у рідинах

Закон Ома для електролітів. Закони Фарадея

Як ми з'ясували, метали мають електронну провідність і на механізм їхньої електропровідності не впливає агрегатний стан речовини. Розплави металів, у тому числі й ртуті, зберігають електронний тип провідності. Вода та багато інших неметалічних рідин у звичайних умовах є хорошими діелектриками. Однак навіть найменші домішки до води ряду речовин, таких як солі металів, кислоти або луги, приводять до виникнення електропровідності. Ця електропровідність має іонний характер. Речовини і розчини, що мають іонний механізм провідності, називають *електролітами*, або *провідниками другого роду*. Розплави солей також є електролітами. Процес іонної електропровідності супроводжується масоперенесенням.

Механізм розпаду у воді на іони молекул неорганічних речовин (дисоціація) є таким:



вода має аномально високу діелектричну проникність ($\epsilon = 81$). Відповідно у воді зменшується сила кулонівської взаємодії, яка зв'язує, наприклад у молекулі солі, атом металу з кислотним залишком. Молекули води (полярний діелектрик) являють собою диполі, які орієнтуються поблизу молекули солі, одночасно беручи участь у тепловому хаотичному русі. Ослаблені зв'язки рвуться і молекула солі розпадається на позитивний іон металу і негативний іон кислотного залишку, які виявляються оточеними орієнтованими диполями молекул води. Формується так званий *сольват* – іон, оточений сольватною оболонкою. Таким чином, при русі в розчині іон відчуває активний в'язкий опір середовища.

Закон Ома для електролітів. Якщо до електронів, опущених у електроліт, прикласти різницю потенціалів, виникне струм, зумовлений напрямленим рухом іонів. Сила в'язкого тертя пропорційна швидкості руху частинки:

$$\vec{F}_T = -k_0 \vec{u},$$

де k_0 – коефіцієнт опору. У таких умовах має відбуватися рівномірний рух носіїв, оскільки сила в'язкого тертя швидко зрівноважує кулонівську силу:

$$\vec{F}_T + \vec{F}_e = 0,$$

$$q\vec{E} - k_0 \vec{u} = 0,$$

$$\vec{u} = \frac{q}{k_0} \vec{E} = b\vec{E},$$

де q – заряд іона. Величину b називають *рухливістю іона*. Для носіїв різного знака вона, як правило, різна і залежить від властивостей розчинника і температури. Густина струму визначається рухом носіїв обох знаків:

$$\vec{j} = \vec{j}_+ + \vec{j}_-,$$

$$\vec{j} = n_+ q_+ \vec{u}_+ + n_- q_- \vec{u}_-,$$

$$\vec{j} = (n_+ q_+ b_+ + n_- q_- b_-) \cdot \vec{E}.$$

Якщо концентрація n і валентність z іонів різного знака однакові, маємо

$$\vec{j} = \alpha n e z (b_+ + b_-) \cdot \vec{E},$$

де α – ступінь дисоціації молекул на іони.

Останній вираз називають законом Ома для електролітів.

Закони Фарадея. Процеси масоперенесення, що супроводжуються електропровідністю електролітів, уперше в 1833 р. описав видатний англійський фізик М. Фарадей (1791-1867). Він сформулював два закони електролізу.

Перший закон. Маса речовини, яка виділяється на електроді при проходженні через електроліт постійного струму, прямо пропорційна кількості електрики, що пройшла через електроліт:

$$m = kq = kIt,$$

де k – електрохімічний еквівалент речовини.

Другий закон. Електрохімічні еквіваленти елементів прямо пропорційні їх хімічним еквівалентам x :

$$k = \text{const} \cdot x, \quad \text{де } x = \frac{M}{z}.$$

Величина, обернена до універсальної константи, називається *числом Фарадея* $F = eN_A = 96485,309(70)$ Кл/моль.

Об'єднуючи перший і другий закони Фарадея, отримаємо

$$m = \frac{1}{F} \frac{M}{z} \cdot q = \frac{1}{F} \frac{M}{z} It.$$

3.4.3 Струми в газах

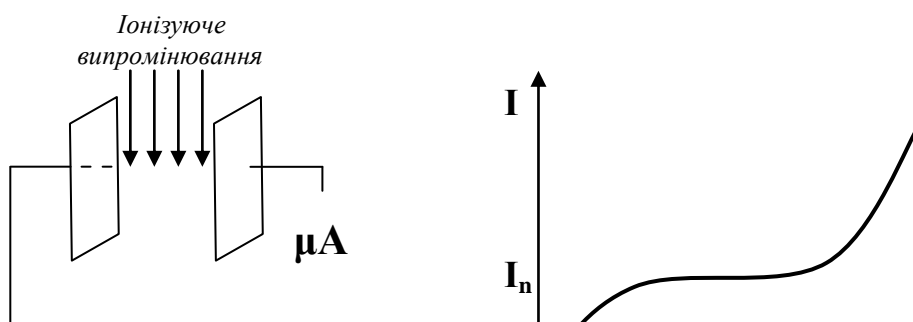
Несамостійний та самостійний газові розряди.

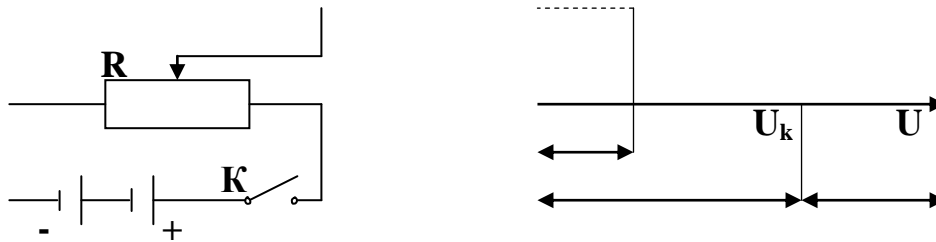
Інші типи газових розрядів

Усі гази в нормальних умовах є діелектриками. У них, як правило, є лише незначна концентрація вільних носіїв (електронів, іонів), зумовлена впливом зовнішніх іонізуючих джерел (ультрафіолет, радіаційних фон і т.п.). Для відриву електрона від атома речовини і створення позитивного іона зовнішні сили мають виконати роботу іонізації A_i . Величина $\varphi_i = \frac{A_i}{e}$ називається *потенціалом іонізації*.

Вільний електрон може бути захоплений сусідніми атомами з утворенням негативного іона. Тому *носіями електричного заряду в газах можуть бути електрони, позитивні і негативні іони*. Звичайним явищем у газах є також *рекомбінація*, тобто захоплення позитивним іоном електрона з утворенням нейтрального атома і випромінюванням кванта енергії.

Несамостійний та самостійний газові розряди. Електропровідність газів можна здійснювати і підтримувати штучним джерелом іонізації:



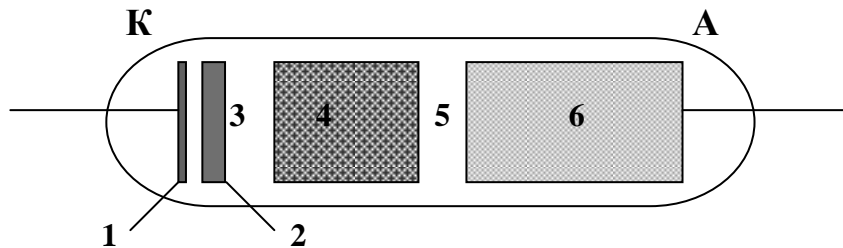


достатньої потужності. Розряд, який виникає при цьому, називають *несамостійним*.

Початкова ділянка вольт-амперної характеристики несамостійного розряду практично лінійна і підпорядковується закону Ома. При певному значенні напруги струм (I_n) досягає насичення. Очевидно, при цьому всі носії, утворені за одиницю часу, за цей самий час встигають досягти електродів. Збільшення або зменшення струму насичення досягається відповідною інтенсивністю іонізуючого випромінювання.

При напрузі, вищій за певне критичне значення (U_k), виникає самостійний розряд у газі, який підтримується незалежно від наявності штучного джерела іонізуючого випромінювання. Напряга пробою залежить від тиску газу і зменшується з його зниженням. Механізм виникнення цього явища такий. Створений квантом радіаційного фону електрон прискорюється прикладеною напругою, проходячи до співудару з атомом газу шлях, що дорівнює в середньому довжині вільного пробігу λ . Якщо напруженість електричного поля достатньо велика, щоб розігнати електрон за час вільного пробігу до енергії іонізації атома, іонізація відбувається. Тепер у полі рухаються два електрони. Співударяючись з атомами газу, вони створюють чотири електрони з наступним зростанням їх кількості в геометричній прогресії. Виникає лавина, що зумовлює пробій газового проміжку. Чим менший тиск газу, а отже, і концентрація молекул, тим більший шлях проходять вільні електрони між співударами. Їхня кінетична енергія може досягти значень енергії іонізації при меншій прискорюючій силі, а отже, при меншому значенні прикладеної різниці потенціалів. У лампах денного світла самостійний розряд підтримується при напрузі, сумірній із мережною, а для пробою газового проміжку такої довжини за нормальних умов необхідні сотні тисяч вольт.

Інші типи газових розрядів. **Тліючий розряд.** Прикладемо між електродами, упаяними в протилежні кінці довгої скляної трубки, напругу в кілька сотень тисяч вольт і почнемо відкачувати з трубки повітря. При зниженні тиску до $\approx 6 \cdot 10^3$ Па в трубці виникне самостійний розряд у вигляді світлого шнура червоноуватого кольору. При тиску близько $3 \cdot 10^2$ Па світіння спостерігається в усій трубці. При зниженні тиску до величини порядку 10 Па розряд у трубці набуває вигляду *тліючого розряду*, зображеного на рисунку:



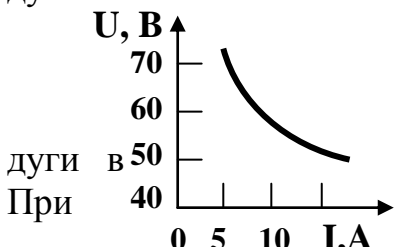
Тліючим називають самостійний розряд, у якому катод емітує електрони внаслідок бомбардування його позитивними іонами і фотонами.

Безпосередньо до катода примикає астоновий темний простір (1). Тут електрони не встигли набути швидкостей, достатніх для збудження атомів. Відповідно немає і рекомбінації та світіння. Рекомбінація зумовлює світіння газу. Далі (2) – катодний світний прошарок: тут є збудження і рекомбінація, але немає іонізації; 3 – темний круковий або гітторфовий простір: початок іонізації і лавин, зменшення можливості збудження, що ослаблює світіння; 4 – негативне тліюче світіння: реактивна рекомбінація; 5 – фарадеїв темний простір, який розташований поза зоною досягнення електронами; 6 – остов позитивного розряду.

Дуговий розряд. У 1802 р. російський фізик В.В. Петров (1761-1834) виявив і описав електричний розряд, що виникає при віддаленні після контакту двох вугільних електродів. При горизонтальному розміщенні вугільних електродів світний гарячий газ вигинався у вигляді дуги, тому розряд назвали *електричною дугою*.

По мірі горіння дуги вугільний катод загострюється, а на аноді утворюється поглиблення – кратер. Його температура при атмосферному тиску досягає 40000 °С, а при тиску $20 \cdot 10^5$ Па перевищує 70000 °С.

Температура катода дещо нижча і при атмосферному тиску досягає 35000 °С. У електричній дузі з металевими електродами за рахунок швидкого випаровування металу температура нижча і досягає 2000...25000 °С. У електричній дузі процеси, що мають місце у тліючому розряді істотно доповнюються термоелектронною емісією, що збагачує електронами область поблизу катода. Тому при збільшенні струму електропровідність дуги значно збільшується, що призводить до спадної форми вольт-амперної характеристики дуги:



дуги в При

При випадкових зменшеннях струму електрозварювання напруга на електродах має бути підвищена, інакше дуга згасне. Для стійкого горіння електричне коло послідовно вмикають баластний опір. випадкових падіннях струму зменш напруга на баластному опорі і його перерозподіл у колі зварювання

підвищує стійкість дуги.

Зварювання металів за допомогою електричної дуги вперше розробив у 1882р. Н.Н. Бенардос і в 1888р. удосконалив Н.Г. Славянов. Для електрозварювання застосовують струм до 800 А при напрузі 30...40 В.

У ХХ ст. всесвітньо відомою стала укр. школа електрозварювання під керівництвом академіка Є.О. Патона.

Іскровий розряд характеризується переривчастою формою навіть при використанні джерела постійного струму. Він може виникати при нормальному атмосферному тиску. За зовнішнім виглядом іскровий розряд являє собою пучок

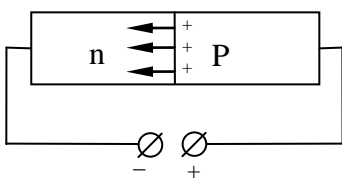
яскравих зигзагоподібних тонких смуг, що розгалужуються, постійно змінюючи одна одну. Блискавка – іскровий розряд у природних умовах.

Коронний розряд також виникає при тисках, сумірних з атмосферним, у дуже неоднорідних електричних полях. При цьому розряді навколо електрода виникає світіння у вигляді оболонки або корони. Звідси і сама назва розряду. Коронний розряд іноді виникає в природних умовах під впливом атмосферної електрики на верхівках дерев, корабельних щогл і т.п. Це явище називають вогнями святого Ельма.

3.4.4 Електропровідність напівпровідників

До напівпровідників належать ті матеріали які займають проміжне положення між провідниками і діелектриками. Якщо в металах носіями електричного струму є електрони, то в напівпровідниках носіями є як електрони так і дірки. Процес утворення дірок називається *генерація*, а приєднання діркою електрона є – *рекомбінація*. Напівпровідники в яких носіями є дірки називаються *напівпровідники з дірковою провідністю* або напівпровідники р-типу і напівпровідники n-типу. Якщо в напівпровідниках з електронною провідністю внести напівпровідники з дірковою провідністю, то елемент провідності буде називатися *власною*, а діркова – *домішковою провідністю*. Власна провідність є завжди набагато вищою від концентрації домішкових носіїв. Домішки які віддають електрони називаються *донорами*, а ті домішки, які приєднують електрони називаються *акцепторами*. Мету розподілу двох напівпровідників р і n-типу називають *електронно-дірковим переходом* або р-n перехід. Якщо до р-n переходу прикласти зовнішню напругу, то через р-n перехід буде протікати електричний струм. Струм викликаний зовнішнім електричним полем отримав назву *дрейфовий струм*, а струм викликаний дифузією носіїв заряду називається *дифузійним струмом*.

Величина струму залежить від полярності прикладеної напруги.

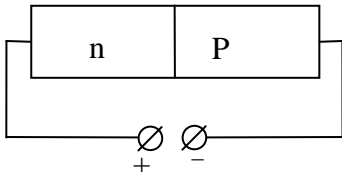


В цьому випадку зовнішнє електричне поле буде напрямлене назустріч власному електричному полю Р-n переходу. Таке ввімкнення називається *прямим*. Основні носії заряду наближаються до контакту компенсуючи заряд домішок. Частина носіїв, що мають найбільшу енергію, зможуть подолати потенціальний бар'єр і перейти через Р-n перехід. Це призведе до порушення рівноваги між дрейфовим та дифузійним струмом.

$$I = I_{\text{дифуз.}} = I_{\text{дрейф.}}$$

Дифузійна складова струму стає більшою від дрейфової і струм починає зростати. Цей струм називається *прямим*.

При збільшенні прямої напруги, прямий струм через Р-n перехід може знову зростати до великих значень, тому що він зумовлений рухом основних носіїв заряду, а концентрація їх в обох областях досить велика.

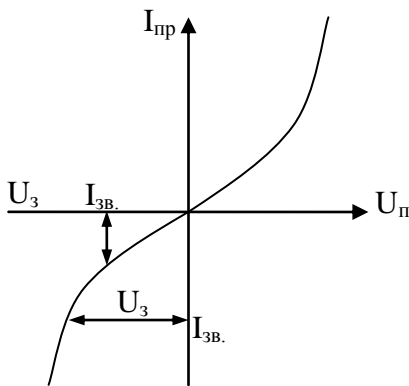


Таке ввімкнення називається зворотнім, і струм, який буде протікати, також зворотній.

При такому ввімкненні електричне поле зовнішньої напруги буде співпадати з полем n-P переходу. Під дією електричного поля основні носії будуть відтягуватись від приконтактних шарів напівпровідника. Ширина переходу буде зростати. При малому ввімкненні вирішальну роль має дрейфовий струм. Дрейфовий струм має невелике значення, тому що він зумовлений рухом неосновних носіїв.

$$I_{зв.} = I_{др.} - I_{диф.}$$

Оскільки, дрейфовий струм є досить малий, тому зворотній струм переходу буде малим. Важливою характеристикою P-n переходу є його вольт-амперна характеристика.



Вольт-амперна характеристика - залежність струму через P-n перехід від величини та полярності прикладеної напруги. Під аналітичним виразом який описує цю вольт-амперну характеристику буде:

$$I = I_0 (e^{\frac{eU}{kT}} - 1)$$

I_0 - максимальний зворотній струм;

U - прикладена зовнішня напруга;

k - стала Больцмана;

T - температура.

З вольт-амперної характеристики випливає, що при додатній прямій напрузі струм зростає. При збільшенні зворотної напруги струм стає близьким до зворотного струму насичення.

При дальшому збільшенні зворотної напруги відбувається різке зростання струму. Після того проходить так званий пробій.

Існує:

- електричний пробій;
- тепловий пробій.

Аналіз вольт-амперної характеристики P-n переходу дозволяє розглядати його, як нелінійний елемент, опір якого змінюється в залежності від величини та полярності прикладеної напруги. При збільшенні прямої напруги опір P-n переходу зменшується. Із зміною полярності і величини прикладеної напруги, опір P-n переходу зростає.

Нелінійні властивості P-n переходу лежать в основі роботи напівпровідникових приладів, які використовуються для виправлення струму, перетворення частоти і т.д. Найбільше використовуються транзистори, тиристри.

Напівпровідниковий діод

Напівпровідниковим діодом називають напівпровідниковий прилад, який має два виводи і містить один напівпровідниковий P-n перехід.

Найбільше використовуються германієві кремнієві діоди. В залежності від способу отримання діоди поділяються на:

- площинні;

– точкові.

У радіоелектроніці діоди застосовуються для стабілізації напруги (стабілітрони); варикапи – ємність Р-п переходу змінюється при зміні прикладеної напруги; тунельні – використовуються на ділянці вольт-амперної характеристики з від'ємним опором; імпульсні – використовуються в схемах із сигналами з мікро або нано секундною довжиною.

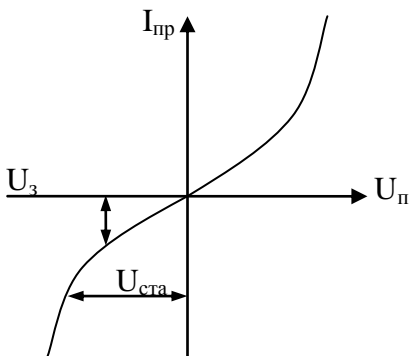
Випрямляючі діоди

Найбільше застосування у випрямлячах змінної напруги. Робота напівпровідникового діода базується на властивості проводити струм тільки в одному напрямі. В германієвих діодів зворотна напруга може бути порядку 100 В, в кремнієвих можна прикладати напругу 1000 – 1500 В.

Основними параметрами є:

1. Зворотна напруга;
2. Зворотній струм насичення;
3. Максимально допустима потужність розсіювання.

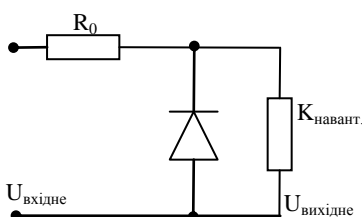
Принцип роботи стабілітрона



Явище електричного пробою, яке є небезпечним для звичайних діодів, застосовується в діодах, які називаються стабілітронами. Найбільш часто використовують кремнієві площинні стабілітрони. Для виготовлення стабілітронів використовують метод вплавлення або дифузійно сплавний метод, вихідним матеріалом для кремнієвих стабілітронів використовують кремнієву пластинку, в неї вплавають алюміній, що є акцепторною домішкою до кремнію. Кристал з Р-п переходом герметично поміщають в корпус. Нормальним режимом роботи є робота при зворотній напрузі, яка відповідає зворотному електричному пробою Р-п переходу. Вольт-амперна

характеристика в прямому випадку в прямому напрямі практично не відрізняється від прямої вітки будь-якого кремнієвого діода. Зворотна вітка має вигляд майже прямої вертикальної лінії, яка проходить паралельно до осі струму. При зміні струму в широкому діапазоні, спад напруги на стабілітроні практично не змінюється. Ця властивість дозволяє використовувати їх в якості стабілізацій напруги. Основним його параметром є напруга стабілізації, лінійний струм стабілізації і максимальний диференційний опір, максимальна потужність розсіювання температури, коефіцієнт стабілізації.

Найпростіша, але найбільш поширена схема ввімкнення стабілітрона:



Ця схема являє собою дільник, що складається з опора R_0 і стабілітрона. При зміні вхідної напруги, напруга на стабілітроні і відповідно на навантаженні, не буде змінюватись, або буде змінюватись в незначній мірі.

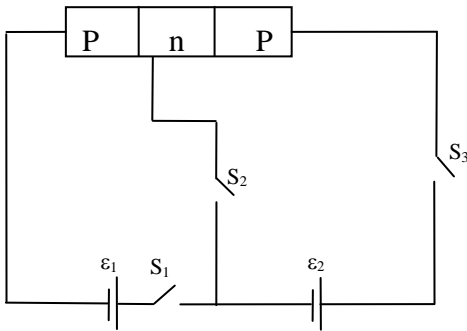
Транзистори

Транзисторами називаються напівпровідникові прилади, які мають не менше 2-ох Р-п переходів і мають властивість підвищувати потужність сигналів. Найбільш поширеними є транзистори, що мають 2 Р-п переходу, такі транзистори називають біполярними.

P n P

n P n

Існують також польові транзистори, уніполярні. Транзистор, в якому 2 кратні області мають провідність P - типу, n – типу, називаються транзисторами P-n-P типу, в іншому випадку, n- P-n типу. До кожної області підпаяний провідник для під'єднання транзистора до електричної схеми. Розглянемо роботу біполярного транзистора. Середня область є базою, одна із крайніх областей називається емітером, інша – колектором. База є спільною для двох P-n переходів.

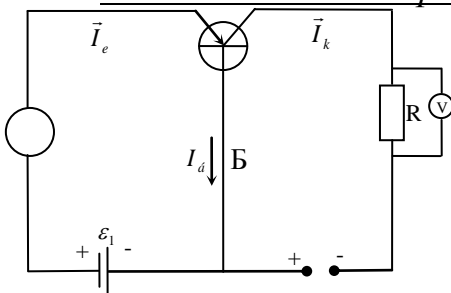


Якщо замкнути ключі S_1 і S_2 , то електричний струм буде протікати по колу $+\varepsilon_1 - p - n - S_2 - S_1 - \varepsilon_1$.

Якщо S_1 розімкнати, а замкнути S_3 то $+\varepsilon_1 - n - p - S_3 - \varepsilon_2$.

З цієї схеми видно, що транзистор – це 2 P-n переходи, які ввімкнені, один в прямому, а інший в зворотній перехід між емітером і базою – називається *емітерним*, а між базою і колектором – *колекторний* і як правило при такому ввімкненні транзистора $|\varepsilon_2| \gg |\varepsilon_1|$.

Схеми ввімкнення транзисторів



I_e - емітерний струм;

I_k - колекторний струм;

I_a - струм бази.

Це схема із спільною базою. В такій схемі вхідний сигнал подають в коло емітера, вихідний – в коло колектора і змінюється вихідна напруга.

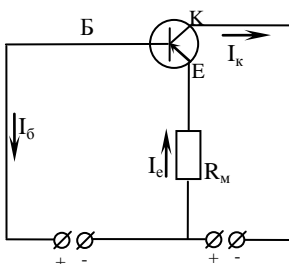
$$I_{a\bar{o}} = I_e$$

$$I_{a\bar{o}} = I_e$$

$$\frac{\Delta I_{a\bar{o}}}{\Delta I_{a\bar{o}}} = \alpha - \text{коефіцієнт передачі струму}$$

$$\alpha \frac{\Delta I_e}{\Delta I_a} - \text{при постійній напрузі на колектор } \varepsilon_2 = \text{const}.$$

Оскільки емітерний струм в транзисторі є найбільшим із всіх струмів, то схема із спільною базою має малий вхідний опір для змінної складової струму сигналу. Фактично цей опір дорівнює опорі емітерного переходу, який ввімкнений в прямому напрямі.



У схемі із спільним колектором вхідний сигнал подається на ділянку база колектора. Вхідним струмом такої схеми є струм

бази, а вихідним струмом – струм емітера. Коефіцієнт прямої передачі струму:

$$\alpha = \frac{\Delta I_E}{\Delta I_A}$$

Не дивлячись на досить великий коефіцієнт прямого струму і вхідного опору схема із спільним колектором не дозволяє отримати підсилення по напрузі, тому вона рідше використовується.

Польовий транзистор

Польовим транзистором називається трьохелектродний напівпровідниковий прилад, в якому струм зумовлений основними носіями заряду під дією повздовжнього електричного поля, а управління величиною струму здійснюється поперечним електричним полем, утвореним прикладеною до управляючого електрона напругою. Всі польові транзистори можна поділити за конструктивними особливостями:

- з Р-п переходами – уніполярні;
- з ізольованим переходом (МОП).

Принцип дії транзисторів двох груп аналогічний. Різниця лише в полярності джерела напруги живлення. Ввімкнення в симетричне коло здійснюється за допомогою електродів.



На схемі він позначається

Вивід приєднаний до областей Р-п типу. Він є керуючим і називається затвором. Інші два електроди називаються сток, та і-сток. Ці два виводи відповідають емітеру, колектору і базі звичайного транзистора. Сток відповідає емітеру, і-сток відповідає колектору. Основними параметрами польових транзисторів є напруга відтину, вхідний опір, вихідний опір.

Перевагою польового транзистора є високий вхідний опір $10^6 - 10^9$ Ом.

3.5 Магнітні явища

3.5.1 Магнітне поле та його характеристики

Магнітне поле встановлене дослідним шляхом. Подібного до того як навколо електричного заряду існує електростатичне поле так і навколо провідника зі струмом або навколо постійного магніту виникає силове поле, яке називається *магнітним*. Назву пов'язують з орієнтацією магнітної стрілки під дією поля провідника, в якому тече струм. Важливою особливістю магнітного поля є те, що воно діє тільки на електричні заряди, які рухаються в цьому полі. Дія магнітного поля на струм різна і залежить від форми провідника, розташування провідника, напрямку протікання струму. Щоб охарактеризувати магнітне поле необхідно розглянути його дію на певний струм.

Для дослідження магнітного поля використовується замкнутий плоский контур зі струмом, розміри якого малі порівняно з відстанню до струмів, що створюють магнітне поле. Орієнтація контуру в просторі характеризується напрямом перпендикуляра до площини контуру. В якості додатного напрямку

прийнято напрям пов'язаний зі струмом, правилом правого гвинта – за додатній напрям нормалі приймається напрям поступального руху гвинта, якщо він обертається в напрямі струму, що тече в рамці.

Додатній напрям нормалі до рамки прийнято за напрям магнітного поля в даній точці.

Магнітне поле називається *однорідне*, якщо у всіх точках воно має один напрям і однакову інтенсивність, в іншому випадку воно - *неоднорідне*. Магнітне поле може бути *симетричне* або *несиметричне*. Симетричне, наприклад, магнітне поле провідника зі струмом: в площині перпендикулярній до осі провідника, усі точки, розташовані на однаковій відстані від осі знаходяться в однакових фізичних умовах; інтенсивність магнітного поля в цих точках буде однаковою.

Силовою характеристикою магнітного поля в кожній його точці є вектор *магнітної індукції* \vec{B} . Напрямок і величину вектора індукції \vec{B} визначають за дією магнітного поля на провідник зі струмом та магнітну стрілку.

3.5.2 Закон Ампера

Якщо в магнітне поле внести провідник зі струмом, то на нього діятиме сила - сила Ампера. Ампер експериментально встановив, що сила, яка діє на прямолінійний провідник зі струмом, що перебуває в однорідному магнітному полі прямо пропорційна струмові, магнітній індукції, довжині провідника та синусові кута між напрямом струму і вектором індукції.

$$F = I \cdot \ell \cdot B \cdot \sin \alpha$$

Коли магнітне поле неоднорідне, його завжди можна розділити на області, в яких магнітне поле можна вважати однорідним, а елемент довжини провідника dl – прямолінійними. Обертний момент, що діє на рамку зі струмом, є результатом дії сил на окремі елементи рамки. Згідно із *законом Ампера*: сила $d\vec{F}$, з якою магнітне поле діє елемент провідника dl зі струмом, прямо пропорційна силі струму I в провіднику та векторному добутку магнітної індукції \vec{B} на елемент довжини $d\vec{l}$:

$$d\vec{F} = I \cdot [\vec{B}, d\vec{l}].$$

Напрямок вектора $d\vec{F}$ можна знайти за правилом лівої руки: якщо долоню лівої руки поставити так, щоб в неї входив вектор \vec{B} , чотири пальці витягнути в напрямі струму в провіднику, то відігнутий великий палець покаже напрям сили, що діє на струм.

Модуль сили Ампера дорівнює: $dF = I \cdot B \cdot dl \cdot \sin \alpha$, де α – кут між напрямом струму і напрямом вектора індукції. Якщо кут $\alpha = 90^\circ$, то $dF = I \cdot B \cdot dl$.

Індукція магнітного поля вимірюється в теслах: $Tл = B \cdot c/m^2$

$$[F] = [I \cdot B \cdot l] = A \cdot Tл \cdot м = A \cdot B \cdot c/m^2 \cdot м = Дж/м = Н$$

Крім магнітної індукції \vec{B} існує друга характеристика магнітного поля, що називається *напруженістю*. Недивлячись, що електричний струм у провіднику і магнітне поле навколо нього невіддільні один від одного, прийнято говорити, що струм породжує магнітне поле. Цю властивість струму називають *намагнічувальною силою*. Намагнічувальна сила струму котушки зі струмом з n -витків: $F = I \cdot n$. В системі СІ: $[F] = [I] = A$.

Для визначення напрямку магнітної сили рамки зі струмом користуються правилом правої руки. Якщо в праву руку взяти котушку зі струмом так, щоб

чотири пальці руки були напрямлені в напрямі струму, то великий відігнутий палець покаже напрям намагнічувальної сили.

Намагнічувальна сила симетричних полів рівномірно розподіляється вздовж магнітної лінії, а намагнічувальна сила, яка припадає на одиницю довжини магнітної лінії, називається *напруженістю магнітного поля* \vec{H} . Напруженість в даній точці залежить від сили струму, форми провідника і, в однорідному середовищі, не залежить від магнітних властивостей його. Напруженість магнітного поля є величина векторна. Напрямок вектора \vec{H} в ізотропних середовищах (з магнітними властивостями однаковими у всіх напрямках) співпадає з напрямом магнітної лінії в даній точці:

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{\ell}. \quad \text{Числове значення} \quad H = \frac{F}{\ell}.$$

$$[H] = \left[\frac{F}{l} \right] = \frac{A}{m}.$$

Інколи використовують ерстед: $1E \approx 80A/m = 0,8A/cm$.

Вектор напруженості \vec{H} характеризує магнітне поле в кожній точці за пов'язаним з ним струмом і положенням точки. Якщо магнітне поле симетричне, (наприклад прямолінійного провідника зі струмом), то його напруженість в будь-якій точці, віддаленій на r від осі прямолінійного провідника, можна знайти за формулою:

$$H = \frac{I}{l} = \frac{I}{2\pi \cdot r},$$

де l – довжина магнітної лінії радіусом r .

Аналогічно з електричною напругою при розрахунку магнітних полів користуються поняттям магнітної напруги. Магнітна напруга між двома точками однорідного магнітного поля розташованими на одній магнітній лінії дорівнює добутку напруженості магнітного поля на відстань між цими точками:

$$U_M = H \cdot \ell$$

В неоднорідному магнітному полі магнітна напруга між двома точками поля буде дорівнювати сумі елементарних напруг на елементарних частинках вздовж вибраного шляху між цими точками: $dU_M = H_l \cdot dl$. Звідси

$$U_M = \int H_l dl.$$

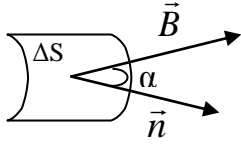
Для однорідного ізотропного середовища вектор магнітної індукції і вектор напруженості магнітного поля пов'язані між собою співвідношенням:

$$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H},$$

де μ – магнітна проникність середовища; μ_0 – магнітна стала, магнітна проникність вакууму ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,25 \cdot 10^{-8} \text{ Г/м}$).

Графічно магнітне поле можна зобразити, якщо ввести поняття *ліній магнітної індукції* – уявних ліній, дотичні до яких в кожній точці співпадають з напрямом вектора магнітної індукції \vec{B} в цих точках. Дані лінії замкнуті, проводяться з довільною густиною. Зазвичай, вважається, що модуль вектора індукції магнітного поля пропорційний числу ліній магнітної індукції, проведених через одиницю площини поверхні, перпендикулярної до цих ліній.

Потоком магнітної індукції (магнітним потоком) $\Delta\Phi$ через елемент поверхні малої площі ΔS називається скалярна величина, що дорівнює $\Delta\Phi = B \cdot \Delta S \cdot \cos\alpha$; $B_n = B \cdot \cos\alpha$ – проекція вектора \vec{B} на нормаль до елемента поверхні.



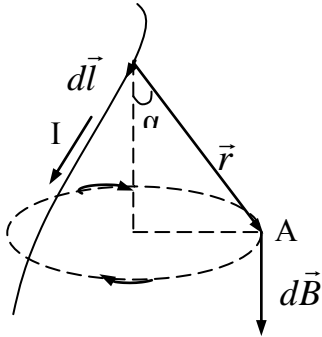
Додатній (від'ємний) знак магнітного потоку відповідає гострому (тупому) куту α , або $B_n > 0$ ($B_n < 0$). Магнітний потік Φ через поверхню S дорівнює алгебраїчній сумі елементарних потоків через елементи поверхні.

Якщо магнітне поле однорідне, то магнітний потік Φ через поверхню площею S дорівнюватиме: $\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha$

$[\Phi] = \text{Вебер}$; $1 \text{ Вб} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ с}$; Максвелл $1 \text{ Мкес} = 10^{-8} \text{ Вб}$

3.5.3 Закон Біо – Савара – Лапласа

Закон Б-С-Л для провідника зі струмом I , елемент якого dl в деякій точці породжує магнітне поле індукцією $d\vec{B}$ записується у вигляді:



$$d\vec{B} = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I [d\vec{l}, \vec{r}]}{4\pi \cdot r^3},$$

де $d\vec{l}$ - вектор, по модулю дорівнює довжині dl і співпадає за напрямом зі струмом;

\vec{r} - радіус-вектор, проведений з елемента провідника dl в точку; r – модуль вектора \vec{r} .

Напрямок $d\vec{B}$ перпендикулярний до $d\vec{l}$ і \vec{r} . Цей напрям можна знайти за правилом правого гвинта: напрям обертання головки гвинта дає напрям $d\vec{B}$, якщо поступальний рух гвинта відповідає напрямку струму в елементі провідника. Модуль вектора $d\vec{B}$ визначається з виразу:

$$dB = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I \cdot dl}{4\pi \cdot r^2} \cdot \sin\alpha$$

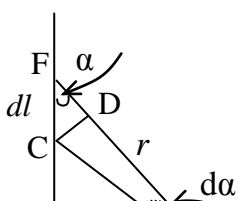
Принцип суперпозиції для магнітної індукції: магнітна індукція результуючого поля, створеного кількома струмами або рухомими зарядами дорівнює векторній сумі магнітної індукції полів, створених кожним струмом чи рухомим зарядом зокрема:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i$$

Розрахунок характеристик магнітних полів \vec{B} , \vec{H} за цими формулами є досить складним. Коли струм має певну симетрію, то закон Біо-Савара-Лапласа разом із принципом суперпозиції набагато спрощує розрахунок конкретних магнітних полів.

Магнітне поле провідника зі струмом.

а) магнітне поле струму, що протікає по прямолінійному, безмежно довгому, тонкому провіднику.



Розіб'ємо весь провідник на елементарні довжини dl . У довільній т. А, віддаленій від осі провідника на R , вектори магнітної індукції $d\vec{B}$ усіх елементів струму

$d\vec{l}$ мають однакові напрями (перпендикулярно до площини рисунку, правило правого свердлика). Тому векторну суму $d\vec{B}$ можна замінити сумою їх модулів. Із рисунку, вважаючи кут α досить малим та використавши властивості границь, маємо:

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}; \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha}. \quad dl = \frac{R}{\sin \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{\sin \alpha}$$

(Радіус дуги DC, внаслідок того що dl досить мале, дорівнює r і кут FDC по цій причині можна вважати прямим).

Підставивши ці вирази у формулу закону Б-С-Л, отримаємо:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} \sin \alpha d\alpha. \quad B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Для всіх елементів прямолінійного провідника кут α змінюється від 0 до π . $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi; \cos 0 = 1, \cos \pi = -1$. Звідси, магнітна індукція поля прямолінійного

провідника зі струмом дорівнює: $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}$.

б) *магнітне поле в центрі колового провідника зі струмом.*

Якщо розбити провідник на елементи, то всі елементи створюють в центрі магнітне поле, вектор індукції якого напрямлений вздовж перпендикуляра. Тому векторну суму $d\vec{B}$ можна замінити сумою їх модулів. Оскільки всі елементи $d\vec{l}$ перпендикулярні до радіус-вектора ($\sin \alpha = 1$), а відстань до них від центра

однакова і дорівнює R , то можна записати: $dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R^2} I dl$.

$$\text{Тоді:} \quad B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint dl = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}.$$

Магнітна індукція поля в центрі колового провідника, який має один виток зі струмом, дорівнює:

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}.$$

Якщо ж маємо *соленоїд* – циліндричну котушку, що складається з великої кількості витків, які утворюють гвинтову лінію, то магнітна індукція буде

дорівнювати: $B = \mu\mu_0 nI$, де $n = \frac{N}{l}$ - кількість витків на одиницю довжини.

3.6 Змінний струм

3.6.1 Період і частота змінного струму, амплітуда, фаза, зсув фаз

Змінним струмом називають струм, який змінюється з часом. Зазвичай змінним називають струм, який змінюється за величиною і напрямом. Значення струму в даний момент часу називається миттєвим і позначають малою буквою i . Один із двох можливих напрямів струму приймають за додатній, інший – за від'ємний. Струм рахується означений, коли відома його залежність від часу $i = f(t)$ та вказаний додатній напрям струму. Струми, миттєві значення яких повторюються через рівні проміжки часу в однаковій послідовності, називаються

періодичними, а найменший проміжок часу, через який відбувається це повторення називається *періодом*.

$$i = f(t) = f(t+T)$$

Число, обернене до періоду, тобто, число періодів за одну секунду, називається *частотою* струму: $\nu = \frac{1}{T}$, одиниця частоти – *герц* (Гц).

Змінний струм, що змінюється за законом синуса, називається *синусоїдним*. Миттєве значення синусоїдного струму визначається:

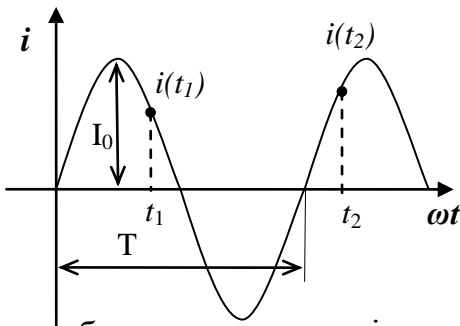
$$i = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right),$$

I_0 – *амплітуда* сили струму; аргумент синуса $\frac{2\pi}{T}t + \varphi$ – *фаза*, або

фазний кут; φ – *початкова фаза*; $\frac{2\pi}{T} = \omega$ – швидкість зміни фази: *циклічна частота*, вимірюється кількістю радіанів, на яку збільшується фаза за одну секунду.

Беручи до уваги $1/T = \nu$, можна записати $\omega = 2\pi\nu$. Врахувавши це, миттєве значення синусоїдного струму можна записати:

$$i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



Якщо характеризувати графік залежності струму від часу, то на протязі першої половини періоду струм додатній ($i > 0$), тобто він змінюється за величиною. На протязі другої половини періоду – струм від’ємний. Це означає, що дійсний напрям струму змінився.

На сьогодні вся електрична енергія виробляється у вигляді енергії змінного струму. Постійний струм, необхідний в різних галузях промисловості, отримується шляхом випрямлення змінного струму. В генераторах змінного струму отримують синусоїдний струм, при цьому синусоїдними будуть і електрорушійна сила, і напруга.

$$e = E_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad u = U_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Якщо в даних рівняннях аргумент синуса дорівнює 90° , то значення цих величин максимальні і називаються *амплітудними* (або просто амплітудами).

На рисунку при $t=0$ величина сили струму дорівнює нулю. У цьому випадку крива проходить через початок координат. При $t=t_1$ величина сили струму визначається фазним кутом ωt_1 , а при $t=t_2$ – фазним кутом ωt_2 , тобто

$$i_1 = I_0 \sin(\omega t_1 + \varphi), \quad i_2 = I_0 \sin(\omega t_2 + \varphi).$$

Синусоїди змінного струму можуть не проходити через початок координат і при $t=0$ можуть мати певне значення. Щоб описати такі криві рівняннями, в аргумент синуса вводять, так звану, *початкову фазу* φ , яка показує величину струму в початковий момент часу $t=0$. Початкова фаза може бути як додатною, так і від’ємною. Тому, в загальному, можна записати

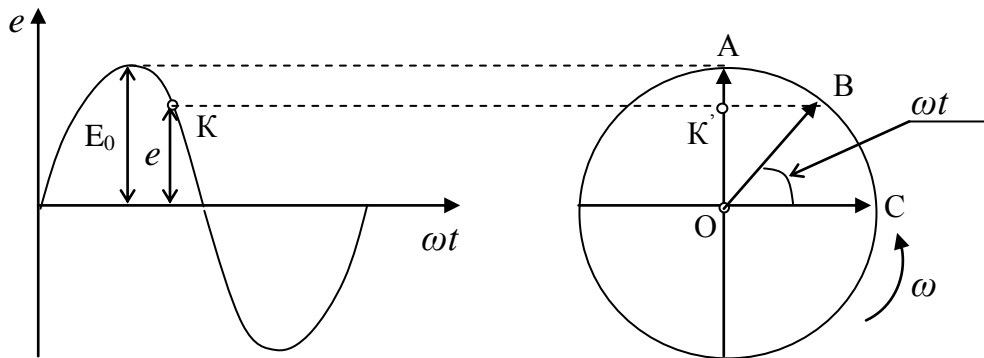
$$i = I_0 \sin(\omega t \pm \varphi)$$

Отже, кожна електрична величина, яка змінюється за законом \sin , характеризується амплітудою, фазою і кутовою (циклічною) частотою. Якщо є дві такі величини однакової частоти, з однаковими фазами і будь-якими амплітудами,

то про них говорять, що вони збігаються за фазою. Якщо ж вони досягають максимальних та нульових значень неодноразово, то вони зсунуті за фазою одна відносно одної. Синусоїдну електричну величину, амплітудне або нульове значення якої настає раніше, називають *випереджаючою*, а ту, в якій ті ж самі значення настають пізніше, – *відстаючою* за фазою. Різницю початкових фазових кутів двох синусоїдних величин тієї самої частоти називають *кутом зсуву фаз*, або зсувом фаз: $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Векторні діаграми

Для більшої наочності та полегшення математичних операцій при розв'язуванні задач електричні синусоїдні величини часто зображають векторними діаграмами. *Векторною діаграмою* називається сукупність кількох векторів, що зображають синусоїдні величини однієї частоти.



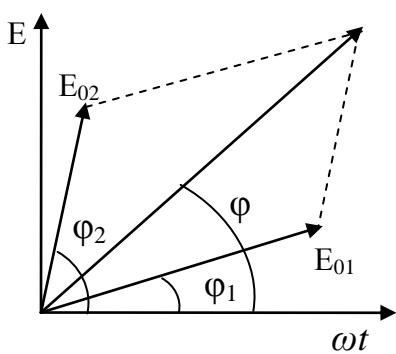
Для побудови векторної діаграми електричної величини, наприклад е.р.с., яка змінюється за законом \sin , опишемо коло, радіус якого у вибраному масштабі дорівнює максимальному значенню цієї величини E_0 . Якщо вектор обертати проти руху годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω , то проекції кінця цього вектора на вісь ординат відповідатимуть миттєвим значенням е.р.с на хвильовій діаграмі. Так, у т.О на хвильовій діаграмі е.р.с дорівнює нулю. Цьому на векторній діаграмі відповідає вектор ОС, проекція якого на вісь ординат дорівнює нулю. Точці К на хвильовій діаграмі відповідає вектор ОВ, що повернувся на кут ωt . Проекція цього вектора на вісь ординат дає відрізок OK' , який дорівнює величині е.р.с. З $\triangle OK'B$ маємо: $e = OK' = OB \cos(90^\circ - \omega t) = OB \sin \omega t$. Оскільки $OB = E_0$, то $e = E_0 \sin \omega t$.

Отже, кожен електричну величину, яка змінюється за законом \sin , можна зобразити довільно орієнтованим вектором, що обертається проти руху годинникової стрілки.

Розраховуючи електричні кола змінного струму, часто доводиться додавати ЕРС, струми, або напруги. Це можна зробити аналітично і графічно.

Останній спосіб простіший і наочніший. Наприклад, потрібно додати дві е.р.с.

$$e_1 = E_{01} \sin(\omega t + \varphi_1) \quad e_2 = E_{02} \sin(\omega t + \varphi_2)$$



Амплітуду результуючої величини е.р.с знаходимо за формулою:

$E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$, де $\varphi_1 - \varphi_2$ – різниця фаз, а початкову її фазу – із виразу:

$$\varphi = \arctg \frac{E_{01} \sin \varphi_1 + E_{02} \sin \varphi_2}{E_{01} \cos \varphi_1 + E_{02} \cos \varphi_2}.$$

Векторні діаграми частіше зображують не амплітудними, а діючими значеннями, які пропорційні амплітудним значенням.

Діючі значення електричних синусоїдних величин.

Якщо в коло змінного струму ввімкнути споживач електроенергії опором R , то за нескінченно малий проміжок часу dt споживана енергія дорівнюватиме:

$dW = u \cdot i \cdot dt$, де u та i – миттєві значення напруги та струму. Оскільки $u = iR$, то $dW = i^2 R dt$. Проінтегрувавши останній вираз від 0 до T , знайдемо

споживану енергію за період: $W = \int_0^T i^2 R dt$.

Підставивши значення миттєвого струму $i = I_0 \sin \omega t$, матимемо:

$$W = I_0 R \int_0^T \sin^2 \omega t dt.$$

Відомо, що $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t$, тоді $W = \frac{I_0^2 R}{2} \left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right)$.

Другий інтеграл дорівнює нулю, тому отримуємо: $W = \frac{I_0^2 RT}{2}$.

Якщо цей самий споживач з таким самим опором R увімкнути в електричне коло постійного струму, то можна підібрати такий постійний струм I , який за цей самий час T виділить на споживачі таку саму кількість енергії, що й змінний, а саме $W = I^2 \cdot R \cdot T$. Прирівнявши ці енергії, отримаємо:

$$I^2 RT = \frac{I_0^2 RT}{2}, \quad \text{звідки} \quad I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,707 I_0.$$

Отже, діючим (ефективним) значенням змінного струму називається такий постійний за величиною струм, який при однаковому опорі кола за той самий час виділить таку саму кількість енергії, що й змінний струм.

Відповідно діючі значення напруги та е.р.с. дорівнюють:

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 0,707 U_0 \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = 0,707 E_0$$

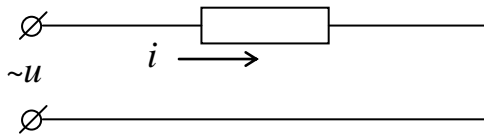
Більшість систем електровимірювальних пристроїв, які використовуються для вимірювання періодичних напруг і струмів, показують діючі значення цих величин. Крім діючих значень в електроніці розглядають також і середні значення

струмів, напруг та е.р.с. Для синусоїдних величин середнє значення за весь період дорівнює нулю, тому їх середнє значення визначають за півперіод:

$$I_{cp} = \frac{2}{\pi} I_0 = 0,637 I_0, \quad U_{cp} = \frac{2}{\pi} U_0 = 0,637 U_0, \quad E_{cp} = \frac{2}{\pi} E_0 = 0,637 E_0.$$

3.6.2 Активний опір в колі змінного струму

а) напруга та струм кола



Якщо припустити, що електричне коло складається тільки з опору R і на затискачах діє прикладена синусоїдна напруга $u = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, то за законом Ома в опорі буде протікати струм:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_0 \sin(\omega t + \varphi)}{R}; \quad I_0 = \frac{U_0}{R}; \quad i = I_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

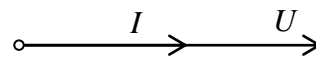
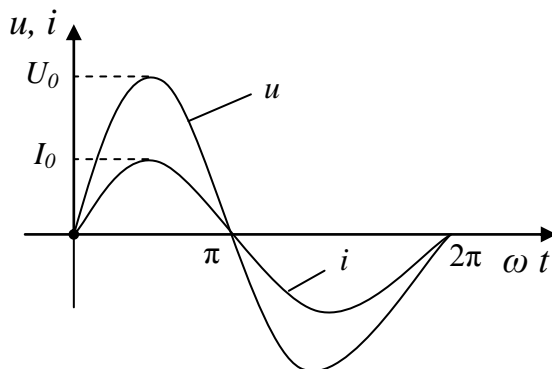
де I_0 – амплітудне значення струму. Якщо амплітудні значення поділити на $\sqrt{2}$,

то отримаємо:
$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U_0}{\sqrt{2} R} = \frac{U}{R}.$$

Таким чином, закон Ома для електричного кола з опором R може бути записаний для миттєвих значень, амплітудних і діючих значень напруги та струму.

Напруга і струм мають однакову початкову фазу, іншими словами: вони співпадають за фазою.

В кожний момент часу миттєві значення струму та напруги пропорційні один одному.



б) потужність кола

Добуток миттєвих значень струму та напруги називається *миттєвою потужністю*: $p = u \cdot i$.

Підставимо $u = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$ та $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ отримаємо:

$$p = U_0 I_0 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Перейшовши до ефективних значень струму і напруги та середнього значення за період потужності можна записати, що

$$P = U \cdot I = I^2 R = U^2 / R.$$

Середню за період потужність прийнято називати *активною потужністю*, а опір, в якому електрична енергія незворотно перетворюється в теплову називається *активним опором*.

3.6.3 Індуктивність в колі змінного струму

а) напруга та струм кола

Розглянемо електричне коло в якому є тільки індуктивність, наприклад котушка індуктивності. Якщо через котушку індуктивності буде протікати синусоїдний струм $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$, то навколо її витків виникне змінне магнітне поле Φ , а в котушці → електрорушійна сила самоіндукції:

$$e_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}.$$

Якщо підставити значення струму, то формула перепишеться:

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_0 \cos(\omega t + \varphi) = E_0 \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}), \quad |-\cos \omega t = \sin(\omega t - \pi/2)|$$

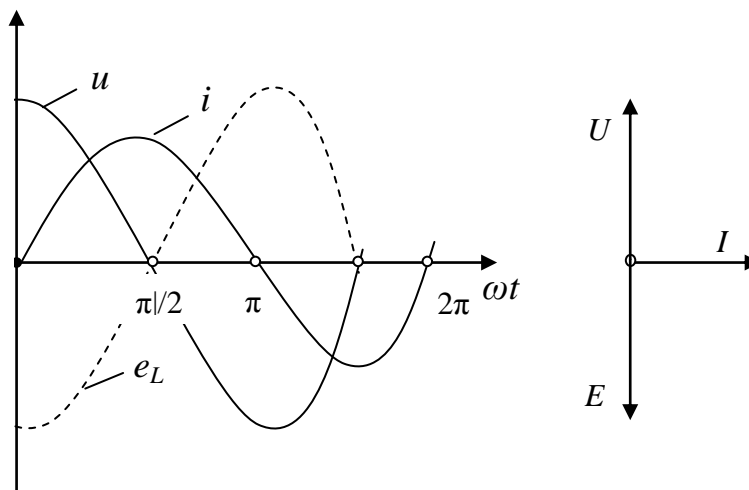
де $E_0 = \omega L I_0$ – амплітуда е.р.с. самоіндукції.

Так як опір кола $R=0$, то за другим правилом Кірхгофа сума напруги на затискачах кола та е.р.с самоіндукції дорівнює нулю: $u + e_L = 0$.

$$\text{Звідси } u = -e_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_0 \cos(\omega t + \varphi) = U_0 \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}).$$

Таким чином, прикладена до кола напруга викликає в ньому струм, що в кожний момент часу індуктує електрорушійну силу самоіндукції рівну за величиною і протилежну за знаком, тобто зрівноважуючу напругу.

Напруга випереджає струм за фазою на $\frac{\pi}{2}$, тобто на $\frac{1}{4}$ періоду.



З останнього рівняння випливає, що $U_0 = \omega L I_0$, та $I_0 = \frac{U_0}{\omega L}$. Це **закон**

Ома для амплітудних значень.

Поділивши амплітудні значення на $\sqrt{2}$ матимемо співвідношення між діючими значеннями струму та напруги:

$$U = \omega LI; \quad I = \frac{U}{\omega L}.$$

Необхідно зауважити, що е.р.с самоіндукції називається **реактивною е.р.с**, а напругу, яка зрівноважує цю е.р.с – **реактивною напругою**.

Отже, для амплітудного і діючого значень струму (але тільки не для миттєвого), що тече в котушці індуктивності справджується співвідношення, аналогічне до закону Ома.

У знаменнику останнього виразу величину ωL називають **реактивним (індуктивним) опором** і позначають X_L (вимірюється в Омах).

$$X_L = \omega L = 2\pi\nu L.$$

Індуктивний опір пропорційний індуктивності котушки і частоті струму: із підвищенням частоти індуктивний опір зростає. Постійному струмові ($\nu=0$) індуктивність опору не чинить.

б) потужність і енергія

Миттєве значення потужності на індуктивності дорівнює:

$$\begin{aligned} u i &= U_0 \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) I_0 \sin(\omega t + \varphi) = U_0 I_0 \cos(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin(2\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Перейшовши до діючих значень, матимемо:

$$Q_L = U I \sin(2\omega t + \varphi) - \text{реактивна потужність.}$$

Для $\sin(2\omega t + \varphi) = 1$ реактивну потужність можна визначити через величину сили струму:

$$Q_L = UI = \omega LI \cdot I = \omega LI^2 = X_L I^2.$$

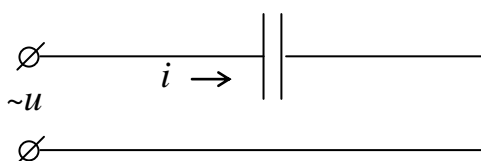
Одиниця вимірювання реактивної потужності – вольт-ампер реактивний (ВАр), або кіловольт-ампер реактивний (кВАр).

Величину енергії, зосередженої в котушці індуктивності, можна знайти за формулою: $W_L = \frac{LI_0^2}{2}$. Тобто, максимальна енергія, яка зосереджується в котушці при змінному струмі, пропорційна квадрату амплітудного значення струму.

3.6.4 Ємність в колі змінного струму

а) напруга та струм в колі

Розглянемо електричне коло в якому є тільки ємність і протікає синусоїдний струм $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$.



За нескінченно короткий проміжок часу dt напруга на конденсаторі зміниться на du_c , а заряд на dq .

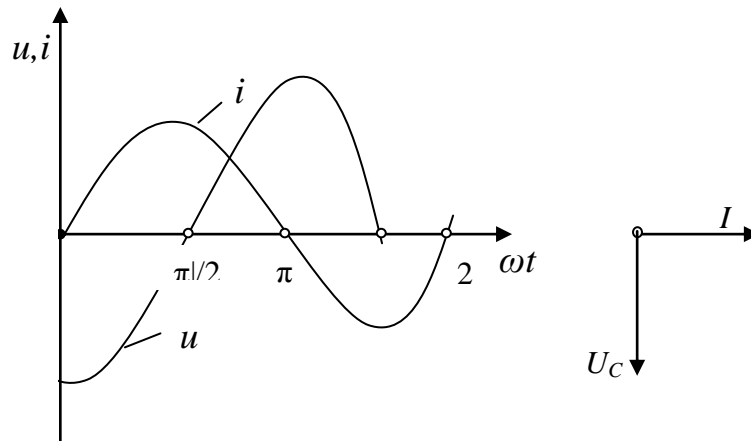
$$dq = C du_c.$$

Але кількість заряду, що проходить через провідник за одиницю часу, є струм. Тому

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad dq = i dt, \quad du_c = \frac{1}{C} i dt, \quad u_c = \frac{1}{C} \int i dt.$$

$$u_c = \frac{1}{C} \int I_0 \sin(\omega t + \varphi) dt = -\frac{1}{\omega C} I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{\omega C} I_0 \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) =$$

$$U_0 \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$



Напруга на конденсаторі відстає від струму на $\pi/2$, або на $1/4$ періоду. Напругу на конденсаторі називають реактивною.

У даній формулі $U_0 = \frac{1}{\omega C} I_0$, а для діючих значень $U_C = \frac{1}{\omega C} I$. Величина

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ називається **реактивно-ємнісним** опором, або просто ємнісним

(вимірюється в Омх). Оскільки ємнісний опір $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C}$ обернено

пропорційний частоті струму, то для струмів високих частот він має мале значення, для постійного струму безмежно велике. *Постійний струм $\nu=0$ через конденсатор протікати не може.*

б) потужність і енергія

$$Q_C = U_C I = \frac{1}{\omega C} I \cdot I = X_C I^2; W_C = \frac{U_0^2}{2C}.$$

3.6.5 Послідовне з'єднання активного опору, індуктивності та ємності в колі змінного струму

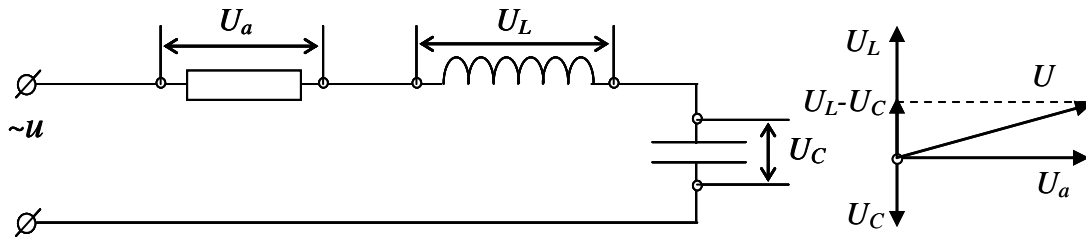
Якщо в коло змінного струму $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ послідовно ввімкнути активний (R), індуктивний (X_L) і ємнісний (X_C) опори, то на цих опорах матимемо відповідно спади напруг U_a, U_L, U_C .

За другим правилом Кірхгофа можна записати: $u + e_L = iR + u_c$.

Оскільки $U_L = -e_L$; $U_a = iR$, то $u = u_a + u_c + u_L$, тобто миттєве значення прикладеної напруги в будь-який момент часу дорівнює алгебраїчній сумі спадів напруг на ділянках кола. На підставі цього можна записати рівняння напруг:

$$U_0 \sin(\omega t + \varphi) = U_{0a} \sin(\omega t + \varphi) + U_{0C} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) + U_{0L} \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}).$$

Амплітуда результуючої напруги дорівнює векторній сумі амплітудних значень спадів напруг на ділянках кола $\vec{U}_0 = \vec{U}_{0a} + \vec{U}_{0C} + \vec{U}_{0L}$, и або для діючих значень $\vec{U} = \vec{U}_a + \vec{U}_C + \vec{U}_L$.



Для випадку $X_L > X_C$ з векторної діаграми випливає, що

$$U = \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2} = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Звідси

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

Це співвідношення відображає **закон Ома** для кола змінного струму з послідовним з'єднанням R, L, C елементів.

а) резонанс напруг

Особливо цікавим є момент коли в нашому випадку $X_L = X_C$. Тоді $U_L = U_C$. Таке явище називається **резонанс напруг**. При резонансі напруг у колі буде найбільший струм, тому що загальний опір кола буде найменшим і дорівнюватиме активному опору. При відхиленні від резонансної умови струм в колі буде зменшуватися, тому що до активного опору буде додаватися реактивний опір.

Резонанс напруг можна досягти змінивши одну з таких трьох величин: індуктивність, ємність або частоту. Частоту, при якій настає резонанс при певних L і C , можна знайти з умови $X_L = X_C$.

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}; \quad 2\pi\nu L = \frac{1}{2\pi\nu C}. \quad 4\pi^2\nu^2 LC = 1. \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Частота ν_0 – називається **резонансною** (власною) частотою електричного кола. Резонанс напруг настає, коли резонансна частота кола співпадає з частотою мережі (вимушені коливання). При резонансній частоті в колі протікатиме максимальний струм.

б) потужність при резонансі напруг

З рівняння загальної потужності $S = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2}$ отримуємо:

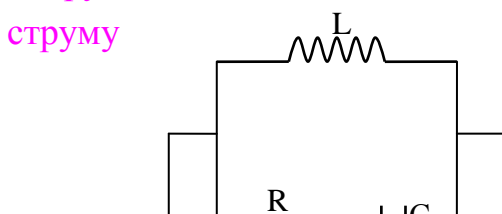
$$S = \sqrt{(I^2 R)^2 + (I^2 X_L - I^2 X_C)^2} = I^2 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

При резонансі $X_L = X_C$, то $S = I^2 R = P$.

Отже, загальна потужність при резонансі напруг дорівнює активній потужності. Кут φ між струмом та прикладеною напругою дорівнює нулю, а коефіцієнт потужності $\cos \varphi = 1$.

Розглянемо паралельне з'єднання конденсатора, котушки індуктивності і опору.

До них прикладена напруга $U = U_0 \sin \omega t$. Сила в окремих вітках



$$I_C = U_0 \omega C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), I_L = \left(\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\right) \sin(\omega t - \varphi_L). \text{ У векторній діаграмі}$$

за опорну вісь вибираємо вісь напруги. Миттєве значення сили струму $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

Явище встановлення мінімального значення сили струму в нерозгалуженій частині кола при паралельному з'єднанні елементів називається **паралельним резонансом** або резонансом струмів. Опір паралельної вітки стає дуже великим а при $R=0$ прямує до нескінченності. Якщо $R \neq 0$ умова паралельного резонансу

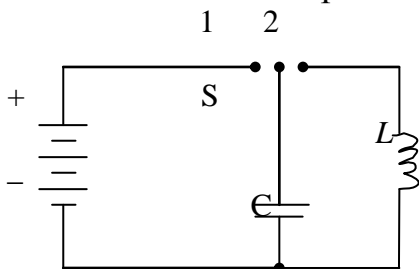
$$\omega^2 \frac{1}{\sqrt{LC}} =$$

3.6.6 Коливальний контур

Коливальним контуром називається електричне коло, яке складається з послідовно з'єднаних конденсатора, ємністю C , котушки індуктивністю L і активного опору R .

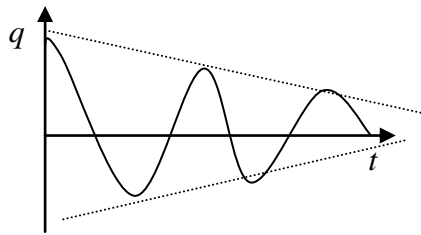
В ідеалізованому електричному колі $R \rightarrow 0$. Тоді коливальний контур складатиметься з C і L .

Для того, щоб розглянути процес коливання в такому коливальному контурі розглянемо таке електричне коло:



В коливальному контурі відбуваються коливання заряду різниці потенціалів та струму який протікає в колі. Якщо розглянути таку схему, то в початковий момент $t=0$, коли перемикач S буде в положенні 1 відбувається заряд конденсатора, конденсатор зарядиться до максимального заряду і між обкладками конденсатора буде максимальна різниця потенціалів. Якщо перемикач S покласти в положення 2, то в колі потече струм і внаслідок явища самоіндукції струм буде зростати поступово, в момент часу $t = \frac{T}{4}$ конденсатор розрядиться. У випадку, коли різниця потенціалів дорівнює 0, в колі протікатиме максимальний струм. Завдяки самоіндукції струм в колі зберігаючи свій напрям буде зменшуватись і в момент часу $t = \frac{3}{4}T$ конденсатор знову накопичить електричний заряд, але пластини конденсатора зарядяться протилежно ніж в момент часу $t=0$. В момент часу $t=T$ ми будемо мати процеси коливання заряду, різниці потенціалів та струму, аналогічні процесам $t=0$, але вони будуть проходити в протилежному напрямі. Дослідження електромагнітних коливань аналогічне механічним коливанням, наприклад, коливанням математичного маятника. В коливальному контурі відбувається перетворення електричної енергії конденсатора в енергію магнітного поля струму, що протікає в коливальному контурі. Перетворення

електричної енергії в енергію магнітного поля відбувається в області простору, де знаходиться коливальний контур і такий контур називається замкнений. розглянемо електричне коло в якому $R \neq 0$.



Такі коливання називаються затухаючими і вони змінюються за законом:

$$q = q_0 e^{-\beta \cdot t} \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$\beta = \frac{R}{2Z} - \text{коефіцієнт затухання;}$$

φ_0 – початкова фаза;

ω – частота;

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{Z_L} - \frac{R^2}{4Z^2}};$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} - \text{циклічна частота вільних коливань}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC} - \text{формула Томпсона}$$

3.7 Трансформатор

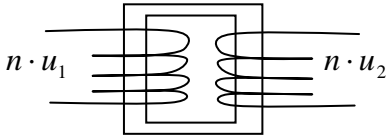
Трансформатором називається статичний електромагнітний пристрій для перетворення змінного струму однієї напруги у змінний струм іншої напруги при незмінній частоті.

Принцип роботи трансформатора ґрунтується на явищі електромагнітної індукції. Щоб показати принцип роботи трансформатора, розглянемо його будову. Трансформатор складається із замкненого сталюого осердя магніто проводу, на якому розміщені електрично незв'язані обмотки. Частина магнітопроводу, на якій розміщені обмотки називають **стержнем**, а без обмотки – **якорем**. Обмотка до якої підводиться електрична енергія називається **первинною**, а обмотка до якої під'єднуються споживачі – **вторинною**. Вторинних обмоток може бути декілька.

Слід пам'ятати, що *трансформатор не є джерелом електроенергії*. Електрична енергія надходить з мережі в первинну обмотку трансформатора, перетворюється в енергію магнітного поля, яка по осерді передається до вторинної обмотки, знову перетворюється в електричну енергію, що й надходить до споживачів.

Якщо до первинної обмотки підвести змінну напругу U_1 , то вона викличе протікання струму в первинній обмотці, який створить змінне магнітне поле. Це магнітне поле по магніто проводу передається і пронизує витки вторинної обмотки. У вторинній обмотці індукується ЕРС. Якщо до неї приєднати навантаження, то в ньому протікатиме електричний струм. Коли вторинна обмотка розімкнута, то режим роботи називається холостим ходом трансформатора.

$k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{n_2}{n_1}$ – коефіцієнт трансформації. Якщо $k < 1$ це понижуючий трансформатор; якщо $k > 1$ – підвищуючий трансформатор.



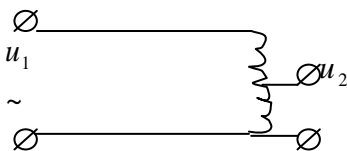
Якщо по первинній обмотці буде протікати струм, то вона буде нагріватися

$$P_1 = u_1 I_1 \quad P_2 = u_2 I_2 \quad \frac{P_1}{P_2} < 1$$

В такому випадку говорять, що існують втрати потужності в трансформаторі (в міді, в сталі). В міді втрати зумовлені активним опором обмоток трансформатора

$$P_m = I^2 R$$

Втрати в сталі зумовлені вихровими струмами, що виникають в магнітопроводі. Вони призводять до нагрівання магнітопроводу. Відношення потужностей первинної і вторинної обмотки називається ККД трансформатора. Автотрансформатором називають трансформатор в якого на замкненому сердечнику є лише одна обмотка, яка частинами належить одночасно первинному і вторинному колам.



Відношення ЕРС індукованих в обмотках є коефіцієнт трансформації автотрансформатора.

$$k = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Якщо при холостому ході трансформатора до частин з кількістю витків n_2 під'єднати навантаження, то можна записати:

$$u_1 I_1 \approx u_2 I_2$$

Струм I_1 це струм навантаження, добуток $u_2 I_2$ називається потужністю навантаження або номінальною потужністю автотрансформатора.

$$n = n_1 - n_2$$

Верхня частина обмотки буде мати n витків

$$n = n \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

З цієї формули можна зробити висновок, що витрати обмоткової міді будуть в $1 - \frac{1}{k}$ разів менші ніж для первинної обмотки звичайного трансформатора. В цілому робота автотрансформатора під навантаженням аналогічна роботі звичайного трансформатора. Різниця полягає в тому, що підведена до автотрансформатора потужність передає в коло навантаження частково електромагнітно, а частково електрично тоді як в звичайному трансформаторі потужність передається тільки електромагнітним шляхом. Автотрансформатори служать для пониження напруги і для підвищення.

3.8 Багатофазні системи змінного струму

Багатофазною системою змінного струму називається кількість кількох електричних кіл в яких діють електрорушійні сили однакової частоти зсунуті за фазою одна відносно другої. Проміжний багатофазний генератор нагадує однофазний в якому є декілька обмоток зміщених одна відносно одної. Багатофазну систему синусоїдних ЕРС називають симетричною, якщо всі ЕРС однакові за величиною і кожна ЕРС відстає або випереджає попередню на однаковий кут, якщо ці умови не задовольняються, то система не симетрична. Багатофазну систему називають незв'язаною, якщо кола які утворюють цю систему не з'єднані електрично між собою, якщо існує електричний зв'язок між колами системи тоді систему називають зв'язаною. Кожна обмотка має два кінці один з яких називається початком обмотки, а інший – кінцем обмотки. Найпоширенішою багатофазною системою є трифазна система змінного струму, яку називають сукупність трьох струмів однієї частоти, які проходять по трьох колах під дією трьох ЕРС зсунутих за фазою на $\frac{1}{3}$ періоду або на 120° . Перевагою цього струму є те, що він забезпечує передачу енергії з меншими втратами і витратами проводів. Трьохфазна система струму дає можливість створювати магнітне поле, що використовується в двигунах трьохфазного струму.

$$\varepsilon_1 = E_0 \sin \omega \cdot t \quad \varepsilon_2 = E_0 \sin\left(\omega \cdot t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad \varepsilon_3 = E_0 \sin\left(\omega \cdot t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Для передачі трьохфазного струму потрібно 6 проводів. Для створення зручності споживачі електрично з'єднують зіркою або трикутником. З'єднання обмоток генератора зіркою вважають таким коли всі початки або кінці обмоток мають одну спільну нейтральну точку. Провід який йде від кінця обмотки генератора до споживача називається лінійним, а той, що йде до нейтральної точки – нульовим.

Елементи геометричної і електронної оптики

Оптика – це розділ фізики в якому вивчають явища і закони виникнення, поширення і взаємодії електромагнітних хвиль. Розділ оптики в якому нехтують довжиною хвилі ($\lambda \rightarrow 0$) і закони формулюють на мові геометрії називають *геометричною оптикою*. В геометричній оптиці розглядають закони поширення світла як сукупність світлових **променів** – ліній вздовж яких поширюється енергія електромагнітних хвиль. В основі геометричної оптики лежать чотири закони та принцип Ферма.

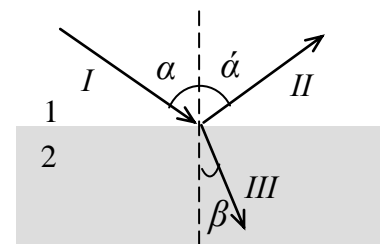
4.1 Основні закони оптики. Повне відбивання

Ще до встановлення природи світла були відомі наступні основні закони оптики:

1. **Закон прямолінійного поширення світла в оптично однорідному середовищі:** світло в оптично однорідному середовищі поширюється прямолінійно. Доказом цього закону є тінь з чіткими межами від непрозорих предметів при освітленні їх точковими джерелами світла (джерела, розміри яких значно менші від освітлюваного предмету і відстані до нього). Проте експерименти показали, що цей закон порушується, якщо світло проходить крізь дуже малі отвори, причому відхилення від прямолінійного поширення тим більші, чим менший отвір.

2. **Закон незалежності світлових променів:** дія окремого променя, не залежить від того діють одночасно інші промені чи їхня дія відсутня або припинена. Розбиваючи світловий потік на окремі світлові промені (наприклад, за допомогою діафрагм), можна показати, що дія окремих променів незалежна. При невеликих інтенсивностях промені при перетині не впливають один на одного. При інтенсивностях, які досягаються з лазерами цей закон порушується.

Якщо світло падає на межу розподілу двох прозорих середовищ, то падаючий промінь *I* (рис. 4.1) розділяється на два: відбитий *II* і заломлений *III*, напрями поширення яких описуються законами відбивання і заломлення. Кути падіння α , відбивання $\acute{\alpha}$ і заломлення β домовились вимірювати від перпендикуляра, поставленого до межі розподілу в точці падіння, до відповідного променя.



3. **Закон відбивання:** відбитий промінь лежить в одній площині з падаючим променем і перпендикуляром, проведеним до межі розділу двох середовищ в точці падіння. Кут відбивання дорівнює куту падіння: $\alpha = \acute{\alpha}$.

4. **Закон заломлення:** падаючий і заломлений промені та перпендикуляр, проведений до межі розподілу в точці падіння, лежать в одній площині; відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення є величина постійна для даних середовищ: $\sin \alpha / \sin \beta = n_{21}$, де n_{21} – **відносний показник заломлення** другого середовища відносно першого.

Відносний показник заломлення двох середовищ дорівнює відношенню їх абсолютних показників заломлення: $n_{21} = n_2 / n_1$.

Абсолютним показником заломлення середовища називається величина n , яка дорівнює відношенню швидкості електромагнітних хвиль c у вакуумі до їх фазової швидкості v в середовищі: $n = c/v$. Виходячи з цього можна записати, що $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, де ε і μ – відповідно електрична і магнітна проникності середовища. Враховуючи $n_{21} = n_2/n_1$, закон заломлення можна переписати у вигляді

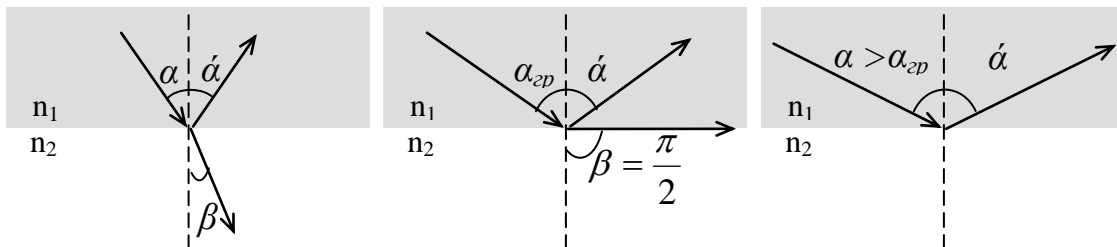
$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta.$$

З симетрії даного виразу випливає **оборотність світлових променів**. Якщо повернути промінь III , примусивши його падати на межу розділу під кутом β , то заломлений промінь в першому середовищі поширюватиметься під кутом α , тобто піде у зворотному напрямі уздовж променя I .

Якщо світло поширюється з середовища з більшим показником заломлення n_1 (оптично більш густе) в середовище з меншим показником заломлення n_2 (оптично менш густе) ($n_1 > n_2$), наприклад з скла у воду, то

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{n_1}{n_2} > 1,$$

і заломлений промінь відхиляється від нормалі: кут заломлення більший, ніж кут падіння. Кут заломлення збільшуватиметься із збільшенням кута падіння до цих пір, доки при певному значенні кута падіння ($\alpha = \alpha_{cp}$) не стане рівним $\pi/2$. Кут α_{cp} називається **граничним кутом**. При кутах падіння $\alpha > \alpha_{cp}$ все падаюче проміння повністю відбивається. Якщо $\alpha = \alpha_{cp}$, то інтенсивність заломленого променя стає рівною нулю, а інтенсивність відбитого – рівною інтенсивності падаючого. Таким чином, при кутах падіння в межах від α_{cp} до $\pi/2$ промінь не заломлюється, а повністю відбивається в перше середовище, причому інтенсивності відбитого і



падаючого променів однакові. Це явище називається **повним відбиванням**.

Граничний кут α_{cp} можна знайти з останнього співвідношення, підставивши $\beta = \pi/2$. Тоді $\sin \alpha_{cp} = n_2/n_1 = n_{21}$. Значення кута α_{cp} задовольняють дане рівняння при $n_2 \ll n_1$. Отже, явище повного відбивання має місце тільки при падінні світла з середовища оптично більш щільного в середовище оптично менш щільне.

Явище повного відбивання використовується в призмах повного відбивання. Показник заломлення скла рівний $n \approx 1,5$, граничний кут для межі скло – повітря $\alpha_{cp} = \arcsin(1/1,5) = 42^\circ$. Тому при падінні світла на межу скло – повітря при $\alpha > 42^\circ$ завжди матиме місце повне відбивання. За допомогою таких призм можна:

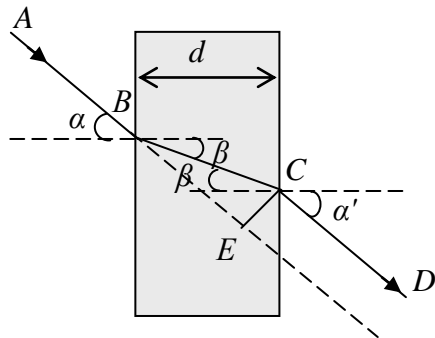
- повернути промінь на 90° ;
- повернути зображення;
- обернути проміння.

Такі призми застосовуються в оптичних приладах (наприклад, в біноклях, перископах), а також в **рефрактометрах**, що дозволяють визначати показники заломлення тіл (за законом заломлення, вимірюючи i_{cp} визначаємо відносний показник заломлення двох середовищ, а також абсолютний показник заломлення одного з середовищ, якщо показник заломлення другого середовища відомий).

Явище повного відбивання використовується також в світловодах – тонких, довільним чином зігнутих, волокнах з оптично прозорого матеріалу. У волоконних деталях застосовують

скляне волокно, світлопровідна жила (серцевина) якого охоплена оболонкою з іншого скла з меншим показником заломлення. Світло, падаючи на торець світловода під кутом, більшим ніж граничний, зазнає на поверхні розділу серцевини і оболонки повне відбивання і поширюється тільки по світлопровідній жилі. Таким чином, за допомогою світловодів можна довільним чином направляти світлові промені. Діаметр жил може бути від декількох мікрометрів до декількох міліметрів. Для передачі зображень, як правило, застосовуються багатожильні світловоди. Питання передачі світлових хвиль і зображень вивчаються в спеціальному розділі оптики – *волоконній оптиці*.

Заломлення в плоско-паралельній пластинці. Нехай промінь АВ падає на плоско-паралельну пластинку (рис 4.3). У склі він заломлюється і поширюється в напрямі ВС. У точці С він знову заломиться і вийде з пластинки в напрямі CD. Доведемо, що промінь CD, який вийшов з пластинки, паралельний падаючому на пластинку променю АВ. Для заломлення в точці В маємо:



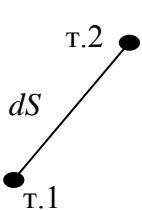
де n_{21} – відносний показник заломлення світла. Для заломлення в точці С закон заломлення дає $\sin \beta / \sin \alpha = 1/n_{21}$, оскільки промінь виходить із пластинки в повітря.

Перемноживши ці два вирази, отримуємо $\sin \alpha = \sin \beta$, або $\alpha = \beta$. Звідси випливає, що промені АВ і CD паралельні. Промінь CD зміщений відносно падаючого на величину $\delta = EC$. Величина зміщення залежить від товщини пластинки та кутів падіння і заломлення. Цю залежність можна описати співвідношенням (без доведення):

$$\delta = d \sin \alpha \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right).$$

5. Принцип Ферма: принцип найменшого часу – дійсний шлях поширення світла (траєкторія світлового променя) є шлях, для проходження якого йому потрібен мінімальний час в порівнянні з будь-яким іншим уявним шляхом між даними точками. Для проходження світлом ділянки шляху dS потрібен час dt :

$$dt = \frac{dS}{v}, \quad v - \text{швидкість світла в даній точці траєкторії}; \quad n = \frac{c}{v}; \quad v = \frac{c}{n}$$



Час затрачений світлом на проходження шляху від $m.1$ до $m.2$ дорівнює:

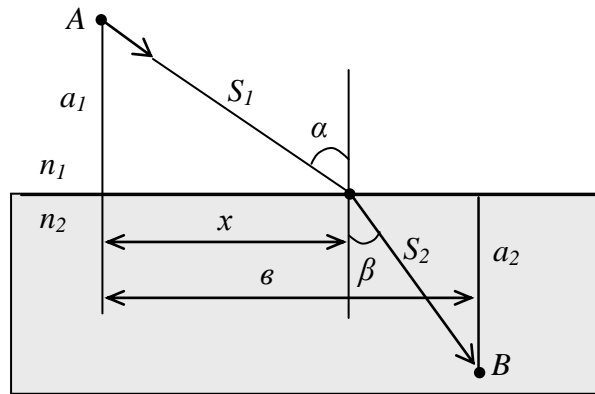
$$t = \int_1^2 \frac{dS}{v}; \quad t = \frac{1}{c} \int_1^2 n dS.$$

Величина $\int_1^2 n dS$ називається **оптичною довжиною шляху (L)**. В оптично однорідному середовищі оптична довжина шляху дорівнює добутку геометричної довжини на абсолютний показник заломлення середовища. $L = nS$. Звідси $t = \frac{L}{c}$.

Тому принцип Ферма можна сформулювати: *світло поширюється по такому шляху оптична довжина якого мінімальна.*

За допомогою принципу Ферма виведемо закон заломлення світла. Нехай маємо два оптично різних середовища. Промінь, що проходить від точки А до т.

В, на межі розподілу даних середовищ заломлюється. Для довільного променя оптична довжина шляху дорівнюватиме:



$$L = n_1 S_1 + n_2 S_2 = n_1 \sqrt{a_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}.$$

Знайдемо похідну і прирівняємо її до нуля.

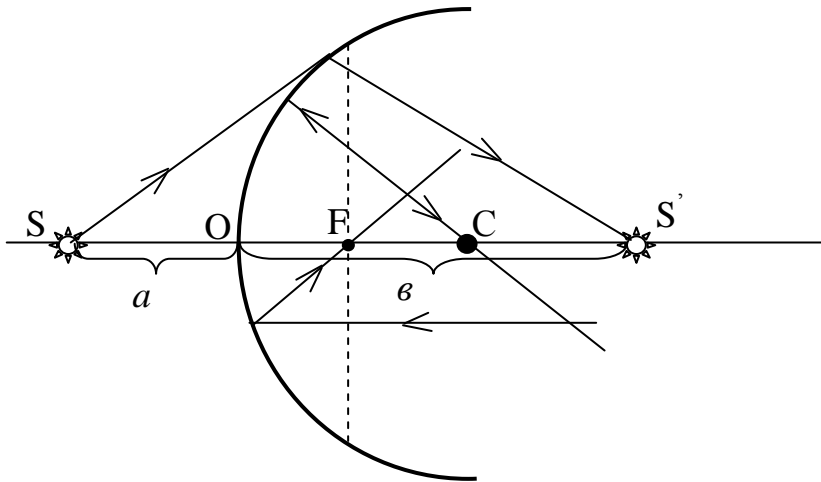
$$\frac{dL}{dx} = \frac{n_1 x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{n_2 (b-x)}{\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}} = n_1 \frac{x}{S_1} - n_2 \frac{b-x}{S_2} = 0.$$

$$n_1 \cdot \sin \alpha - n_2 \cdot \sin \beta = 0, \quad n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Самостійно довести закон відбивання.

4.2 Сферичні дзеркала

Дзеркала, поверхню яких утворює частина поверхні кулі, називаються **сферичними**. Вони є вгнуті та опуклі.



Точка О – вершина дзеркала, або полюс дзеркала. Пряма ОС, яка проходить через полюс дзеркала і центр його сферичної поверхні, називається **головною оптичною віссю** сферичного дзеркала. Пряма, що проходить через т.С і будь-яку точку на поверхні дзеркала називається **побічною оптичною віссю**.

Якщо промінь йде по будь-якій оптичній осі сферичного дзеркала, то після відбивання він піде назад тим самим шляхом. Якщо промені паралельні до головної оптичної осі, то після відбивання вони пройдуть через точку, яка лежить на головній оптичній осі і називається **головним фокусом** сферичного дзеркала (т.Ф). Відстань OF називається **головною фокусною відстанню**.

$$OF = f; \quad f = R/2, \quad \text{де } R - \text{радіус кривизни сферичного дзеркала.}$$

Площина, яка перпендикулярна до головної оптичної осі та проходить через фокус, називається **фокусною площиною**.

Промені паралельні до побічної оптичної осі, відбившись збираються в точці на тій самій осі (у фокусі дзеркала), який розташований у фокусній площині.

Формула сферичного дзеркала (без виведення):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f},$$

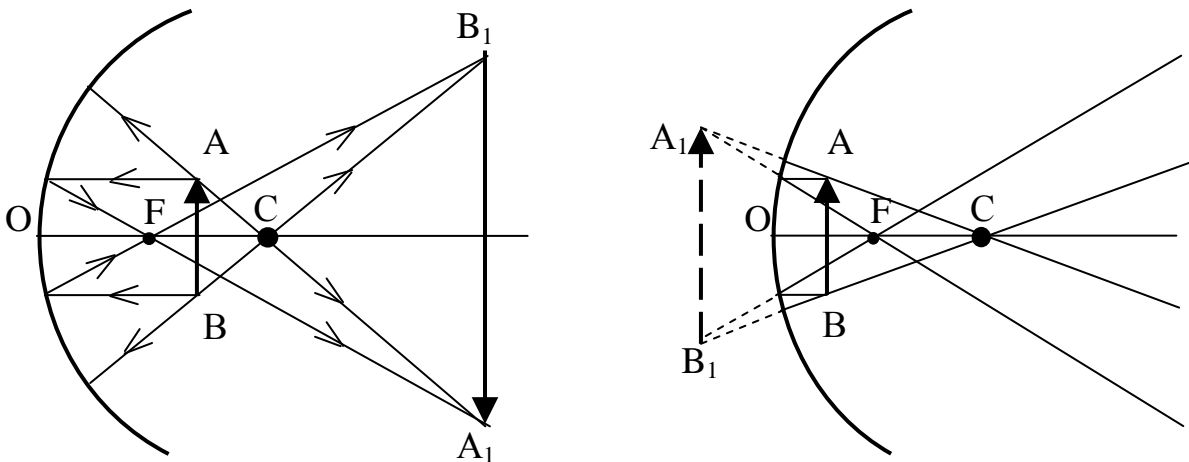
де a – відстань від дзеркала до світної точки, розташованої на головній оптичній осі, b – відстань від дзеркала до зображення світної точки.

Відстані a і b від точки O вважаються додатними в напрямі поширення світла і від'ємними – в протилежному напрямі. Зображення у сферичному дзеркалі дійсне, якщо $b < 0$, тобто предмет і його зображення розташовані по одну сторону від дзеркала. Якщо предмет і його зображення розташовані по різні сторони сферичного дзеркала, то $b > 0$ і зображення уявне.

Для опуклого сферичного дзеркала вважається, що $R > 0$. В такому дзеркалі зображення завжди уявне.

Для вгнутого сферичного дзеркала $R < 0$. В такому дзеркалі зображення будуть:

$$\frac{a}{f} \begin{cases} > 1 - \text{дійсне} \\ < 1 - \text{уявне} \end{cases}.$$



4.3 Тонкі лінзи. Зображення предметів за допомогою лінз

Під **світловим променем** розуміють нормаль до хвильової поверхні, уздовж якої поширюється потік світлової енергії. Геометрична оптика, залишаючись наближеним методом побудови зображень в оптичних системах, дозволяє вивчити основні явища, пов'язані з проходженням через них світла, і тому являється основою теорії оптичних приладів.

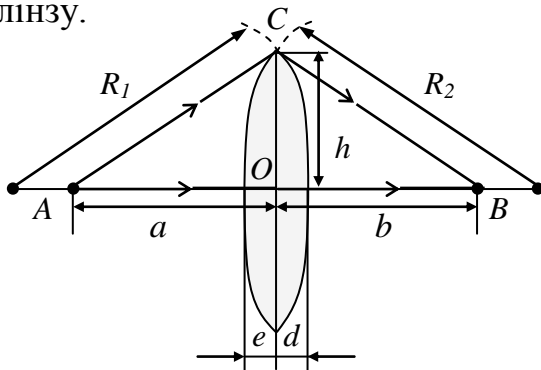
Лінзи – прозорі тіла, обмежені двома поверхнями (одна з них, як правило, сферична, іноді циліндрична, а друга – сферична або плоска), які, заломлюючи світлові промені, формують оптичні зображення предметів. Матеріалом для лінз служать скло, кварц, кристали, пластмаси і т. д. За зовнішньою формою (рис. 3) лінзи поділяють на:

- 1) двоопуклі; 2) плоскоопуклі; 3) двовгнуті; 4) плосковгнуті;

5) опукловгнуті; 6) вгнутоопуклі.

За оптичними властивостями лінзи поділяють на збірні та розсіюючі.

Лінза називається **тонкою**, якщо її товщина (відстань між обмежувачими поверхнями) значно менша в порівнянні з радіусами поверхонь, які обмежують лінзу.



Пряма, яка проходить через центри кривизни поверхонь лінзи, називається **головною оптичною віссю**. Для кожної лінзи існує точка, яка називається **оптичним центром лінзи**. Вона лежить на головній оптичній осі та має властивість, що промені проходячи через неї не заломлюються..

Для простоти, вважатимемо, що оптичний центр лінзи O співпадає з геометричним центром середньої частини лінзи (це справедливо тільки для двоопуклої і двовгнутої лінз з однаковими радіусами кривизни обох поверхонь; плосковипуклих і плосковвігнутих лінз оптичний центр O лежить на перетині головної оптичної осі з сферичною поверхнею).

Для виведення формули тонкої лінзи – співвідношення, що пов'яже радіуси кривизни поверхонь лінзи R_1 і R_2 з відстанями від лінзи до предмету a і до його зображення b , – використаємо принцип Ферма: *дійсний шлях поширення світла (траєкторія світлового променя) це шлях, для проходження якого необхідний найменший час у порівнянні з іншим уявним шляхом.*

Розглянемо дві траєкторії світлового променя (мал. 3) – пряму, що з'єднує точки A і B (промінь AOB), і траєкторію, що проходить через край лінзи (промінь ACB). Час проходження світла по траєкторії AOB дорівнює:

$$t_1 = \frac{a + N(e + d) + b}{c},$$

де $N = n/n_1$ – відносний показник заломлення (n і n_1 – відповідно абсолютні показники заломлення лінзи і навколишнього середовища).

Час проходження світла по траєкторії ACB дорівнює:

$$t_2 = \frac{\sqrt{(a + e)^2 + h^2} + \sqrt{(b + d)^2 + h^2}}{c}$$

Якщо використати умову рівності часу $t_1 = t_2$, то

$$a + N(e + d) + b = \sqrt{(a + e)^2 + h^2} + \sqrt{(b + d)^2 + h^2} \quad (166.1)$$

Розглянемо параксіальні (приосьові) промені, тобто промені, яку утворюють з оптичною віссю малі кути. Тільки для параксіальних променів утворюється стигматичне зображення, тобто всі промені параксіального пучка, **витікаючого** з точки A , перетинає оптичну вісь в одній і тій точці B . Тоді $h \ll (a + e)$, $h \ll (b + d)$ і

$$\sqrt{(a + e)^2 + h^2} = (a + e) \sqrt{1 + \frac{h^2}{(a + e)^2}} = (a + e) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{a + e} \right)^2 \right] = a + e + \frac{h^2}{2(a + e)}$$

Аналогічно

$$\sqrt{(b + d)^2 + h^2} = b + d + \frac{h^2}{2(b + d)}.$$

Підставивши знайдені вирази в (166.1), отримаємо

$$(N - 1)(e + d) = \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{a + e} + \frac{1}{b + d} \right) \quad (166.2)$$

Для тонкої лінзи $e \ll a$ і $d \ll b$, тому (166.2) можна представити у вигляді

$$(N-1)(e+d) = \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Враховуючи, що

$$e = R_2 - \sqrt{R_2^2 - h^2} = R_2 - R_2 \sqrt{1 - h^2/R_2^2} = R_2 - R_2 \left[1 - \frac{1}{2} (h/R_2)^2 \right] = h^2/(2R_2)$$

і відповідно $d = h^2/(2R_1)$, отримаємо

$$(N-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad (166.3)$$

де $N = n/n_1$ – відносний показник заломлення, n і n_1 – відповідно абсолютні показники заломлення лінзи і навколишнього середовища.

Співвідношення (166.3) є **формулою тонкої лінзи**. Радіус кривизни опуклої поверхні лінзи вважається додатнім, вгнутої – від'ємним.

Якщо $a \rightarrow \infty$, тобто промені падають на лінзу паралельним пучком (мал. 234, а), то

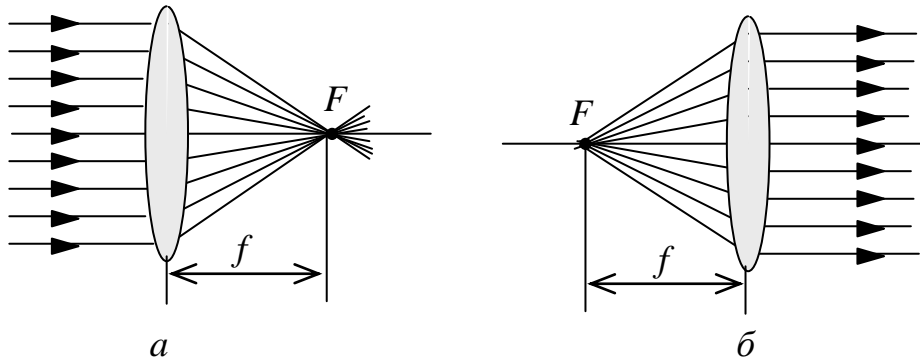
$$\frac{1}{b} = (N-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Відстань b , яка відповідає цьому випадку, називається **фокусною відстанню лінзи**.

$$b = OF = f:$$

$$f = \frac{1}{(N-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

Вона залежить від відносного показника заломлення і радіусів кривизни поверхонь лінзи.



мал. 234

Якщо $b \rightarrow \infty$, тобто зображення знаходиться в нескінченності і промені виходять з лінзи паралельним пучком (мал. 234, б), то $a = OF = f$.

Таким чином, фокусні відстані лінзи, оточеної з обох боків однаковим середовищем, рівні. Точки F , що лежать по обидві сторони лінзи на відстані, рівній фокусній, називаються **фокусами лінзи**. Фокус – це точка, в якій після заломлення збираються всі промені, падаючі на лінзу паралельно головній оптичній осі. Величина

$$(N-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f} = \Phi \quad (166.4)$$

називається **оптичною силою лінзи**. Її одиниця – діоптрія (дптр). **Діоптрія** – оптична сила лінзи з фокусною відстанню 1 м: $1 \text{ дптр} = 1/\text{м}$.

Лінзи з **додатною** оптичною силою є **збірними**, з **від'ємною** – **розсіювальними**. Площини, що проходять через фокуси лінзи перпендикулярно

до її головної оптичної осі, називаються **фокусними площинами**. На відміну від збірної розсіювальна лінза має уявні фокуси. В уявному фокусі збираються (після заломлення) уявні продовження променів, що падають на розсіювальну лінзу паралельно до головної оптичної осі.

Враховуючи (166.4), формулу лінзи (166.3) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

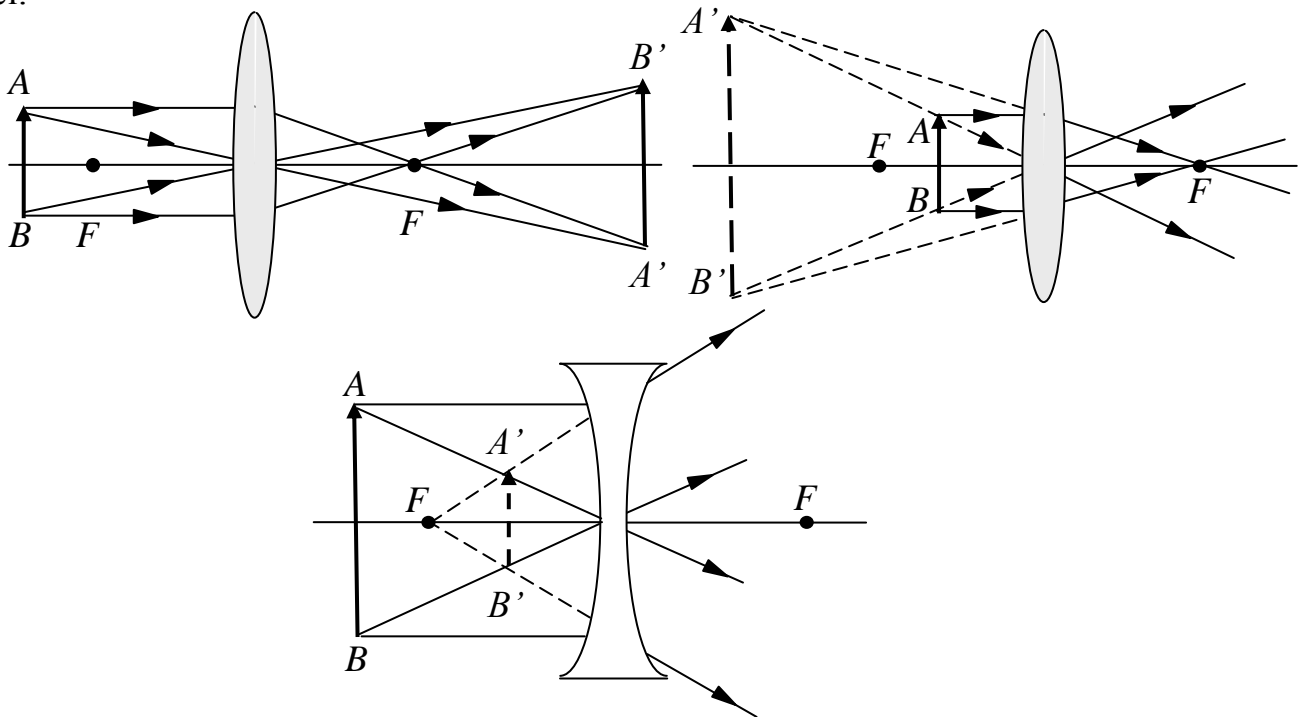
Для розсіювальної лінзи відстані f і b треба вважати від'ємними.

Для побудови зображення в лінзах використовують наступні промені:

1) промінь, який проходить через оптичний центр лінзи і не змінює свого напрямку;

2) промінь, який йде паралельно до головної оптичної осі: після заломлення в лінзі цей промінь (або його продовження) проходить через другий фокус лінзи;

3) промінь (або його продовження), що проходить через перший фокус лінзи: після заломлення в ній виходить з лінзи паралельно до її головної оптичної осі.



(мал. 237)

Для прикладу показана побудова зображень: дійсного та уявного в збірній (мал. 236) і уявного в розсіювальній (мал. 237) лінзах.

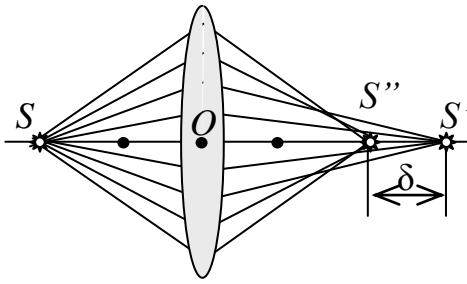
Відношення лінійних розмірів зображення і предмету називається **лінійним збільшенням лінзи**. Негативним значенням лінійного збільшення відповідає дійсне зображення (воно перевернене), позитивним – уявне зображення (воно пряме).

4.4 Аберациї (погрішності) оптичних систем

Розглядаючи проходження світла через тонкі лінзи, ми обмежувалися параксіальними променями. Показник заломлення матеріалу лінзи вважали незалежним від довжини хвилі падаючого світла, а падаюче світло – монохроматичним. Оскільки в реальних оптичних системах ці умови не

виконуються, то в них виникають спотворення зображення, які називають **абераціями** (або *погрішностями*).

1. Сферична аберація.



Якщо на лінзу падає пучок світла, то параксіальні промені після заломлення перетинатимуться в точці S' (на відстані OS' від оптичного центру лінзи), а промені, більш віддалені від оптичної осі, – в точці S'' , ближче до лінзи (мал. 238). В результаті зображення світної точки на екрані, перпендикулярному до оптичної осі, буде у вигляді розпливчатої плями.

Цей тип погрішності, пов'язаний з сферичністю заломлюючих поверхонь, називається *сферичною аберацією*. Кількісною мірою сферичної аберації є відрізок $\delta = OS'' - OS'$. Застосовуючи діафрагми (обмежуючись параксіальним промінням), можна сферичну аберацію зменшити, проте при цьому зменшується **світлосила** лінзи. Сферичну аберацію можна практично усунути, складаючи системи із збірних ($\delta < 0$) та розсіювальних ($\delta > 0$) лінз. Сферична аберація є окремим випадком астигматизму.

2. **Кома**. Якщо через оптичну систему проходить широкий пучок світла від світної точки, що знаходиться не на оптичній осі, то отримане зображення цієї точки буде у вигляді світної плями, що нагадує хвіст комети. Така погрішність тому і називається *комою*. Усунути кому можна тими самими прийомами, що і сферичну аберацію.

3. **Дисторсія**. Погрішність, при якій при великих кутах падіння променів на лінзу лінійне збільшення для точок предмету, які знаходяться на різних відстанях від головної оптичної осі, дещо відрізняється, називається *дисторсією*. В результаті порушується геометрична подібність між предметом (прямокутна сітка, мал. 239, а) і його зображенням (рис. 239, б – *подушкоподібна* дисторсія, мал. 239, в – *бочкоподібна* дисторсія). Дисторсія особливо небезпечна в тих випадках, коли оптичні системи використовуються наприклад, для **аерофотознімків**, в мікроскопії і т.д. Дисторсію виправляють відповідним підбором складових частин оптичної системи.

4. **Хроматична аберація**. До цих пір ми припускали, що коефіцієнти заломлення оптичної системи постійні. Проте це твердження справедливе лише для монохроматичного світла ($\lambda = \text{const}$). Для немонохроматичного світла необхідно враховувати залежність коефіцієнта заломлення речовини лінзи (і навколишнього середовища, якщо це не повітря) від довжини хвилі (явище дисперсії). При падінні на оптичну систему білого світла окремі **його складові** фокусуються в різних точках (найбільшу фокусну відстань має червоне проміння, найменшу – фіолетове), тому зображення отримується розмите і по краях забарвлене. Це явище називається *хроматичною аберацією*. Оскільки різні сорти скла мають різну дисперсію, то, комбінуючи збірні і розсіювальні лінзи з різного скла, можна **сумістити** фокуси двох (**ахромати**) і трьох (**апохромати**) різних кольорів, усунувши тим самим хроматичну аберацію. Системи, виправлені на сферичну і хроматичну аберацію, називаються **апланатами**.

5. **Астигматизм**. Погрішність, зумовлена неоднаковою кривизною оптичної поверхні в різних площинах перетину падаючого на неї світлового пучка, називається *астигматизмом*. Так, зображення точки, віддаленої від головної оптичної осі, спостерігається на екрані у вигляді розпливчатої плями

еліптичної форми. Ця пляма залежно від відстані екрану до оптичного центру лінзи вироджується або у вертикальну, або в горизонтальну пряму. Астигматизм можна виправити підбором радіусів кривизни заломлюючих поверхонь і їх фокусних відстаней. Системи, виправлені на сферичну і хроматичну аберацію і астигматизм, називаються **анастигматами**.

Усунення аберації можливо лише підбором спеціально розрахованих складних оптичних систем. Одночасне виправлення всіх погрешностей – задача надзвичайно складна, а іноді навіть нерозв'язна. Тому звичайно усуваються повністю тільки ті погрешності, які в тому або іншому випадку особливо шкідливі.

4.5 Основні фотометричні величини і їх одиниці

Фотометрія – розділ оптики, в якому вивчають питання вимірювання інтенсивності світла і його джерел. У фотометрії використовують *енергетичні* та *світлові* величини.

1. **Енергетичні величини** характеризують енергетичні параметри оптичного випромінювання **безвідносно** до його дії на приймачі випромінювання.

Потік випромінювання Φ_e – величина, що дорівнює відношенню енергії W випромінювання до часу t , за який випромінювання відбулося: $\Phi_e = W / t$.

Одиниця потоку випромінювання – *ват* (Вт).

Енергетична світимість (випромінювання) R_e – величина, рівна відношенню потоку випромінювання Φ_e , що випускається поверхнею, до площі S перетину, крізь яку цей потік проходить: $R_e = \Phi_e / S$, тобто представляє собою поверхневу густину потоку випромінювання.

Одиниця енергетичної світимості – *ват на метр в квадраті* (Вт/м²).

Енергетична сила світла (сила випромінювання) I_e визначається за допомогою поняття про точкове джерело світла – джерела, розмірами якого в порівнянні з відстанню до точки спостереження можна нехтувати. Енергетична сила світла I_e – величина, що дорівнює відношенню потоку випромінювання Φ_e , джерела до тілесного кута ω , в межах якого це випромінювання поширюється:

$I_e = \Phi_e / \omega$. Одиниця енергетичної сили світла – *ват на стерadian* (Вт/ср).

Енергетична яскравість (променистість) B_e – величина, що дорівнює відношенню енергетичної сили світла dI_e елемента випромінюючої поверхні до площі dS проекції цього елемента на площину, перпендикулярну до напрямку спостереження: $B_e = dI_e / dS$. Одиниця енергетичної яскравості – *ват на стерadian-метр в квадраті* (Вт/ср·м²).

Енергетична освітленість (опромінення) E_e характеризує величину потоку випромінювання, падаючого на одиницю освітлюваної поверхні. Одиниця енергетичної освітленості співпадає з одиницею енергетичної світимості (Вт/м²).

2. **Світлові величини** характеризують фізіологічні дії світла і оцінюються за дією на око (виходять з так званої середньої чутливості ока) або інші приймачі випромінювання.

Для оптичних вимірювань використовуються різні приймачі випромінювання (наприклад, око, фотоелементи, фотопомножувачі), які не мають однакової чутливості до енергії різних довжин хвиль, будучи, таким чином, *селективними (вибірними)*. Кожний приймач випромінювання характеризується

своєю кривою чутливості до світла різних довжин хвиль. Тому світлові вимірювання, будучи суб'єктивними, відрізняються від об'єктивних, енергетичних і для них вводяться світлові одиниці, що використовуються тільки для видимого світла.

Основною світловою одиницею в СІ є одиниця **сили світла** – *кандела* (кд) – сила світла в заданому напрямі джерела, яке випромінює монохроматичне світло частотою $540 \cdot 10^{12}$ Гц, дорівнює $1/683$ Вт/ср.

Світловий потік Φ визначається як потужність оптичного випромінювання за **викликаючим** ним світловим відчуттям (по його дії на селективний приймач світла із заданою спектральною чутливістю). Одиниця світлового потоку – *люмен* (лм): 1 лм – світловий потік, що випромінюється точковим джерелом силою світла в 1 кд всередині тілесного кута в 1 ср (при рівномірності поля випромінювання всередині тілесного кута) ($1 \text{ лм} = 1 \text{ кд} \cdot \text{ср}$).

Світлимість R визначається співвідношенням $R = \Phi/S$. Одиниця світимості – *люмен на метр в квадраті* (лм/м²).

Яскравість B_φ поверхні, що світиться, в деякому напрямі φ є величина рівна відношенню сили світла I в цьому напрямі до площі проекції поверхні S , що світиться, на площину, перпендикулярну даному напрямку: $B_\varphi = I/(S \cos \varphi)$. Одиниця яскравості – *кандела на метр в квадраті* (кд/м²).

Освітленість E – величина, рівна відношенню світлового потоку Φ , падаючого на поверхню, до площі S цієї поверхні: $E = \Phi/S$. Одиниця освітленості – *люкс* (лк): 1 лк – освітленість поверхні, на 1 м² якої падає світловий потік в 1 лм ($1 \text{ лк} = 1 \text{ лм/м}^2$).

4.6 Елементи електронної оптики

Область фізики і техніки, в якій вивчаються питання формування, фокусування і відхилення пучків заряджених частинок і отримання з їх допомогою зображень під дією електричних і магнітних полів у вакуумі, називається **електронною оптикою**. Комбінуючи різні електронно-оптичні елементи – електронні лінзи, дзеркала, призми, – одержують електронно-оптичні системи, наприклад електронно-променеву трубку, електронний мікроскоп, електронно-оптичний перетворювач.

1. **Електронні лінзи** є пристроями, за допомогою електричних і магнітних полів яких формуються і фокусуються пучки заряджених частинок. Існують **електростатичні** і **магнітні** лінзи.

Як **електростатична лінза** може бути використане електричне поле з **вгнутими** і **опуклими** еквіпотенціальними поверхнями, наприклад в системах металевих електродів і діафрагм, що володіють осьовою симетрією. На мал. 240 зображена найпростіша збираюча електростатична лінза, де A – точка предмету, B – її зображення, пунктиром зображені лінії напруженості поля

Магнітна лінза, зазвичай, являє собою соленоїд з сильним магнітним полем, коаксіальним пучку електронів. Щоб магнітне поле сконцентрувати на осі симетрії, соленоїд поміщають в залізний кожух з вузьким внутрішнім кільцевим розрізом.

Якщо пучок заряджених частинок потрапляє в однорідне магнітне поле, направлене уздовж осі пучка, то швидкість кожної частинки можна розкласти на два компоненти: поперечний і поздовжній. Перший з них визначає рівномірний

рух по колу в площині, перпендикулярній напрямку поля, другий – рівномірний прямолінійний рух уздовж поля. Результируючий рух частинки відбуватиметься по спіралі, вісь якої співпадає з напрямом поля. Для електронів, що випускаються під різними кутами, нормальні складові швидкостей будуть різними, тобто будуть різні і радіуси описуваних ними спіралей. Проте відношення нормальних складових швидкості до радіусів спіралей за період обертання буде для всіх електронів однаковим; отже, через один оборот всі електрони сфокусуються в одній і тій же точці на осі магнітної лінзи.

«Заломлення» електростатичних і магнітних лінз залежить від їх фокусних відстаней, які визначаються пристроєм лінзи, швидкістю електронів, різницею потенціалів, прикладеною до електродів (електростатична лінза), і індукцією магнітного поля (магнітна лінза). Змінюючи різницю потенціалів або регулюючи струм в катушці, можна змінити фокусну відстань лінз. Стегматичне зображення предметів в електронних лінзах **виходить** тільки для параксіальних електронних пучків. Як і в оптичних системах, в електронно-оптичних елементах також мають місце погіршеності: сферична аберация, кома, дисторсія, астигматизм. При **розкиді** швидкостей електронів в пучку спостерігається також і хроматична аберация. Аберация погіршують роздільну здатність і якість зображення, а тому у кожному конкретному випадку необхідно їх усувати.

2. Електронний мікроскоп – цей пристрій, призначений для отримання зображення мікрооб'єктів. У ньому на відміну від оптичного мікроскопа замість світлових променів використовують прискорені до великих енергій (30–100 кеВ і більше) в умовах глибокого вакууму (приблизно 0,1 мПа) електронні пучки, а замість звичайних лінз – електронні лінзи. В електронних мікроскопах предмети розглядаються або в **прохідному**, або у **відбитому** потоці електронів, тому розрізняють **просвічувальні** електронні мікроскопи та **відбивні**.

На мал. 241 приведена принципова схема просвічувального електронного мікроскопа. Електронний пучок, сформований електронною пушкою (**гарматою**) 1, потрапляє в область дії **конденсорної** лінзи 2, яка фокусує на об'єкті 3 електронний пучок необхідного **перерізу** та інтенсивності. Проїшовши об'єкт і зазнавши в ньому відхилення, електрони проходять другу магнітну лінзу – об'єктив 4 – та збираються нею в проміжне зображення 5. Потім за допомогою проєкційної лінзи 6 на **флюорисцентному** екрані отримується кінцеве зображення 7. Роздільна здатність електронного мікроскопа обмежується, з одного боку, хвильовими властивостями (дифракцією) електронів, з іншої – аберациями електронних лінз. Згідно теорії, роздільна здатність мікроскопа пропорційна довжині хвилі, а оскільки довжина хвилі використовуваних електронних пучків (приблизно 1 нм) в тисячі раз менше довжини хвилі світлового проміння, то роздільна здатність електронних мікроскопів відповідно більше і складає 0,01 – 0,0001 мкм (для оптичних мікроскопів приблизно рівне 0,2–0,3 мкм). З допомогою електронних мікроскопів можна добитися значних збільшень (до 10^6 раз), що дозволяє спостерігати деталі структур розмірами 0,1 нм.

3. Електронно-оптичний перетворювач – цей пристрій, призначений для підсилення яскравості світлового зображення і перетворення невидимого для ока зображення об'єкту (наприклад, в інфрачервоному або ультрафіолетовому промінні) у видиме. Схема найпростішого електронно-оптичного перетворювача показана на **мал. 242**. Зображення предмету А за допомогою оптичної лінзи 1 проєктується на фотокатод 2. Випромінювання від об'єкту викликає з поверхні

фотокатода фотоелектронну емісію, пропорційну розподілу яскравості спроектованого на нього зображення. Фотоелектрони, прискорені електричним полем (3 – прискорюючий електрод), фокусуються за допомогою електронної лінзи 4 на **флуоресцентний** екран 5, де електронне зображення перетвориться в світлове (утворюється кінцеве зображення A''). Електронна частина перетворювача знаходиться у високовакуумній камері 6.

З оптики відомо, що всяке збільшення зображення пов'язано з зменшенням його освітленості. Перевага електронно-оптичних перетворювачів полягає в тому, що в них можна отримати збільшене зображення A'' навіть більшої освітленості, ніж сам предмет A , оскільки освітленість визначається енергією електронів, що створюють зображення на **флуоресціюючому** екрані. Роздільна здатність каскадних (декількох послідовно сполучених) електронно-оптичних перетворювачів складає 25–60 штрихів на 1 мм. Коефіцієнт перетворення – відношення випромінюваного екраном світлового потоку до потоку, падаючого від об'єкту на фотокатод, – у каскадних електронно-оптичних перетворювачів досягає $\approx 10^6$. Недолік цих приладів – мала роздільна здатність і досить високий **темновий** фон, що впливає на якість зображення.

4.7 Розвиток уявлень про природу світла. Когерентність і монохроматичність світлових хвиль

Основні закони оптики відомі ще із **стародавніх часів**. Так, Платон (430 р. до н. е.) встановив закони прямолінійного поширення і відбивання світла. Арістотель (350 р. до н. е.) і Птоломей вивчали заломлення світла. Перші уявлення про природу світла виникли у стародавніх греків і єгиптян, які надалі, у міру винаходу і удосконалення різних оптичних інструментів, наприклад параболічних дзеркал (XIII ст.), фотоапарата і мікроскопа (XVI ст.), підзорної труби (XVII ст.), розвивалися і трансформувалися.

У кінці XVII ст. на основі багатовікового досвіду і розвитку уявлень про світло виникли **дві теорії світла: корпускулярна** (І. Ньютон) і **хвильова** (Р. Гук і Х. Гюйгенс).

Згідно **корпускулярної теорії** (теорії **витоку**), світло є потоком частинок (корпускул), що випускаються тілами, які світяться, і летять по прямолінійних траєкторіях. Рух світлових корпускул Ньютон підпорядкував сформульованим ним законам механіки. Так, відбивання світла розглядалось аналогічно відбиванню пружної кульки від площини, де також справджується закон рівності кутів падіння і відбивання. Заломлення світла Ньютон пояснював притяганням корпускул заломлюючим середовищем, внаслідок чого швидкість корпускул змінюється при переході з одного середовища в інше. З теорії Ньютона випливала **постійність** синуса кута падіння α до синуса кута заломлення β :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v}{c} = n, \quad (170.1)$$

де c – швидкість поширення світла у вакуумі, v – швидкість поширення світла в середовищі.

Оскільки n в середовищі завжди більше одиниці, то, **за теорією Ньютона**, $v > c$, тобто швидкість поширення світла в середовищі повинна бути завжди більшою за швидкість його поширення у вакуумі.

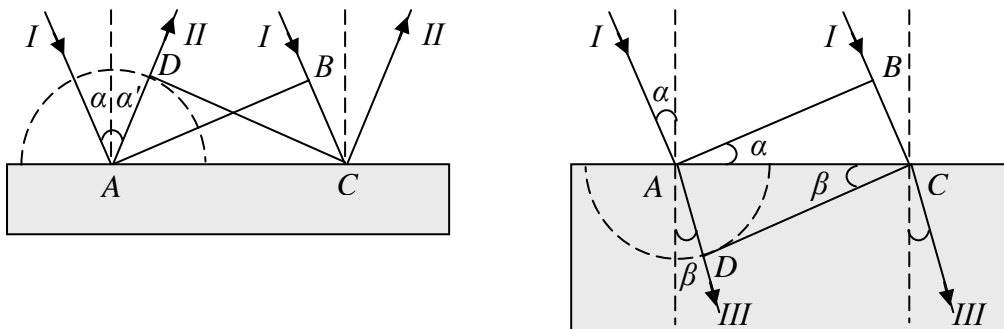
Згідно **хвильової теорії**, розвинутої на основі аналогії оптичних і акустичних явищ, світло є пружною хвилею, що поширюється в особливому середовищі – ефірі. Ефір заповнює весь світовий простір, пронизує всі тіла і

володіє механічними властивостями – пружністю і щільністю. За Гюйгенсом, велика швидкість поширення світла зумовлена особливими властивостями ефіру.

Хвильова теорія ґрунтується на *принципі Гюйгенса*: *кожна точка, до якої доходить хвиля, стає центром вторинних хвиль, а огинаюча цих хвиль дає положення хвильового фронту в наступний момент часу*. Нагадаємо, що хвильовим фронтом називається геометричне місце точок до яких доходять коливання в момент часу t . Принцип Гюйгенса дозволяє аналізувати поширення світла і вивести закони відбивання і заломлення.

Виведемо *закони відбивання і заломлення* світла, виходячи з принципу Гюйгенса.

Нехай на межу розподілу двох середовищ падає плоска хвиля (фронт хвилі – площина AB), яка поширюється уздовж напрямку I (мал. 243).



Коли фронт хвилі досягне поверхні відбивання в точці A , ця точка почне випромінювати вторинну хвилю. Для проходження хвилею відстані BC потрібен час $\Delta t = BC/v$. За цей же час фронт вторинної хвилі досягне точок півсфери, радіус AD якої дорівнює $v\Delta t = BC$. Положення фронту відбитої хвилі у цей момент часу відповідно до принципу Гюйгенса задається площиною DC , а напрям поширення цієї хвилі – променем II . З рівності трикутників ABC і ADC випливає закон відбивання: кут відбивання α' дорівнює куту падіння α .

Для виведення закону заломлення припустимо, що плоска хвиля (фронт хвилі – площина AB), яка поширюється у вакуумі уздовж напрямку I із швидкістю світла c , падає на межу розподілу з середовищем, в якому швидкість її поширення дорівнює v (мал. 244). Нехай час, затрачуваний хвилею для проходження шляху BC , рівний Δt . Тоді $BC = c\Delta t$. За цей же час фронт хвилі, *породжений* точкою A в середовищі з швидкістю v , досягне точок півсфери, радіус якої $AD = v\Delta t$. Положення фронту заломленої хвилі у цей момент часу відповідно до принципу Гюйгенса задається площиною DC , а напрям її поширення – променем III . З мал. 244 виходить, що

$$AC = BC/\sin \alpha = AD/\sin \beta, \text{ тобто } c\Delta t/\sin \alpha = v\Delta t/\sin \beta.$$

Звідси

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{v} = n. \quad (170.2)$$

Порівнюючи вирази (170.2) і (170.1), бачимо, що хвильова теорія приводить до висновку, відмінного від висновку теорії Ньютона. За теорією Гюйгенса, $v < c$, тобто швидкість поширення світла в середовищі повинна бути завжди меншою за швидкість його поширення у вакуумі.

Таким чином, до початку XVIII ст. існувало два протилежні підходи до пояснення природи світла: корпускулярна теорія Ньютона і хвильова теорія

Гюйгенса. Обидві ці теорії пояснювали прямолінійне поширення світла, закони відбивання і заломлення.

Експериментальний доказ справедливості хвильової теорії був отриманий в 1851 р., коли Э. Фуко (і незалежно від нього А. Фізо) виміряв швидкість поширення світла у воді і отримав значення, відповідне формулі (170.2).

До початку XIX сторіччя корпускулярна теорія була повністю знехтувана й восторжествувала хвильова теорія. Велика заслуга в цьому **плані** належить англійському фізику Т. Юнгу, що дослідив явища дифракції і інтерференції, і французькому фізику О. Френелю (1788–1827), що доповнив принцип Гюйгенса і який пояснив ці явища.

Не дивлячись на визнання хвильової теорії, вона володіла цілим рядом недоліків. Наприклад, явища інтерференції, дифракція і поляризації можна було пояснити тільки в тому випадку, якщо світлові хвилі вважати поперечними. З другого боку, якщо світлові хвилі – поперечні, то їх носій – ефір – повинен володіти властивостями твердих тіл. Спроба ж наділяти ефір властивостями твердого тіла успіху не мала, оскільки ефір не чинить помітної дії на тіла, що рухаються в ньому. Далі експерименти показали, що швидкість поширення світла в різних середовищах різна, тому ефір повинен володіти в різних середовищах різними властивостями. Теорія Гюйгенса не могла пояснити також фізичної природи наявності різних кольорів.

Наука про світло накопичувала експериментальні дані, що свідчать про взаємозв'язок світлових, електричних і магнітних явищ, що дозволило Максвелу в 70-х роках позаминулого сторіччя створити електромагнітну теорію світла. Згідно електромагнітної теорії Максвела

$$c/v = \sqrt{\epsilon\mu} = n,$$

де c і v – відповідно швидкості поширення світла у вакуумі і в середовищі з діелектричною проникністю ϵ і магнітною проникністю μ .

Це співвідношення зв'язує оптичні, електричні і магнітні сталі середовища. За Максвелом, ϵ і μ – величини, не залежні від довжини хвилі світла, тому електромагнітна теорія не могла пояснити явище дисперсії (залежність показника заломлення від довжини хвилі). Цю проблему в кінці XIX ст. вирішив Лоренц, запропонувавши **електронну теорію**, згідно якої діелектрична проникність ϵ залежить від довжини хвилі падаючого світла. Теорія Лоренца ввела уявлення про електрони, що коливаються всередині атома, і дозволила пояснити явища випромінювання і поглинання світла речовиною.

Не дивлячись на величезні успіхи електромагнітної теорії Максвела і електронної теорії Лоренца, вони були дещо суперечливі і при їх застосуванні зустрічався ряд протиріч. Обидві теорії ґрунтувалися на гіпотезі про ефір, тільки «пружний ефір» був замінений «ефіром електромагнітним» (теорія Максвела), або «нерухомим ефіром» (теорія Лоренца). Теорія Максвела не змогла пояснити процесів випромінювання і поглинання світла, фотоелектричного ефекту, комптонівського розсіювання і т.д. Теорія Лоренца, у свою чергу, не змогла пояснити багато явищ, пов'язаних з взаємодією світла з речовиною, зокрема питання про розподіл енергії по довжинах хвиль при тепловому випромінюванні чорного тіла.

Перераховані суперечності були подолані завдяки сміливій гіпотезі (1900) німецького фізика М. Планка (1858–1947), згідно якої випромінювання і поглинання світла відбувається не безперервно, а дискретно, тобто **певними порціями (квантами)**, енергія яких прямо пропорційна часті ν :

$$\varepsilon_0 = h\nu, \quad (170.3)$$

де h – стала Планка. $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Теорія Планка не потребувала поняття про ефір. Вона пояснила теплове випромінювання чорного тіла.

Ейнштейн в 1905 р. створив **квантову теорію світла**, згідно якої не тільки випромінювання і поглинання світла, але і його поширення, відбувається у вигляді потоку світлових квантів – **фотонів**, які не мають маси спокою ($m_0 = 0$). Основними характеристиками фотона є його енергія та імпульс:

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda_0}, \quad p_\phi = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda_0},$$

де ν – частота світлової електромагнітної хвилі, λ_0 – довжина хвилі у вакуумі.

Квантові уявлення про світло добре узгоджуються із законами випромінювання і поглинання світла, законами взаємодії світла з речовиною. Проте як за допомогою цих уявлень пояснити такі добре вивчені явища, як інтерференція, дифракція і поляризація світла? Ці явища легко пояснюються на основі хвильових уявлень. Багато вивчених властивостей і законів поширення світла, його взаємодії з речовиною показують, що світло має складну природу. Воно є *єдністю протилежних видів руху – корпускулярного (квантового) і хвильового (електромагнітного)*. Тривалий шлях розвитку привів до сучасних уявлень про подвійну корпускулярно-хвильову природу світла. Вирази (170.3) і (170.4) зв'язують корпускулярні характеристики випромінювання – масу і енергію кванта – з хвильовими – частотою коливань і довжиною хвилі.

Таким чином, світло є *єдністю дискретності і неперервності*, що знаходиться в повній відповідності з висновками матеріалістичної діалектики.

4.7.1 Когерентність і монохроматичність світлових хвиль

Інтерференцію світла можна пояснити розглядаючи інтерференцію хвиль. Необхідною умовою інтерференції хвиль є їх **когерентність**, тобто узгоджене протікання в часі і просторі декількох коливальних або хвильових процесів. Цій умові задовольняють *монохроматичні хвилі* – необмежені в просторі хвилі однієї певної і строго постійної частоти. Оскільки жодне реальне джерело не дає строго монохроматичного світла, тому хвилі, які випромінюють будь-які незалежні джерела світла, завжди некогерентні. Тому на досліді не спостерігається інтерференція світла від незалежних джерел, наприклад від двох електричних лампочок.

Зрозуміти фізичну причину немонохроматичності, а отже, і некогерентності хвиль, що випромінюються двома незалежними джерелами світла, можна виходячи з самого механізму випромінювання світла атомами. В двох самостійних джерелах світла атоми, випромінюють незалежно один від одного. В кожному з таких атомів процес випромінювання **кінцевий** і триває дуже короткий час ($\tau \approx 10^{-8}$ с). За цей час збуджений атом повертається в нормальний стан і випромінювання ним світла припиняється. Збуджений знов атом починає випромінювати світлові хвилі з новою початковою фазою. Оскільки різниця фаз між випромінюванням двох таких незалежних атомів змінюється при кожному новому акті випуску, то хвилі, спонтанно випромінювані атомами будь-якого джерела світла, некогерентні. Таким чином, хвилі, що випускаються атомами, лише протягом інтервалу часу $\tau \approx 10^{-8}$ с мають приблизно постійні амплітуду і фазу коливань, тоді як за більший проміжок часу і амплітуда, і фаза змінюються.

Переривисте випромінювання світла атомами у вигляді окремих коротких імпульсів називається **хвильовим цугом**.

Описана модель випромінювання світла справедлива і для будь-якого макроскопічного джерела, оскільки атоми тіла, що світиться, випромінюють світло також незалежно один від одного. Це означає, що початкові фази відповідних їм хвильових цугів не зв'язані між собою. Крім цього, навіть для одного і того ж атома початкові фази різних цугів відрізняються для двох подальших актів випромінювання. Отже, світло, що випускається макроскопічним джерелом, некогерентне.

Будь-яке немонохроматичне світло можна представити у вигляді сукупності змінюючих один одного незалежних гармонічних цугів. Середня тривалість одного цугу $\tau_{\text{ког}}$ називається **часом когерентності**. Когерентність існує тільки в межах одного цугу, і час когерентності не може перевищувати час випромінювання, тобто $\tau_{\text{ког}} < \tau$. Прилад знайде чітку інтерференційну картину лише тоді, коли час **дозволу** приладу значно менший часу когерентності світлових хвиль, які накладаються.

Якщо хвиля поширюється в однорідному середовищі, то фаза коливань в певній точці простору зберігається тільки на протязі часу когерентності $\tau_{\text{ког}}$. За цей час хвиля пошириться у вакуумі на відстань $l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}$, яка називається **довжиною когерентності** (або довжиною цугу). Таким чином, довжина когерентності є відстань, при проходженні якої дві або декілька хвиль втрачають когерентність. Звідси витікає, що спостереження інтерференції світла можливо лише при оптичних різницях ходу, менших за довжину когерентності для джерела світла, яке використовується.

Чим ближче хвиля до монохроматичної, тим менша ширина $\Delta\omega$ спектру її частот і, як можна показати, більший її час когерентності $\tau_{\text{ког}}$, а отже, і довжина когерентності $l_{\text{ког}}$. Когерентність коливань в одній точці простору, що визначається ступенем монохроматичності хвиль, називається **часовою когерентністю**.

Разом з часовою когерентністю, для опису когерентних властивостей хвиль в площині, перпендикулярній до напрямку їх поширення, вводиться поняття просторової когерентності. Два джерела, розміри і взаємне розташування яких дозволяють (при необхідному ступені монохроматичності світла) спостерігати інтерференцію, називаються **просторово-когерентними**. Просторова когерентність визначається **радіусом когерентності**. Радіусом когерентності (або **довжиною просторової когерентності**) називається максимальна перпендикулярна до напрямку поширення хвилі відстань, на якій можливий прояв інтерференції.

Радіус когерентності $r_{\text{ког}} \sim \lambda/\varphi$, де λ – довжина світлових хвиль, φ – кутовий розмір джерела.

Так, мінімально можливий радіус когерентності для сонячного проміння (при кутовому розмірі Сонця на Землі $\varphi \approx 10^{-2}$ рад і $\lambda \approx 0,5$ мкм) складає $\approx 0,05$ мм. При такому малому радіусі когерентності неможливо безпосередньо спостерігати інтерференцію сонячного проміння, оскільки роздільна здатність людського ока на відстані **найкращого** зору складає лише 0,1 мм. Відзначимо, що перше спостереження інтерференції провів в 1802 р. Т. Юнг саме з сонячним світлом, для чого він заздалегідь пропускав сонячне проміння через дуже малий отвір в непрозорому екрані (при цьому на декілька порядків зменшувався кутовий розмір

джерела світла і тим самим різко збільшувався радіус когерентності (або довжина просторової когерентності)).

4.7.2 Інтерференція

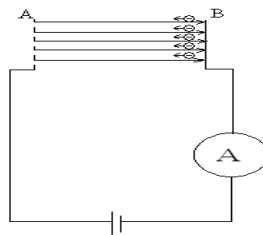
4.7.3 Дифракція

4.7.4 Фотоефект

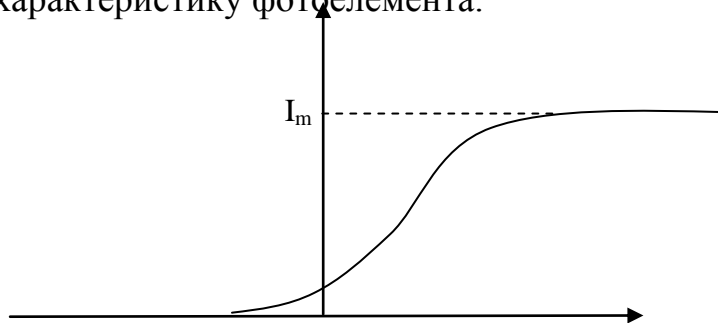
Фотоелектричним ефектом називається явище взаємодії світла з речовиною, в результаті якої енергія фотонів передається електронам речовини. Розрізняють зовнішній, внутрішній та вентильний фотоефекти.

Зовнішній фотоефект – емісування (імітування) електронів речовиною під дією електромагнітного випромінювання.

– це випромінювання електронів з речовини під дією світла. На рисунку зображено спрощену схему фотоефекту.



Якщо світла немає, струму теж немає. Якщо освітити прилад, то електрони, які вирвалися з пластини B при вказаному напрямі поля переміщатимуться до площини A. Якщо змінити полярність джерела, то струму не буде. На рисунку показано вольт амперну характеристику фотоелемента.



При повній напрузі струм досягає насичення, тобто всі електрони, які вилетіли з пластини B досягають сіткової пластини A.

При $U=0$ електрони внаслідок хаотичного руху все одно можуть долітати до сітки і буде проходити невеликий струм.

Щоб струм дорівнював 0, треба прикласти деяку зворотну напругу, яка називається затримуючою. За її допомогою можна шукати максимальну швидкість фотоелектронів.

$$\frac{1}{2} mV_{\max}^2 = eU_z.$$

На основі дослідів було встановлено закони фотоефекту:

1. найбільша швидкість фотоелектронів визначається тільки частотою світла і не залежить від його інтенсивності;
2. для кожної речовини існує межа, тобто мінімальне значення частоти, при якій ще можливий фотоефект;
3. фотострум насичення прямо пропорційний інтенсивності світла.

З хвильової точки зору фотоефект не пояснюється. Пояснив фотоефект Ейнштейн на основі гіпотези, що світло поширюється квантами.

$$E - \hbar\omega = h\nu.$$

Електрон отримує енергію кванта світла, частина якої затрачається, щоб електрон покинув поверхню речовини. Ця енергія називається роботою виходу A . Решта енергії йде на надання електрону кінетичної енергії $h\nu = \hbar\omega = \frac{mV^2}{2}$. Звідси видно, що коли енергія кванта менша за роботу виходу, то фотоефекту не буде. Умова фотоефекту $h\nu \geq A$. Частота ν , яка дорівнює $\nu = \frac{A}{h}$ називається червоною межею фотоефекту.

ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

Квантовою механікою називається такий розділ фізики, який вивчає закони взаємодії мікрооб'єктів, тобто об'єктів розміром $10^{-15} - 10^{-10}$ метра.

Недостатність теорії Бора вимагала перегляду основ квантової теорії і уявлень про природу мікрочастинок і виникло питання, на скільки вичерпним є представлення електрона у вигляді малої механічної частини. В результаті поглиблених досліджень виявилось, що в оптичних явищах спостерігається своєрідний дуалізм.

5.1 Хвилі де-Бройля

Поряд з такими властивостями, які свідчать про хвильову природу світла (дифракція, інтерференція), існують властивості, які підтверджують корпускулярну теорію світла (фотоэффект, явище Томпсона). В 1924 році *Луї де Бройль* висунув гіпотезу, що дуалізм є не тільки особливістю оптичних явищ, але він має місце і під час руху частинок, тобто поряд з корпускулярними властивостями частинки мають і хвильові властивості. Фотон має енергію:

$$E = \hbar \nu; \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}; \quad p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

Для швидкостей, співмірних із швидкістю світла імпульс розглядається як релятивістський. Для $v \ll c$ імпульс обчислюється за законами класичної механіки.

За гіпотезою де-Бройля, рух електрона, або будь-якої частини пов'язаний з хвильовим процесом, довжина хвилі якого дорівнює:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv}.$$

Хвилі де-Бройля не є електромагнітними і не мають аналогії серед інших типів хвиль, які вивчаються у класичній механіці. Формула де-Бройля є одним із основних співвідношень квантової механіки. Гіпотеза була підтверджена експериментально, зокрема Джермер і Девідсон, досліджуючи відбивання електронів монокристалу нікелю, підтвердили гіпотезу де-Бройля.

5.2 Принцип невизначеності

В квантовій механіці мікрооб'єкти динамічними даними описуватись не можуть, однак інформацію про мікрочастинок ми отримуємо через взаємодію їх із приладами.

Результати вимірювань виражаються в термінах для макроскопічних тіл. Специфічність властивостей мікрочастинок полягає в тому, що для всіх змінних при вимірюваннях отримуються точно визначенні значення. Цим характеризується принцип невизначеностей. Невизначеність значень координати Δx та компонента Δp_x задовольняє рівняння:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

З цього можемо зробити висновок, що чим менша невизначеність однієї із змінних, тим більшою є невизначеність іншої. Можливий такий стан, у якому одна із змінних має точне значення, а друга – невизначена, тобто її невизначеність дорівнює ∞ .

В класичній механіці такі величини називаються канонічно спряженими. Цю невизначеність відкрив Гейзенберг, і вона називається **принципом невизначеності Гейзенберга**. Він говорить про те, що добуток невизначеностей двох спряжених величин не може бути менший за сталу Планка.

Енергія і час є теж канонічно спряженими величинами і для них справджується:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Це співвідношення означає, що визначення енергії з точністю ΔE повинне зайняти час по крайній мірі $\Delta t = \frac{2\Delta E}{\hbar}$.

Співвідношення невизначеностей було встановлено при розгляді руху частинки через отвір в екрані.

Якщо частинка присутня, то ймовірність = 1.

$$\int |\psi|^2 dV = 1 - \text{умова нормування.}$$

5.3 Рівняння Шредінгера

В 1926 році Е. Шредінгер отримав своє знамените рівняння, яке розвинуло ідеї де-Бройля про хвильові властивості речовини. Шредінгер співставив рухові мікрочастинки, комплексну функцію координат і часу, яку він назвав *хвильовою функцією* і позначив грецькою буквою „пси” (ψ, Ψ). Будемо її називати «пси»-функцією.

«Пси» - функція характеризує стан мікрочастинки та отримується з розв'язку рівняння Шредінгера, яке має наступний вигляд:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Тут m – маса частинки, i – уявна одиниця, ∇^2 – оператор Лапласа, який являє собою суму других похідних по координатах:

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Буквою U в рівнянні позначена функція координат і часу, градієнт якої, взятий з протилежним знаком, визначає силу, що діє на частинку. У випадку, коли функція U не залежить явно від часу, вона має зміст потенціальної енергії частинки.

Із рівняння Шредінгера випливає, що вид пси-функції визначається функцією U , тобто в кінцевому рахунку (результаті) характером сил, які діють на частинку.

Рівняння Шредінгера є основним рівнянням нерелятивістської квантової механіки. Воно не може бути виведене із інших співвідношень. Його необхідно як вихідне основне твердження, справедливості якого доводиться тільки експериментально.

Розглянемо силове поле, у якому рухається частинка, стаціонарним. Тоді функція U не залежить від часу і має зміст потенціальної енергії. В цьому випадку розв'язок рівняння Шредінгера буде складатися з двох множників, один з яких залежить тільки від координат, другий тільки від часу:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

Тут E – повна енергія частинки, яка у випадку стаціонарного поля залишається сталою. Щоб переконатися у справедливості цього розв'язку, необхідно його підставити у рівняння

Шредінгера і скоротити на множник $e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$. Отримаємо:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi = E\psi$$

Це рівняння називається рівнянням Шредінгера для стаціонарних станів. Його часто переписують у вигляді:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + (U - E)\psi = 0$$

5.3.1 Зміст псі-функції

Правильну інтерпретацію псі-функції дав Н. Борн у 1926 році. Згідно Борну квадрат модуля псі-функції визначає ймовірність dP того, що частинка буде знаходитись в об'ємі dV :

$$dP = A |\psi|^2 dV = A \cdot \psi^* \cdot \psi dV$$

де A – коефіцієнт пропорційності.

Якщо проінтегрувати цей вираз по всьому об'ємі, то він повинен дорівнювати 1.

$$\int dP = A \int \psi^* \psi dV = 1$$

Дійсно, цей інтеграл дає ймовірність того, що частинка знаходиться в одній із точок деякого простору, тобто ймовірність достовірної події, яка дорівнює 1.

5.3.2 Умови нормування

$$\int \psi^* \psi dV = 1 \text{ — умова нормування}$$

Функції, що задовольняють цій умові називаються *нормованими*. Для нормованої функції вираз для ймовірності буде мати вигляд:

$$dP = |\psi|^2 dV = \psi^* \psi dV$$

Звідси випливає, що квадрат модуля псі-функції дає густину ймовірності (ймовірність поділена на одиницю об'єму).

Знаходження частинки у відповідному місці простору.

У випадку стаціонарного силового поля псі-функція має вигляд:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

відповідно

$$\psi^* \psi = e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \cdot \psi^* \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \psi = \psi^* \cdot \psi$$

так що густина ймовірності дорівнює $\psi^* \cdot \psi$ і відповідно від часу не залежить. Тому і стан, який описується псі-функцією такого вигляду називається стаціонарним.

Із змісту псі-функції випливає, що квантова механіка має статистичний характер. Вона не дозволяє визначити місце знаходження частинки в просторі чи траєкторію, по якій рухається частинка. За допомогою псі-функції можна лише припустити, з якою ймовірністю частинка може бути в тій чи іншій точці простору. На перший погляд може видатись, що квантова механіка дає значно менш точний опис руху частинки, ніж класична механіка, яка визначає „точно” місцезнаходження і швидкість частинки у будь-який момент часу. Але в дійсності це не так. Квантова механіка набагато глибше (повніше) описує поведінку мікрочастинок.

У рівнянні Шредінгера псі-функція повинна задовольняти такі умови:

1. функція ψ повинна бути скінченною, неперервною і однозначною;

2. похідні $\frac{\partial \psi}{\partial x}$; $\frac{\partial \psi}{\partial y}$; $\frac{\partial \psi}{\partial z}$; $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ повинні бути неперервними;

3. функція $|\psi|^2$ повинна бути інтегрованою, тобто інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx dy dz$ повинен бути скінченим.

У найпростіших випадках третя умова зводиться до умови нормування ймовірності. Перші дві умови не становлять собою нічого особливого. Це звичайні вимоги, які накладають на шуканий розв'язок диференціального рівняння. Третя умова щодо інтегрованості $|\psi|^2$ пов'язана з тим, що фізичний зміст має не сама функція ψ , а квадрат її модуля. *Сукупність цих, вище перерахованих, умов носить назву стандартних умов*. Важливість стандартних умов

полягає в тому, що за їх допомогою, не розв'язуючи рівняння Шредінгера, а лише досліджуючи можливі його розв'язки, можна зробити ряд дуже істотних висновків про енергію досліджуваної частинки та інші фізичні величини, які її характеризують. З рівняння Шредінгера безпосередньо випливають правила квантування енергії.

Квантування енергії

У рівняння Шредінгера в якості параметра входить повна енергія частинки E . Теорія диференційованих рівнянь доводить, що рівняння вигляду $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi = E\psi$ мають розв'язки, які задовольняють стандартні умови не для довільних значень параметра (тобто енергії E), а лише для деяких вибраних. Ці вибрані значення називаються власними значеннями відповідної величини (у нашому випадку енергії). Розв'язки, що відповідають власним значенням енергії E , називаються власними функціями задачі. Сукупність власних значень називається спектром величини. Якщо ця сукупність утворює дискретну послідовність, спектр називається дискретним. Якщо власні значення утворюють неперервну послідовність, спектр називається неперервним. У подальшому ми обмежимося розглядом тільки таких задач, в яких спектр власних значень є дискретним. У випадку дискретного спектру власні значення і власні функції можна пронумерувати:

$$E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$$

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$$

Таким чином квантування енергії отримуються з основних положень квантової механіки без будь-яких додаткових припущень.

Знаходження власних значень і власних функцій, як правило, є досить важкою математичною задачею. Ми розглянемо приклад, досить простий, для того, щоб можна було розв'язати рівняння Шредінгера без зайвих труднощів.

Принцип суперпозиції

Одним із основних тверджень квантової механіки є принцип суперпозиції станів. Суть цього принципу полягає в наступному.

Нехай довільна квантово-механічна система може знаходитися як у стані ψ' так і в стані ψ'' . Тоді існує стан системи, який описується функцією:

$$\psi = c'\psi' + c''\psi'', \text{ де } c', c'' \text{ – довільні комплексні числа.}$$

Розглянемо сукупність власних значень деякої фізичної величини q і власних функцій, що відповідають цим фізичним величинам.

$$q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$$

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$$

У кожному із станів, які описуються цими функціями, величина q має певне значення: у стані ψ_1 – значення q_1 ; у стані ψ_2 – значення q_2 . Згідно з принципом суперпозиції, можливий такий етап, який описується функцією:

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$$

у цьому етапі системи величина q вже не має певного значення. При вимірюваннях буде отримано або значення q_1 , або значення q_2 . Ймовірності появи цих значень дорівнюватимуть квадратам модулів коефіцієнтів c_1, c_2 , тобто ймовірність отримати при вимірюваннях результат q_1 дорівнює $|c_1|^2$ а q_2 – $|c_2|^2$. У квантовій механіці прийнято, що сукупність власних функцій будь-якої фізичної величини утворює повну систему. Це значить, що псі-функцію довільного стану можна розкласти за власними функціями цієї величини. Тобто представити у вигляді:

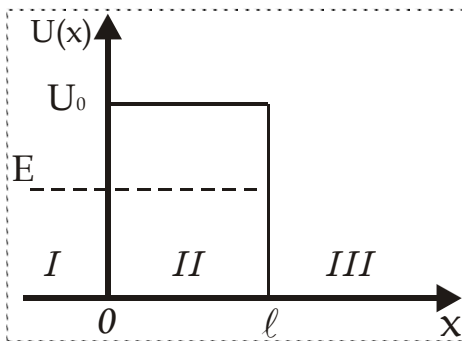
$$\psi = \sum_n c_n \psi_n, \text{ де } c_n \text{ – це комплексні числа, які не залежать від координат.}$$

Для станів, що змінюються з часом, коефіцієнти c_n залежать від t . Кількість доданків у сумі дорівнюють числу власних функцій.

Квадрати модулів коефіцієнтів c_n дають ймовірності того, що при вимірюваннях, які здійснюються над системою, будуть отримані відповідні значення величини q . Оскільки сума всіх таких ймовірностей повинна дорівнювати 1, коефіцієнти c_n задовольняють умову:

$\sum_n |c_n|^2 = 1$ для нормованих ψ_n ця умова завжди виконується.

Проходження частинки через потенціальний бар'єр.



Нехай частинка, яка рухається зліва на право, зустрічає на своєму шляху потенціальний бар'єр висотою U_0 і шириною l . Згідно класичної теорії частинки має наступний характер.

Якщо енергія частинки більша за висоту бар'єра ($E > U_0$), то частинка без перешкод проходить над бар'єром.

Якщо $E < U_0$, то частинка відбивається від бар'єра і летить у протилежну сторону. Крізь бар'єр частинка

проникнути не може.

Зовсім інша поведінка частинки згідно квантової механіки. По-перше, навіть при $E > U_0$ існує ймовірність (відмінна від нуля) того, що частинка відіб'ється від бар'єра і полетить у протилежну сторону. По-друге, при $E < U_0$ існує відмінна від нуля ймовірність того, що частинка проникне крізь бар'єр і буде знаходитись в області $x > l$. Це впливає з рівняння Шредінгера.

Розглянемо випадок $E < U_0$. Рівняння Шредінгера для областей I і III запишеться

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0; \quad U_0 = 0 \quad (I)$$

$$\text{для області II} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi = 0, \quad \text{причому } E - U_0 < 0. \quad (II)$$

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді

$$\psi = e^{\lambda x}$$

підставивши цю функцію в рівняння I отримаємо характеристичне рівняння:

$$x^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E = 0. \quad ; \quad \lambda = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

$$\text{звідси } \lambda = \pm i\alpha; \quad \text{де } \alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}.$$

Таким чином, загальний розв'язок має вигляд:

$$\psi_1 = A_1 e^{i\alpha x} + B_1 e^{-i\alpha x} \quad \text{для обл. I}$$

$$\psi_3 = A_3 e^{i\alpha x} + B_3 e^{-i\alpha x} \quad \text{для обл. III}$$

$$\psi_2 = A_2 e^{i\beta x} + B_2 e^{-i\beta x} \quad \text{для обл. II}$$

$$\text{Тут } \beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}.$$

Слід відзначити, що розв'язок вигляду $e^{i\alpha x}$ відповідає хвилі, що рухається в додатному напрямі осі x , а розв'язок $e^{-i\alpha x}$ – хвилі, що рухаються в протилежному напрямку.

Для знаходження коефіцієнтів слід скористатись умовами, яким повинна задовольняти функція. Отримаємо відношення квадратів модулів амплітуд відбитої і падаючої хвилі визначає ймовірність відбивання частинки, від потенціального бар'єра і може бути назване коефіцієнтом відбивання.

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$$

Відношення квадратів модулів амплітуд хвилі, що пройшла через бар'єр та падаючої може бути назване коефіцієнтом проходження (або коефіцієнтом прозорості) і визначає ймовірність проходження частинки через бар'єр.

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$$

Нас буде цікавити тільки проходження частинки через бар'єр, тому знайдемо D . Оскільки коефіцієнти R і D зв'язані співвідношенням $R+D=1$, тому легко знайти і R . Відповідні розрахунки дають нам формулу:

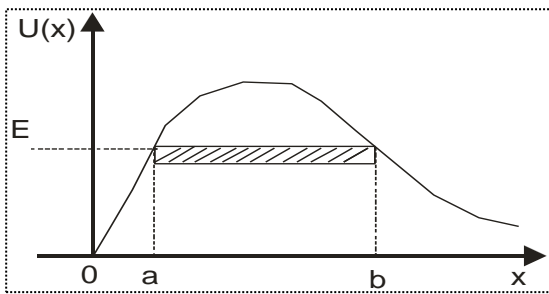
$$D = \exp E \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)l}$$

Із отриманої формули випливає, що ймовірність проходження через потенціальний бар'єр сильно залежить від ширини бар'єра і від енергії частинки, тобто від $(U_0 - E)$, а також від маси частинки. Коефіцієнт проходження різко зменшується із збільшенням маси частинки m . Певні розрахунки дають, що у випадку потенціального бар'єра довільної форми формула:

$$D = e^{-2\beta l}, \text{ де } \beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$$

повинна замінятись формулою більш загальною:

$$D = \exp \left[\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U_0 - E)} dx \right], \text{ де } U = U(x).$$



При подоланні потенціального бар'єра частинка ніби проходить через тунель в цьому бар'єрі. У зв'язку з цим це явище називають тунельним ефектом. Тунельний ефект – явище специфічно квантове, яке в класичній фізиці немає аналога. У квантовій механіці поділ повної енергії на кінетичну і потенціальну не має змісту, тому що протирічить принципу невизначеностей. І дійсно, цей факт, що частинка має певну кінетичну енергію, був би рівнозначний тому, що частинка має визначений імпульс. Аналогічно, цей факт, що частинка має певну потенціальну енергію, означав би, що частинка знаходиться у певному місці простору. Оскільки координата і імпульс не можуть одночасно мати визначених значень, не можуть бути одночасно точно визначені кінетична енергія і потенціальна енергія. Таким чином, хоч певна енергія частинки має певне визначене значення, вона не може бути представлена у вигляді суми точних значень кінетичної та потенціальної енергій.