

Тернопільський національний економічний університет

На правах рукопису

**Максимова Ірина Ярославівна**

УДК 519.876.5

**Математичне моделювання лінійних динамічних систем  
методами аналізу інтервальних даних**

01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Науковий керівник:

**Стахів Петро Григорович**

доктор технічних наук, професор

Тернопіль – 2008

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЗА УМОВ НЕВИЗНАЧЕННОСТІ.....	14
1.1. Постановка задачі параметричної ідентифікації дискретних динамічних систем.....	14
1.2. Особливості методів розв’язування задач параметричної ідентифікації.....	23
1.3. Теоретико-множинний підхід та особливості його застосування до моделювання динамічних систем.....	28
1.4. Постановка задачі моделювання лінійних динамічних систем методами аналізу інтервальних даних.....	38
ВИСНОВКИ ДО ПЕРШОГО РОЗДІЛУ.....	39
РОЗДІЛ 2 АНАЛІЗ ВЛАСТИВОСТЕЙ МНОЖИНИ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.....	40
2.1. Особливості формування інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь в задачах параметричної ідентифікації моделей динамічних систем.....	41
2.2. Властивості множини параметрів інтервальних моделей динамічних систем.....	45
2.3. Порівняльний аналіз інтервальних гарантованих та допускових методів оцінювання множини параметрів моделей.....	52
ВИСНОВКИ ДО ДРУГОГО РОЗДІЛУ.....	59

РОЗДІЛ 3	МЕТОД ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ІНТЕРВАЛЬНИХ ДАНИХ.....	60
3.1.	Вибір початкового наближення в ітераційному методі пошуку допустимого розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	60
3.2.	Ітераційний метод пошуку допустимого розв'язку інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	69
3.3.	Процедура адаптивного настроювання параметрів алгоритму реалізації ітераційного методу пошуку допустимого розв'язку.....	78
3.4.	Дослідження збіжності ітераційного методу пошуку допустимого розв'язку інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	80
	ВИСНОВКИ ДО ТРЕТЬОГО РОЗДІЛУ.....	88
РОЗДІЛ 4	ПРАКТИЧНІ ЗАДАЧІ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ІНТЕРВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ .....	89
4.1.	Аналіз інтервальних даних в задачах екологічного моніторингу.....	89
4.1.1.	Основні задачі екологічного моніторингу (на прикладі СЕС м. Тернополя).....	89
4.1.2.	Структура бази інтервальних даних та задачі їх аналізу.....	90
4.2.	Ідентифікація інтервальної моделі динаміки концентрації шкідливих викидів.....	94
4.3.	Аналіз адекватності моделі динаміки концентрацій шкідливих викидів.....	99
4.4.	Дослідження прогностичних властивостей моделі динаміки концентрацій шкідливих викидів.....	102
4.5.	Програмний комплекс для ідентифікації інтервальної моделі динаміки концентрації шкідливих викидів.....	107
	ВИСНОВКИ ДО ЧЕТВЕРТОГО РОЗДІЛУ.....	115

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....	116
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	119
ДОДАТОК А. Блок-схема алгоритму реалізації програмного модуля «PREDICT».....	133
ДОДАТОК Б. Лістинг програмного модуля «PREDICT».....	147
ДОДАТОК В. Акти про впровадження результатів дисертаційної роботи.....	154

## ВСТУП

### Актуальність теми

На даний час прогнозування поведінки динамічних систем, зокрема технічних та екологічних, є необхідним фактором для їх оптимального функціонування. Це, в першу чергу, пояснюється суттєвим ростом ступеня складності таких систем та необхідністю врахування дії різноманітних впливів як детермінованих, так і стохастичних на поведінку таких систем. Найбільш ефективним засобом для розв'язання даної задачі є використання сучасних засобів математичного моделювання, які б враховували як детерміновані, так і стохастичні фактори, і були б зручними для комп'ютерної реалізації.

Переважно, для дослідження та моделювання динамічних систем та процесів використовують детермінований чи стохастичний підходи. При цьому найбільш природною формою представлення динаміки широкого класу систем та процесів, зокрема, динаміки концентрацій шкідливих викидів автотранспорту, є математичні моделі, задані в просторі станів. Для синтезу вказаного класу математичних моделей необхідно розв'язувати дві задачі структурної та параметричної ідентифікації. У випадку використання дискретних динамічних систем лінійна форма математичних моделей при мінімальних значеннях часу дискретизації є достатньою, а для розв'язування задачі параметричної ідентифікації за умов випадкових похибок в експериментальних даних достатньо отримати стохастичні характеристики випадкових похибок. Задачі параметричної ідентифікації дискретних моделей лінійних динамічних систем в достатній мірі описані в працях В.М. Кунцевича [61-62], М.М. Личака [63-65], Ф.Л. Черноусько [100-102], Л. Заде та Ч. Дезоера [50], В. Стрейца [94]. Проте, за умов малої вибірки даних, стохастичні характеристики випадкових даних отримати неможливо і обмеженість за амплітудою випадкових похибок є чи не їх єдиною характеристикою. В цьому випадку найбільш прийнятними для моделювання динаміки є теоретико-множинний чи інтервальний підходи. Найбільш суттєві результати при розв'язування задач параметричної ідентифікації динамічних систем в межах інтервального підходу отримані такими

українськими та зарубіжними вченими, як А.Б. Куржанським [66-67], М.М. Личаком [75-77], Н.М. Куссуль [68-69], М.П. Диваком [], Ю.І. Шокінім [114], С.П. Шарим та І.А. Шарою [104-113, 150], Р. Муром [146-148], Р. Кірфоттом [144].

Аналіз літератури, присвяченої моделюванню динамічних систем з невизначеністю інтервального типу, показав, що розроблені методи відзначаються двома недоліками. По-перше, існуючі методи вимагають високої обчислювальної складності алгоритмів їх реалізації, що не дозволяє розв'язувати задачі високої розмірності, або спонукає до суттєвого спрощення моделі шляхом апроксимації множини її параметрів. Для останнього використовують гарантовані методи оцінювання множини параметрів прямокутними паралелепіпедами чи знаходять гарантовані еліпсоїдні оцінки параметрів. В обох випадках отримують достатньо загрублені методи. По-друге, в дискретних моделях динамічних систем використовують точкові оцінки параметрів в межах гарантованої множини і будують одну модель замість коридору інтервальних моделей динамічної системи, що є неприйнятним для задач допускового контролю.

Тому актуальною є наукова задача створення на основі аналізу інтервальних даних методу параметричної ідентифікації лінійних динамічних систем з дискретним часом, який би відзначався низькою обчислювальною складністю і давав можливість будувати допускові коридори інтервальних моделей.

#### Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Тема дисертаційної роботи відповідає напрямку наукових робіт згідно з координаційним планом науково-дослідних робіт і науково-технічних програм Міністерства освіти і науки України, розділ “Моделювання складних соціально-економічних та технічних систем на основі перспективних інформаційних технологій”, а також робота проводилась відповідно з планами навчальної та науково-дослідної роботи Тернопільського національного економічного університету, зокрема на тему “Розробка теоретичних засад, алгоритмічного та програмного забезпечення моделювання технічних, екологічних та економічних систем на основі аналізу інтервальних даних” (номер державної реєстрації

0102U002565), у якій автором розроблений метод знаходження гарантованого та допустимого розв'язків інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь; "Методи, апаратні та програмні засоби для дослідження та моделювання нестационарних розподілених об'єктів на основі інтервальних даних" (номер державної реєстрації 0106U000529), у якій автором розроблено метод параметричної ідентифікації дискретних динамічних систем; "Розробка методу ідентифікації дискретної динамічної моделі на основі інтервальних даних для управління процесами збуту хлібобулочної продукції" (номер державної реєстрації 0105U008180), у якій автором запропоновано настроювання параметрів чисельного методу параметричної ідентифікації; "Співпраця між Україною та Румунією в галузі розподілених систем (CobURDiS)" (номер державної реєстрації 0106U005307), у якій автором побудовано модель динаміки концентрацій шкідливих викидів.

#### Мета і завдання дослідження

Метою дисертаційної роботи є розробка на основі аналізу інтервальних даних методу, алгоритму та програмного забезпечення для параметричної ідентифікації лінійних динамічних систем з дискретним часом, які відзначаються низькою часовою складністю і дозволяють будувати допускові коридори інтервальних моделей, а також їх апробація для побудови динамічних моделей реальних процесів та систем.

Для досягнення поставленої мети в дисертаційній роботі вирішуємо такі основні задачі:

- аналіз класичних методів розв'язування задач параметричної ідентифікації лінійних динамічних систем з дискретним часом;
- встановлення властивостей множини гарантованих і допускових оцінок параметрів моделей динамічних систем, отриманих на основі аналізу інтервальних даних;
- розробка методу параметричної ідентифікації моделей динамічних систем на основі аналізу інтервальних даних, який відзначається низькою обчислювальною

складністю, придатний для розв'язування задач високої розмірності та забезпечує побудову допускових коридорів інтервальних моделей;

- створення алгоритмічного та програмного забезпечення для дослідження та реалізації методу параметричної ідентифікації моделей динамічних систем на основі аналізу інтервальних даних;
- апробація розробленого методу, алгоритмічного та програмного забезпечення для побудови коридорів макромоделей трансформаторів, а також для дослідження та прогнозування динаміки концентрацій шкідливих викидів автотранспорту.

Об'єкт дослідження: математичні моделі динамічних систем з інтервальним представленням даних.

Предмет дослідження: лінійні динамічні моделі на основі параметричної ідентифікації методами аналізу інтервальних даних.

Методи дослідження базуються на методах загальної теорії систем, методах теоретико-множинного підходу та інтервального аналізу, які є визначальними для досягнення мети дисертаційної роботи. Для дослідження множин гарантованих і допустимих оцінок параметрів моделей лінійних динамічних систем та для розробки методу параметричної ідентифікації інтервальних моделей лінійних динамічних систем використано методи аналізу інтервальних даних та лінійна алгебра. Для дослідження збіжності, ефективності та часової складності методу використано комп'ютерне моделювання.

### Наукова новизна одержаних результатів

1. На основі аналізу інтервальних даних вперше встановлено, що у просторі параметрів множина допустимих оцінок параметрів моделей лінійних динамічних систем у випадку адитивних та обмежених за амплітудою похибок в каналах вимірювання є опуклим многогранником і породжує множину рівнозначних адекватних інтервальних моделей, що дозволило розробити принципи побудови методу та алгоритму параметричної ідентифікації інтервальних моделей лінійних динамічних систем.



2. Вперше, на основі аналізу інтервальних даних, отримані співвідношення для вибору початкового наближення до допустимого вектора параметрів інтервальних моделей лінійних динамічних систем та для оцінки якості поточного наближення, що дозволило розробити метод параметричної ідентифікації цих моделей, який, на відміну від існуючих, відзначається низькою обчислювальною складністю, високою збіжністю, придатний для розв'язування задач високої розмірності та забезпечує побудову допускових коридорів інтервальних моделей.

3. Вперше отримано співвідношення для початкового вибору параметра пошуку допустимого розв'язку в методі параметричної ідентифікації лінійних динамічних систем з інтервальним представленням даних, що дозволило розробити процедуру адаптивного настроювання цього параметру і тим самим підвищити збіжність і знизити часову складність методу.

4. На основі розробленого методу параметричної ідентифікації моделей лінійних динамічних систем удосконалено інтервальні моделі для прогнозування концентрацій шкідливих викидів в атмосферу, які, на відміну від існуючих, враховують динаміку процесу, інтенсивність транспортних потоків та забезпечують прогноз концентрацій шкідливих викидів із заданою точністю в межах інтервальних похибок.

#### Практичне значення одержаних результатів

- розроблений метод параметричної ідентифікації моделей лінійних динамічних систем дозволив створити алгоритми та програмне забезпечення для побудови макромоделей технічних систем, зокрема для моделювання перехідних процесів в трьохфазових трансформаторах, коли похибки в каналі вимірювання є обмежені за амплітудою і для дослідження їх стохастичних характеристик відсутні достатні вибірки даних;
- створено програмний комплекс для розв'язування задач екологічного моніторингу, складовими якого є інтервальні моделі динаміки концентрацій шкідливих викидів в атмосферу, який впроваджено в санітарно-епідеміологічній станції м. Тернополя.

Практичні результати дисертаційної роботи використані для параметричної ідентифікації інтервальних моделей динамічних систем в задачах розробки високоефективних методів макромодельовання складних розподілених систем при виконанні науково-дослідної роботи: ”Методи, апаратні та програмні засоби для дослідження та моделювання нестационарних розподілених об’єктів на основі інтервальних даних” (номер державної реєстрації 0106U000529) та міжнародного науково-дослідного проекту “Співпраця між Україною та Румунією в галузі розподілених систем (CobURDiS)” (номер державної реєстрації 0106U005307), у навчальному процесі на кафедрі комп’ютерних наук Тернопільського національного економічного університету при викладанні курсу “Теорія дискретних динамічних систем” для підготовки фахівців за спеціальністю “Програмне забезпечення автоматизованих систем”.

#### Особистий внесок здобувача

Здобувачем самостійно розроблено узагальнений підхід до побудови інтервальних моделей лінійних динамічних систем з дискретним часом, який базується на отриманих ним нових властивостях множини допускових оцінок параметрів моделей лінійних динамічних систем; розроблено метод, алгоритмічне та програмне забезпечення для реалізації методу параметричної ідентифікації інтервальних моделей лінійних динамічних систем з дискретним часом; удосконалено моделі реальних динамічних систем.

Основні результати досліджень опубліковано в таких фахових виданнях (з вказанням особистого внеску автора):

1. М. Дивак, П. Стахів, І. Каліщук. Множинна ідентифікація параметрів лінійних динамічних систем на основі інтервальних даних // Міжнародний науково-технічний журнал Комп’ютинг, 2004. – Т. 3. – Вип. 3. – С. 58-64. – досліджені особливості моделювання об’єктів на основі інтервальних даних.

2. М. Дивак, П. Стахів, І. Каліщук. Ідентифікація параметрів моделей “вхід-вихід” динамічних систем на основі інтервального підходу // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2004. – Т. 9. - № 4. – С. 109

– 117. – запропоновано метод та алгоритм інтервальної ідентифікації параметрів динамічної моделі.

3. M. Dyvak, P. Stakchiv, I. Calishchuk. Identifikacja dynamicznego modelu jbwodu elektrycznego na podstawie danych interwalowych // Przegląd Elektrotechniczny, Nr. 2/2005, P. 60-62. – ідентифікація параметрів динамічної моделі трьохфазного силового трансформатора.

4. М. Дивак, П. Стахів, І. Каліщук. Ітераційний метод пошуку допустимого розв'язку ІСЛАР в задачах ідентифікації параметрів динамічних моделей “вхід-вихід” // Відбір та обробка інформації. - 2005. – Вип. 23 (99). - С. 40-48. – ітераційний метод пошуку допустимого розв'язку інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (ІСЛАР).

5. М. Дивак, П. Стахів, І. Максимова. Удосконалений метод допустимого оцінювання розв'язків ІСЛАР при ідентифікації параметрів динамічних моделей // Відбір і обробка інформації. - 2006. – Вип. 26 (102). С. 27-35. – удосконалений метод допустимого оцінювання адаптивною процедурою настроювання параметрів пошуку допустимого розв'язку.

6. І. Максимова. Інтервальна модель динаміки концентрацій шкідливих викидів // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2007. – № 3. – С. 156-165. – ідентифікація інтервальної моделі динаміки концентрацій шкідливих викидів.

7. M. Dyvak, P. Stakchiv, I. Calishchuk. Interval parameter's identification of the linear dynamic system on the basis of interval data // Proc. of the VIth International Workshop Computational Problems of Electrical Engineering, Zakopane, Poland, September 1-4, 2004. – P. 66-68. – ідентифікація параметрів інтервальної динамічної моделі на основі виділення насиченого блоку експерименту.

8. Dyvak M., Kalishchuk I. Tolerance estimation of the parameters of “input-output” dynamic model on the basis of interval data analysis // Proceedings of the 8-th International Conference CADSM'2005. - Lviv-Polyana, Ukraine, 23 - 26 February 2005. – P. 151-153. – допустима множина (допустимі інтервали оцінки) параметрів динамічних моделей.

9. Dyvak M., Stakchiv P., Kalishchuk I. The method of finding of tolerance solution of ISLAE in the tasks of parameters identification of “input-output” dynamic models // Proceedings of the XIII International Symposium on Theoretical Electrical Engineering ISTET’05, July 4-7, 2005, Lviv, Ukraine. – P. 264-267. – метод знаходження допустимого розв'язку ІСЛАР.

10. Dyvak M., Stakchiv P., Kalishchuk I. Algorithm of tolerance identification of “input-output” interval dynamic model // Proceedings of the Third IEEE Workshop on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications IDAACS’2005, Sofia, Bulgaria, September 5-7, 2005. – P. 488-491. – алгоритм методу знаходження допустимого розв'язку ІСЛАР.

11. Dyvak M., Kalishchuk I., Martsenyuk Ye. Interval identification of dynamic model of realization of bakery produce // Proceedings of the International Conference Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science TCSET’2006. – Lviv-Slavsko, Ukraine, February 28 – March 4, 2006. – P. 159-163. – апробація методу допустимого оцінювання при побудові інтервальної моделі реалізації хлібобулочної продукції.

12. Dyvak M., Martsenyuk Ye., Kalishchuk I. Research of properties of area of parameters of interval discrete model of dynamic system // Proceedings of the VII International Workshop of Computational Problems of Electrical Engineering CPEE’2006. – Odessa, Ukraine, August 27-30, 2006. - P. 26-30. – особливості побудови області параметрів інтервальних моделей динамічних систем.

13. Dyvak M., Stakchiv P., Maksymova I., Potravych O. Identification of the dynamic models by the adaptive method of tolerance estimation // Proceedings of the IX-th International Conference CADSM’2007. - Lviv-Polyana, Ukraine, 20 - 24 February 2007. - P. 365-369. – адаптивний метод допустимого оцінювання параметрів динамічних моделей.

#### Апробація результатів дисертації

Основні положення і результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на конференціях:

- VI and VII International Workshops “Computational Problems of Electrical Engineering” CPEE (Zakopane – Poland, 2004; Odessa, 2006);
- VIII and IX International Conferences “The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics” CADSM (Lviv – Polyana, 2005; Lviv – Polyana, 2007);
- XIII International Symposium on Theoretical Electrical Engineering ISTET (Lviv, 2005);
- “3<sup>rd</sup>” International Workshop “Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Application” IDAACS (Sofia, 2005);
- International Conference “Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science” TCSET (Lviv-Slavske, 2006).

#### Публікації

Основні результати дисертаційної роботи висвітлено в тринадцяти друкованих працях, загальним обсягом 74 сторінок, із них 6 статей у фахових виданнях.

## РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ  
ЗА УМОВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

## 1.1. Постановка задачі параметричної ідентифікації дискретних динамічних систем

Система (говорючи не строго) – це об’єкт, у якому відбувається взаємодія між різнотипними змінними і формуються сигнали, які спостерігаються. Дані сигнали, які спостерігаються, зазвичай називаються вихідними сигналами. Всі інші – називаються збуреннями, причому збурення можуть бути розділені на два класи: ті, які безпосередньо вимірюються і ті, які доступні лише побічній оцінці по впливу, який вони чинять на вихідний сигнал. З точки зору опису об’єкту різниця між вхідними сигналами і збуреннями, які вимірюються (завадами), часто виявляється несуттєвою.

Поняття «динамічна система» першочергово [12-13] ототожнювалось із системою звичайних диференціальних рівнянь, права частина якої задовольняє умовам, які гарантують існування і єдиність рішення. Пізніше [91, 119] він почав використовуватись для позначення все більшого числа математичних моделей і тепер [78, 145] нерідко вживається у всіх випадках, коли говориться про системи, чия поведінка залежить від часу.

Займаючись певною системою, відразу постає необхідність виявлення схеми співвідношень між собою змінних, які характеризують систему. У широкому розумінні, сукупність зв’язків між сигналами, які спостерігаються, називають моделлю. Очевидно, що моделі можуть приймати різну форму і записуватись з різним ступенем математичної деталізації. Вибір того рівня складності, який робить модель корисною, визначається використанням, яке планується для моделі.

Звичайно, у повсякденній практиці при роботі із системами користуються моделями, в яких немає математики (суб’єктивні моделі), або для опису властивостей системи підходять числові таблиці чи графіки (графічні моделі). Однак в більш складних системах (задачі управління, діагностики тощо) важливу роль

відіграють моделі, в яких співвідношення зв'язку між системними змінними, задаються у вигляді різницевих та диференціальних рівнянь – математичні (аналітичні) моделі.

Побудова математичних моделей відбувається за допомогою двох способів (а також їх комбінації) і спирається, в основному, на дані спостережень. Перший спосіб полягає в тому, щоб «розщепити» систему на такі підсистеми, властивості яких очевидні із раніше накопиченого досвіду і проведених експериментальних досліджень [1, 71, 97]. Такий підхід називають моделюванням [82] і в його рамках проведення натуральних експериментів не обов'язково.

У другому способі побудови математичних моделей безпосередньо використовуються експериментальні дані [56, 85, 90, 96, 137, 151]. В цьому випадку проводиться реєстрація вхідних та вихідних змінних системи, і модель формується у результаті обробки відповідних даних. Цей спосіб називається ідентифікацією [83].

У монографіях [98, 99] Я.З. Ципкіна визначається, що ідентифікація динамічних об'єктів в загальному випадку складається з визначення їх структури і параметрів за даними спостережень – вхідному впливу і вихідній величині. Для рішення цієї задачі необхідно:

- 1) окреслити клас об'єктів;
- 2) вибрати модель;
- 3) вибрати критерій якості ідентифікації – середні втрати, які б характеризували різницю між вихідними величинами об'єкту і моделлю;
- 4) сформулювати алгоритм ідентифікації, який, використовуючи доступні для спостереження значення вхідних та вихідних величин, змінював би параметри моделі так, щоб середні втрати з ростом часу досягали мінімуму.

Задача ідентифікації формулюється наступним чином: за результатами спостережень над вхідними й вихідними змінними об'єкта повинна бути побудована оптимальна в деякому сенсі модель, тобто формалізоване представлення об'єкта.

На вибір класу моделі, класу вхідних сигналів і критерію впливає апріорна інформація про об'єкт і вид його застосування (див. рис. 1.1).

При побудові моделей об'єктів слід приймати до уваги деякі їх особливості, зокрема:

1. *Наявність у системі елементів, сталі часу яких різко відрізняються внаслідок присутності в системі швидкої і повільної частин*, внаслідок чого:

- задача ідентифікації стає жорсткою, що у свою чергу приводить до повільної збіжності ітераційних процесів;
- тестові сигнали для таких об'єктів повинні містити велику кількість відліків, що у свою чергу збільшує об'єм розрахунків, необхідних для побудови моделі.

2. *Залежність поведінки об'єкта від форми механічних елементів, яка проявляється у вигляді нелінійної зміни параметрів швидкої частини при зміні стану повільної*, причому сама нелінійність часто важко апроксимується.

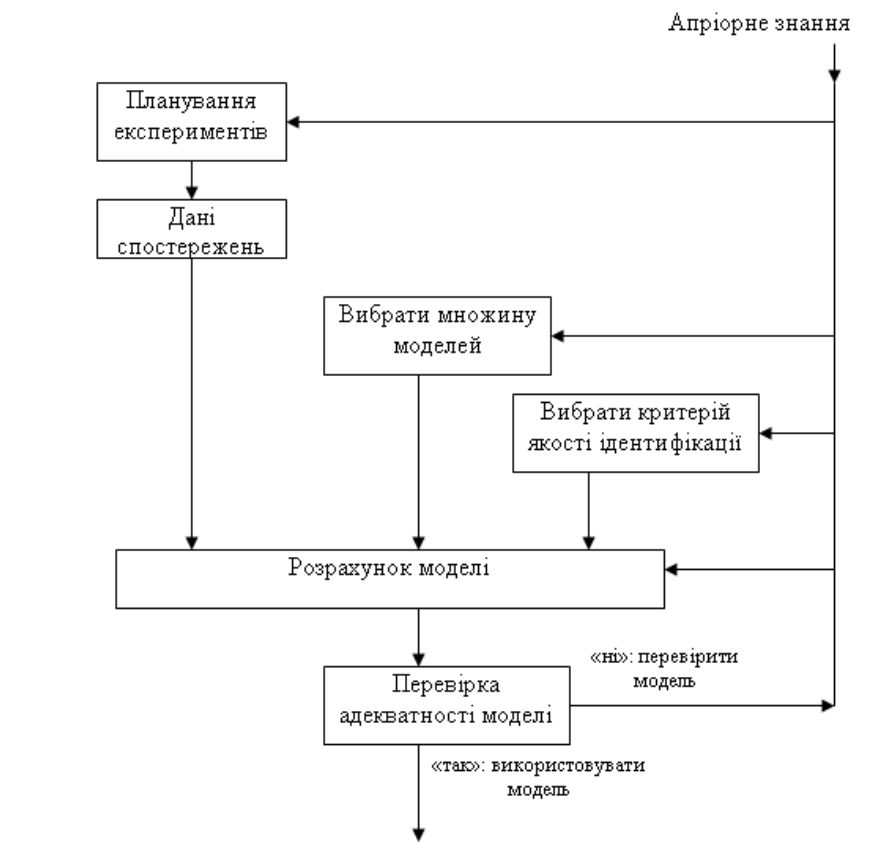


Рис. 1.1 - Контур ідентифікації системи



2. *Залежність поведінки об'єкта від форми механічних елементів*, яка проявляється у вигляді нелінійної зміни параметрів швидкої частини при зміні стану повільної, причому сама нелінійність часто важко апроксимується.

3. *Наявність у системі елементів із розподіленими параметрами*, при моделюванні яких виникає велика кількість внутрішніх змінних, що приводить до ускладнення загальної моделі об'єкта.

4. *Неоднозначний початковий стан*. На відміну від чисто електричних систем, де початковий стан системи перед включенням живлення завжди є однаковий, економічна система може містити елементи, стан яких у початковий момент може бути різним. Цей фактор ускладнює ідентифікацію об'єкта, оскільки його початковий стан у деяких випадках виявляється невідомим.

Математичні макромоделі виявляються ефективними при проведенні моделювання систем з їх використанням внаслідок наступних особливостей:

1. Математичні моделі практично завжди є адаптованими для використання ЕОМ. Особливо це стосується дискретних моделей, для використання яких у методах цифрового моделювання не потрібно використовувати жодних процедур апроксимації чи інтерполяції.

2. Математичні моделі здебільшого є набагато простіші за своєю структурою, ніж відтворюваний ними об'єкт. Це зумовлено тим, що математичні моделі здебільшого не включають в себе внутрішні особливості об'єкта, а відтворюють лише зовнішні його характеристики.

3. При побудові математичних моделей є можливість зробити акцент на певних характеристиках відтворюваного ними об'єкта, що дає змогу використовувати моделі, які особливо точно відтворюють ті характеристики об'єкта, які нас цікавлять в першу чергу.

В будь-якому динамічному об'єкті з плином часу відбуваються зміни. Ці зміни визначаються властивостями об'єкту, які відображаються в його перехідних характеристиках, тобто реакціях об'єкта на деякий вхідний вплив. Таким чином, динамічні режими, і як окремий випадок – перехідні характеристики, відображають

поведінку об'єкту у ситуації, яка склалась, на основі причинно – наслідкової концепції системного аналізу.

Можна стверджувати, що існує визначений клас моделей поведінкового характеру. Ціллю створення таких моделей є відображення поведінки об'єкту при зовнішніх та внутрішніх змінах умов їх функціонування. Таким чином, модель такого виду може бути використана для зберігання динамічних властивостей об'єкта у компактній формі для імітації чи генерації реакцій об'єкта на різні зовнішні впливи, для прогнозування і можливого відновлення поведінки об'єкта у передуючі та майбутні проміжки часу. Все це обумовило широке застосування таких моделей у системах управління (вибір ціле направленого впливу), в системах діагностики (як еталон передуючих властивостей об'єкта), в системах моніторингу (як засіб оцінки і прогнозування виникаючих ситуацій) тощо.

В даній роботі розглядаються тільки дискретні моделі, що описують системи технічного та екологічного характеру.

Другою особливістю роботи є той факт, що вказані системи реалізуються в основному на засобах цифрової техніки. Саме сучасний рівень розвитку об'єму інформації, яка може зберігатись, швидкості її обробки і функціональна гнучкість обумовили максимальні можливості використання її в різних областях людської діяльності. В той же час істотною особливістю є дискретний характер обробки інформації цифровою технікою.

У якості вхідних впливів при ідентифікації динамічних процесів для дискретних моделей використовуються або типові впливи (сходінкові, імпульсні), або будь-якого виду впливи (навіть випадкові послідовності). В даній роботі за основу прийняті вказані типові впливи.

Таким чином, у фіксовані моменти часу відбуваються зміни вхідних та вихідних змінних. Після отримання даних виникають наступні можливі задачі ідентифікації. Відомі точні значення вхідних  $u(t)$  та вихідних  $y(t)$  змінних. Необхідно визначити дискретну модель у формі

- різницевого рівняння;
- дискретної передавальної функції;

- моделі у термінах простору станів;

які б найкращим чином апроксимували властивості і динамічні характеристики вихідного об'єкту.

При рішенні даної задачі можливі наступні варіанти:

1) задача параметричної ідентифікації - додатково відома структура моделі, і в даному випадку необхідно тільки визначити невідомі параметри моделі. У якості невизначеностей виступають: а) вибір періоду дискретизації; б) невідомі значення параметрів моделі;

2) задача непараметричної ідентифікації - коли невідома структура моделі, тобто до двох наперед вказаних невизначеностей додається ще третя – невизначеність структури;

3) окремий випадок задачі параметричної ідентифікації - значення вхідних  $u(t)$  та вихідних  $y(t)$  змінних містять певну похибку вимірювання. Тому тут, в порівнянні із задачею 1), додається ще одна (третя) невизначеність – невідома похибка вимірювань;

4) окремий випадок задачі непараметричної ідентифікації – тут, в порівнянні із задачею 2) додається четверта невизначеність – невідома похибка вимірювань.

В даній роботі описується рішення окремого випадку задачі параметричної ідентифікації. Але перш за все необхідно сформулювати деякі зауваження про припущення відносно об'єкту управління, які найбільш часто використовуються.

Як правило, передбачається, що об'єкт є лінійним або допускає лінеаризацію. Тобто об'єкт, який розглядається, повинен задовольняти принципу суперпозиції – якщо вихідна величина об'єкту  $y(t)$  - це результат перетворення моделлю  $F^M$  вхідного впливу  $u(t)$ , тоді виконуються умови:

$$1) F^M (au(t)) = ay(t), \quad a - \text{істотна константа};$$

$$2) F^M (u_1(t) + u_2(t)) = y_1(t) + y_2(t).$$

Факт лінійності або не лінійності об'єкта може бути встановлений або експериментальним шляхом, або по рівняннях, які описують процеси перетворення інформаційних процесів.

Більш того, першочергово враховується, що об'єкт управління в динамічному відношенні є стійким, тобто починаючи з моменту часу  $t_0$ , до якого динамічна система знаходилась у стані рівноваги, реакція на кожну обмежену вхідну змінну  $|u(t)| \leq M_u < \infty$  буде також обмеженою вихідною змінною  $|y(t)| = M_y < \infty$ , а також стаціонарним – зсув вхідної функції на деяку часову константу призводить до зсуву вихідної функції на ту ж саму константу.

Стаціонарні лінійні системи, безперечно, являють собою найбільш важливий клас динамічних систем, які розглядаються в теорії та практиці. Треба розуміти, що такі системи відповідають ідеалізованому представленню про процеси, які реально протікають. Але не дивлячись на це, таке наближення виправдано, а проектні рішення, основані на використанні лінійної теорії, в багатьох випадках призводять до відмінних результатів.

У відповідності із розглянутими видами невизначеностей в задачі ідентифікації, сформулюємо основні допущення до побудови моделей динамічних об'єктів [47, 53, 84, 88, 133]:

- об'єкт є стійким, керованим, спостережним, стаціонарним і лінійним, визначеного порядку;
- використовується лінійна за параметрами модель;
- вектор значень параметрів існує і єдиний;
- на вході динамічного об'єкту постійно діє вплив  $u(t)$ .

Розглянемо основні форми представлення неперервних та дискретних математичних моделей лінійних динамічних об'єктів. Використовуючи математику для опису фізичних явищ, ми лише проводимо наближення до реальності (моделювання). В даному випадку для опису поведінки системи в будь-який момент часу використовують єдину математичну характеристику – змінну стану.

Опис за допомогою змінної стану дозволяє представити більшість систем відповідними сукупностями диференціальних рівнянь першого порядку типу [58]

$$x(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.1)$$

і сукупностями функціональних співвідношень типу

$$y(t) = g(x(t), u(t), t), \quad (1.2)$$

де  $t$  - час,  $u(t)$  - вхідні змінні,  $y(t)$  - вихідні змінні та  $x(t)$  - змінні стану.

Відомо, що рішення диференціального рівняння першого порядку, такого як (1.1), залежить в першу чергу від початкової умови  $x(t_0) = x_0$ , де  $t_0$  - початковий момент спостереження. Співвідношення (1.1) та (1.2) визначаються як стандартна форма рівнянь стану, а саме, вираз (1.1) є диференціальним рівнянням стану, а вираз (1.2) – рівняння типу вхід-стан-вихід.

Однак, в наш час відомий великий клас систем, в яких вхідні дії та вихідні сигнали визначені для деяких регулярних моментів часу на заданому інтервалі, і відповідно, ці системи не можуть бути описані диференціальними рівняннями. Такі системи називаються системами з дискретним часом (дискретні динамічні системи).

Оскільки вхідні та вихідні змінні дискретної динамічної системи визначаються тільки для деяких фіксованих точок часової осі, тобто  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , вони можуть бути представлені у вигляді послідовностей  $(u(t_0), u(t_1), u(t_2), \dots)$  та  $(y(t_0), y(t_1), y(t_2), \dots)$ , або  $(u_0, u_1, u_2, \dots)$  та  $(y_0, y_1, y_2, \dots)$  відповідно, де  $t_0, t_1, t_2, \dots$  - точки на часовій осі, які нас цікавлять.

Лінійні стаціонарні системи, які функціонують у дискретному часі, можна описати лінійними різницевиими рівняннями виду [47]

$$y_{k+1} = ay_k + bu_k. \quad (1.3)$$

Відмітимо, що для рішення рівняння (1.3) необхідно єдина початкова умова  $y_0$ . Іншими словами, вихідна змінна  $y_n$  у будь-який момент часу  $n \geq 0$  може бути виражена через початкову умову  $y_0$  і вхідну послідовність  $(u_0, u_1, \dots, u_n)$  наступним чином:

$$\begin{aligned}
y_1 &= ay_0 + bu_0, \\
y_2 &= ay_1 + bu_1 = a(ay_0 + bu_0) + bu_1 = a^2 y_0 + ab u_0 + bu_1, \\
y_3 &= ay_2 + bu_2 = a(a^2 y_0 + ab u_0 + bu_1) + bu_2 = a^3 y_0 + a^2 b u_0 + ab u_1 + bu_2, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$y_n = a^n y_0 + a^{n-1} b u_0 + a^{n-2} b u_1 + \dots + b u_{n-1},$$

або

$$y_n = a^n y_0 + \sum_{k=1}^n a^{n-k} b u_{k-1}. \quad (1.4)$$

Інший опис дискретної динамічної системи можна подати за допомогою різницевих рівнянь стану

$$x_{n+1} = ax_n + bu_n \quad (1.5)$$

і співвідношення вхід-стан-вихід

$$y_n = cx_n + du_n. \quad (1.6)$$

Рішення рівняння (1.5) має вигляд

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1} b u_i \quad (1.7)$$

та

$$y_n = ca^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} ca^{n-i-1} b u_i + du_n. \quad (1.8)$$

## 1.2. Особливості методів розв'язування задач параметричної ідентифікації

Методи ідентифікації у більшості випадків при заданій обмеженій точності вимірювань не дозволяють побудувати складну модель, еквівалентну за структурою і параметрам реальному об'єкту. Але цей факт не заважає наступному використанню такої моделі, якщо, звичайно, вона відображає істотні сторони об'єкта. Більш того, саме в силу своєї простоти така модель найбільш придатна для наступного використання.

Ідентифікацію можна провести або методами фізико-математичного аналізу, або методами експериментального аналізу [10].

При ідентифікації методами фізико-математичного аналізу виходять з конструктивних даних і математичного опису найпростіших процесів, які мають місце в об'єкті, який вивчається. Таким чином отримують систему алгебраїчних і диференціальних рівнянь, які містять як вхідні і вихідні змінні, так і змінні стану. В ці рівняння іноді включаються надлишкові внутрішні змінні об'єкту, які можна і не враховувати. Якщо опис системи фізико-математичними методами повний, то окремі рівняння стану можна впорядкувати і надати їм форму рівнянь стану. В цьому випадку компоненти вектора стану мають більш точний фізичний зміст.

При ідентифікації методами експериментального аналізу зазвичай знаходять математичну модель стійкого об'єкта за вимірами вхідних і вихідних величин. Для цієї цілі було розроблена досить велика кількість різних методів ідентифікації.

Методи ідентифікації систем можна розділити на детерміновані і статистичні методи. В детермінованих методах зазвичай припускають, що система повинна мати визначений початковий стан, наприклад,  $x(t_0) = x_0$ , і відносно простий вхідний сигнал, наприклад, прямокутний імпульс одиничної площини, одиничний стрибок, синусоїдальний сигнал і т.д.

В статистичних методах ідентифікації систем початковий стан і вхідний сигнал довільні. Крім корисного сигналу, на об'єкт діє завада, статистичні властивості якої можуть бути невідомі. Статистичні методи дозволяють виразити

якість оцінювання через такі параметри, як, наприклад, дисперсія, коваріаційна матриця і т.д.

Різниця в окремих методах ідентифікації може бути викликана лінійністю або нелінійністю об'єкта, який ідентифікується, присутністю або відсутністю завад і можливістю їх виміру, присутністю або ні інформації про порядок або структуру моделі і т.д. Однак головне, що відрізняє окремі методи, - це тип математичної моделі і критерій якості побудови моделі. Відмітимо, що методи ідентифікації, які застосовуються для безпосереднього оцінювання матриць в рівняннях стану, розвинуті в меншій мірі, ніж методи, які застосовуються для побудови класичних моделей, таких як імпульсна перехідна функція, передавальна функція і т.д. Але це не є великим недоліком, оскільки вже відомі співвідношення, які досить добре пояснюють зв'язок між класичними моделями і описом систем в просторі станів. Однак будь-який з цих методів ідентифікації систем дозволяє знайти модель тільки тієї частини об'єкта, яка досягається і спостерігається, оскільки при обчисленнях можна використовувати тільки спостереження на вході і виході об'єкта.

Як було сказано в розділі 1.1. в задачах параметричної ідентифікації при проведенні досліджень досить часто з'являються похибки вимірювань. Відносно цих похибок конкретної інформації немає, вони не ідентифікуються, проте їхній вплив на результат дослідження є досить суттєвий. Так як природа похибки окремо від конкретного об'єкту не досліджується, то вона визнається випадковою, і для її статистичного опису використовуються апарат теорії ймовірностей.

Таким чином, задача параметричної ідентифікації з наявною похибкою вимірювань спирається на відомі в математичній статистиці методи: метод найменших квадратів (МНК) та метод максимальної правдоподібності (ММП).

Допустимо, що вибрана параметрична множина можливих моделей з вектором параметрів  $\theta$ , яка задає структуру моделі. Тоді пошук найкращої моделі в цій множині являє собою задачу оцінювання  $\theta$ . Як раніше зазначалось, суть моделі полягає у її здатності прогнозування, і говорити про її характеристики слід також у цьому відношенні. Нехай похибка прогнозування для визначеної моделі  $M(\theta_*)$  задається виразом



$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t). \quad (1.9)$$

Якщо вибірка даних  $Z^N$  відома, то ці похибки можна обчислити для  $t = 1, 2, \dots, N$ .

«Доброю» називається та модель, яка добре прогнозує, тобто породжує малі похибки прогнозування для певної вибірки даних. Таким чином, основний принцип параметричної ідентифікації наступний:

На основі  $Z^t$  можна визначити похибку прогнозування  $e(t)$ . В момент часу  $t = N$  вибирається  $\hat{\theta}_N$  таким чином, щоб похибки прогнозування  $e(t)$  ( $t = 1, 2, \dots, N$ ) були найменші.

Питання полягає в тому, як визначити, що означає «малість» похибки прогнозування. Тому суттю методу найменших квадратів та методу максимальної правдоподібності є формування критерію оцінки розміру  $e(t)$  [73, 94].

#### *Метод найменших квадратів*

З врахуванням лінійності функції прогнозування  $\hat{y}(t) = \varphi^T(t)\theta + \mu(t)$  похибка прогнозування має вигляд

$$e(t) = y(t) - \varphi^T(t)\theta,$$

і критеріальна функція рівна

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} [y(t) - \varphi^T(t)\theta]^2. \quad (1.10)$$

(1.10) – критерій найменших квадратів для лінійної регресії  $\hat{y}(t) = \varphi^T(t)\theta + \mu(t)$ . Унікальною властивістю цього критерію є його квадратичність по  $\theta$ , яка отримується в результаті лінійної параметризації і квадратичності критерію. Відповідно, мінімум може бути знайдений аналітично при умові, що існує вказана обернена матриця:

$$\hat{\theta}_N^{LS} = \arg \min V_N(\theta, Z^N) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t). \quad (1.11)$$

(1.11) – оцінка методу найменших квадратів.

Припустимо, що дані спостережень генеруються у відповідності з рівнянням

$$y(t) = \varphi^T(t) \theta_0 + \nu_0(t) \quad (1.12)$$

для деякої послідовності  $\{\nu_0(t)\}$ .  $\theta_0$  визначається як «істинне» значення вектора параметрів. Підставляючи (1.12) у (1.11), отримаємо:

$$\hat{\theta}_N^{LS} = [R(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) [\varphi^T(t) \theta_0 + \nu_0(t)] = \theta_0 + [R(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \nu_0(t). \quad (1.13)$$

Очікувані властивості оцінок  $\hat{\theta}_N$  МНК повинні бути такі:

- 1) оцінка близька до  $\theta_0$ ;
- 2) оцінка прямує у межах до  $\theta_0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Відмічено, що якщо  $\nu_0(t)$  у (1.12) менші в порівнянні з  $\varphi(t)$ , то помилковий член  $[R(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \nu_0(t)$  буде малий, і, таким чином,  $\hat{\theta}_N$  буде близька до  $\theta_0$ .

При  $N \rightarrow \infty$  матриця  $R(N)$  буде сходиться (з ймовірністю 1) до  $R(N) \rightarrow R^*, (= \bar{E} \varphi(t) \varphi^T(t))$  і  $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \nu_0(t) \rightarrow h^*, (= \bar{E} \varphi(t) \nu_0(t))$ .

Таким чином  $\hat{\theta}_N \rightarrow \theta_0 + (R^*)^{-1} h^*$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Відповідно, для того, щоб оцінка МНК була спроможна, тобто щоб  $\hat{\theta}_N$  сходилось до  $\theta_0$  необхідно:

- 1) матриця  $R^*$  повинна бути невинродженою;
- 2)  $h^* = 0$ .

### Метод максимальної правдоподібності

Як видно із вище викладеного, МНК при оцінюванні параметрів не використовує ніякої статистичної аргументації для оцінювання.

Область теорії статистичних висновків також, як і ідентифікація систем і параметричне оцінювання, являє собою проблему вилучення інформації із спостережень, які самі можуть бути і не достовірними. При цьому спостереження розглядаються як реалізація випадкових величин. Припускається, що спостереження являють собою випадковий вектор  $y^N = (y(1), y(2), \dots, y(N))$ , який приймає значення із  $R^N$ . Допускається, що існує функція щільності розподілу ймовірностей, яка рівна

$$f(\theta; x_1, x_2, \dots, x_N) = f_y(\theta; x^N), \quad (1.14)$$

тобто

$$P(y^N \in A) = \int_{x^N \in A} f_y(\theta; x^N) dx^N. \quad (1.15)$$

У (1.14)  $\theta$  - вектор параметрів, який описує властивості величин, які спостерігаються. Він є невідомим, а ціль спостережень полягає в його оцінюванні по  $y^N$ . Дана ціль реалізується оцінкою  $\hat{\theta}(y^N)$ . Якщо спостережне значення  $y^N$  є вектором  $y_*^N$ , то, відповідно, отримана оцінка рівна  $\hat{\theta}_* = \hat{\theta}(y_*^N)$ .

Оцінка, яка максимізує ймовірність спостережної події, була введена Фішером і отримала назву оцінки максимальної правдоподібності. Вона може бути визначена наступним чином. Функція щільності розподілу ймовірностей спостережного випадкового вектора задається (1.14). Таким чином, ймовірність того, що спостереження дійсно повинно прийняти значення  $y_*^N$ , пропорційна  $f_y(\theta; y_*^N)$ . Це є детермінована функція  $\theta$ , оскільки замість  $y^N$  підставлені числові значення  $y_*^N$ , і вона називається функцією правдоподібності, і відображає «правдоподібність» того, що спостережна подія дійсно має місце.

Оцінкою вектора  $\theta$  може бути вибрана така величина, при якій спостережна подія «найбільш правдоподібна»:

$$\hat{\theta}_{ML}(y_*^N) = \arg \max_{\theta} f_y(\theta; y_*^N), \quad (1.16)$$

де максимізація відбувається при фіксованому  $y_*^N$ . Функція (1.16) відома як оцінка максимальної правдоподібності.

Для визначення найкращих оцінок невідомих параметрів необхідно задати міру близькості математичної моделі до отриманих експериментальних даних. Так в МНК таким критерієм виступає функція квадратів похибок, мінімальне значення якої і визначає оцінки параметрів. У ММП таким критерієм є функція правдоподібності, максимальне значення якої і є оцінкою параметрів. Однак при цьому в обох методах залишається основна проблема – як ослабити або повністю відійти від тих невизначеностей, які зустрічаються при ідентифікації: вид моделі, модель випадкової погрішності, роль кроку дискретизації.

### 1.3. Теоретико-множинний підхід та особливості його застосування до моделювання динамічних систем

При управлінні різними технологічними процесами необхідно забезпечити в реальному масштабі часу розрахунок і оптимізацію режиму, який гарантовано буде належати області допустимих режимів і буде реалізовуватись системами автоматичного управління нижчого рівня ієрархічної системи управління. Методи, які стандартно застосовують, мало придатні для рішення задач такого класу по причині низьких швидкостей збіжності істотних ітераційних методів і можливості появи випадкових неконтрольованих похибок в результатах при наявності похибок в реальних даних. Крім того, в залежності від виду невизначеності, яка є в наявності, при прийнятті рішень необхідно забезпечити проведення на ЕОМ розрахунків з інтервальними і нечіткими величинами [14, 18, 27, 29, 51, 54-55, 72, 95, 132].

Найбільш перспективними для знаходження рішень систем рівнянь з урахуванням відмічених особливостей роботи алгоритмів реального часу в умовах невизначеності є інтервальні методи. Ці методи отримали широке застосування при рішенні систем диференціальних рівнянь, систем лінійних і нелінійних рівнянь, задач глобальної оптимізації.

Застосування інтервального аналізу і різних мінімаксних (гарантованих) підходів визначається цілим рядом переваг:

- не потребує знання імовірнісних характеристик невизначених факторів, які рідко бувають точно відомі на практиці;
- при мінімаксному підході отримують чіткі оцінки для самих величин, які знаходяться, а не для ймовірностей або математичних сподівань, що має велике значення при наявності малої кількості вимірювань параметрів і одній або декількох реалізацій;
- статистичні характеристики не можуть гарантувати певний результат одного конкретного дослідження;
- у всіх випадках даються гарантовані двосторонні апроксимації шуканих рішень.

В загальному випадку точність інтервального результату повністю визначається наступними чотирма факторами:

1. Невизначеністю в задані вихідних даних.
2. Заокругленнями при виконанні операцій, які змінюють або породжують інтервальні об'єкти.
3. Наближеним характером методу, який використовується.
4. Ступеню врахування залежностей між інтервальними об'єктами, які приймають участь в розрахунках (змінними і константами).

У межах інтервального аналізу зручно виділити методи аналізу інтервальних даних, під якими будемо розуміти методи, направлені на розв'язування задач моделювання з інтервальними невизначеностями в експериментальних даних, дослідження механізмів впливу невизначеностей на їх формування, отримання та

дослідження математичних моделей об'єктів з множинними оцінками параметрів [2, 16-17, 24, 81, 116-118].

Методи інтервального аналізу та їхній розвиток створили передумови розвитку трьох напрямків наукової та практичної діяльності, пов'язаної з математичним моделюванням об'єктів на основі інтервальних даних:

- математичний, в межах якого проводяться дослідження математичних проблем інтервальних обчислень;
- комп'ютерний, в межах якого досліджуються питання створення та використання інтервальних обчислень;
- прикладний, в межах якого відбувається використання методів інтервального аналізу і відповідних машинних засобів для побудови та дослідження математичних моделей широкого класу об'єктів.

Класична інтервальна арифметика [2] являє собою алгебраїчну систему, носій якої – множина всіх дійсних інтервалів  $x := [x^-, x^+] = \{x \in \mathbb{R} \mid x^- \leq x \leq x^+\}$ , а бінарні операції – додавання, віднімання, множення і ділення визначені у відповідності до наступного фундаментального принципу:

$$x * y := \{x * y \mid x \in X, y \in Y\}, \quad (1.17)$$

для всіх інтервалів  $X, Y$ , таких, що виконання точкової операції  $x * y$ ,  $*$   $\in \{+, -, \cdot, / \}$ , має значення для будь-яких  $x \in X$  і  $y \in Y$ . Розгорнуте визначення інтервальних арифметичних операцій таке:

$$X + Y = [x^- + y^-, x^+ + y^+], \quad (1.18)$$

$$X - Y = [x^- - y^+, x^+ - y^-], \quad (1.19)$$

$$X \cdot Y = [\min\{x^- y^-, x^- y^+, x^+ y^-, x^+ y^+\}, \max\{x^- y^-, x^- y^+, x^+ y^-, x^+ y^+\}], \quad (1.20)$$

$$X / Y = x \cdot [1/y^+, 1/y^-], \quad \text{для } y \notin 0. \quad (1.21)$$

Ширина кінцевого інтервалу в інтервальних обчисленнях залежить від порядку здійснення операцій, які володіють певними властивостями, найголовнішими з яких є:

1. *Комутативність:*

$$\begin{aligned} [x^-, x^+] + [y^-, y^+] &= [y^-, y^+] + [x^-, x^+], \\ [x^-, x^+] \cdot [y^-, y^+] &= [y^-, y^+] \cdot [x^-, x^+] \end{aligned} \quad (1.22),$$

2. *Асоціативність:*

$$\begin{aligned} ([x^-, x^+] + [y^-, y^+]) + [z^-, z^+] &= [x^-, x^+] + ([y^-, y^+] + [z^-, z^+]), \\ ([x^-, x^+] \cdot [y^-, y^+]) \cdot [z^-, z^+] &= [x^-, x^+] \cdot ([y^-, y^+] \cdot [z^-, z^+]) \end{aligned} \quad (1.23),$$

3. *Субдистрибутивність:*

$$[x^-, x^+] \cdot ([y^-, y^+] + [z^-, z^+]) = [x^-, x^+] \cdot [y^-, y^+] + [x^-, x^+] \cdot [z^-, z^+]. \quad (1.24)$$

Основною властивістю інтервальних обчислень є *монотонність включення*. Нехай маємо наступні інтервали  $\longrightarrow [x^-, x^+], [y^-, y^+], [z^-, z^+], [c^-, c^+]$ , тоді отримаємо для них включення у такому вигляді:

$$\begin{aligned} [x^-, x^+] \subset [z^-, z^+], [y^-, y^+] \subseteq [c^-, c^+] &\Rightarrow \\ \Rightarrow [x^-, x^+] \cap [y^-, y^+] &\subseteq [z^-, z^+] \cap [c^-, c^+] \end{aligned} \quad (1.25)$$

Саме ця властивість дозволяє побудувати ітераційні процедури наближення множин розв'язків для задач інтервальними даними. При цьому розміри множини визначаються шириною інтервалів вхідних даних та можливостями ітераційної процедури.

Операції над векторами і матрицями в інтервальній арифметиці визначаються аналогічно відповідним операціям класичної інтервальної арифметики [28].

Сумою (різницею) двох матриць однакової розмірності є інтервальна матриця того ж розміру, яка утворюється поелементними сумами (різницями) операндів. Якщо  $X$  - матриця розмірності  $m \times l$  і  $Y$  - матриця розмірності  $l \times n$ , то добутком матриць  $X$  та  $Y$  буде матриця  $Z$  розмірності  $m \times n$ , така що

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^l x_{ik} y_{kj}.$$

Відома особливість інтервального матричного множення в класичній арифметиці – відсутність асоціативності.

Операції  $\cup$  та  $\cap$  у застосуванні до інтервальних векторів відбуваються покомпонентно:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cup y_1 \\ x_2 \cup y_2 \\ \vdots \\ x_n \cup y_n \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cap y_1 \\ x_2 \cap y_2 \\ \vdots \\ x_n \cap y_n \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Аналогічно в покомпонентному змісті буде виконуватись відношення “ $\leq$ ” між інтервальними векторами.

Достатньо простий спосіб представлення результатів у випадку застосування інтервального підходу, а також властивість монотонного включення, яка притаманна усім чисельним процедурам інтервального аналізу, спричинюють розвиток його методів, а також широке застосування для розв’язування багатьох задач, пов’язаних із моделюванням систем.

Однією з фундаментальних задач теорії управління динамічними системами є проблема визначення або оцінювання множини можливих фазових станів системи в різні моменти часу. Ці множини, які називаються множинами досягнення, відіграють важливу роль при рішенні задач управління, спостереження та



прогнозування. Так, точне або наближене значення множини досягнення системи, якою управляють, дозволяє оцінити граничні можливості системи управління, вибрати оптимальне або субоптимальне управління. Методи диференціальних ігор та гарантованої фільтрації по даним спостережень також тісно пов'язані з поняттям множини досягнення.

Всі ці задачі зводяться до побудови або оцінювання множин, до яких може належати фазовий вектор системи, і до операцій з цими множинами [100-102]. Однак, практична побудова таких множин, особливо в системах великої розмірності, представляє собою дуже складну задачу навіть при використанні сучасних ЕОМ. Тому заслуговують уваги ефективні методи апроксимації цих множин.

Так в працях Личака М.М. та Кунцевича В.М. [61-65] пропонується методика рішення даної задачі, яка використовує процедури формування багатограничних областей у просторі, який розглядається. Тут фундаментальне значення відіграє відпрацьована процедура визначення перетину опуклого многогранника апріорної невизначеності в багатовимірному просторі з гіперсмугою (лінійною нерівністю), породженою черговим вимірюванням вектора вихідних змінних. При цьому здійснюється відкидання малоінформативним обмежуючих нерівностей на основі даних вимірювань за спеціальними критеріями якості. Тут, для оцінки параметрів об'єкту управління, застосовують математичну модель низького порядку, щоб зберегти достатню точність управління.

При моделюванні динамічних систем в умовах невизначеності вихідна модель об'єкта є неперервною, тобто має вигляд диференціальних рівнянь. Однак застосування цифрової техніки для реалізації алгоритмів ідентифікації і управління надає поведінці всієї системи "об'єкт+система управління" явно виражений дискретний характер. Тому при побудові моделей дискретних систем використовують моделі у вигляді систем різницевих рівнянь

$$X_{n+1} = \Phi(X_n, U_n, L, F_n), \quad X_0 = X^{\circ}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.27)$$

де  $X_n$  -  $m$ -вимірний вектор фазових координат,  $U_n$  та  $F_n$  - відповідно  $k$ -вимірний вектор управління та  $s$ -вимірний вектор неконтрольованих збурень,  $L$  -  $r$ -вимірний вектор постійних параметрів, точне значення яких невідомо,  $\Phi(\bullet)$  - задана в загальному випадку нелінійна  $m$ -вимірна вектор-функція.

Слід відмітити, що всі компоненти вектора стану доступні для безпосереднього виміру і, відповідно, можуть бути використані для формування управління. Це пояснюється тим, що при отриманні математичної моделі об'єкта у вигляді різницевих рівнянь виду (1.27) завжди можна так вибрати вид фазового простору, щоб вектор стану був складений лише із значень вимірюваних координат в різні моменти часу. Такий вибір виду фазового простору автоматично знімає проблему "структурних обмежень".

В даній постановці задачі відносно вектора параметрів  $L$  відома лише його апіорна оцінка

$$L \in \Omega_0, \quad (1.28)$$

де  $\Omega_0$  - задана опукла множина, яка в подальшому прийматиме вигляд многогранника.

Для вектора збурень  $F_n$  рахується також лише його апіорна оцінка  $F_n \in \tilde{V} \forall n \geq 0$ .

Вектор управління  $U_n$  формується на основі вимірів вектора  $X_n$  і його значення вибираються з врахуванням обмежень

$$U_n \in U, \quad (1.29)$$

де  $U$  - деяка задана множина в просторі управління.

Приймаючи до уваги можливість зміни значення  $X_1$  із (1.27) - (1.28), отримують оцінку прогнозу вектора параметрів  $L$  при  $n = 1$  у вигляді

$$\left. \begin{aligned} L \in \check{\Omega}_1, \check{\Omega}_1 = \check{\Omega}_1 \cap \check{\Omega}_0, \\ \check{\Omega}_1 = \left\{ L : X_1 = \Phi(X_0, U_0, L, F_0) \forall F_0 \in \check{U} \right\} \end{aligned} \right\}, \quad (1.30)$$

де множина  $\check{\Omega}_1$  залежить від наперед невідомого значення  $X_1$ . Аналогічно при  $n = 2$  отримують множинні оцінки, які залежать від наперед невідомих значень  $X_1$  та  $X_2$ , які будуть реалізовані, а після того виміряні в процесі руху.

Математична модель прогнозованого руху системи, яка враховує наявність факторів невизначенності, має вигляд різницевих включень

$$X_{n+1} \in \check{\chi}_{n+1}; \check{\chi}_{n+1} = \left\{ X_{n+1} : X_{n+1} = \Phi(X_n, U_n, L, F_n) \forall F_n, X_n \in \check{\chi}_n, L \in \check{\Omega}_n \right\}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.31)$$

і рівняння еволюції множин  $\check{\Omega}_n$ , які є оцінками прогнозу вектора параметрів

$$L \in \check{\Omega}_n, \quad \check{\Omega}_n = \check{\Omega}_n \cap \check{\Omega}_{n-1}, \quad \check{\Omega}_0 = \check{\Omega}_0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

Відмітимо, що на відміну від традиційних методів рішення задачі ідентифікації, які дозволяють отримувати наближені "точкові" оцінки параметрів [30, 115], оцінка у вигляді (1.32) є гарантованою у тому розумінні, що істинні значення параметрів, які визначаються, належать множині оцінок. При цьому всі елементи (точки) множини рівноправні у тому розумінні, що неможна, наприклад, вибрати у цій множині деяку точку і рахувати, що це значення найбільш близьке до істинного, оскільки будь-яких переваг між елементами множини не існує.

Слід також відмітити, що в останні роки з'явилось ряд робіт, у яких запропоновані наближені методи побудови оцінок вектора параметрів, які основані на апроксимації множини досягнення відповідним чином підібраними еліпсоїдами

[4-5, 7-8, 67, 101]. Такий підхід дозволяє спростити обчислювальну процедуру побудови оцінок, але призводить до закруглення отриманих оцінок. Проте головним недоліком є необхідність апріорного задання замкненої множини, яка містить початковий вектор стану.

В праці [6] цей недолік усувають шляхом вибору параметричного сімейства еліпсоїдів (нечіткої еліпсоїдальної множини) у якості множинної оцінки замість одного еліпсоїда і будується алгоритм ідентифікації параметрів статичного одномірного об'єкту.

У працях [68-69] підхід [6] розповсюджується на оцінювання вектора фазових координат багатовимірного динамічного об'єкту.

Однією із особливостей розробленого в працях [68-69] методу оцінювання параметрів лінійного дискретного динамічного об'єкту є те, що дані про початковий вектор стану  $X_0$  відсутні, тому формально неможна вказати замкнуту множину в просторі станів, яка буде гарантовано містити вектор  $X_0$ . Тому у якості множинної оцінки початкового та поточного вектора станів, а також вектора неконтрольованих збурень, використовують нечітку множину, поверхні рівня якої утворюють багатовимірні еліпсоїди у розширеному просторі станів. Таким чином, вирішуючи задачу ідентифікації параметрів будують послідовність розмитих еліпсоїдальних множин, послідовність центрів яких складають послідовність оцінок невідомого вектора стану.

Слід відмітити, що в останнім часом з'явилися роботи [77], у яких запропонована методика рішення задачі лінійного програмування, яка використовує процедури формування багатогранних множин у просторі. Суть методики – розроблений ітераційний алгоритм рішення задачі ЛП на кожному кроці будує деяку оцінку поверх виділеної лінійними нерівностями множини аргументів, використовуючи при цьому лише частину заданих лінійних нерівностей. На отриманій в такий спосіб спрощеній оцінці загальної множини аргументів знаходиться рішення задачі лінійного програмування і відбувається перевірка: чи задовільняє отримане рішення всю задану систему нерівностей. Якщо так – тоді рішення задачі ЛП отримано. Якщо ні – будується нова оцінка і процедура

повторюється. Такий підхід дозволяє отримати точні оцінки множини аргументів. Проте головним недоліком є часова складність, яка визначається як час, необхідний для знаходження рішення однієї задачі ЛП, помножений на  $2N$ , де  $N$  - кількість задач ЛП.

Проаналізувавши розроблені методи можна визначити наступні їх недоліки:

- 1) методи вимагають високої обчислювальної складності алгоритмів їх реалізації;
- 2) застосування їх до задач малої розмірності;
- 3) використання точкових оцінок параметрів в межах гарантованої множини;
- 4) побудова однієї моделі замість коридору інтервальних моделей динамічних систем.

Залежно від цілей моделювання та невизначеностей у вхідних та вихідних змінних моделі динамічної системи, в інтервальному аналізі розглядають узагальнені множини розв'язків лінійної інтервальної алгебраїчної системи рівнянь. Серед них на практиці найбільш частіше зустрічаються задачі знаходження:

- об'єднаної множини розв'язків:

$$\Omega_{gar} = \{ \vec{g} \in R^m \mid (\exists X \in [X]), (\exists \vec{x}_{k+1} \in [\vec{x}_{k+1}]), (\vec{g}^T \cdot X = \vec{x}_{k+1}) \}; \quad (1.33)$$

- допустимої множини розв'язків:

$$\Omega_{dop} = \{ \vec{g} \in R^m \mid (\forall X \in [X]), (\forall \vec{x}_{k+1} \in [\vec{x}_{k+1}]), (\vec{g}^T \cdot X = \vec{x}_{k+1}) \}; \quad (1.34)$$

- алгебраїчного інтервального розв'язку:

$$\vec{g}^T \cdot [X] = [\vec{x}_{k+1}]. \quad (1.35)$$

Об'єднану і допустиму множини розв'язків переважно використовують у випадку розв'язування задач параметричної ідентифікації та наближення складних моделей динамічних систем простішими.

У загальному випадку, для задач високої розмірності інтервальної системи алгебраїчних рівнянь чисельно визначити узагальнені множини її розв'язків

неможливо. Тому в інтервальному аналізі застосовують ітераційні процедури зовнішнього та внутрішнього наближення, які називаються інтервальною локалізацією чи допустимим оцінюванням.

#### 1.4. Постановка задачі моделювання лінійних динамічних систем методами аналізу інтервальних даних

Провівши аналіз стану об'єкту досліджень можна зробити наступні висновки:

1) дослідження лінійних дискретних динамічних систем часто вимагає розв'язування задачі параметричної ідентифікації;

2) для дослідження отриманих оцінок параметрів необхідно дослідити статистичні характеристики випадкових похибок, але такий стохастичний підхід є малоприматним за умов малої вибірки спостережень з обмеженими за амплітудою похибками;

3) при застосуванні інтервального та теоретико-множинного підходів оцінки параметрів моделей задають гарантованими множинами у вигляді багатовимірних паралелепіпедів або еліпсоїдів.

Для побудови моделей лінійних динамічних систем методами аналізу інтервальних даних необхідно вирішити наступні задачі:

1) оцінити можливість розробки нових методів інтервальної параметричної ідентифікації;

2) формалізувати задачу параметричної ідентифікації моделі типу “вхід-вихід” динамічного об'єкта на основі інтервальних даних експерименту;

3) розробити нові методи та алгоритми інтервальної ідентифікації параметрів динамічної моделі;

4) розробити комплекс програмного забезпечення для проведення інтервальної ідентифікації динамічних систем;

5) провести інтервальну ідентифікацію реальних динамічних систем.

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

1. Визначені основні поняття і напрями ідентифікації лінійних динамічних об'єктів.

2. Аналіз літератури, присвяченої задачі ідентифікації, показав, що на даний момент проблемі інтервальної невизначеності при рішенні задачі приділяється недостатньо часу. Переважно, для дослідження та моделювання динамічних систем та процесів використовують детермінований чи стохастичний підходи.

3. Розглянуто особливості методів розв'язування задач параметричної ідентифікації на прикладі методу найменших квадратів і методу максимальної правдоподібності, і показано їх непридатність до розв'язування задач ідентифікації параметрів на основі аналізу інтервальних даних.

4. Розглянуто особливості методів розв'язування задач параметричної ідентифікації в межах теоретико-множинного підходу та визначені їх основні недоліки. По-перше, існуючі методи вимагають високої обчислювальної складності алгоритмів їх реалізації, що не дозволяє розв'язувати задачі високої розмірності, або спонукає до суттєвого спрощення моделі шляхом апроксимації множини її параметрів. По-друге, в дискретних моделях динамічних систем використовують точкові оцінки параметрів в межах гарантованої множини і будують одну модель замість коридору інтервальних моделей динамічної системи, що є неприйнятним для задач допускового контролю.

## РОЗДІЛ 2

### АНАЛІЗ ВЛАСТИВОСТЕЙ МНОЖИНИ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Як було відмічено у розділі 1 одною із основних задач, яка виникає при побудові моделей динамічних систем на основі інтервальних даних похибками є задача ідентифікації моделей “вхід-вихід”.

Більшість підходів, розглянутих у розділі 1, переважно базуються на ймовірнісній природі похибок. Проте, за умов обмежених за амплітудою похибок, використовують методи аналізу інтервальних даних. В цьому випадку задача параметричної ідентифікації лінійних динамічних систем зводиться до розв’язання інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Точний розв’язок інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, який визначатиме множину параметрів динамічної моделі “вхід-вихід”, являє собою множину у вигляді багатовимірного многогранника, точний опис якого у випадку великої кількості параметрів моделі є неможливим. Зважаючи на це, всі існуючі методи оцінювання розв’язків ІСЛАР спрямовані на знаходження допускових [45, 60, 103, 109] чи гарантованих [64, 76, 108] інтервальних оцінок параметрів моделі. Геометрично в просторі оцінюваних параметрів ці множини розв’язків є прямокутним паралелепіпедом, вписаним (у випадку допускового розв’язку) чи описаним (у випадку гарантованого розв’язку) в многогранну область розв’язків ІСЛАР.

Для задач параметричної ідентифікації динамічних моделей найбільш придатним є знаходження допускових інтервальних оцінок параметрів, які забезпечують, при заданих вхідних змінних, допусковий коридор для кожної вихідної характеристики системи. Цей коридор охоплює усі інтервальні динамічні моделі “вхід-вихід”.

Переважно інтервальне оцінювання розв’язків ІСЛАР побудоване на двокрокових методах. Перший крок полягає у знаходженні одного допускового розв’язку [109], а наступний – у знаходженні інтервальних оцінок параметрів



навколо знайденого розв'язку. Перший крок вирізняється надзвичайною обчислювальною складністю. До того ж в практичних задачах параметричної ідентифікації динамічних моделей “вхід-вихід” часто достатнім є знаходження будь-якого допускового коридору інтервальних моделей або хоча б однієї моделі, яка б належала цьому коридору.

Для розробки методу знаходження допускового розв'язку інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь – вектора параметрів динамічної моделі “вхід-вихід”, який відзначаються низькою обчислювальною складністю, надійністю, високою збіжністю та адаптивністю до змінних властивостей реальних динамічних систем необхідно провести ґрунтовні дослідження властивостей множини оцінок параметрів моделей динамічних систем.

## 2.1. Особливості формування інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь в задачах параметричної ідентифікації моделей динамічних систем

Розглянемо особливості формування інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь під час розв'язку задачі параметричної ідентифікації лінійних динамічних систем, при цьому приймемо такі припущення.

Н1. Динамічна система (об'єкт) описується різницевиими рівняннями – рівняннями динаміки (2.1) та рівняннями каналу вимірювання (2.2):

$$\vec{x}_{k+1} = G \cdot \vec{x}_k + Q \cdot \vec{u}_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.1)$$

$$\vec{y}_{k+1} = C \cdot \vec{x}_{k+1} + \vec{e}_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.2)$$

де  $k$  - час, який змінюється дискретно і приймає цілочисельні значення  $k = 0, \dots, N-1$ ;

$\vec{y}_{k+1}$  - вектор (розмірності  $m \times 1$ ) виміряних значень «виходів» системи;

$\vec{x}_k$  - вектор (розмірності  $m \times 1$ ) змінних стану системи в  $k$ -й дискретний момент часу;

$\vec{x}_{k+1}$  - вектор (розмірності  $m \times 1$ ) змінних стану системи в  $k + 1$ -й дискретний момент часу;

$\vec{u}_k = (u_{1k} \ u_{2k} \ \dots \ u_{mk})^T$  - вектор (розмірності  $m \times 1$ ) вхідних змінних в  $k$ -й дискретний момент часу;

$C$  - невідроджена квадратна матриця (розмірності  $m \times m$ ), при цьому будемо рахувати, що ранг матриці  $\text{rang}(C) = m$ ;

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1i} & \dots & g_{1m} \\ g_{21} & \dots & g_{2i} & \dots & g_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \dots & g_{mi} & \dots & g_{mm} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1i} & \dots & q_{1m} \\ q_{12} & \dots & q_{2i} & \dots & q_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & \dots & q_{mi} & \dots & q_{mm} \end{pmatrix} - \text{матриці (розмірності}$$

$m \times m$ ) параметрів динамічної моделі, елементи яких необхідно ідентифікувати.

Н2. Нехай:

$\vec{e}_{k+1} = (e_{1k+1} \ e_{2k+1} \ \dots \ e_{mk+1})^T$  - вектор випадкових, обмежених за амплітудою похибок і при цьому припустимо, що:

$$|e_{1k+1}| = |e_{2k+1}| = \dots = |e_{mk+1}| = |e_{k+1}| \leq \Delta_{k+1}, \quad \Delta_{k+1} > 0 \quad \forall k = 0, \dots, N-1 \quad (2.3)$$

Для спрощення, розглядатимемо системи зі скалярним «входом», тобто будемо рахувати, що в рівняннях (2.1) вектор  $\vec{u}_k = (u_k \ 0 \ \dots \ 0)^T$  є скалярним, а матриця  $Q$  має вигляд  $Q = \{\bar{q}_i, i = 1, \dots, m; \bar{q}_i = (q \ 0 \ \dots \ 0) \forall i = 1, \dots, m\}$ .

Процедура розрахунку стану системи наступна. Нехай в деякий момент часу  $k$  стан системи  $\vec{x}_k$  відомий. Тоді для визначення стану  $\vec{x}_{k+1}$  необхідно виконати дві операції: 1) задати вхід  $\vec{u}_k$  та похибку вимірювання  $\vec{e}_{k+1}$ ; 2) визначити стан  $\vec{x}_{k+1}$  в наступний момент часу відповідно до (2.1). Задану процедуру можна послідовно виконати для всіх  $k = 0, \dots, N-1$ . Послідовність станів  $x_0, x_1, \dots$  називають траєкторією системи.

Із врахуванням рівнянь каналу вимірювання (2.2) та обмеженості амплітуди похибок  $\vec{e}_{k+1}$ , заданої виразом (2.3) рівняння каналу вимірювання представимо в інтервальному вигляді

$$\bar{y}_{k+1} - \Delta_{k+1} \cdot \vec{I} \leq C \cdot \vec{x}_{k+1} \leq \bar{y}_{k+1} + \Delta_{k+1} \cdot \vec{I}, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (2.4)$$

де  $\vec{I}$  - одиничний вектор.

Вводимо позначення  $C^{-1} = \{c_{ij}^*, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m\}$  - обернена матриця до матриці  $C$ . Зауважимо, що згідно припущення остання є невиродженою.

Тоді рівняння каналу вимірювання (2.4) можна переписати у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\Delta_{k+1} \in \{-\Delta_{k+1}; +\Delta_{k+1}\}} \{c_{11}^* \cdot (y_{1k+1} - \Delta_{k+1}) + \dots + c_{1i}^* \cdot (y_{ik+1} - \Delta_{k+1}) + \dots + c_{1m}^* \cdot (y_{mk+1} - \Delta_{k+1})\} \leq x_{1k+1} \leq \\ \leq \max_{\Delta_{k+1} \in \{-\Delta_{k+1}; +\Delta_{k+1}\}} \{c_{11}^* \cdot (y_{1k+1} + \Delta_{k+1}) + \dots + c_{1i}^* \cdot (y_{ik+1} + \Delta_{k+1}) + \dots + c_{1m}^* \cdot (y_{mk+1} + \Delta_{k+1})\}; \\ \vdots \\ \min_{\Delta_{k+1} \in \{-\Delta_{k+1}; +\Delta_{k+1}\}} \{c_{i1}^* \cdot (y_{1k+1} - \Delta_{k+1}) + \dots + c_{ii}^* \cdot (y_{ik+1} - \Delta_{k+1}) + \dots + c_{im}^* \cdot (y_{mk+1} - \Delta_{k+1})\} \leq x_{ik+1} \leq \\ \leq \max_{\Delta_{k+1} \in \{-\Delta_{k+1}; +\Delta_{k+1}\}} \{c_{i1}^* \cdot (y_{1k+1} + \Delta_{k+1}) + \dots + c_{ii}^* \cdot (y_{ik+1} + \Delta_{k+1}) + \dots + c_{im}^* \cdot (y_{mk+1} + \Delta_{k+1})\}; \\ \vdots \\ \min_{\Delta_{k+1} \in \{-\Delta_{k+1}; +\Delta_{k+1}\}} \{c_{m1}^* \cdot (y_{1k+1} - \Delta_{k+1}) + \dots + c_{mi}^* \cdot (y_{ik+1} - \Delta_{k+1}) + \dots + c_{mm}^* \cdot (y_{mk+1} - \Delta_{k+1})\} \leq x_{mk+1} \leq \\ \leq \max_{\Delta_{k+1} \in \{-\Delta_{k+1}; +\Delta_{k+1}\}} \{c_{m1}^* \cdot (y_{1k+1} + \Delta_{k+1}) + \dots + c_{mi}^* \cdot (y_{ik+1} + \Delta_{k+1}) + \dots + c_{mm}^* \cdot (y_{mk+1} + \Delta_{k+1})\}; \end{array} \right. ,$$

$$k = 0, \dots, N-1. \quad (2.5)$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} y_{ik+1}^- &= y_{ik+1} - \Delta_{k+1}; \\ y_{ik+1}^+ &= y_{ik+1} + \Delta_{k+1}; \\ y_{ik+1}^* &\in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\} \end{aligned}$$

Тоді система (2.5) матиме вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\min_{y_{ik+1}^* \in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\}} \{c_{11}^* \cdot y_{1k+1}^* + \dots + c_{li}^* \cdot y_{ik+1}^* + \dots + c_{1m}^* \cdot y_{mk+1}^*\} \leq x_{1k+1} \leq \\
\leq \max_{y_{ik+1}^* \in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\}} \{c_{11}^* \cdot y_{1k+1}^* + \dots + c_{li}^* \cdot y_{ik+1}^* + \dots + c_{1m}^* \cdot y_{mk+1}^*\}, \\
\vdots \\
\min_{y_{ik+1}^* \in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\}} \{c_{i1}^* \cdot y_{1k+1}^* + \dots + c_{ii}^* \cdot y_{ik+1}^* + \dots + c_{im}^* \cdot y_{mk+1}^*\} \leq x_{ik+1} \leq \\
\leq \max_{y_{ik+1}^* \in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\}} \{c_{i1}^* \cdot y_{1k+1}^* + \dots + c_{ii}^* \cdot y_{ik+1}^* + \dots + c_{im}^* \cdot y_{mk+1}^*\}, \\
\vdots \\
\min_{y_{ik+1}^* \in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\}} \{c_{m1}^* \cdot y_{1k+1}^* + \dots + c_{mi}^* \cdot y_{ik+1}^* + \dots + c_{mm}^* \cdot y_{mk+1}^*\} \leq x_{mk+1} \leq \\
\leq \max_{y_{ik+1}^* \in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\}} \{c_{m1}^* \cdot y_{1k+1}^* + \dots + c_{mi}^* \cdot y_{ik+1}^* + \dots + c_{mm}^* \cdot y_{mk+1}^*\},
\end{array} \right.$$

$$k = 0, \dots, N - 1. \quad (2.6)$$

Інтервальну оцінку  $[\bar{x}_k]$ , із використанням інтервальної арифметики, можна представити у вигляді

$$[\bar{x}_k] = C^{-1} \cdot [\bar{y}_k^-, \bar{y}_k^+], \quad k = 0, \dots, N - 1. \quad (2.7)$$

Підставимо оцінки вектора змінних стану  $\bar{x}_{k+1}$ , задані нерівностями (2.6), та інтервальну оцінку  $[\bar{x}_k]$ , задану системою інтервальних рівнянь (2.7), у систему (2.1). Отримаємо таку систему:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\min_{y_{k+1}^* \in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\}} \sum_{i=1}^m c_{li}^* \cdot y_{ik+1}^* \leq \bar{g}_1^T \cdot C^{-1} \cdot [\bar{y}_k^-, \bar{y}_k^+] + q \cdot u_k \leq \max_{y_{k+1}^* \in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\}} \sum_{i=1}^m c_{li}^* \cdot y_{ik+1}^*; \\
\vdots \\
\min_{y_{k+1}^* \in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\}} \sum_{i=1}^m c_{ii}^* \cdot y_{ik+1}^* \leq \bar{g}_i^T \cdot C^{-1} \cdot [\bar{y}_k^-, \bar{y}_k^+] + q \cdot u_k \leq \max_{y_{k+1}^* \in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\}} \sum_{i=1}^m c_{ii}^* \cdot y_{ik+1}^*; \\
\vdots \\
\min_{y_{k+1}^* \in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\}} \sum_{i=1}^m c_{mi}^* \cdot y_{ik+1}^* \leq \bar{g}_m^T \cdot C^{-1} \cdot [\bar{y}_k^-, \bar{y}_k^+] + q \cdot u_k \leq \max_{y_{k+1}^* \in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\}} \sum_{i=1}^m c_{mi}^* \cdot y_{ik+1}^*,
\end{array} \right.$$

$$k = 0, \dots, N - 1, \quad (2.8)$$

де  $\vec{g}_i^T = (g_{i1}, \dots, g_{ii}, \dots, g_{im})$  - вектор-стрічка матриці  $G$  розмірності  $(m \times 1)$ .

Система (2.8) є інтервальною системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів матриць  $G$  та  $Q$ . Її розв'язок є розв'язком задачі параметричної ідентифікації інтервальних моделей лінійних дискретних динамічних систем [138-143].

Попри існуючі методи розв'язування таких систем в інтервальному аналізі [3, 52, 134-136, 139-140, 149], як правило, шукають гарантовані інтервальні оцінки коефіцієнтів матриць  $G$  та  $Q$ , що є неприйнятним з точки зору практичного використання побудованих моделей динаміки.

З іншого боку, аналіз розв'язків системи (2.8) дозволить суттєво спростити процедури пошуку розв'язків цих систем.

## 2.2. Властивості множини параметрів інтервальних моделей динамічних систем

Не порушуючи загальності введемо спрощення у систему (2.8), а саме – за умов повної спостережуваності матрицю  $C$  будемо вважати одиничною, тобто  $C = I$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{y_{1k+1}^* \in \{y_{1k+1}^-, y_{1k+1}^+\}} y_{1k+1}^* \leq \vec{g}_1^T \cdot [\vec{y}_k^-; \vec{y}_k^+] + q \cdot u_k \leq \max_{y_{1k+1}^* \in \{y_{1k+1}^-, y_{1k+1}^+\}} y_{1k+1}^* ; \\ \vdots \\ \min_{y_{ik+1}^* \in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\}} y_{ik+1}^* \leq \vec{g}_i^T \cdot [\vec{y}_k^-; \vec{y}_k^+] + q \cdot u_k \leq \max_{y_{ik+1}^* \in \{y_{ik+1}^-, y_{ik+1}^+\}} y_{ik+1}^* ; \\ \vdots \\ \min_{y_{mk+1}^* \in \{y_{mk+1}^-, y_{mk+1}^+\}} y_{mk+1}^* \leq \vec{g}_m^T \cdot [\vec{y}_k^-; \vec{y}_k^+] + q \cdot u_k \leq \max_{y_{mk+1}^* \in \{y_{mk+1}^-, y_{mk+1}^+\}} y_{mk+1}^* , \end{array} \right. ,$$

$$k = 0, \dots, N - 1. \quad (2.9)$$

Розкриємо  $\min$  та  $\max$  і введемо позначення:  $x_{ik+1}^- = y_{ik+1}^-$ ,  $x_{ik+1}^+ = y_{ik+1}^+$ . Тоді система (2.9) матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_{1k+1}^- \leq \bar{g}_1^T \cdot [\bar{x}_k^-; \bar{x}_k^+] + \bar{q}^T \cdot \bar{u}_k \leq x_{1k+1}^+ \\ \vdots \\ x_{ik+1}^- \leq \bar{g}_i^T \cdot [\bar{x}_k^-; \bar{x}_k^+] + \bar{q}^T \cdot \bar{u}_k \leq x_{ik+1}^+ \\ \vdots \\ x_{mk+1}^- \leq \bar{g}_m^T \cdot [\bar{x}_k^-; \bar{x}_k^+] + \bar{q}^T \cdot \bar{u}_k \leq x_{mk+1}^- \end{cases},$$

$$k = 0, \dots, N-1. \quad (2.10)$$

Інтервальна система лінійних алгебраїчних рівнянь (2.10) складається з  $m$  блоків інтервальних рівнянь, у кожному з яких  $N$  рівнянь, що дають змогу визначити елементи  $i$ -ї стрічки матриць  $G$  та  $Q$  [46]. Тому, не порушуючи загальності, як основну ІСЛАР розглядаємо окремий блок загальної ІСЛАР (2.10), який має такий вид:

$$x_{i,k+1}^- \leq g_{i1} \cdot [x_{1,k}^-, x_{1,k}^+] + \dots + g_{ii} \cdot [x_{i,k}^-, x_{i,k}^+] + \dots + g_{im} \cdot [x_{m,k}^-, x_{m,k}^+] + q \cdot u_k \leq x_{i,k+1}^+, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Перепишемо одержану ІСЛАР, опустивши індекс  $i$ :

$$x_{k+1}^- \leq g_1 \cdot [x_{1,k}^-, x_{1,k}^+] + \dots + g_i \cdot [x_{i,k}^-, x_{i,k}^+] + \dots + g_m \cdot [x_{m,k}^-, x_{m,k}^+] + q \cdot u_k \leq x_{k+1}^+, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.11)$$

Система (2.10) може не мати жодного розв'язку, тобто бути несумісною.

Стосовно задач аналізу інтервальних даних [2, 15, 70], несумісність системи (2.10) означає, що не виконуються припущення стосовно природи об'єкта Н1 та Н2, тобто або невірно задано вигляд функції (2.1), або невірно визначені максимальні амплітуди похибок  $\bar{e}_{k+1}$ .

Нехай система (2.10) є сумісною. Позначимо через  $\Omega$  множину її розв'язків  $\bar{g} = (g_1, \dots, g_m, q)$ :

$$\Omega = \left\{ \bar{g} \in R^{m+1} \mid \bar{x}_{k+1}^- \leq \bar{g}_i \cdot [\bar{x}_k^-] + q \cdot u_k \leq x_{k+1}^+ \forall k = 0, \dots, N-1 \right\}. \quad (2.12)$$

Розглянемо систему  $k = m$  інтервальних рівнянь, отриману із системи (2.11) у вигляді:

$$\begin{cases} x_1^- \leq g_1 \cdot [x_{0,1}^-, x_{0,1}^+] + \dots + g_i \cdot [x_{0,i}^-, x_{0,i}^+] + \dots + g_m \cdot [x_{0,m}^-, x_{0,m}^+] + q \cdot u_0 \leq x_1^+ \\ \vdots \\ x_{k+1}^- \leq g_1 \cdot [x_{k,1}^-, x_{k,1}^+] + \dots + g_i \cdot [x_{k,i}^-, x_{k,i}^+] + \dots + g_m \cdot [x_{k,m}^-, x_{k,m}^+] + q \cdot u_k \leq x_{k+1}^+ \\ \vdots \\ x_m^- \leq g_1 \cdot [x_{m-1,1}^-, x_{m-1,1}^+] + \dots + g_i \cdot [x_{m-1,i}^-, x_{m-1,i}^+] + \dots + g_m \cdot [x_{m-1,m}^-, x_{m-1,m}^+] + q \cdot u_{m-1} \leq x_m^+ \end{cases} \quad (2.13)$$

Отримана система подібна до інтервальних систем, що будуються на основі інтервальних даних при розв'язуванні задач параметричної ідентифікації моделей статичних систем [31, 32, 33].

Аналіз системи рівнянь (2.11) показав, якщо інтервали  $[x_{i,k}^-, x_{i,k}^+], \forall i = 1, \dots, m, \forall k = 0, \dots, m-1$  стягуються в точку, то розв'язок кожної нерівності системи в просторі оцінок коефіцієнтів  $\bar{g}$  задає «гіперсмугу»  $\bar{\Omega}_p$ , обмежену двома гіперплощинами, як це показано на рис. 2.1 [34-36, 107, 109].

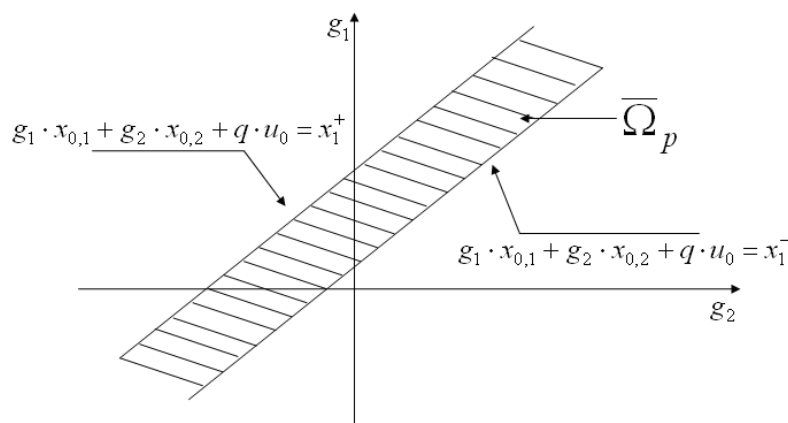


Рис.2.1 – Ілюстрація розв'язку одного рівняння ІСЛАР у просторі параметрів  
( $m = 2$ ) для  $x_{ik}^- = x_{ik}^+$

Відповідно до цього, розв'язком системи (2.13), за умови  $x_{ik}^- = x_{ik}^+ \forall i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, m-1$ , в просторі оцінок коефіцієнтів  $\bar{g}$  є симетричний

опуклий многогранник –  $m$ - вимірний паралелепіпед  $\Omega_m$  (рис. 2.2). У цьому випадку для знаходження розв’язку системи (2.13) є придатними ефективні обчислювальні методи, розроблені в теорії ідентифікації інтервальних моделей статичних систем [25-26, 31-37, 39, 59, 120]. При цьому, застосування обчислювальної процедури виділення насиченого блоку експерименту, описаної в [32], дозволить отримувати розв’язок у вигляді паралелепіпеда.

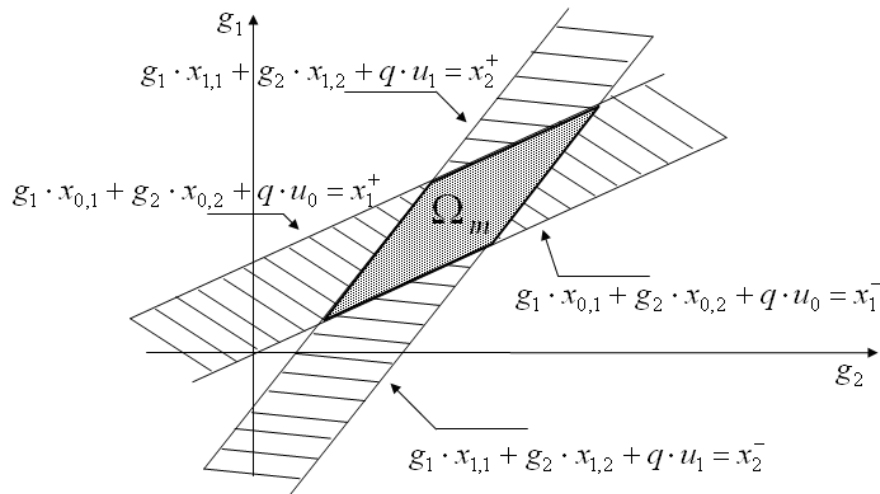


Рис. 2.2 - Розв’язок системи рівнянь (2.13) у вигляді  $m$ - вимірного паралелепіпеда (для  $m = N - 1 = 2$ )

Для випадку  $x_{ik}^- \neq x_{ik}^+$  розв’язок кожного  $k$ -го рівняння ІСЛАР задає також опуклу множину  $\Omega_{mk}$ , як це показано на рисунку 2.3.

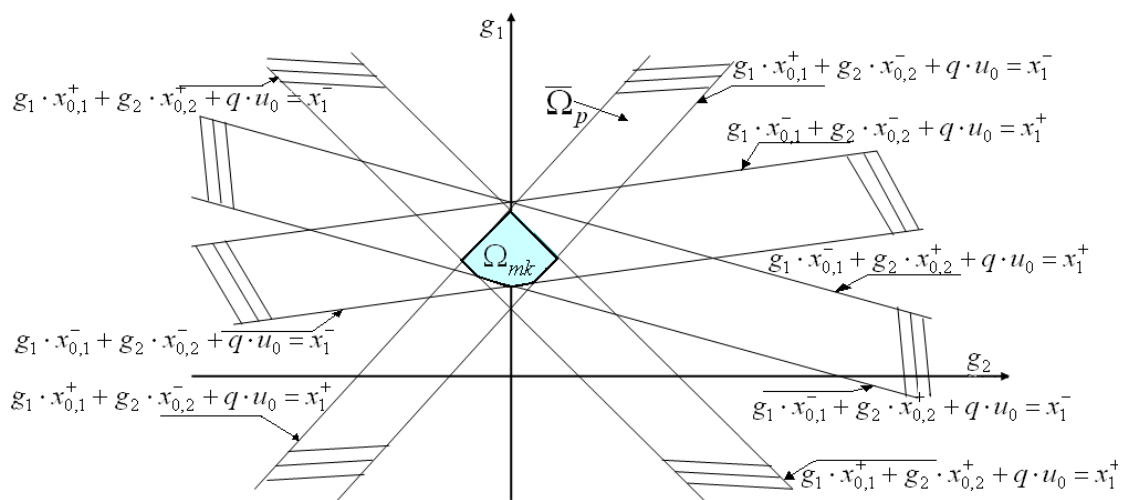


Рис. 2.3 - Ілюстрація розв’язку одного рівняння ІСЛАР у просторі параметрів ( $m = 2$ ) для  $x_{ik}^- \neq x_{ik}^+$



Задача гарантованого оцінювання полягає у знаходженні такої інтервальної оцінки розв'язку  $[\vec{g}_{gar}] = ([g_{1gar}^-; g_{1gar}^+], \dots, [g_{mgar}^-; g_{mgar}^+], [q_{gar}^-; q_{gar}^+])^T$  ІСЛАР, яка забезпечуватиме включення коридору експериментальних даних  $[x_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$  в прогнозний коридор  $[\hat{x}_{k+1}]$  для змінних стану, тобто:

$$[x_{k+1}] \subseteq [\hat{x}_{k+1}], \quad (2.14)$$

де  $[\hat{x}_{k+1}] = [\vec{g}_{gar}^T] \cdot [\hat{x}_k]$ ,  $[\hat{x}_k] = [\hat{x}_{1k}, \hat{x}_{2k}, \dots, \hat{x}_{mk}, u_k]$  - вектор прогнозних значень змінних стану в  $k$ - й дискретний момент часу, доповнений значенням вхідної змінної.

Властивості множини  $\Omega$  у випадку гарантованих розв'язків лінійної системи інтервальних рівнянь безпосередньо визначають властивості інтервальних моделей динамічних систем, побудованих на основі цих розв'язків [33]. До основних властивостей гарантованої множини можна віднести:

1. У просторі параметрів  $\vec{g}$  множина гарантованих розв'язків  $\Omega_{gar}$  є неопуклим многогранником.

2. Множина розв'язків  $\Omega_{gar}$  ІСЛАР (2.10) породжує множину рівнозначних (з точки зору наявності інтервальної невизначеності) адекватних інтервальних моделей лінійних динамічних систем.

3. Гарантована інтервальна оцінка  $\Pi^+ \supseteq \Omega_{gar}$  породжує також множину адекватних інтервальних моделей лінійних дискретних динамічних систем у вигляді:

$$[\hat{x}_{k+1}] = [\vec{g}_{gar}^T] \cdot [\hat{x}_k], \quad k = 0, \dots, N - 1.$$

Слід зауважити, що при збереженні загальної подібності процедур множинної параметричної ідентифікації моделей статичних та динамічних систем з інтервальною вихідною змінною, при реалізації цих процедур для динамічних систем суттєво зростає часова складність, що є предметом окремих досліджень [34, 40-42].

Результати проведеного аналізу розв'язків ІСЛАР дозволяють побудувати алгоритми гарантованого оцінювання параметрів для задач ідентифікації

динамічних моделей. Проте, для задач прогнозування динаміки станів об'єктів більш важливим є не гарантоване, а допускове оцінювання, яке забезпечує допусковий коридор динамічної моделі “вхід-вихід”.

Незважаючи на велику кількість методів знаходження допустимих розв'язків, основною проблемою є отримання одного допустимого розв'язку, навколо якого будується множина допустимих розв'язків. Зокрема, в працях Алефельда і Херцберга [2] вказується надзвичайна складність і часто неможливість застосування традиційних методів з реалізації інтервальної арифметики в обчислювальних процедурах. В роботах інших вчених – наприклад, Шарого [106-113], де запропоновано підходи до знаходження одного допустимого розв'язку відзначається надзвичайна обчислювальна складність, що знижує їх практичну цінність.

В роботах [43, 44] проведено детальний аналіз властивостей областей розв'язків, що дозволяють сформулювати загальні підходи до знаходження допустимого розв'язку та показати їх практичну цінність для задач моделювання.

Задача допускового оцінювання полягає у знаходженні такого розв'язку інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь  $\vec{g}_{dop} = (g_{1dop}, \dots, g_{mdop}, q)$  чи його інтервальної оцінки  $[\vec{g}_{dop}] = ([g_{1dop}^-; g_{1dop}^+], \dots, [g_{mdop}^-; g_{mdop}^+], [q_{dop}^-; q_{dop}^+])^T$ , які забезпечуватимуть таке включення:

$$[\hat{x}_{k+1}] \subseteq [x_{k+1}], \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (2.15)$$

де  $[\hat{x}_{k+1}] = \vec{g}_{dop}^T \cdot [\hat{x}_k]$ , чи  $[\hat{x}_{k+1}] = [\vec{g}_{dop}^T] \cdot [\hat{x}_k]$ .

Як було описано вище, загальний (гарантований) розв'язок ІСЛАР (2.10) у вигляді неопуклої множини  $\Omega_{gar}$  є інтервальна оцінка об'єднання часткових розв'язків  $\Omega_{mk}$ , отриманих із відповідних інтервальних систем з  $m$  рівнянь (2.13).

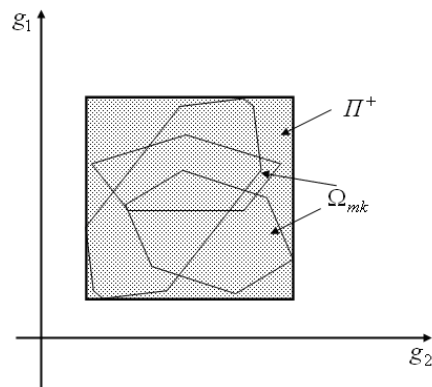


Рис. 2.4 - Множина розв'язків ІСЛАР у випадку гарантованого оцінювання параметрів моделі динамічної системи

Своєю чергою, допустимий розв'язок ІСЛАР (2.10) у вигляді опуклої множини  $\Omega_{dop}$  є перетин часткових розв'язків  $\Omega_{mk}$  (рис. 2.5).

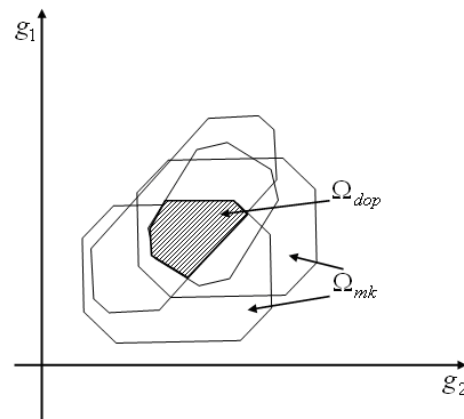


Рис. 2.5 - Множина розв'язків ІСЛАР у випадку допускового оцінювання параметрів моделі динамічної системи (для  $m=2$ )

До основних властивостей допускової множини можна віднести:

1. У просторі параметрів  $\vec{g}$  множина допустимих розв'язків  $\Omega_{dop}$  є опуклим многогранником.

2. Довільний вектор параметрів  $\vec{g}_{dop} \in \Omega_{dop}$ , який є допустимим розв'язком ІСЛАР (2.11) породжує інтервальну модель, що належить допусковому коридору інтервальних моделей лінійної дискретної динамічної системи

$$[\hat{x}_{k+1}] = \vec{g}_{dop} \cdot [\hat{x}_k], \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (2.16)$$

для прогнозованих значень якого справедливим є включення  $[\hat{x}_{k+1}] \subseteq [x_{k+1}]$   $k = 0, \dots, N-1$ .

3. Множина розв'язків  $\Omega_{dop}$  ІСЛАР (2.11) породжує множину рівнозначних (з точки зору наявної інтервальної невизначеності) адекватних інтервальних моделей лінійних динамічних систем (2.16).

4. Допускова інтервальна оцінка  $\Pi^- \subseteq \Omega_{dop}$  породжує також множину адекватних інтервальних моделей лінійних дискретних динамічних систем у такому вигляді:

$$[\hat{x}_{k+1}] = [\bar{g}_{dop}^T] \cdot [\hat{x}_k], \quad k = 0, \dots, N-1.$$

2.3. Порівняльний аналіз інтервальних гарантованих та допускових методів оцінювання множини параметрів моделей

У багатовимірному випадку наочне зображення загального розв'язку ІСЛАР (2.10) у вигляді гарантованої  $\Omega_{gar}$  чи допускової  $\Omega_{dop}$  множин як на рис. 2.4 та 2.5 є неможливим, що вимагає заміни їх локалізаційними множинами. Найбільш придатною в даному випадку є інтервальна локалізація множин розв'язків  $\Omega_{gar}$  та  $\Omega_{dop}$ , тобто описаним  $m$ -вимірним прямокутним паралелепіпедом. У багатовимірному випадку прямокутний паралелепіпед  $\Pi^+$  можна задати через межі окремих параметрів  $g_j$ , тобто інтервальним вектором  $[\bar{g}_{gar}]$  з елементами  $[g_j^-; g_j^+]$ . Значення  $g_j^-$ ,  $g_j^+$  знаходять із розв'язку задач лінійного програмування:

$$g_j^- = \min_{\bar{g} \in \Omega} g_j, \quad g_j^+ = \max_{\bar{g} \in \Omega} g_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.17)$$

Задача (2.17) складається із  $2m$  задач лінійного програмування. Розв'язок задачі має просте геометричне тлумачення. При  $j=1$  розв'язком задачі (2.17) є дві екстремальні вершини многогранника  $\Omega$ , компонента  $j=1$  яких приймає, відповідно, мінімальне  $\min g_1$  та максимальне значення  $\max g_1$ .

Якщо за критерій мінімізації (максимізації) вибрати компоненту  $g_2$ , аналогічно можна отримати  $\min g_2, \max g_2$ . Якщо  $2m$  разів розв'язати задачу (2.17) для всіх компонент  $(g_1, \dots, g_m)$ , то будуть знайдені  $2m$  вершин многогранника  $\Omega$ .

Залежність між прогнозованим значенням виходу  $\hat{x}_{k+1}$  та оцінками вектора параметрів  $\vec{g}$  є лінійною. Тому при фіксованому векторі входів  $\vec{x}_k$  розв'язками задач

$$\min_{\vec{g} \in \Pi^+} \sum_{j=1}^m g_j \cdot \vec{x}_k, \quad \max_{\vec{g} \in \Pi^+} \sum_{j=1}^m g_j \cdot \vec{x}_k$$

є вершини паралелепіпеда  $\Pi^+$ . Отже межі коридору інтервальних моделей, як і у випадку застосування множини параметрів  $\Omega$ , будуються на основі координат вершин області локалізації  $\Pi^+$ .

За цих умов в інтервальному аналізі шукають наближення множини  $\Omega_{gar}$  у вигляді гарантованого  $\Pi^+$  прямокутного  $m$ - вимірного паралелепіпеду, отриманим як інтервальна оцінка об'єднання опуклих множин  $\Omega_{mk}$ :

$$\begin{aligned} \Pi^+ &= \left\{ \vec{g}_{gar} \in R^{m+1} \mid g_{igar}^- \leq g_{igar} \leq g_{igar}^+; q_{gar}^- \leq q_{gar} \leq q_{gar}^+, i = 1, \dots, m \right\} \\ \Pi^+ &\supset \bigcup_{k=0}^{N-1} \left( \bigcap_{p=1}^{2^m} \overline{\Omega}_p \right) = \bigcup_{k=0}^{N-1} \Omega_{mk} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Гарантована інтервальна оцінка  $[\vec{g}_{gar}]$  вектора параметрів лінійної динамічної системи у вигляді  $\Pi^+$  прямокутного  $m$ - вимірного паралелепіпеду для випадку  $m = 2$  проілюстрована на рисунку 2.4.

Наближення множини  $\Omega_{gar}$  шукають у вигляді допускового  $\Pi^-$  прямокутного  $\Pi^- = \left\{ \vec{g}_{dop} \in R^{m+1} \mid g_{idop}^- \leq g_{idop} \leq g_{idop}^+; q_{dop}^- \leq q_{dop} \leq q_{dop}^+, i = 1, \dots, m \right\}$   $m$ - вимірного паралелепіпеду, вписаного в переріз опуклих множин  $\Omega_{mk}$ :

$$\Pi^- \subseteq \Omega_{dop} = \bigcap_{k=0}^{N-1} \left( \bigcap_{p=1}^{2^m} \overline{\Omega}_p \right) = \bigcap_{k=0}^{N-1} \Omega_{mk} \quad (2.19)$$

Допустима інтервальна оцінка  $[\bar{g}_{dop}]$  вектора параметрів лінійної динамічної системи у вигляді  $\Pi^-$  для випадку  $m = 2$  проілюстрована на рис. 2.6.

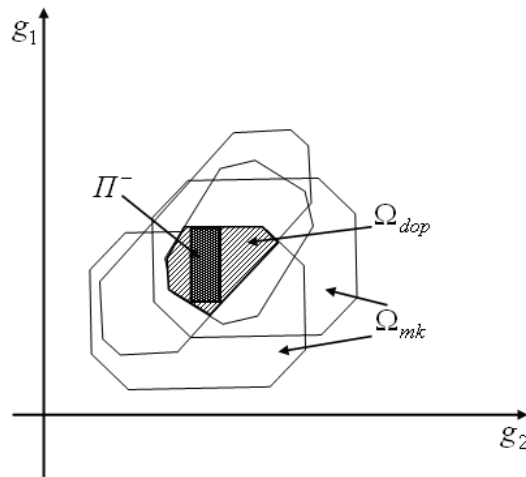


Рис. 2.6 - Допустима інтервальна оцінка  $\Pi^-$  параметрів моделей лінійних динамічних систем (для  $m = 2$ )

Розв'язок, отриманий для системи (2.13) у вигляді  $m$ - вимірного паралелепіпеда може бути описаний оптимальним  $m$ - вимірним еліпсоїдом [19-23, 48-49, 57] у такому вигляді:

$$Q_{m,p} = \left\{ \bar{g}_m \in R^m \mid (\bar{g}_m - \bar{\bar{g}}_{m,p})^T \cdot X_p^T \cdot E^{-2} \cdot X_p \cdot (\bar{g}_m - \bar{\bar{g}}_{m,p}) = m \right\}, \quad (2.20)$$

де матриця  $X_p$  - складена із межових значень інтервалів

$[x_{ik}^-, x_{ik}^+]$ ,  $i = 1, \dots, m, k = 0, \dots, N - 1$ ;

$\bar{\bar{g}}_{m,p} = X_p^{-1} \cdot \bar{\bar{x}}_{k+1}$  - центр еліпсоїда;

$\bar{\bar{x}}_{k+1} = \left( 0.5 \cdot (x_{m,1}^- + x_{m,1}^+), \dots, 0.5 \cdot (x_{m,k+1}^- + x_{m,k+1}^+), \dots, 0.5 \cdot (x_{m,m}^- + x_{m,m}^+) \right)^T$ ;

$E = \text{diag} \left\{ 0.5 \cdot (x_{m,1}^+ - x_{m,1}^-), \dots, 0.5 \cdot (x_{m,k+1}^+ - x_{m,k+1}^-), \dots, 0.5 \cdot (x_{m,m}^+ - x_{m,m}^-) \right\}$ .

На рис. 2.7 схематично зображена гарантована оцінка у вигляді  $m$ - вимірного еліпсоїда (2.20).

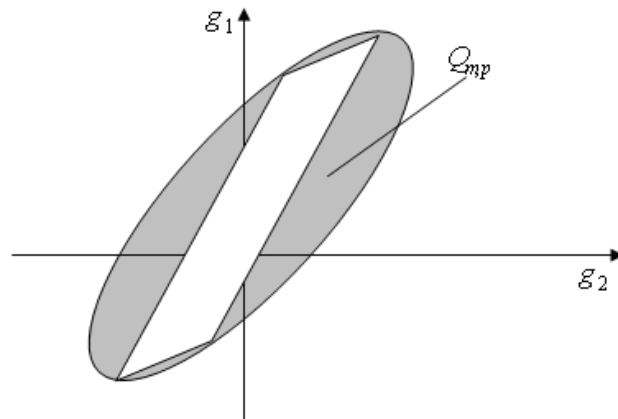


Рис. 2.7 - Гарантована оцінка у вигляді  $m$ - вимірного еліпсоїда (для  $m = N = 2$ )

Із урахуванням вище викладеного, формально оцінку розв'язку усієї системи (2.10), тобто гарантовану оцінку гарантованої множини  $\Omega_{gar}$  розв'язків можна записати у вигляді об'єднання (рис. 2.8)  $m$ - вимірних еліпсоїдів (2.20):

$$Q_m = \left\{ \vec{g}_m \in R^m \mid (\vec{g}_m - \vec{\bar{g}}_{m,p})^T \cdot H_p \cdot (\vec{g}_m - \vec{\bar{g}}_{m,p}) = m \right\}, \quad (2.21)$$

де  $H_p = X_p^T \cdot E^{-2} \cdot X_p$ .

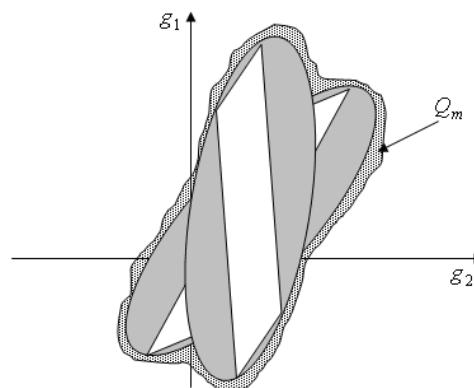


Рис. 2.8 - Гарантована оцінка ІСЛАР (для  $m = N = 2$ )

Слід зауважити, що описаний метод множинної ідентифікації параметрів (гарантованого оцінювання) із використанням  $m$  спостережень не завжди забезпечує потрібної точності прогнозування на основі отриманої моделі. Тому в подальшому

необхідно розвивати його для умов збільшення кількості інтервальних спостережень  $k > m$ .

Як і у випадку гарантованого оцінювання, допустиму оцінку розв'язку системи (2.13) у вигляді  $m$ -вимірному паралелепіеда можна представити у вигляді вписаного  $m$ -вимірному еліпсоїда (рис. 2.9), що дотикається до усіх граней паралелепіеда [37]:

$$Q_{mp}^- = \left\{ \bar{g}_m \in R^m \mid (\bar{g}_m - \bar{\bar{g}}_{m,p})^T \cdot X_p^T \cdot E^{-2} \cdot X_p \cdot (\bar{g}_m - \bar{\bar{g}}_{m,p}) \leq 1 \right\} \quad (2.22)$$

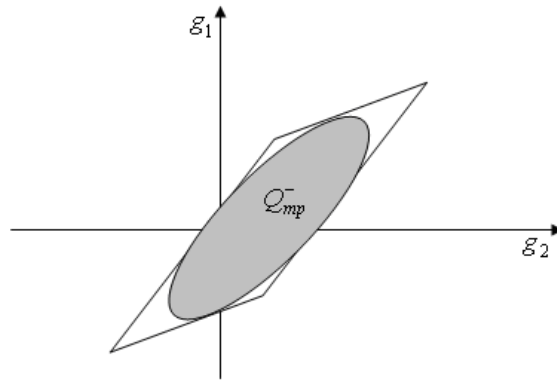


Рис. 2.9 - Допустима оцінка у вигляді  $m$ - вимірному еліпсоїда (для  $m = N = 2$ )

Формально допустиму оцінку допускової множини  $\Omega_{dop}$  розв'язків загальної системи (2.10) можна представити як еліпсоїд, вписаний в допускову множину  $\Omega_{dop}$ , тобто вписаний в перетин часткових розв'язків -  $m$ - вимірних многогранників (рис. 2.10 для випадку  $m = N = 2$ ):

$$Q_m^- = \left\{ \bar{g}_m \in R^m \mid (\bar{g}_m - \bar{\bar{g}}_{m,p})^T \cdot H_p \cdot (\bar{g}_m - \bar{\bar{g}}_{m,p}) \leq 1 \right\}, \quad (2.23)$$

де  $H_p = X_p^T \cdot E^{-2} \cdot X_p$ ,  $X_p \in [X]$ .



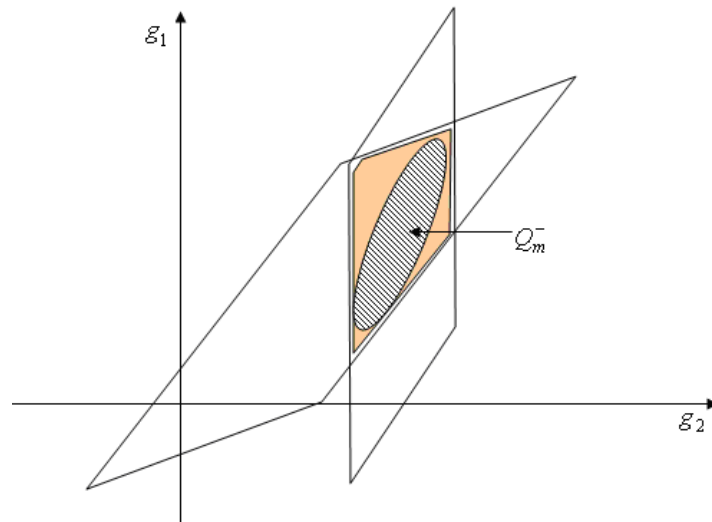


Рис. 2.10 - Допустима оцінка ІСЛАР (для  $m = N = 2$ )

Знаходження множини допустимих розв'язків для загальної ІСЛАР (2.10) шляхом визначення усіх розв'язків  $\vec{g}_{mk}$  множин  $\Omega_{mk}$ , є надзвичайно складною обчислювальною задачею, навіть для малої розмірності. Саме це зумовлює розробку чисельного методу для знаходження хоча б одного розв'язку  $\vec{g}_{dop} \in \Omega_{dop}$ , який би задовольнив всю інтервальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (2.10).

Для оцінки переваги методів знаходження гарантованих чи допустових оцінок параметрів інтервальних моделей динамічних систем було проведено їх порівняльний аналіз, в результаті якого встановлені наступні властивості оцінок:

1. В просторі параметрів  $\vec{g}$  множина розв'язків інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (ІСЛАР) є, в загальному випадку, многогранник, який отримується шляхом перетину (допустима оцінка) – опуклий многогранник або об'єднанням (гарантована оцінка) – неопуклий многогранник часткових розв'язків ІСЛАР -  $2^m$  множин  $\Omega_{mk}$ , у вигляді  $m$ - вимірних паралелепіпедів. Області розв'язків лінійної системи рівнянь для допустимої і гарантованої оцінки мають різні розміри, що зумовлює точність шуканої оцінки: більша область – менша точність.

2. Так як загальний розв'язок представлений у вигляді неопуклого многогранника, знайти оцінку параметрів в такому випадку є досить складною обчислювальною процедурою. У випадку знаходження гарантованої оцінки

множина розв'язків може бути досить витягнутою у напрямку, що не співпадає з напрямком жодної з осей координат, тобто, коли довжина її одної діагоналі значно перевищує довжини інших. Тоді для ідентифікації параметрів доцільно використовувати еліпсоїдальні методи оцінювання, тобто навколо окремих часткових розв'язків будуються  $m$ -вимірні еліпсоїди за вже відомою формулою, а оцінка параметрів – це є об'єднання цих еліпсоїдів.

3. У випадку знаходження оцінки допустимого розв'язку у вигляді вписаного паралелепіпеда обчислювальна процедура відзначається меншою складністю, надійністю, високою збіжністю та адаптивністю до реальних властивостей динамічних систем, які проявляються в експериментальних даних.

Для задач параметричної ідентифікації динамічних моделей найбільш придатним є знаходження допускових інтервальних оцінок параметрів, які забезпечують, при заданих вхідних змінних, допусковий коридор для кожної вихідної характеристики системи. Цей коридор включає усі інтервальні динамічні моделі “вхід-вихід”.

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

1. Розглянуто основні припущення, на яких базуються методи аналізу інтервальних даних у випадку ідентифікації моделей «вхід-вихід» динамічних систем.

2. Визначені властивості множини розв'язків інтервальної системи лінійних рівнянь у випадку гарантованого оцінювання параметрів, які полягають в наступному: 1) у просторі параметрів  $\vec{g}$  множина гарантованих розв'язків  $\Omega_{gar}$  є неопуклим многогранником; 2) множина розв'язків  $\Omega_{gar}$  ІСЛАР породжує множину рівнозначних (з точки зору наявності інтервальної невизначеності) адекватних інтервальних моделей лінійних динамічних систем; 3) гарантована інтервальна оцінка породжує також множину адекватних інтервальних моделей лінійних дискретних динамічних систем.

3. Визначені властивості множини розв'язків інтервальної системи лінійних рівнянь у випадку допускового оцінювання параметрів, які полягають в наступному: 1) у просторі параметрів  $\vec{g}$  множина допустимих розв'язків  $\Omega_{dop}$  є опуклим многогранником; 2) довільний вектор параметрів, який є допустимим розв'язком ІСЛАР породжує інтервальну модель, що належить допусковому коридору інтервальних моделей лінійної дискретної динамічної системи; 3) множина розв'язків  $\Omega_{dop}$  ІСЛАР породжує множину рівнозначних (з точки зору наявності інтервальної невизначеності) адекватних інтервальних моделей лінійних динамічних систем; 4) допустима інтервальна оцінка  $\Pi^- \subseteq \Omega_{dop}$  породжує також множину адекватних інтервальних моделей лінійних дискретних динамічних систем.

4. Проведено порівняльний аналіз інтервальних гарантованих та допускових методів оцінювання множини параметрів моделей.

## РОЗДІЛ 3

### МЕТОД ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ІНТЕРАЛЬНИХ ДАНИХ

У підрозділі 2.1. розглянуто постановку задачі параметричної ідентифікації лінійних динамічних систем. При цьому вказано, що розв'язок даної задачі параметричної ідентифікації зводиться до розв'язування інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Дослідження властивостей допустимого розв'язку цієї системи показав, що множина розв'язків є опуклою множиною [43-44, 124, 130]. Користуючись цим фактом у даному розділі запропоновано ітераційний метод пошуку допустимого розв'язку інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, як базовий метод розв'язку задачі параметричної ідентифікації лінійних динамічних систем.

Принципи побудови методу параметричної ідентифікації моделей лінійних динамічних систем у випадку адитивних та обмежених за амплітудою похибок в каналах вимірювань базуються на властивостях множини допустових оцінок параметрів цих моделей. Реалізація методу передбачає два етапи: знаходження початкового наближення  $\vec{g}_0$ ; покращення початкового наближення до забезпечення умови  $\vec{g} = \vec{g}_{dop} \in \Omega_{dop}$  [45-46, 126-128].

Розглянемо перший етап ітераційного методу параметричної ідентифікації лінійних динамічних систем.

#### 3.1. Вибір початкового наближення в ітераційному методі пошуку допустимого розв'язку ІСЛАР

Початкове наближення  $\vec{g}_0$  до допустимого розв'язку  $\vec{g}_{dop}$  обчислюється, виходячи із наближеного представлення множини допустових оцінок параметрів, як розв'язок довільно вибраних  $m$ -рівнянь ІСЛАР (2.11) із заміною інтервалів  $[x_{i,k}^-, x_{i,k}^+]$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ ,  $\forall k = 0, \dots, m-1$  на їх точкові значення

$x_{i,k}^+, \forall i=1, \dots, m, \quad \forall k=0, \dots, m-1$ . Як показав аналіз властивостей допускової області параметрів, в цьому випадку розв'язок кожної нерівності сформованої у такий спосіб ІСЛАР в просторі оцінок параметрів  $\vec{g}$  задає «гіперсмугу»  $\overline{\Omega}_p$  (див. рис. 2.1). Натомість перетин  $m$  таких «гіперсмуг» утворює множину  $\Omega_m$ , яка в просторі параметрів є  $m$ -вимірним паралелепіпедом (рис. 2.2). При цьому справедливим є таке включення  $\vec{g}_{dop} \in \Omega_{dop} \subset \Omega_m$ . Тоді за початкове наближення  $\vec{g}_0$  доцільно вибрати центр симетрії  $m$ -вимірного паралелепіпеда (див.рис.3.1). Матричне представлення початкового наближення має такий вигляд::

$$\vec{g}_0 = (X^+)^{-1} \cdot \vec{\bar{x}}_{k+1},$$

$$X^+ = \begin{pmatrix} x_{0,1}^+ & \cdots & x_{0,m}^+ & u_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{m-1,1}^+ & \cdots & x_{m-1,m}^+ & u_m \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

де  $X^+$  - матриця верхніх меж інтервалів  $m$  змінних стану для вибраних  $m$  рівнянь

ІСЛАР (2.11);  $\vec{\bar{x}}_{k+1} = \left( \frac{x_{1,k+1}^- + x_{1,k+1}^+}{2}, \dots, \frac{x_{m,k+1}^- + x_{m,k+1}^+}{2} \right)^T$  - вектор, компоненти якого є

середини відповідних інтервалів  $[x_{k+1}^-, x_{k+1}^+]$ ,  $k=0, \dots, m-1$ .

Отриманий за виразом (3.1) розв'язок схематично проілюстровано на рис. 3.1.

Пропоноване вище значення  $\vec{g}_0$  є достатньо грубим наближенням розв'язку  $\vec{g}_{dop}$ , однак його вибір зменшує кількість обчислень при пошуку розв'язку  $\vec{g}_{dop}$  і його знаходження не вимагає використання складних обчислювальних алгоритмів.

Обґрунтуємо вибір точки  $\vec{g}_0$  початкового наближення. При цьому зауважимо, що матриця  $X^+$  у формулі (3.1), може бути вибрана довільно, але із урахуванням умови  $X^+ \in [X]$ :

$$[X] = \begin{pmatrix} [x_{1,0}^-, x_{1,0}^+] \dots [x_{i,0}^-, x_{i,0}^+] \dots [x_{m,0}^-, x_{m,0}^+] & u_0 \\ \vdots & \\ [x_{1,k}^-, x_{1,k}^+] \dots [x_{i,k}^-, x_{i,k}^+] \dots [x_{m,k}^-, x_{m,k}^+] & u_k \\ \vdots & \\ [x_{1,N-1}^-, x_{1,N-1}^+] \dots [x_{i,N-1}^-, x_{i,N-1}^+] \dots [x_{m,N-1}^-, x_{m,N-1}^+] & u_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$k = 0, \dots, N-1,$$

де  $[X]$  - інтервальна матриця змінних стану в  $k$ -й дискретний момент часу, доповнена вектором вхідних змінних.

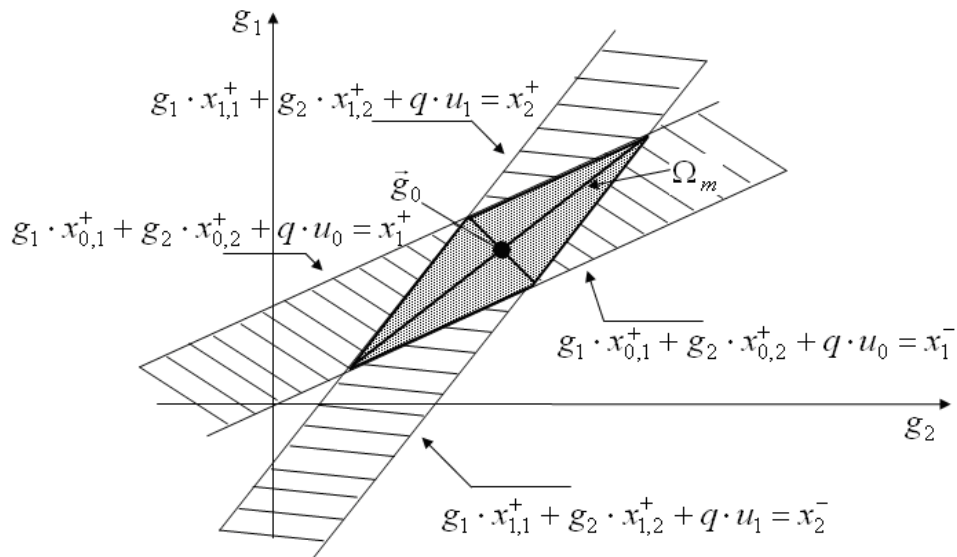


Рис. 3.1 - Ілюстрація процедури вибору початкового наближення до допустимого розв'язку ІСЛАР (для  $m = N = 2$ )

Для дослідження вибору початкового наближення візьмемо інтервальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (ІСЛАР), яка складається з  $m = 2$  невідомих параметрів та  $N$  спостережень виду

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,1}^- \leq g_{11} \cdot [x_{0,1}^-; x_{0,1}^+] + g_{12} \cdot [x_{0,2}^-; x_{0,2}^+] + q_1 \cdot u_0 \leq x_{1,1}^+ \\ x_{2,1}^- \leq g_{21} \cdot [x_{0,1}^-; x_{0,1}^+] + g_{22} \cdot [x_{0,2}^-; x_{0,2}^+] + q_2 \cdot u_0 \leq x_{2,1}^- \\ x_{1,2}^- \leq g_{11} \cdot [x_{1,1}^-; x_{1,1}^+] + g_{12} \cdot [x_{1,2}^-; x_{1,2}^+] + q_1 \cdot u_1 \leq x_{1,2}^+ \\ x_{2,2}^- \leq g_{21} \cdot [x_{1,1}^-; x_{1,1}^+] + g_{22} \cdot [x_{1,2}^-; x_{1,2}^+] + q_2 \cdot u_1 \leq x_{2,2}^+ \\ x_{1,3}^- \leq g_{11} \cdot [x_{2,1}^-; x_{2,1}^+] + g_{12} \cdot [x_{2,2}^-; x_{2,2}^+] + q_1 \cdot u_2 \leq x_{1,3}^+ \\ x_{2,3}^- \leq g_{21} \cdot [x_{2,1}^-; x_{2,1}^+] + g_{22} \cdot [x_{2,2}^-; x_{2,2}^+] + q_2 \cdot u_2 \leq x_{2,3}^+ \\ \vdots \\ x_{1,N+1}^- \leq g_{11} \cdot [x_{N,1}^-; x_{N,1}^+] + g_{12} \cdot [x_{N,2}^-; x_{N,2}^+] + q_1 \cdot u_N \leq x_{1,N+1}^+ \\ x_{2,N+1}^- \leq g_{21} \cdot [x_{N,1}^-; x_{N,1}^+] + g_{22} \cdot [x_{N,2}^-; x_{N,2}^+] + q_2 \cdot u_N \leq x_{2,N+1}^+ \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Дану систему (3.2) лінійних алгебраїчних рівнянь можна розділити на дві еквівалентні системи відповідно для визначення невідомих параметрів моделі -  $\vec{g}_1 = (g_{11}, g_{12}, q_1)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,1}^- \leq g_{11} \cdot [x_{0,1}^-; x_{0,1}^+] + g_{12} \cdot [x_{0,2}^-; x_{0,2}^+] + q_1 \cdot u_0 \leq x_{1,1}^+ \\ x_{1,2}^- \leq g_{11} \cdot [x_{1,1}^-; x_{1,1}^+] + g_{12} \cdot [x_{1,2}^-; x_{1,2}^+] + q_1 \cdot u_1 \leq x_{1,2}^+ \\ x_{1,3}^- \leq g_{11} \cdot [x_{2,1}^-; x_{2,1}^+] + g_{12} \cdot [x_{2,2}^-; x_{2,2}^+] + q_1 \cdot u_2 \leq x_{1,3}^+ \\ \vdots \\ x_{1,N+1}^- \leq g_{11} \cdot [x_{N,1}^-; x_{N,1}^+] + g_{12} \cdot [x_{N,2}^-; x_{N,2}^+] + q_1 \cdot u_N \leq x_{1,N+1}^+ \end{array} \right. \quad (3.3)$$

та  $\vec{g}_2 = (g_{21}, g_{22}, q_2)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{2,1}^- \leq g_{21} \cdot [x_{0,1}^-; x_{0,1}^+] + g_{22} \cdot [x_{0,2}^-; x_{0,2}^+] + q_2 \cdot u_0 \leq x_{2,1}^- \\ x_{2,2}^- \leq g_{21} \cdot [x_{1,1}^-; x_{1,1}^+] + g_{22} \cdot [x_{1,2}^-; x_{1,2}^+] + q_2 \cdot u_1 \leq x_{2,2}^+ \\ x_{2,3}^- \leq g_{21} \cdot [x_{2,1}^-; x_{2,1}^+] + g_{22} \cdot [x_{2,2}^-; x_{2,2}^+] + q_2 \cdot u_2 \leq x_{2,3}^+ \\ \vdots \\ x_{2,N+1}^- \leq g_{21} \cdot [x_{N,1}^-; x_{N,1}^+] + g_{22} \cdot [x_{N,2}^-; x_{N,2}^+] + q_2 \cdot u_N \leq x_{2,N+1}^+ \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Наступним кроком буде виділення із систем (3.3) та (3.4) ряду насичених блоків, які дозволяють знайти поточкові значення параметрів  $\vec{g}_1 = (g_{11}, g_{12}, q_1)$  та

$\vec{g}_2 = (g_{21}, g_{22}, q_2)$  - початкові наближення до допустимого розв'язку ІСЛАР. Нехай  $N=6$ .

Тоді для  $\vec{g}_1$  вибираємо наступні насичені блоки:

$$1. \begin{cases} x_{1,1}^- \leq g_{11} \cdot [x_{0,1}^-; x_{0,1}^+] + g_{12} \cdot [x_{0,2}^-; x_{0,2}^+] + q_1 \cdot u_0 \leq x_{1,1}^+ \\ x_{1,2}^- \leq g_{11} \cdot [x_{1,1}^-; x_{1,1}^+] + g_{12} \cdot [x_{1,2}^-; x_{1,2}^+] + q_1 \cdot u_1 \leq x_{1,2}^+ \end{cases} \quad (3.5)$$

$$2. \begin{cases} x_{1,3}^- \leq g_{11} \cdot [x_{2,1}^-; x_{2,1}^+] + g_{12} \cdot [x_{2,2}^-; x_{2,2}^+] + q_1 \cdot u_2 \leq x_{1,3}^+ \\ x_{1,4}^- \leq g_{11} \cdot [x_{3,1}^-; x_{3,1}^+] + g_{12} \cdot [x_{3,2}^-; x_{3,2}^+] + q_1 \cdot u_3 \leq x_{1,4}^+ \end{cases} \quad (3.6)$$

$$3. \begin{cases} x_{1,5}^- \leq g_{11} \cdot [x_{4,1}^-; x_{4,1}^+] + g_{12} \cdot [x_{4,2}^-; x_{4,2}^+] + q_1 \cdot u_4 \leq x_{1,5}^+ \\ x_{1,6}^- \leq g_{11} \cdot [x_{5,1}^-; x_{5,1}^+] + g_{12} \cdot [x_{5,2}^-; x_{5,2}^+] + q_1 \cdot u_5 \leq x_{1,6}^+ \end{cases} \quad (3.7)$$

Відповідним чином проводимо виділення насичених блоків, які дозволять знайти поточкові значення параметру  $\vec{g}_2$ :

$$1. \begin{cases} x_{2,1}^- \leq g_{21} \cdot [x_{0,1}^-; x_{0,1}^+] + g_{22} \cdot [x_{0,2}^-; x_{0,2}^+] + q_2 \cdot u_0 \leq x_{2,1}^+ \\ x_{2,2}^- \leq g_{21} \cdot [x_{1,1}^-; x_{1,1}^+] + g_{22} \cdot [x_{1,2}^-; x_{1,2}^+] + q_2 \cdot u_1 \leq x_{2,2}^+ \end{cases} \quad (3.8)$$

$$2. \begin{cases} x_{2,3}^- \leq g_{21} \cdot [x_{2,1}^-; x_{2,1}^+] + g_{22} \cdot [x_{2,2}^-; x_{2,2}^+] + q_2 \cdot u_2 \leq x_{2,3}^+ \\ x_{2,4}^- \leq g_{21} \cdot [x_{3,1}^-; x_{3,1}^+] + g_{22} \cdot [x_{3,2}^-; x_{3,2}^+] + q_2 \cdot u_3 \leq x_{2,4}^+ \end{cases} \quad (3.9)$$

$$3. \begin{cases} x_{2,5}^- \leq g_{21} \cdot [x_{4,1}^-; x_{4,1}^+] + g_{22} \cdot [x_{4,2}^-; x_{4,2}^+] + q_2 \cdot u_4 \leq x_{2,5}^+ \\ x_{2,6}^- \leq g_{21} \cdot [x_{5,1}^-; x_{5,1}^+] + g_{22} \cdot [x_{5,2}^-; x_{5,2}^+] + q_2 \cdot u_5 \leq x_{2,6}^+ \end{cases} \quad (3.10)$$

Зазначимо, що вершини  $\vec{g}_s, \vec{g}_p$  многогранника  $\Omega$ , та його центр ваги  $\vec{g}$  (початкове наближення знайдене за формулою (3.1) знаходять шляхом розв'язування квадратної системи лінійних рівнянь з однією і тією самою невідродженою матрицею  $X$  і різними векторами змінних стану в  $k+1$  момент часу.

При  $m=N$  перетин головних діагоналей многогранника  $\Omega$  збігається з його центром ваги  $\vec{g}$ , який визначається за формулою



$$\bar{\bar{g}} = \frac{1}{2^m} \sum_{p=1}^{2^m} \bar{g}_p = (X^+)^{-1} \cdot \bar{\bar{x}}_{k+1}, \quad (3.11)$$

де  $\bar{\bar{x}}_{k+1}$  - вектор є середнім арифметичним усіх векторів, складених з межових значень, а його компоненти – середні інтервальні значення  $\bar{x}_{ik+1} = (x_{ik+1}^+ + x_{ik+1}^-)/2$ ,  $i = 1, \dots, m$ , тобто

$$\bar{\bar{x}}_{k+1} = \frac{1}{2^m} \cdot \left( \sum_{p=1}^{2^m} \bar{x}_{ik+1}^p \right) = (\bar{x}_{1k+1}, \dots, \bar{x}_{mk+1})^T. \quad (3.12)$$

Наступний крок - перевірка належності початкового наближення множини  $\Omega$  розв'язків ІСЛАР перетину діагоналей відповідних множин розв'язків, для знаходження невідомого вектора параметрів  $\bar{g}$ .

Запишемо розв'язок системи (2.10) у вигляді:

$$\bar{g}_p = (X^+)^{-1} \cdot \bar{x}_{ik+1}^p, \quad p = 1, \dots, 2^m, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.13)$$

Вектор  $\bar{g}_p$  є однією із вершин многогранника  $\Omega$ , утвореного перетином відповідних площин, заданих інтервальними рівняннями системи (2.10), причому  $\bar{x}_{ik+1}^p$  - вектор, складений із нижніх  $x_{i,k+1}^-$  та верхніх  $x_{i,k+1}^+$  меж відповідних інтервалів  $[x_{k+1}^-, x_{k+1}^+]$ ,  $k = 0, \dots, m - 1$ .

Для даного випадку важливим є твердження, сформульоване у праці [32]: “При  $m = N$  множина  $\Omega$  є симетричним опуклим многогранником з  $2^m$  кількістю вершин, які визначаються за формулою (3.13)”

Відомо, що довільний відрізок, який з'єднує вершини  $\bar{g}_p$  і  $\bar{g}_s$  многогранника, називається його діагоналлю

$$l = \|\bar{g}_p - \bar{g}_s\|, \quad (3.14)$$

де  $\bar{g}_p, \bar{g}_s$ ,  $p, s = 1 \dots 2^m$ ,  $p \neq s$ ,  $\bar{g}_s$  - відповідні вершини многогранника  $\Omega$ .

Розмір множини  $\Omega$  характеризується діаметром  $d$ , який визначається як відстань між двома найбільш віддаленими точками множини:

$$d = \max_{p,s} \|\bar{g}_p - \bar{g}_s\|, \quad (3.15)$$

Діаметр множини  $\Omega$  тісно пов'язаний з матрицею  $[X]$  інтервальної системи

лінійних алгебраїчних рівнянь (2.10). Зокрема, якщо кількість різних точок  $\bar{x}_i$  спостережень у матриці  $[X]$  буде менша від кількості невідомих параметрів  $m$ , то множина  $\Omega$  буде “розірвана”. Тобто, якщо  $\text{rang}(X) < m$ , то  $d \rightarrow \infty$ . З іншого боку, якщо  $\text{rang}(X) = m$ , то діаметр  $d$  обмежений.

Сукупність  $N$  нерівностей, тобто перетин усіх “смуг”, утворює шукану множину  $\Omega$  розв’язків системи (2.10). Координати вершин  $\Omega$  можуть бути визначені графічно або аналітично, шляхом розв’язування системи лінійних рівнянь. Внутрішню точку  $\bar{g}$  множини  $\Omega$  можна знайти як центр діагоналі, що з’єднує відповідні вершини, тобто

$$\bar{g} = 0,5 \cdot (\bar{g}_p + \bar{g}_s). \quad (3.16)$$

Отже, центри областей розв’язків систем (3.5-3.7) обчислюємо за допомогою таких формул:

$$\bar{g}_0^1 = \begin{pmatrix} x_{0,1}^+ & x_{0,2}^+ \\ x_{1,1}^+ & x_{1,2}^+ \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_{1,1} \\ \bar{x}_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_0^1 = \begin{pmatrix} g_{11}^1 \\ g_{12}^1 \end{pmatrix}^T; \quad (3.17)$$

$$\bar{g}_0^2 = \begin{pmatrix} x_{2,1}^+ & x_{2,2}^+ \\ x_{3,1}^+ & x_{3,2}^+ \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_{1,3} \\ \bar{x}_{1,4} \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_0^2 = \begin{pmatrix} g_{11}^2 \\ g_{12}^2 \end{pmatrix}^T; \quad (3.18)$$

$$\bar{g}_0^3 = \begin{pmatrix} x_{4,1}^+ & x_{4,2}^+ \\ x_{5,1}^+ & x_{5,2}^+ \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_{1,5} \\ \bar{x}_{1,6} \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_0^3 = \begin{pmatrix} g_{11}^3 \\ g_{12}^3 \end{pmatrix}^T, \quad (3.19)$$

де змінні стану  $x_{0,1}^+, x_{0,2}^+, \dots, x_{5,1}^+, x_{5,2}^+$  у даних формулах є верхніми межами відповідних інтервалів змінних стану  $[x_{0,1}], [x_{0,2}], \dots, [x_{5,1}], [x_{5,2}]$  з інтервальної матриці  $[X]$  для вибраних насичених блоків (3.5) – (3.7).

Схематично розв’язки систем (3.5) - (3.7) зображені на рис. 3.2.

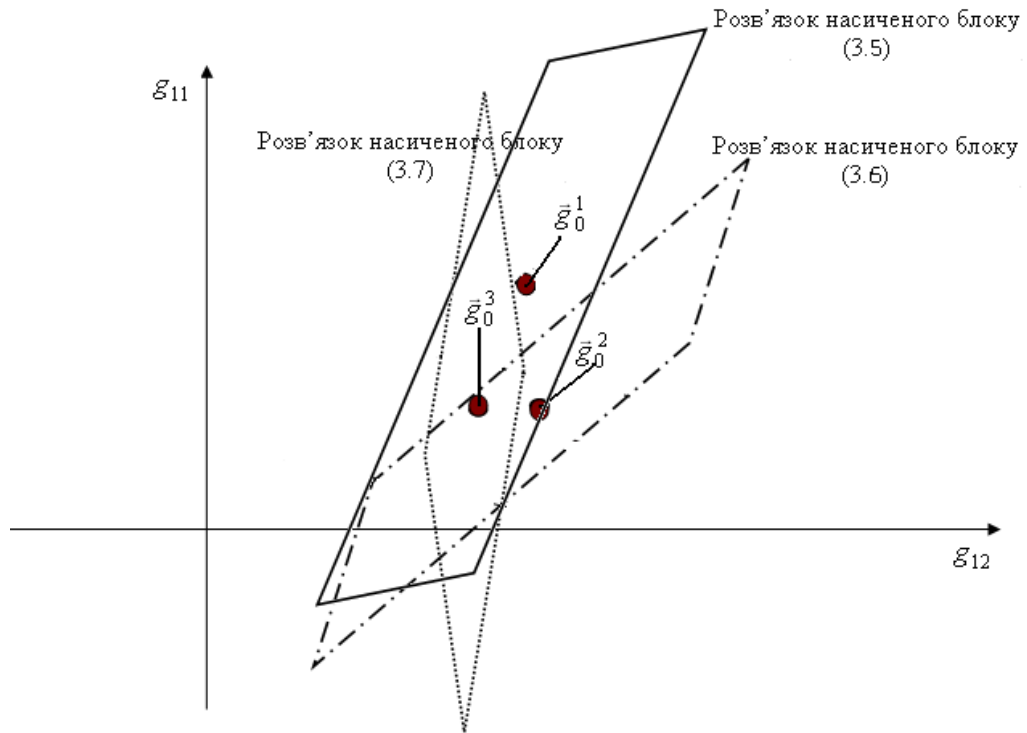


Рис. 3.2 - Ілюстрація областей розв'язків для насичених блоків ІСЛАР (3.5) - (3.7)

Центри областей розв'язків систем (3.8) - (3.10), які схематично представлені на рис. 3.3 обчислюються за наступними формулами:

$$\bar{g}_0^{11} = \begin{pmatrix} x_{0,1}^+ & x_{0,2}^+ \\ x_{1,1}^+ & x_{1,2}^+ \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_{2,1} \\ \bar{x}_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_0^{11} = \begin{pmatrix} g_{21}^1 \\ g_{22}^1 \end{pmatrix}^T; \quad (3.20)$$

$$\bar{g}_0^{22} = \begin{pmatrix} x_{2,1}^+ & x_{2,2}^+ \\ x_{3,1}^+ & x_{3,2}^+ \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_{2,3} \\ \bar{x}_{2,4} \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_0^{22} = \begin{pmatrix} g_{21}^2 \\ g_{22}^2 \end{pmatrix}^T; \quad (3.21)$$

$$\bar{g}_0^{33} = \begin{pmatrix} x_{4,1}^+ & x_{4,2}^+ \\ x_{5,1}^+ & x_{5,2}^+ \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_{2,5} \\ \bar{x}_{2,6} \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_0^{33} = \begin{pmatrix} g_{21}^3 \\ g_{22}^3 \end{pmatrix}^T. \quad (3.22)$$

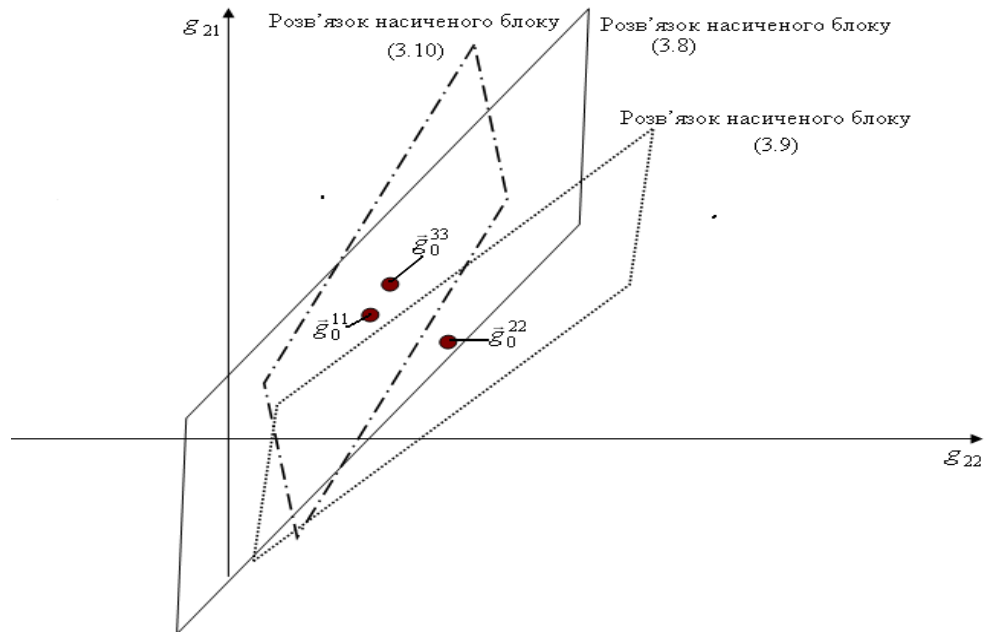


Рис. 3.3 - Ілюстрація областей розв'язків для насичених блоків ІСЛАР (3.8) - (3.10)

Як видно з рис. 3.2 та рис. 3.3 області, центри яких одержано шляхом перебору верхніх та нижніх меж інтервалів  $m$  змінних стану певних насичених блоків у матриці  $X$  є початковими наближеннями  $\vec{g}_{01} = (\vec{g}_0^1, \vec{g}_0^{11})$ ,  $\vec{g}_{02} = (\vec{g}_0^2, \vec{g}_0^{22})$ ,  $\vec{g}_{03} = (\vec{g}_0^3, \vec{g}_0^{33})$  загальної ІСЛАР. Вони є абсолютно різні, що ускладнює вибір того насиченого блоку, який дає найкраще наближення до розв'язку усієї ІСЛАР.

Розрахунки центрів діагоналей множини розв'язків повинні співпадати із знайденим початковим наближенням множини  $\Omega$  розв'язків ІСЛАР, тобто

$$\vec{\bar{g}} = \frac{1}{2^m} \sum_{p=1}^{2^m} \vec{g}_p = (X^+)^{-1} \cdot \vec{\bar{x}}_{k+1} = 0,5 \cdot (\vec{g}_p + \vec{g}_s).$$

3.2. Ітераційний метод пошуку допустимого розв'язку інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

В основу процедури пошуку допустимого розв'язку  $\vec{g}_{dop}$  інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь покладено ітераційний метод покращення початкового наближення.

Кожна  $l+1$ -а ітерація методу складається з трьох кроків.

Крок 1. Генерування випадкового вектора  $\xi$  в околі радіусом  $r$  наближеного розв'язку, отриманого на  $l$ -й ітерації ( $r = const$ ).

Крок 2. Обчислення нового наближення  $\vec{g}_{l+1}$ .

Крок 3. Перевірка “якості” отриманого наближення.

Графічно реалізації даного методу наведена на рис. 3.4.

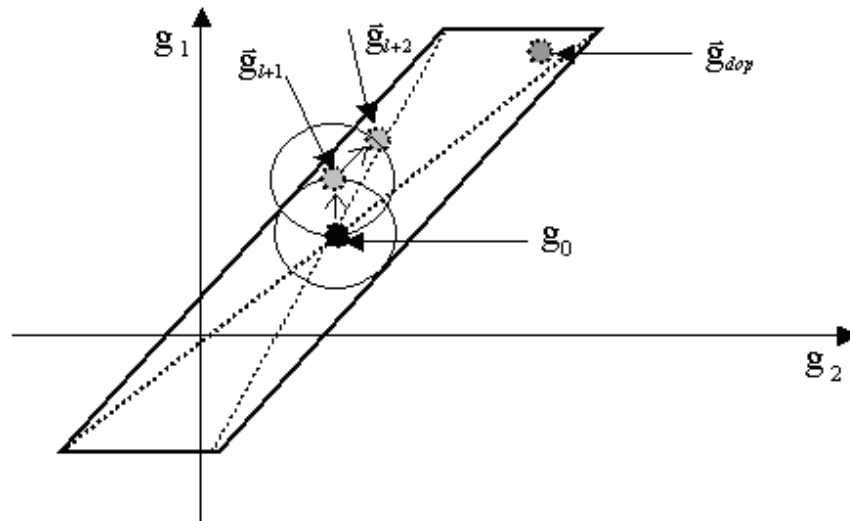


Рис. 3.4 - Ілюстрація ітераційного методу пошуку допустимого розв'язку ІСЛАР (для  $m = N = 2$ )

При цьому на кожній  $(l+1)$ -й ітерації знаходиться наближення  $\vec{g}_{l+1}$ , яке задовольняє такій умові:

$$\|\vec{g}_{l+1} - \vec{g}_{dop}\| \leq \|\vec{g}_l - \vec{g}_{dop}\|. \quad (3.23)$$

Очевидно, що умову (3.23) на кожній ітерації перевірити не можливо, оскільки  $\vec{g}_{dop}$  є невідомим.

Вводимо співвідношення, яке буде описувати оцінку якості поточного наближення до допустимого розв'язку ІСЛАР у такому вигляді

$$\delta = \max_{k+1=1\dots N} \left\{ \text{wid}([\hat{x}_{k+1}^{l+1}]) - \text{wid}([\hat{x}_{k+1}^{l+1}] \cap [x_{k+1}]) \right\}, \quad (3.24)$$

де  $\delta$  - кількісна величина, яка задає якість наближення;  $\text{wid}(\bullet)$  - оператор виділення ширини інтервалу;  $[\hat{x}_{k+1}^{l+1}]$ ,  $k = 0, \dots, N-1$  - прогнознiй коридор, знайдений на основі наближення  $\vec{g}_{l+1}$  за формулою:

$$[\hat{x}_{k+1}^{l+1}] = g_{1,l+1} \cdot [\hat{x}_{1k}^-, \hat{x}_{1k}^+] + \dots + g_{m,l+1} \cdot [\hat{x}_{mk}^-, \hat{x}_{mk}^+] + q \cdot u_k. \quad (3.25)$$

Інтервали  $[\hat{x}_{k+1}^{l+1}]$ ,  $k = 0, \dots, N-1$  є оцінками вектора параметрів стану динамічного об'єкта в  $k$ -й дискретний момент часу, знайдені на  $(l+1)$ -у кроці ітераційного методу.

Отже, для кожної ітерації умову (3.23) можна переписати у такому вигляді

$$\max_{k+1=1\dots N} \left\{ \text{wid}([\hat{x}_{k+1}^{l+1}]) - \text{wid}([\hat{x}_{k+1}^{l+1}] \cap [x_{k+1}]) \right\} \leq \max_{k+1=1\dots N} \left\{ \text{wid}([\hat{x}_{k+1}^l]) - \text{wid}([\hat{x}_{k+1}^l] \cap [x_{k+1}]) \right\}. \quad (3.26)$$

Прийнявши до уваги, що  $\vec{g}_{l+1} = \vec{g}_0$ , знайдемо вектор параметрів стану, отриманий на  $(l+1)$ -й ітерації, згенерувавши при цьому випадковий вектор пошуку  $\vec{\xi}_l$  в околі початкового наближення радіусом  $r$  за формулою:

$$\vec{\xi}_l = r \cdot \left( \frac{\Delta g_{1l}}{R_l}, \frac{\Delta g_{2l}}{R_l}, \dots, \frac{\Delta g_{nl}}{R_l}, \frac{\Delta q_l}{R_l} \right), \quad (3.27)$$

де  $\Delta g_{1l}, \Delta g_{2l}, \dots, \Delta g_{nl}, \Delta q_l$  - випадкові числа, згенеровані відповідно до рівномірного закону розподілу на інтервалі  $[-1, 1]$ ;  $R_l = \sqrt{\Delta g_{1l}^2 + \Delta g_{2l}^2 + \dots + \Delta g_{nl}^2 + \Delta q_l^2}$ , значення радіусу  $r = \text{const}$ .

На наступному кроці обчислюємо наближення до допустимого розв'язку ІСЛАР:

$$\vec{g}_{l+1} = \vec{g}_l + \vec{\xi}_l. \quad (3.28)$$

Формально задача знаходження допустимого вектора параметрів  $\vec{g}_{dop} \in \Omega_{dop}$  інтервальної моделі лінійної дискретної динамічної системи зводиться до задачі

$$\delta = \max_{k+1=1\dots N} \left\{ \text{wid}([\hat{x}_{k+1}^{l+1}]) - \text{wid}([\hat{x}_{k+1}^{l+1}] \cap [x_{k+1}]) \right\} \xrightarrow{\vec{g}_{l+1}} \min. \quad (3.29)$$

Умова  $\vec{g}_{l+1} \in \Omega_{dop}$  еквівалентна умові

$$\delta = \max_{k+1=1\dots N} \left\{ \text{wid}([\hat{x}_{k+1}^{l+1}]) - \text{wid}([\hat{x}_{k+1}^{l+1}] \cap [x_{k+1}]) \right\} = 0. \quad (3.30)$$

На рисунку 3.5 проілюстровано три варіанти співставлення прогнозного та експериментального коридорів, залежно від якості поточного наближення  $\vec{g}_{l+1}$ :

а) перший -  $\vec{g}_{l+1} = \vec{g}_{dop}$ , оскільки  $[\hat{x}_{k+1}] \subset [x_{k+1}] \quad \forall k = 0, \dots, N-1$ , тобто є включення прогнозного коридору в коридор експериментальних даних і, відповідно,  $\delta = 0$ ;

б) другий -  $\vec{g}_{l+1} \neq \vec{g}_{dop}$ , хоча:  $[\hat{x}_{k+1}] \cap [x_{k+1}] \neq \emptyset, \quad \forall k = 0, \dots, N-1$ , тобто існує перетин прогнозного та експериментального коридорів, але  $[\hat{x}_{k+1}] \not\subset [x_{k+1}]$ ,  $\exists k, k = 0, \dots, N-1$ , відповідно  $\delta \neq 0$ ;

в) третій -  $\vec{g}_{l+1} \neq \vec{g}_{dop}$ , оскільки:  $[\hat{x}_{k+1}] \cap [x_{k+1}] = \emptyset, \quad \exists k, k = 0, \dots, N-1$ , тобто існують дискрети, в яких прогнозний і експериментальний інтервали не перетинаються, відповідно  $\delta \neq 0$ .

Враховуючи лінійну залежність між змінними стану системи  $\vec{x}_{k+1}$  та параметрами моделі  $\vec{g}$  можемо стверджувати, що чим більша відстань між  $\vec{g}_{l+1}$  та  $\vec{g}_{dop}$ , тим більша відстань між інтервалами  $[\hat{x}_{k+1}]$  та  $[x_{k+1}]$ .

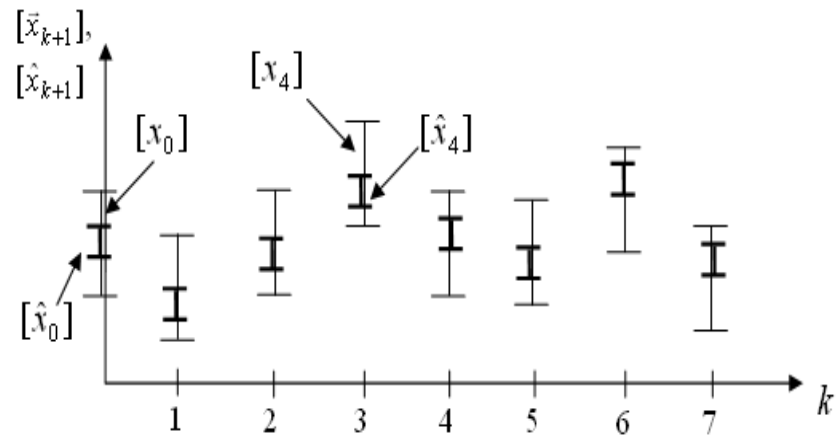


Рис. 3.5. а) Співставлення прогнозного та експериментального коридорів для випадку  $\delta = 0$

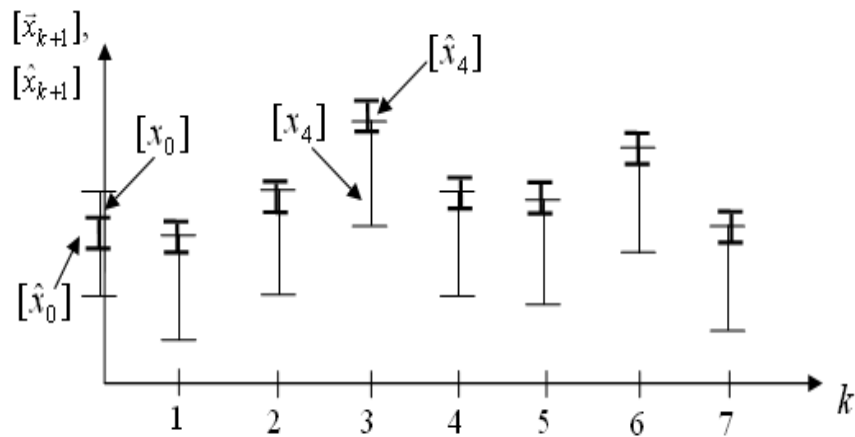


Рис. 3.5. б) Співставлення прогнозного та експериментального коридорів для випадку  $\delta \neq 0$  та  $[\hat{x}_{k+1}] \cap [x_{k+1}] \neq \emptyset \forall k, k = 0, \dots, N-1$

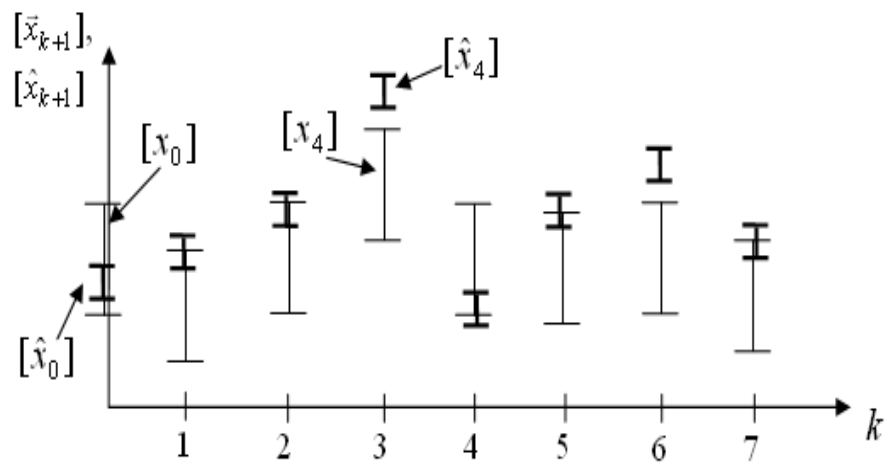


Рис. 3.5. в) Співставлення прогнозного та експериментального коридорів для випадку  $\delta \neq 0$  та  $[\hat{x}_{k+1}] \cap [x_{k+1}] = \emptyset, \exists k, k = 0, \dots, N-1$



Збіжність ітераційного методу пошуку  $\bar{g}_{dop}$  забезпечуватиметься за умови, коли  $\max_{k=0,\dots,N-1} \delta_{l+1,k} < \max_{k=0,\dots,N-1} \delta_{l,k}$ .

Для розв'язування мінімаксної задачі (3.29) запропонована процедура випадкового пошуку оптимального розв'язку. Алгоритм реалізації ітераційної процедури випадкового пошуку має такий вигляд.

Крок 1. Генерування випадкового вектора пошуку  $\bar{\xi}_l$  за формулою (3.27).

Крок 2. Обчислення наступного наближення  $\bar{g}_{l+1}$  за формулою (3.28).

Крок 3. Обчислення  $[\hat{x}_{k+1}^{l+1}]$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$  за формулою (3.25).

Крок 4. Перевірка якості наближення за умовою (3.26). У випадку не виконання умови, у формулі (3.27) замість  $r$  покладемо  $-r$  і перехід на крок 2.

Крок 5. Перевірка умови (3.30) і у випадку її виконання завершення процедури. У протилежному випадку перехід на крок 1.

Розглянемо розроблений метод пошуку допустимого розв'язку інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь на прикладі дискретної динамічної моделі у вигляді  $x_{1k+1} = x_{1k} \cdot g_{11} + x_{2k} \cdot g_{12} + q \cdot u_k$ . Експериментальні дані [129, 131] для ідентифікації параметрів  $\bar{g}_1$  та  $\bar{g}_2$  запропонованої моделі наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Експериментальні дані для ідентифікації дискретної динамічної моделі

k	$x_{1,k+1}^-$	$x_{1,k+1}^+$	$x_{2,k+1}^-$	$x_{2,k+1}^+$	$u_k$
0	669,75	740,25	446,5	493,5	1233,75
1	703	777	513	567	1344
2	750,5	829,5	546,25	603,75	1433,25
3	593,75	656,25	422,75	467,25	1123,5
4	574,75	635,25	389,5	430,5	1065,75
5	636,5	703,5	508,25	561,75	1265,25
6	755,25	834,75	631,75	698,25	1533
7	912	1008	693,5	766,5	1774,5
8	940,5	1039,5	817	903	1942,5

Для спрощення, яке не впливає на результати дослідження властивостей розв'язку ІСЛАР, при формуванні даних в таблиці 3.1 прийmemo  $q=0$ .

Враховуючи всі вище описані умови побудови системи рівнянь для ідентифікації параметрів даної моделі ми отримали наступну ІСЛАР:

$$\left\{ \begin{array}{l} 703 \leq g_{11} \cdot [669,75;740,25] + g_{12} \cdot [446,5;493,5] \leq 777 \\ 513 \leq g_{21} \cdot [669,75;740,25] + g_{22} \cdot [446,5;493,5] \leq 567 \\ 750,5 \leq g_{11} \cdot [703;777] + g_{12} \cdot [513;567] \leq 829,5 \\ 546,25 \leq g_{21} \cdot [703;777] + g_{22} \cdot [513;567] \leq 603,75 \\ 593,75 \leq g_{11} \cdot [750,5;829,5] + g_{12} \cdot [546,25;603,75] \leq 656,25 \\ 422,75 \leq g_{21} \cdot [750,5;829,5] + g_{22} \cdot [546,25;603,75] \leq 467,25 \\ 574,75 \leq g_{11} \cdot [593,75;656,25] + g_{12} \cdot [422,75;467,25] \leq 635,25 \\ 389,5 \leq g_{21} \cdot [593,75;656,25] + g_{22} \cdot [422,75;467,25] \leq 430,5 \\ 636,5 \leq g_{11} \cdot [574,75;635,25] + g_{12} \cdot [389,5;403,5] \leq 703,5 \\ 508,25 \leq g_{21} \cdot [574,75;635,25] + g_{22} \cdot [389,5;403,5] \leq 561,75 \\ 755,25 \leq g_{11} \cdot [636,5;703,5] + g_{12} \cdot [508,25;561,75] \leq 834,75 \\ 631,75 \leq g_{21} \cdot [636,5;703,5] + g_{22} \cdot [508,25;561,75] \leq 698,25 \\ 912 \leq g_{11} \cdot [755,25;834,75] + g_{12} \cdot [631,75;698,25] \leq 1008 \\ 693,5 \leq g_{21} \cdot [755,25;834,75] + g_{22} \cdot [631,75;698,25] \leq 766,5 \\ 940,5 \leq g_{11} \cdot [912;1008] + g_{12} \cdot [693,5;766,5] \leq 1039,5 \\ 817 \leq g_{21} \cdot [912;1008] + g_{22} \cdot [693,5;766,5] \leq 903 \end{array} \right.$$

Розділимо дану систему на дві еквівалентні відносно двох невідомих параметрів  $\vec{g}_1 = (g_{11}, g_{12})$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 703 \leq g_{11} \cdot [669,75;740,25] + g_{12} \cdot [446,5;493,5] \leq 777 \\ 750,5 \leq g_{11} \cdot [703;777] + g_{12} \cdot [513;567] \leq 829,5 \\ 593,75 \leq g_{11} \cdot [750,5;829,5] + g_{12} \cdot [546,25;603,75] \leq 656,25 \\ 574,75 \leq g_{11} \cdot [593,75;656,25] + g_{12} \cdot [422,75;467,25] \leq 635,25 \\ 636,5 \leq g_{11} \cdot [574,75;635,25] + g_{12} \cdot [389,5;403,5] \leq 703,5 \\ 755,25 \leq g_{11} \cdot [636,5;703,5] + g_{12} \cdot [508,25;561,75] \leq 834,75 \\ 912 \leq g_{11} \cdot [755,25;834,75] + g_{12} \cdot [631,75;698,25] \leq 1008 \\ 940,5 \leq g_{11} \cdot [912;1008] + g_{12} \cdot [693,5;766,5] \leq 1039,5 \end{array} \right.$$

та  $\vec{g}_2 = (g_{21}, g_{22})$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 513 \leq g_{21} \cdot [669,75;740,25] + g_{22} \cdot [446,5;493,5] \leq 567 \\ 546,25 \leq g_{21} \cdot [703;777] + g_{22} \cdot [513;567] \leq 603,75 \\ 422,75 \leq g_{21} \cdot [750,5;829,5] + g_{22} \cdot [546,25;603,75] \leq 467,25 \\ 389,5 \leq g_{21} \cdot [593,75;656,25] + g_{22} \cdot [422,75;467,25] \leq 430,5 \\ 508,25 \leq g_{21} \cdot [574,75;635,25] + g_{22} \cdot [389,5;403,5] \leq 561,75 \\ 631,75 \leq g_{21} \cdot [636,5;703,5] + g_{22} \cdot [508,25;561,75] \leq 698,25 \\ 693,5 \leq g_{21} \cdot [755,25;834,75] + g_{22} \cdot [631,75;698,25] \leq 766,5 \\ 817 \leq g_{21} \cdot [912;1008] + g_{22} \cdot [693,5;766,5] \leq 903 \end{array} \right.$$

Для знаходження початкового наближення до допустимого розв'язку ІСЛАР

$$G_0 = \begin{pmatrix} g_{11}^0 & g_{12}^0 \\ g_{21}^0 & g_{22}^0 \end{pmatrix} \text{ виділяємо наступні насичені блоки:}$$

$$\text{для } \bar{g}_1 = (g_{11}, g_{12}): \Omega_1 = \begin{cases} 703 \leq g_{11} \cdot [669,75;740,25] + g_{12} \cdot [446,5;493,5] \leq 777 \\ 750,5 \leq g_{11} \cdot [703;777] + g_{12} \cdot [513;567] \leq 829,5 \end{cases}$$

та відповідно

$$\text{для } \bar{g}_2 = (g_{21}, g_{22}): \Omega_2 = \begin{cases} 513 \leq g_{21} \cdot [669,75;740,25] + g_{22} \cdot [446,5;493,5] \leq 567 \\ 546,25 \leq g_{21} \cdot [703;777] + g_{22} \cdot [513;567] \leq 603,75 \end{cases}.$$

Центри областей виділених насичених блоків, знайдені за формулою (3.11) будуть наступні:

$$\bar{g}_0^1 = \begin{pmatrix} 740,25 & 493,5 \\ 777 & 567 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 740 \\ 790 \end{pmatrix}, \bar{g}_0^1 = \begin{pmatrix} g_{11}^0 \\ g_{12}^0 \end{pmatrix}^T = (0,82 \quad 0,27)$$

та відповідно

$$\bar{g}_0^{11} = \begin{pmatrix} 740,25 & 493,5 \\ 777 & 567 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 540 \\ 575 \end{pmatrix}, \bar{g}_0^{11} = \begin{pmatrix} g_{21}^0 \\ g_{22}^0 \end{pmatrix}^T = (0,62 \quad 0,17).$$

Отже, ми отримали наступне початкове наближення:

$$G_0 = \begin{pmatrix} 0,82 & 0,27 \\ 0,62 & 0,17 \end{pmatrix}.$$

Наступним кроком є перевірка належності знайденого початкового наближення до допустимого розв'язку ІСЛАР перетину діагоналей множин  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$  розв'язків відповідних насичених блоків.

Провівши розрахунки за формулою (3.13) отримали наступні вершини множини  $\Omega_1$ :

$$\begin{aligned}\vec{g}^1 &= (0,77826 \quad 0,257128), & \vec{g}^2 &= (-0,29657 \quad 1,869373), \\ \vec{g}^3 &= (1,935012 \quad -1,32805), & \vec{g}^4 &= (0,860182 \quad 0,284195).\end{aligned}$$

та множини  $\Omega_2$ :

$$\begin{aligned}\vec{g}^{11} &= (0,587133 \quad 0,158815), & \vec{g}^{22} &= (-0,19518 \quad 1,332284), \\ \vec{g}^{33} &= (1,431249 \quad -0,99794), & \vec{g}^{44} &= (0,648936 \quad 0,175532).\end{aligned}$$

Центр симетрії множин  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$  - перетин діагоналей  $l^1 = \|\vec{g}^2 - \vec{g}^3\|$  і  $l^2 = \|\vec{g}^1 - \vec{g}^4\|$  та  $l^{11} = \|\vec{g}^{22} - \vec{g}^{33}\|$  і  $l^{22} = \|\vec{g}^{11} - \vec{g}^{44}\|$ , розрахований відповідно до формули (3.16), буде наступний:

$$\text{координати середини діагоналі } l^1: \left( \frac{0,5 \cdot (-0,29657 + 1,935012)}{0,5 \cdot (1,869373 + (-1,32805))} \right)^T = (0,82 \quad 0,27),$$

$$\text{координати середини діагоналі } l^2: \left( \frac{0,5 \cdot (0,77826 + 0,860182)}{0,5 \cdot (0,257128 + 0,284195)} \right)^T = (0,82 \quad 0,27),$$

$$\text{координати середини діагоналі } l^{11}: \left( \frac{0,5 \cdot (-0,19518 + 1,431249)}{0,5 \cdot (1,332284 + (-0,99794))} \right)^T = (0,62 \quad 0,17),$$

$$\text{координати середини діагоналі } l^{22}: \left( \frac{0,5 \cdot (0,587133 + 0,648936)}{0,5 \cdot (0,158815 + 0,175532)} \right)^T = (0,62 \quad 0,17).$$

Отже, як видно з розрахунків, середини діагоналей  $l^1$  і  $l^2$  та  $l^{11}$  і  $l^{22}$ , відповідно, співпадають із знайденим початковим наближенням  $G_0 = \begin{pmatrix} 0,82 & 0,27 \\ 0,62 & 0,17 \end{pmatrix}$ , що і потрібно було довести.

Знайшовши початкове наближення далі, згідно крокам алгоритму реалізації ітераційного методу пошуку допустимого розв'язку ІСЛАР, здійснюємо його уточнення.

В результаті використання запропонованого вище алгоритму інтервальної ідентифікації параметрів моделей дискретних динамічних систем (знаходження

невідомих коефіцієнтів матриць  $G$  та  $Q$ ) на основі інтервальних експериментальних даних було отримано наступні прогностні значення (рис. 3.6. а), б)) для двох параметрів  $\vec{g}_1$  та  $\vec{g}_2$  моделі  $x_{1k+1} = x_{1k} \cdot g_{11} + x_{2k} \cdot g_{12} + q \cdot u_k$ :

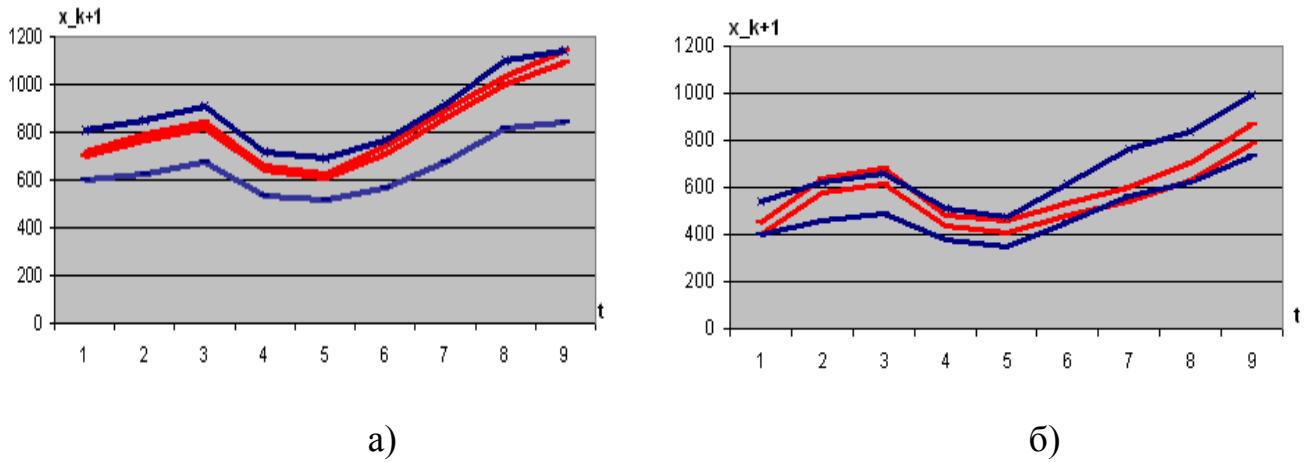


Рис. 3.6. - Експериментальні та прогностні значення моделі динамічної системи для: а) першого параметру; б) другого параметру

Чисельні експерименти показали, що недоліком запропонованого методу по-ітераційного покращення початкового наближення допустимого розв'язку ІСЛАР є сталість параметра  $r$  в процесі реалізації ітераційної процедури, що призводить до поганої збіжності. Останнє зумовило введення адаптивної процедури настроювання параметра  $r$  у формулі (3.27)

3.3. Процедура адаптивного настроювання параметрів алгоритму реалізації ітераційного методу пошуку допустимого розв'язку

Для початку модифікуємо формулу (3.27) до вигляду:

$$\vec{\xi}_l = r_l \cdot \left( \frac{\Delta g_{1l}}{R_l}, \frac{\Delta g_{2l}}{R_l}, \dots, \frac{\Delta g_{nl}}{R_l}, \frac{\Delta q_l}{R_l} \right), \quad (3.31)$$

і знайдемо початкове наближення радіусу  $r_l$ , тобто  $r_{l=0}$ .

Процедура адаптивного настроювання параметра  $r_l$  на кожній ітерації виконується в два кроки.

Перший крок – формування початкового значення параметра  $r_{l=0}$ . Для цього із множини розв’язків  $\Omega$  вибираємо одну множину  $\Omega_m$  (наприклад, ту, яка використовується для знаходження початкового наближення  $\vec{g}_0$  до допустимого розв’язку  $\vec{g}_{dop}$  ІСЛАР). Конфігурація вибраної множини нам відома -  $m$ - вимірний паралелепіпед. Початкове значення параметра  $r_{l=0}$  приймаємо рівним половині довжини найменшої діагоналі множини  $\Omega_m$ .

Вершини і довжина діагоналей множини  $\Omega_m$  розраховується згідно формул (3.13) - (3.14), найменша діагональ вибирається відповідно до формули

$$r_{l=0} = \frac{\min_{p,s=1,\dots,2^m, p \neq s} \|\vec{g}_p - \vec{g}_s\|}{2}. \quad (3.32)$$

Знайдений на першому кроці адаптивної процедури параметр  $r_{l=0}$  підставляємо у формулу (3.31) для знаходження випадкового вектора  $\vec{\xi}_l$  і обчислюємо наближення до розв’язку ІСЛАР  $\vec{g}_{l+1}$  за формулою (3.28). Генерування випадкового вектора  $\vec{\xi}_l$  із параметром  $r_{l=0}$  здійснюємо до тих пір, доки відбувається виконання умови (3.29). У разі виникнення зациклення, тобто, коли на протязі декількох ітерацій генерування  $\vec{\xi}_l$  не призводить до покращення наближення до розв’язку ІСЛАР – переходимо до другого кроку процедури адаптивного настроювання параметра випадкового пошуку  $r_l$ .

Другий крок процедури адаптивного настроювання – зменшення параметра  $r_l$  шляхом його половинного ділення:

$$r_l = \frac{r_{l-1}}{2}. \quad (3.33)$$

На рисунку 3.7 схематично зображено процедуру випадкового пошуку з адаптивною процедурою пошуку.

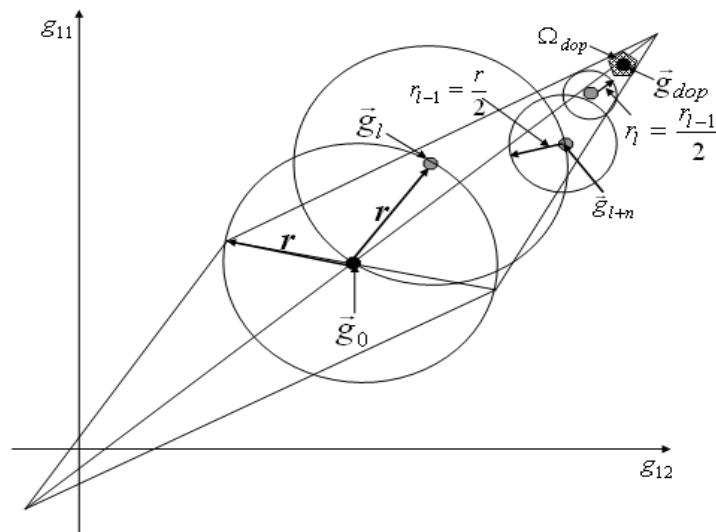


Рис. 3.7 -Ілюстрація ітераційного методу пошуку з адаптивною процедурою настроювання параметрів  $r_i$

Знайдемо практично початковий радіус  $r_{l=0}$  на основі прикладу, вже розглянутої у підрозділі 3.1. Для цього розрахуємо довжини діагоналей  $l^1$  і  $l^2$  та  $l^{11}$  і  $l^{22}$  множин розв'язків  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$ , які були використанні для знаходження початкового наближення. Отже, довжина діагоналей наступна:

$$l^1 = \sqrt{(g_{11}^3 - g_{11}^2)^2 + (g_{12}^3 - g_{12}^2)^2} = 3,899,$$

$$l^2 = \sqrt{(g_{11}^4 - g_{11}^1)^2 + (g_{12}^4 - g_{12}^1)^2} = 0,086,$$

$$l^{11} = \sqrt{(g_{21}^3 - g_{21}^2)^2 + (g_{22}^3 - g_{22}^2)^2} = 2,84,$$

$$l^{22} = \sqrt{(g_{21}^4 - g_{21}^1)^2 + (g_{22}^4 - g_{22}^1)^2} = 0,06.$$

Як видно з проведених розрахунків довжин діагоналей, найменша – діагональ  $l^{22} = 0,06$ . Відповідно до цього початковий радіус  $r_{l=0}$  буде дорівнювати половині

$$\text{даної діагоналі, тобто } r_{l=0} = \frac{l^{22}}{2} = \frac{0,06}{2} = 0,03.$$

### 3.4. Дослідження збіжності ітераційного методу пошуку допустимого розв'язку інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Проведемо апробацію адаптивної процедури настроювання параметрів  $r_i$  пошуку  $i$ , відповідно, методу параметричної ідентифікації динамічних моделей, побудувавши інтервальну модель силового трансформатора (модель з двома параметрами).

Модельованим динамічним об'єктом у даному випадку є трифазний силовий трансформатор ТДТН 110/35/10 потужністю 10 мВА, який можемо представити наступним чином

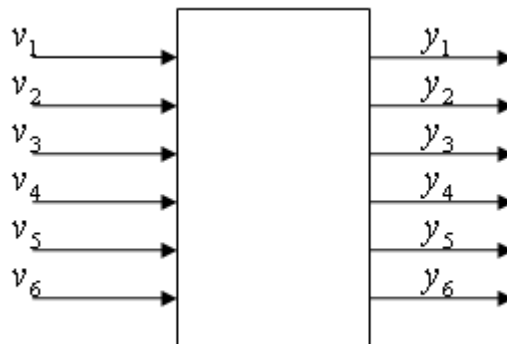


Рис. 3.8. Представлення трифазного трансформатора у вигляді динамічного об'єкту

Вектором вхідних величин  $\vec{v}$  для даного об'єкту є напруги фазних обвиток високої та середньої напруги  $[U_{AB}; U_{BB}; U_{CB}; U_{AC}; U_{BC}; U_{CC}]$ , а вектор вихідних величин  $\vec{y}$  утворює відповідно діючі значення струмів відповідних обвиток  $[I_{AB}; I_{BB}; I_{CB}; I_{AC}; I_{BC}; I_{CC}]$ .

З метою зменшення обчислювальних затрат зупинимось на частковій моделі зазначеного трансформатора, обмеживши кількість вхідних величин до одної, а вихідних - до двох. Тобто, у нашому випадку вектор  $\vec{v}$  перетворюється у скаляр  $v = U_{AB}$ , а вектор  $\vec{y}^T$  містить дві компоненти  $I_{CB}$  та  $I_{CC}$ .



Для спрощення ілюстрації методу інтервальної ідентифікації параметрів моделі “вхід-вихід” силового трансформатора використаємо тільки 10 дискретних значень  $k = 1, \dots, 10$  струмів  $i_{c1} = I_{CB}$  та  $i_{c2} = I_{CC}$ , отриманих в моменти часу, що належать проміжку від  $t = 0$ с до  $t = 0,2$ с, а інтервальна похибка була задана: для струму  $i_{c1}$  -  $|e_{k+1}| \leq 0,1 \forall k = 1, 2, \dots, 10$  та для струму  $i_{c2}$  -  $|e_{k+1}| \leq 0,08 \forall k = 1, 2, \dots, 10$ . [89, 125] (таблиця 3.2).

Таблиця 3.2

Дискретні значення струмів  $i_{c1}$ ,  $i_{c2}$ 

k	$t_{k+1}$	$x_{1,k+1}^-$	$x_{1,k+1}^+$	$x_{2,k+1}^-$	$x_{2,k+1}^+$
1	0,02	-0,85	-0,65	3,51	3,71
2	0,04	-1,2	-1	7,29	7,49
3	0,06	-1,348	-1,126	10,02	10,22
4	0,08	-1,35	-1,133	11,69	11,89
5	0,1	-1,29	-1,09	12,76	12,96
6	0,12	-1,2	-0,98	13,28	13,48
7	0,14	-1,1	-0,9	13,68	13,88
8	0,16	-0,99	-0,79	13,92	14,12
9	0,18	-0,89	-0,69	14,09	14,29
10	0,2	-0,79	-0,59	14,22	14,42

Також будемо вимагати, щоб отримана модель задовольняла умові повної спостережуваності, тобто  $x_{1,k+1} = I_{CB}^{(k+1)}$  та  $x_{2,k+1} = I_{CC}^{(k+1)}$ .

Останнє допущення ніяким чином не впливає на точність моделі, однак сама процедура ідентифікації дещо спрощується.

За умови  $x_{1,0} = 0$ ,  $x_{2,0} = 0$  (у початковий момент струми обвиток дорівнюють нулю) отримаємо таку систему інтервальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l}
-0,85 \leq g_{11} \cdot 0 + g_{12} \cdot 0 + q_1 \cdot U_{nom} \leq -0,65 \\
3,51 \leq g_{21} \cdot 0 + g_{22} \cdot 0 + q_2 \cdot U_{nom} \leq 3,71 \\
-1,2 \leq g_{11} \cdot [-0,85; -0,65] + g_{12} \cdot [3,51; 3,71] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -1 \\
7,29 \leq g_{21} \cdot [-0,85; -0,65] + g_{22} \cdot [3,51; 3,71] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 7,49 \\
-1,348 \leq g_{11} \cdot [-1,2; -1] + g_{12} \cdot [7,29; 7,49] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -1,126 \\
10,02 \leq g_{21} \cdot [-1,2; -1] + g_{22} \cdot [7,29; 7,49] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 10,22 \\
-1,35 \leq g_{11} \cdot [-1,348; -1,126] + g_{12} \cdot [10,02; 10,22] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -1,133 \\
11,69 \leq g_{21} \cdot [-1,348; -1,126] + g_{22} \cdot [10,02; 10,22] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 11,89 \\
-1,29 \leq g_{11} \cdot [-1,35; -1,133] + g_{12} \cdot [11,69; 11,89] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -1,09 \\
12,76 \leq g_{21} \cdot [-1,35; -1,133] + g_{22} \cdot [11,69; 11,89] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 12,96 \\
-1,2 \leq g_{11} \cdot [-1,29; -1,09] + g_{12} \cdot [12,76; 12,96] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -0,98 \\
13,28 \leq g_{21} \cdot [-1,29; -1,09] + g_{22} \cdot [12,76; 12,96] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 13,48 \\
-1,1 \leq g_{11} \cdot [-1,2; -0,98] + g_{12} \cdot [13,28; 13,48] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -0,9 \\
13,68 \leq g_{21} \cdot [-1,2; -0,98] + g_{22} \cdot [13,28; 13,48] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 13,88 \\
-0,99 \leq g_{11} \cdot [-1,1; -0,9] + g_{12} \cdot [13,68; 13,88] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -0,79 \\
13,92 \leq g_{21} \cdot [-1,1; -0,9] + g_{22} \cdot [13,68; 13,88] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 14,12 \\
-0,89 \leq g_{11} \cdot [-0,99; -0,79] + g_{12} \cdot [13,92; 14,12] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -0,69 \\
14,09 \leq g_{21} \cdot [-0,99; -0,79] + g_{22} \cdot [13,92; 14,12] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 14,29 \\
-0,79 \leq g_{11} \cdot [-0,89; -0,69] + g_{12} \cdot [14,09; 14,29] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -0,59 \\
14,22 \leq g_{21} \cdot [-0,89; -0,69] + g_{22} \cdot [14,09; 14,29] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 14,42
\end{array} \right. \quad (3.34)$$

Систему (3.34) ділимо на дві еквівалентні відносно двох невідомих параметрів

$\vec{g}_1 = (g_{11}, g_{12})$  та  $\vec{g}_2 = (g_{21}, g_{22})$ :

$$\left\{ \begin{array}{l}
-0,85 \leq g_{11} \cdot 0 + g_{12} \cdot 0 + q_1 \cdot U_{nom} \leq -0,65 \\
-1,2 \leq g_{11} \cdot [-0,85; -0,65] + g_{12} \cdot [3,51; 3,71] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -1 \\
-1,348 \leq g_{11} \cdot [-1,2; -1] + g_{12} \cdot [7,29; 7,49] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -1,126 \\
-1,35 \leq g_{11} \cdot [-1,348; -1,126] + g_{12} \cdot [10,02; 10,22] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -1,133 \\
-1,29 \leq g_{11} \cdot [-1,35; -1,133] + g_{12} \cdot [11,69; 11,89] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -1,09 \\
-1,2 \leq g_{11} \cdot [-1,29; -1,09] + g_{12} \cdot [12,76; 12,96] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -0,98 \\
-1,1 \leq g_{11} \cdot [-1,2; -0,98] + g_{12} \cdot [13,28; 13,48] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -0,9 \\
-0,99 \leq g_{11} \cdot [-1,1; -0,9] + g_{12} \cdot [13,68; 13,88] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -0,79 \\
-0,89 \leq g_{11} \cdot [-0,99; -0,79] + g_{12} \cdot [13,92; 14,12] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -0,69 \\
-0,79 \leq g_{11} \cdot [-0,89; -0,69] + g_{12} \cdot [14,09; 14,29] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -0,59
\end{array} \right.$$

та

$$\left\{ \begin{array}{l} 3,51 \leq g_{21} \cdot 0 + g_{22} \cdot 0 + q_2 \cdot U_{nom} \leq 3,71 \\ 7,29 \leq g_{21} \cdot [-0,85; -0,65] + g_{22} \cdot [3,51; 3,71] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 7,49 \\ 10,02 \leq g_{21} \cdot [-1,2; -1] + g_{22} \cdot [7,29; 7,49] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 10,22 \\ 11,69 \leq g_{21} \cdot [-1,348; -1,126] + g_{22} \cdot [10,02; 10,22] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 11,89 \\ 12,76 \leq g_{21} \cdot [-1,35; -1,133] + g_{22} \cdot [11,69; 11,89] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 12,96 \\ 13,28 \leq g_{21} \cdot [-1,29; -1,09] + g_{22} \cdot [12,76; 12,96] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 13,48 \\ 13,68 \leq g_{21} \cdot [-1,2; -0,98] + g_{22} \cdot [13,28; 13,48] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 13,88 \\ 13,92 \leq g_{21} \cdot [-1,1; -0,9] + g_{22} \cdot [13,68; 13,88] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 14,12 \\ 14,09 \leq g_{21} \cdot [-0,99; -0,79] + g_{22} \cdot [13,92; 14,12] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 14,29 \\ 14,22 \leq g_{21} \cdot [-0,89; -0,69] + g_{22} \cdot [14,09; 14,29] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 14,42 \end{array} \right.$$

Із сформованих систем виділяємо насичені блоки, необхідні для знаходження початкового наближення.

1) насичений блок для першого параметру  $\vec{g}_1 = (g_{11}, g_{12})$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} -1,2 \leq g_{11} \cdot [-0,85; -0,65] + g_{12} \cdot [3,51; 3,71] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -1 \\ -1,348 \leq g_{11} \cdot [-1,2; -1] + g_{12} \cdot [7,29; 7,49] + q_1 \cdot U_{nom} \leq -1,126 \end{array} \right. \quad (3.35)$$

2) насичений блок для другого параметру  $\vec{g}_2 = (g_{21}, g_{22})$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 7,29 \leq g_{21} \cdot [-0,85; -0,65] + g_{22} \cdot [3,51; 3,71] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 7,49 \\ 10,02 \leq g_{21} \cdot [-1,2; -1] + g_{22} \cdot [7,29; 7,49] + q_2 \cdot U_{nom} \leq 10,22 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Початкове наближення до допустимого розв'язку ІСЛАР (3.34) знайдене за допомогою формули (3.1) наступне:

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1,852925 & 0,135324 & 0,00053 \\ -9,24762 & -0,13404 & 0,00053 \end{pmatrix}.$$

Згідно розрахунків за формулою (3.14) отримаємо наступні вершини множини розв'язків для насичених блоків (3.35) та (3.36):

для насиченого блоку (3.35):

$$1) \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,546433 \\ 0,196627 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,056405 \\ 0,302577 \end{pmatrix},$$

$$3) \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,115902 \\ 0,162584 \end{pmatrix}, 4) \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,605931 \\ 0,056634 \end{pmatrix};$$

та для насиченого блоку (3.36):

$$1) \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11,2637 \\ -0,32071 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10,8043 \\ -0,22526 \end{pmatrix},$$

$$3) \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11,7448 \\ -0,36526 \end{pmatrix}, 4) \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12,2042 \\ -0,46071 \end{pmatrix}.$$

Згідно формули (3.14) обчислюємо значення довжин діагоналей множини розв'язків, яка утворюється в наслідок перетину насичених блоків (3.35) та (3.36), та знаходимо мінімальну серед них:

$$\min_l \{0,4832; 1,2788; 0,6816; 1,3025\} = 0,4832.$$

Знайдена мінімальна діагональ довжиною 0,4832 і є початковий параметр (радіус) пошуку допустимого розв'язку ІСЛАР (3.34).

В результаті використання методу допустимого оцінювання з адаптивною процедурою формування параметру  $r_l$  отримана наступна інтервальна динамічна модель силового трансформатора:

$$[\hat{x}_{1,k+1}] = (0,992133 \quad -0,000116 \quad -0,00718) \cdot [\hat{x}_k];$$

$$[\hat{x}_{2,k+1}] = (-0,0031 \quad 1,0000142 \quad 0,0011457) \cdot [\hat{x}_k],$$

$$k = 1, \dots, 10.$$

Результати моделювання силового трансформатора представлені на рис 3.9.

а), б).

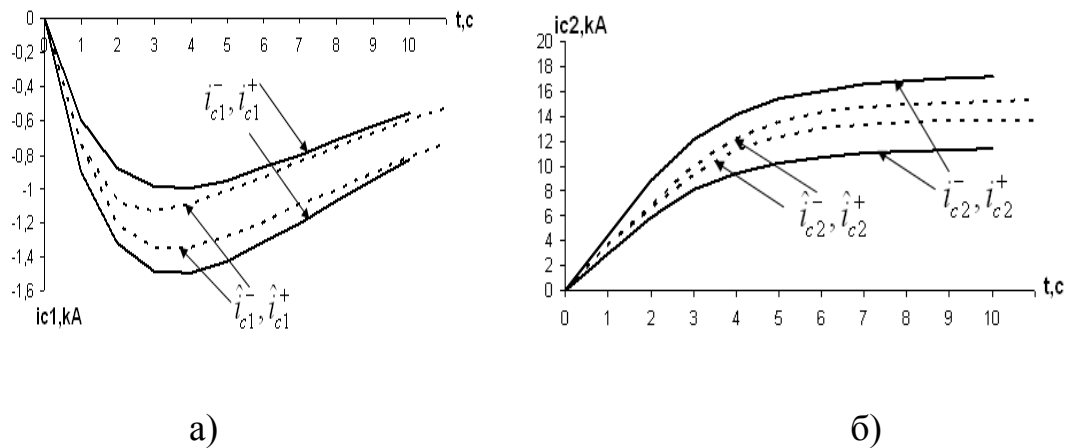


Рис. 3.9 - Експериментальні та прогнозні значення динамічної моделі для: а) змінної стану  $i_{c1}$ ; змінної стану  $i_{c2}$

Графіки, які ілюструють результати моделювання силового трансформатора, наглядно показують включення прогнозних коридорів для двох змінних  $[\hat{i}_{c1}^-, \hat{i}_{c1}^+]$  та  $[\hat{i}_{c2}^-, \hat{i}_{c2}^+]$  у експериментальні коридори, відповідно  $[i_{c1}^-, i_{c1}^+]$  та  $[i_{c2}^-, i_{c2}^+]$ , що доводить адекватність розробленої моделі.

Для дослідження оцінки ефективності розроблених алгоритмів використаємо наступні критерії.

Перший критерій - збіжність при пошуку параметрів моделі. Інакшими словами – за яку кількість ітерацій методу ідентифікації відбувається виконання умови  $\bar{g}_{l+1} = \bar{g}_{dop}$ .

На рисунках проілюстрована збіжність при пошуку двох параметрів моделі силового трансформатора (рис. 3.10), де по осі абсцис відкладено кількість ітерацій ( $l$ ), а по осі ординат - величину  $\delta$  (максимальне відхилення наближення від допустимого розв'язку), що обчислюється за формулою (3.30), під час виконання даної умови.

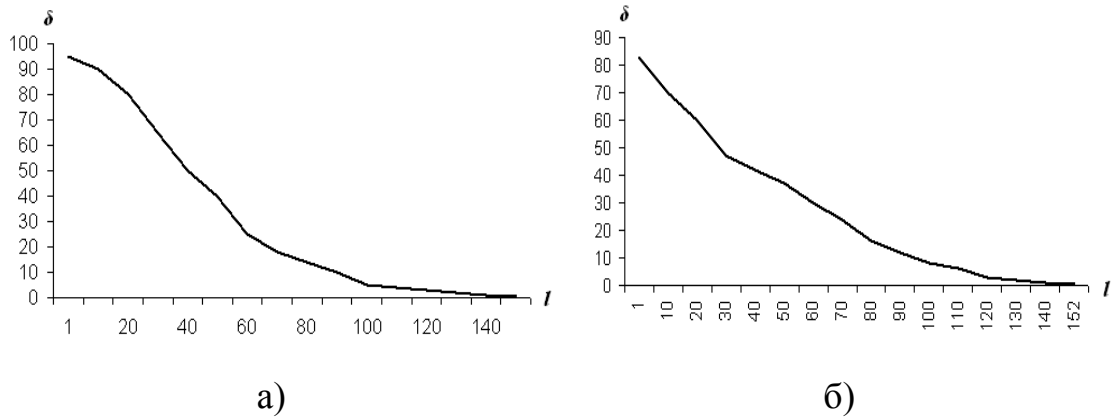


Рис. 3.10 - Графіки, які ілюструють збіжність при пошуку параметрів моделі силового трансформатора для: а) параметрів  $\vec{g}_1 = (g_{11}, g_{12})$ ; б) параметрів  $\vec{g}_2 = (g_{21}, g_{22})$

Розглянувши вище наведені графіки відмітимо, що розроблений метод відзначається високою збіжністю, тобто за досить невелику кількість ітерацій досягається включення прогнозного коридору в коридор експериментальних даних.

Другий критерій ефективності – часова складність, тобто час, який витрачається алгоритмом для виконання програмного модуля і залежить від розмірності задачі моделювання, тобто від кількості параметрів, які необхідно ідентифікувати, а також від кількості спостережень.

Графічно залежність часу виконання програмного модуля від розмірності задачі представлена на рис. 3.11, де по осі абсцис відмічено кількість невідомих параметрів ( $m$ ), а по осі ординат – час виконання програмного модуля ( $min$ ).

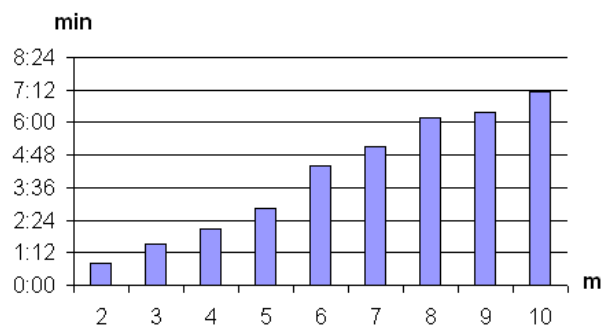


Рис. 3.11 - Гістограма часу виконання ітераційної процедури пошуку параметрів залежно від розмірності задачі моделювання

Графічно залежність часу виконання програмного модуля від кількості спостережень представлена на рис. 3.12, де по осі абсцис відмічено кількість

спостережень (кількість рівнянь загальної ІСЛАР) (*rivn*), а по осі ординат – час виконання програмного модуля (*min*).

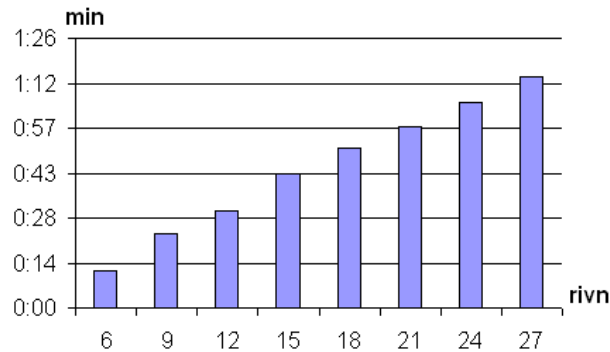


Рис. 3.12 - Гістограма часу виконання ітераційної процедури пошуку параметрів залежно від кількості спостережень

Наведені гістограми часової складності розробленого методу для різних розмірностей та різної кількості спостережень задачі ідентифікації параметрів динамічних моделей показує, що для достатньо помірних вимог до обчислювальних ресурсів (Pentium III, 667 МГц, 256 Мб) часова складність реалізації алгоритму є низькою. У порівнянні із відомим методом, що базується на розв'язуванні задач лінійного програмування [77] у випадку 10 параметрів в моделі з вектором змінних стану із 10 компонент, виграш складає близько 100 разів.

### ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

1. Розроблено ітераційний метод параметричної ідентифікації моделей динамічних систем на основі аналізу інтервальних даних, який відзначається низькою обчислювальною складністю, придатний для розв'язування задач високої розмірності та забезпечує побудову допускових коридорів інтервальних моделей.

2. Розроблено адаптивну процедуру настроювання параметрів ітераційного методу пошуку допустимого розв'язку інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що дозволило підвищити збіжність методу і знизити його часову складність.

3. Проведено апробацію ітераційного методу параметричної ідентифікації при побудові інтервальної моделі силового трансформатора для дослідження перехідного процесу. Результати моделювання доводять адекватність розробленої моделі.

4. Дослідження ефективності розробленого методу параметричної ідентифікації засобами комп'ютерного моделювання показали його низьку обчислювальну складність і високу збіжність.



## РОЗДІЛ 4

ПРАКТИЧНІ ЗАДАЧІ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ  
ІНТЕРВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

## 4.1. Аналіз інтервальних даних в задачах екологічного моніторингу

## 4.1.1. Основні задачі екологічного моніторингу (на прикладі СЕС

м. Тернополя)

В останні десятиліття суспільство усе ширше використовує у своїй діяльності звіти про стан природного середовища. Ця інформація потрібна в повсякденному житті людей, при веденні господарства, у будівництві, при надзвичайних обставинах – для оповіщення про небезпечні явища природи, що насуваються. Але зміни в стані навколишнього середовища відбуваються і під впливом біосферних процесів, пов'язаних з діяльністю людини. Визначення внеску антропогенних змін являє собою специфічну задачу [9, 38, 74, 92, 121-123].

У відповідності з канонічним визначенням, **екологічний моніторинг** – інформаційна система спостережень, оцінки і прогнозу змін у стані навколишнього середовища, створена з метою виділення антропогенної складових цих змін на тлі природних процесів.

Основні задачі екологічного моніторингу:

1. спостереження за станом біосфери;
2. оцінка і прогноз її стану;
3. визначення ступеня антропогенного впливу на навколишнє середовище;
4. виявлення факторів і джерел впливу.

Система екологічного моніторингу повинна накопичувати, систематизувати й аналізувати інформацію:

1. про стан навколишнього середовища;
2. про причини, що спостерігаються і ймовірних змін стану (тобто про джерела і фактори впливу);

3. про допустимість змін і навантажень на середовище в цілому;
4. про існуючі резерви біосфери.

Таким чином, у систему екологічного моніторингу входять спостереження за станом елементів біосфери і спостереження за джерелами і факторами антропогенного впливу.

В Україні є «Положення про Державну систему моніторингу довкілля», у якій визначені основні завдання моніторингу навколишнього природного середовища в Україні. Отже, згідно даного положення, основними задачами санітарно-епідеміологічної станції (СЕС) м. Тернополя є:

1. спостереження за станом навколишнього природного середовища;
2. аналіз стану навколишнього природного середовища та прогнозування його змін;
3. забезпечення органів державної виконавчої влади систематичною й оперативною інформацією про стан навколишнього природного середовища, а також прогнозами і попередженнями про можливі його зміни;
4. розробка науково-обґрунтованих рекомендацій для прийняття управлінських рішень.

#### 4.1.2. Структура бази інтервальних даних та задачі їх аналізу

Атмосфера завжди містить певну кількість домішок, які надходять від природних та антропогенних джерел. Викиди шкідливих речовин здійснюють насамперед автотранспорт та підприємства. Найбільш розповсюдженими шкідливими речовинами, які забруднюють атмосферне повітря м. Тернополя, є: двоокис азоту  $NO_2$ , окис вуглецю  $CO$  та завислі речовини (пил неорганічний).

Окис вуглецю  $CO$  або чадний газ – продукт неповного згорання нафтових видів палива, легший за повітря і не має кольору та запаху.  $CO$  має виражену отруйну дію, що обумовлюється його здатністю вступати в реакцію з гемоглобіном крові, приводячи до утворення карбоксигемоглобіну, який пов'язує кисень.

Внаслідок цього порушується газообмін в організмі, з'являється кисневе голодування й виникає порушення функціонування всіх систем організму.

Двоокис азоту  $NO_2$  - це газ, який утворюється в камері згорання, газ бурого кольору з характерним запахом, важчий від повітря, тому збирається в поглибленнях і представляє велику небезпеку при технічному обслуговуванні транспортних засобів. Для людського організму  $NO_2$  ще більш шкідливіші, ніж  $CO$ . Загальний характер дії міняється залежно від змісту різних окисів азоту.

Індекс забруднення атмосфери заснований на положеннях, відповідно до яких небезпека дії на здоров'я людини шкідливої речовини в атмосфері може бути оцінена із співвідношень між гранично-допустимими концентраціями (ГДК) для повітря населених місць. На рівні ДК усі шкідливі речовини характеризуються однаковим впливом на людину, а в міру збільшення перевищення ГДК їхня шкідливість зростає з різною швидкістю, яка залежить від класу небезпеки речовини. У таблиці 4.1. наведені значення ГДК деяких шкідливих речовин в атмосфері.

Таблиця 4.1

## ГДК шкідливих речовин в атмосфері

Назва речовини	Гранично-допустима концентрація	
	Максимально-разова ГДК, мг/м <sup>3</sup>	Середньодобова ГДК, мг/м <sup>3</sup>
Діоксид азоту	0,085	0,04
Оксид азоту	0,6	0,04
Оксид сірки	0,5	0,05
Сажа (кіпоть)	0,15	0,05
Пил неорганічний	0,5	0,15
Окис вуглецю	5	1

Контроль шкідливих викидів лабораторіями СЕС проводиться у вибраних районах шляхом періодичного вимірювання концентрацій шкідливих речовин і порівняння виміряної величини із ГДК для даної речовини. Дані про виявлені концентрації записують у спеціальний журнал, а також у спеціально розроблену базу даних, яка має назву «*EcoDB*». Інформація в базі даних «*EcoDB*» включає

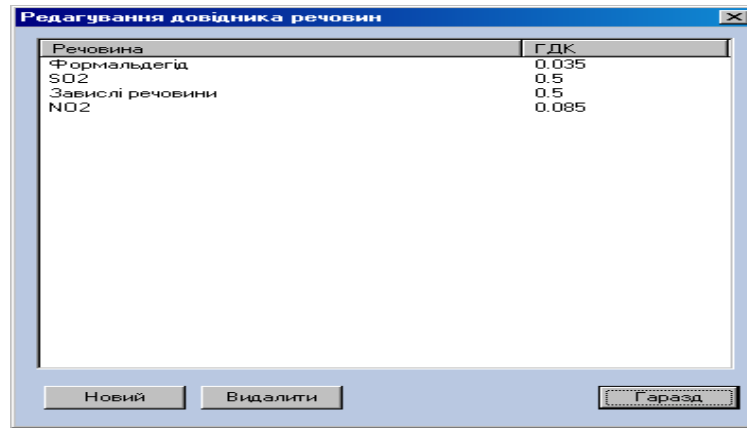
наступні елементи: дату вимірювання, місце вимірювання (об'єкт), умови вимірювання (температуру навколишнього середовища, атмосферний тиск, вологість повітря, силу і напрям вітру, погодні умови), назву речовини та її концентрації (рис. 4.1 та рис. 4.2).

Рис. 4.1 - Форма для введення даних в базу даних «EcoDB»

Дата	Вулиця	Температура	Вологість	Тиск	Вітер
12.01.2005	Шашкевича, 2	8	63	740	західний
01.03.2005	Гоголя-Руська-Хмельниц...	0	0	735	південно-зах
15.03.2005	Гайова-Замонастирська-...	5	0	732	західний
18.03.2005	Бродівська-Збаразька-Д...	5	90	724	західний, пог
23.03.2005	Коновальця-Злуки-Тарна...	5	89	735	південно-зах
25.03.2005	СЗЗ "Фармабрика"	8	86	736	південно-зах
29.03.2005	СЗЗ "Текстерно", Д/с №...	6	88	731	південно-зах
31.03.2005	Гоголя-Руська-Хмельниц...	6	0	738	південно-зах
12.04.2005	Гайова-Замонастирська-...	9	75	738	південно-зах
14.04.2005	Гоголя-Руська-Хмельниц...	11	90	736	південно-схід
20.04.2005	Коновальця-Злуки-Тарна...	5	90	713	західний, пог
25.04.2005	Бродівська-Збаразька-Д...	10	92	732	південно-зах
13.05.2005	СЗЗ "Текстерно", Д/с №...	17	82	730	північно-схід
17.05.2005	Волинська	21	75	724	легкий
30.05.2005	Орлика	26	69	752	південний, п
31.05.2005	Шептицького-Оболонь	22	73	750	північно-схід
23.06.2005	Парк "Національного відр...	19	91	726	північно-схід
24.06.2005	За Рудкою	23	89	737	північно-захі
29.06.2005	Парк "Топільче"	25	75	748	південний, п
19.07.2005	Гоголя-Руська-Хмельниц...	22	83	730	західний, пог
22.07.2005	Парк "Національного від...	25	78	738	південно-зах
26.07.2005	СЗЗ "Текстерно", Д/с №...	28	72	740	південний, п
29.07.2005	Гайова-Замонастирська-...	30	70	748	південний, п
08.08.2005	Коновальця-Злуки-Тарна...	0	91	729	північний, по
12.08.2005	Бродівська-Збаразька-Д...	24	75	730	західний

Рис. 4.2 - Перегляд бази даних «EcoDB»

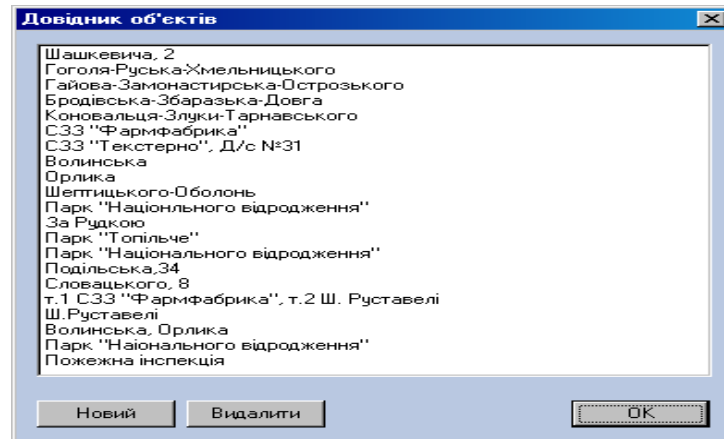
В даній базі присутні довідник шкідливих речовин, вимірювання яких проводиться СЕС м. Тернополя (рис. 4.3)



Речовина	Г.Д.К.
Формальдегід	0.035
SO2	0.5
Завислі речовини	0.5
NO2	0.085

Рис. 4.3 - Довідник шкідливих речовин

та довідник об'єктів – контрольно-вимірювальних постів (КВП) (рис. 4.4).



Шашкевича, 2
Гоголя-Руська-Хмельницького
Гайова-Замонастирська-Острозького
Бродівська-Збаразька-Довга
Коновальця-Злуки-Тарнавського
СЗЗ "Фармфабрика"
СЗЗ "Текстерно", Д/с №31
Волинська
Орлика
Шептицького-Оболонь
Парк "Національного відродження"
За Рудкою
Парк "Топільче"
Парк "Національного відродження"
Подільська, 34
Словацького, 8
т.1 СЗЗ "Фармфабрика", т.2 Ш. Руставелі
Ш.Руставелі
Волинська, Орлика
Парк "Національного відродження"
Пожежна інспекція

Рис. 4.4 - Довідник об'єктів вимірювання

Виміри стану забруднення атмосферного повітря в м. Тернопіль здійснюють на 21-ому об'єкті, які розташовані у різних районах міста.

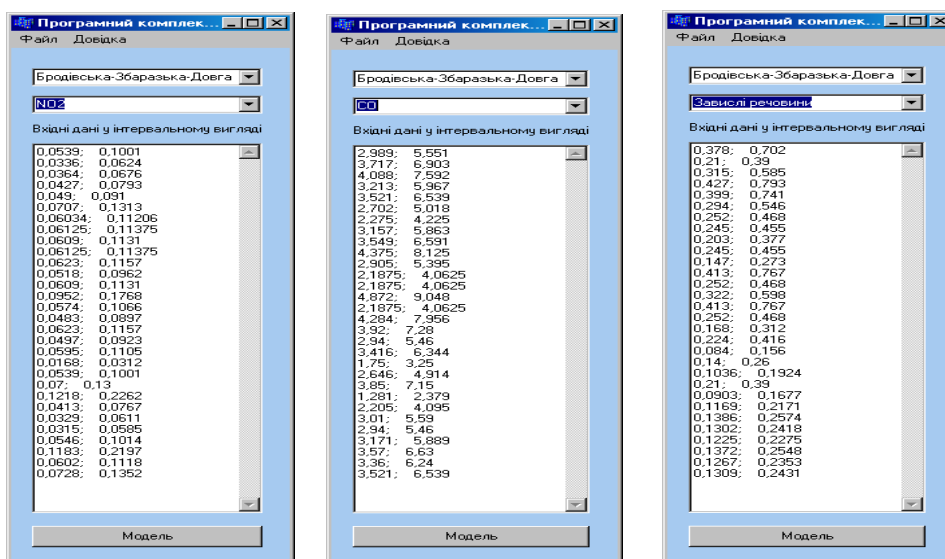
Так як в останні роки в місті Тернопіль спостерігається зменшення промисловості та швидке зростання автомобільного парку, то рівень забруднення повітряного басейну міста залежить, перш за все, саме від автотранспорту. Отже, актуальною є задача побудови моделі динаміки концентрацій шкідливих викидів шляхом ідентифікації параметрів системи типу (2.1-2.2), метод та алгоритм розв'язування якої наведено у розділі 3.

## 4.2. Ідентифікація інтервальної моделі динаміки концентрацій шкідливих викидів

Задача параметричної ідентифікації моделі динаміки концентрацій шкідливих викидів передбачає визначення невідомих елементів інтервальних систем лінійних алгебраїчних рівнянь (які складені відповідно до інтервальних даних по трьох об'єктах) [80]. Дана модель має один «вхід» ( $u_k$ ) – інтенсивність транспортного потоку (авто/хв.) та три «виходи» ( $x_{1,k+1}, x_{2,k+1}, x_{3,k+1}$ ) – значення концентрацій шкідливих викидів ( $\text{мг/м}^3$ ) за період з 2002 року по 2006 рік відповідно двоокису азоту  $NO_2$ , окису вуглецю  $CO$  та завислих речовин ( $k = 0, \dots, 29$ ) по трьох об'єктах: 1) перехрестя вулиць «Бродівська – Збаразька - Довга»; 2) перехрестя вулиць «Гайова – Замонастирська - Острозького»; 3) перехрестя вулиць «Гоголя – Руська - Хмельницького». Похибка вимірювання спектроаналізаторів при отриманні інтервальних даних склала 15%.

Отже, для рішення задачі параметричної ідентифікації необхідно знайти розв'язок наступних ІСЛАР:

1) ІСЛАР згідно даних по об'єкту №1 (перехрестя вулиць «Бродівська – Збаразька - Довга» складається з 90 рівнянь на основі експериментальних даних за період з 2002 року по 2006 рік:



2) ІСЛАР згідно даних по об'єкту №2: перехрестя вулиць «Гайова – Замонастирська - Острозького» складається з 90 рівнянь на основі наступних експериментальних даних:

№	Вхідні дані	Вихідні дані
1	0,0658; 0,1222	3,71; 6,89
2	0,063; 0,117	3,43; 6,37
3	0,0609; 0,1131	4,69; 8,71
4	0,0616; 0,1144	4,69; 8,71
5	0,0588; 0,1092	3,57; 6,63
6	0,0602; 0,1118	3,36; 6,24
7	0,056; 0,104	4,207; 7,813
8	0,06076; 0,11284	2,1875; 4,0625
9	0,06055; 0,11245	2,66; 4,94
10	0,05873; 0,10907	3,43; 6,37
11	0,0588; 0,1092	4,41; 8,19
12	0,06041; 0,11219	4,34; 8,06
13	0,0546; 0,1014	2,184; 4,056
14	0,063; 0,117	2,1875; 4,0625
15	0,0581; 0,1079	4,34; 8,06
16	0,0539; 0,1001	4,76; 8,84
17	0,0623; 0,1157	3,85; 7,15
18	0,0553; 0,1027	4,284; 7,956
19	0,0574; 0,1066	4,305; 7,995
20	0,0602; 0,1118	4,375; 8,125
21	0,0483; 0,0897	7,0462; 13,0858
22	0,0546; 0,1014	5,88; 10,92
23	0,0616; 0,1144	3,32; 7,28
24	0,0476; 0,0884	4,48; 8,32
25	0,0371; 0,0689	3,78; 7,02
26	0,036; 0,065	4,06; 7,54
27	0,0406; 0,0754	4,62; 8,58
28	0,0371; 0,0689	4,41; 8,19
29	0,0812; 0,1508	3,64; 6,76
30	0,0686; 0,1274	3,584; 6,656
31	0,0336; 0,0624	0,378; 0,702
32	0,378; 0,702	0,378; 0,702
33	0,392; 0,728	0,462; 0,858
34	0,406; 0,754	0,476; 0,884
35	0,364; 0,676	0,382; 0,728
36	0,35; 0,65	0,378; 0,702
37	0,378; 0,702	0,238; 0,442
38	0,364; 0,676	0,427; 0,733
39	0,462; 0,858	0,126; 0,234
40	0,476; 0,884	0,462; 0,858
41	0,382; 0,728	0,357; 0,663
42	0,378; 0,702	0,336; 0,624
43	0,238; 0,442	0,0644; 0,1196
44	0,427; 0,733	0,343; 0,637
45	0,126; 0,234	0,1211; 0,2249
46	0,462; 0,858	0,224; 0,416
47	0,357; 0,663	0,1882; 0,2938
48	0,336; 0,624	0,182; 0,338
49	0,0644; 0,1196	0,0889; 0,1651
50	0,343; 0,637	0,112; 0,208
51	0,1211; 0,2249	0,161; 0,299
52	0,224; 0,416	0,1456; 0,2704
53	0,1882; 0,2938	0,112; 0,208
54	0,182; 0,338	0,119; 0,221
55	0,0889; 0,1651	
56	0,112; 0,208	
57	0,161; 0,299	
58	0,1456; 0,2704	
59	0,112; 0,208	
60	0,119; 0,221	

3) ІСЛАР згідно даних по об'єкту №3: перехрестя вулиць «Гоголя – Руська - Хмельницького» складається з 90 рівнянь на основі наступних експериментальних даних:

№	Вхідні дані	Вихідні дані
1	0,0623; 0,1157	3,5; 6,5
2	0,0686; 0,1274	3,57; 6,63
3	0,0581; 0,1079	3,605; 6,695
4	0,0609; 0,1131	3,5; 6,5
5	0,0672; 0,1248	3,57; 6,63
6	0,0602; 0,1118	3,675; 6,825
7	0,0588; 0,1092	2,184; 4,056
8	0,0581; 0,1079	2,1875; 4,0625
9	0,0553; 0,1027	4,305; 7,995
10	0,0539; 0,1001	4,375; 8,125
11	0,0574; 0,1066	4,27; 7,93
12	0,0581; 0,1079	4,361; 8,039
13	0,0591; 0,1079	4,375; 8,125
14	0,0623; 0,1157	4,375; 8,125
15	0,0602; 0,1118	4,34; 8,06
16	0,0581; 0,1079	3,29; 6,11
17	0,0385; 0,0715	3,36; 6,24
18	0,0399; 0,0741	3,29; 6,11
19	0,0459; 0,0871	2,24; 4,16
20	0,0441; 0,0819	3,682; 6,838
21	0,042; 0,078	3,29; 6,11
22	0,0413; 0,0767	3,43; 6,37
23	0,0427; 0,0793	3,5; 6,5
24	0,042; 0,078	3,64; 6,76
25	0,0623; 0,1157	4,893; 9,087
26	0,0602; 0,1118	4,83; 8,97
27	0,0602; 0,1118	4,375; 8,125
28	0,0588; 0,1092	3,85; 7,15
29	0,0602; 0,1118	3,15; 5,85
30	0,0595; 0,1105	3,29; 6,11
31	0,455; 0,845	0,455; 0,845
32	0,469; 0,871	0,497; 0,923
33	0,483; 0,897	0,483; 0,897
34	0,463; 0,871	0,441; 0,819
35	0,441; 0,819	0,2786; 0,5174
36	0,2786; 0,5174	0,2984; 0,5486
37	0,2984; 0,5486	0,308; 0,572
38	0,308; 0,572	0,2366; 0,4394
39	0,2366; 0,4394	0,238; 0,442
40	0,238; 0,442	0,259; 0,497
41	0,259; 0,497	0,343; 0,637
42	0,343; 0,637	0,336; 0,624
43	0,336; 0,624	0,329; 0,611
44	0,329; 0,611	0,315; 0,585
45	0,315; 0,585	0,21; 0,39
46	0,21; 0,39	0,231; 0,429
47	0,231; 0,429	0,238; 0,442
48	0,238; 0,442	0,259; 0,497
49	0,259; 0,497	0,175; 0,325
50	0,175; 0,325	0,196; 0,364
51	0,196; 0,364	0,224; 0,416
52	0,224; 0,416	0,189; 0,351
53	0,189; 0,351	0,175; 0,325
54	0,175; 0,325	0,161; 0,299
55	0,161; 0,299	0,1575; 0,2925
56	0,1575; 0,2925	0,161; 0,299
57	0,161; 0,299	0,168; 0,312
58	0,168; 0,312	0,147; 0,273
59	0,147; 0,273	

В результаті використання методу допускового оцінювання були отримані наступні інтервальні моделі динаміки концентрацій шкідливих викидів:

1) модель динаміки концентрацій шкідливих викидів по об'єкту №1:

$$[\hat{x}_{1,k+1}] = (1,17351 \quad -0,00439 \quad 0,023945 \quad 0,0002) \cdot [\hat{x}_k];$$

$$[\hat{x}_{2,k+1}] = (-0,9324 \quad 0,87125 \quad 0,61454 \quad 0,0002) \cdot [\hat{x}_k];$$

$$[\hat{x}_{3,k+1}] = (-0,22547 \quad 0,006154 \quad 1,0112248 \quad 0,0002) \cdot [\hat{x}_k],$$

$$k = 0, \dots, 29.$$

Результати моделювання динаміки концентрацій шкідливих викидів речовин по об'єкту №1 представленні на рис. 4.5 а), б), в):

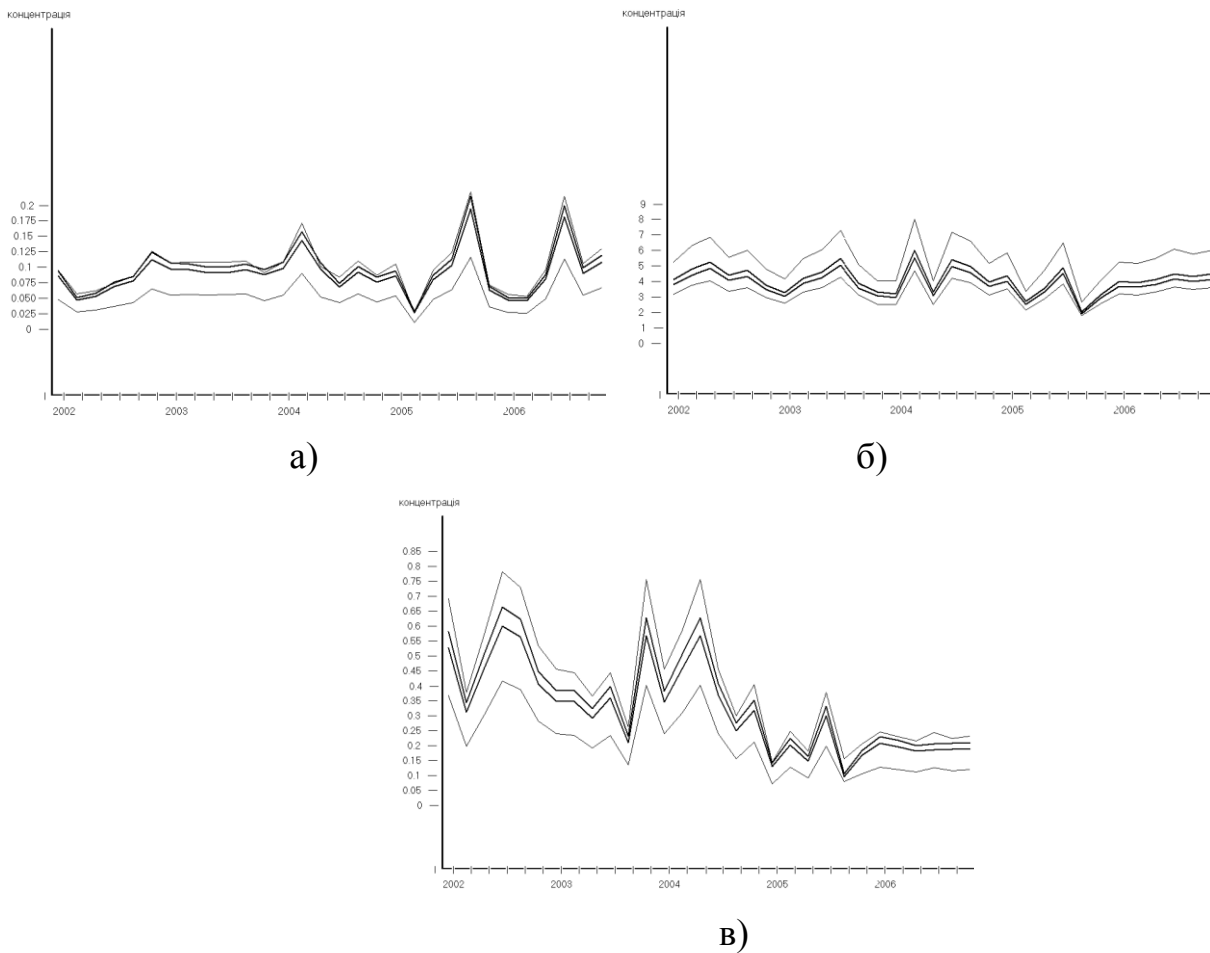


Рис. 4.5 - Динаміка концентрацій: а) двоокису азоту; б) окису вуглецю; в) завислих речовин



2) модель динаміки концентрацій шкідливих викидів по об'єкту №2:

$$[\hat{x}_{1,k+1}] = (0,5987547 \quad 0,00025 \quad 0,018578 \quad 0,0005) \cdot [\hat{x}_k];$$

$$[\hat{x}_{2,k+1}] = (7,664 \quad 0,7884 \quad -1,399 \quad 0,0005) \cdot [\hat{x}_k];$$

$$[\hat{x}_{3,k+1}] = (0,0245 \quad 0,00284 \quad 0,704 \quad 0,0005) \cdot [\hat{x}_k],$$

$$k = 0, \dots, 29.$$

Результати моделювання динаміки концентрацій шкідливих викидів речовин по об'єкту №2 представлено на рис. 4.6 а), б), в):

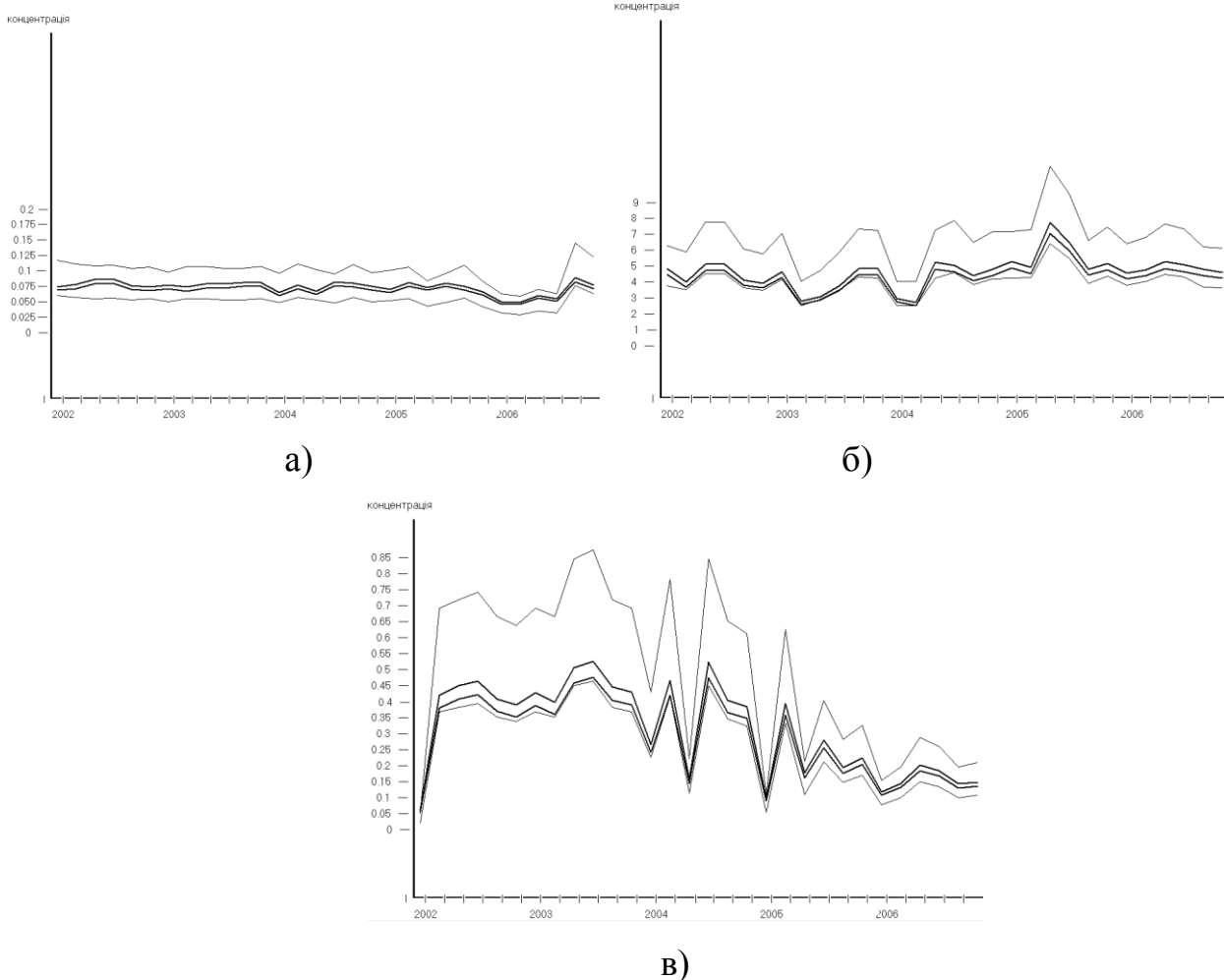


Рис. 4.6 - Динаміка концентрацій: а) двоокису азоту; б) окису вуглецю; в) завислих речовин

3) модель динаміки концентрацій шкідливих викидів по об'єкту №3:

$$[\hat{x}_{1,k+1}] = (0,49857 \quad 0,0013547 \quad -0,001325 \quad 0,0013) \cdot [\hat{x}_k];$$

$$[\hat{x}_{2,k+1}] = (3,04923 \quad 1,0894 \quad -3,0371 \quad 0,0013) \cdot [\hat{x}_k];$$

$$[\hat{x}_{3,k+1}] = (1,00124 \quad 0,002458 \quad 0,6415 \quad 0,0013) \cdot [\hat{x}_k],$$

$$k = 0, \dots, 29.$$

Результати моделювання динаміки концентрацій шкідливих викидів речовин по об'єкту №3 представлено на рис. 4.7 а), б), в):

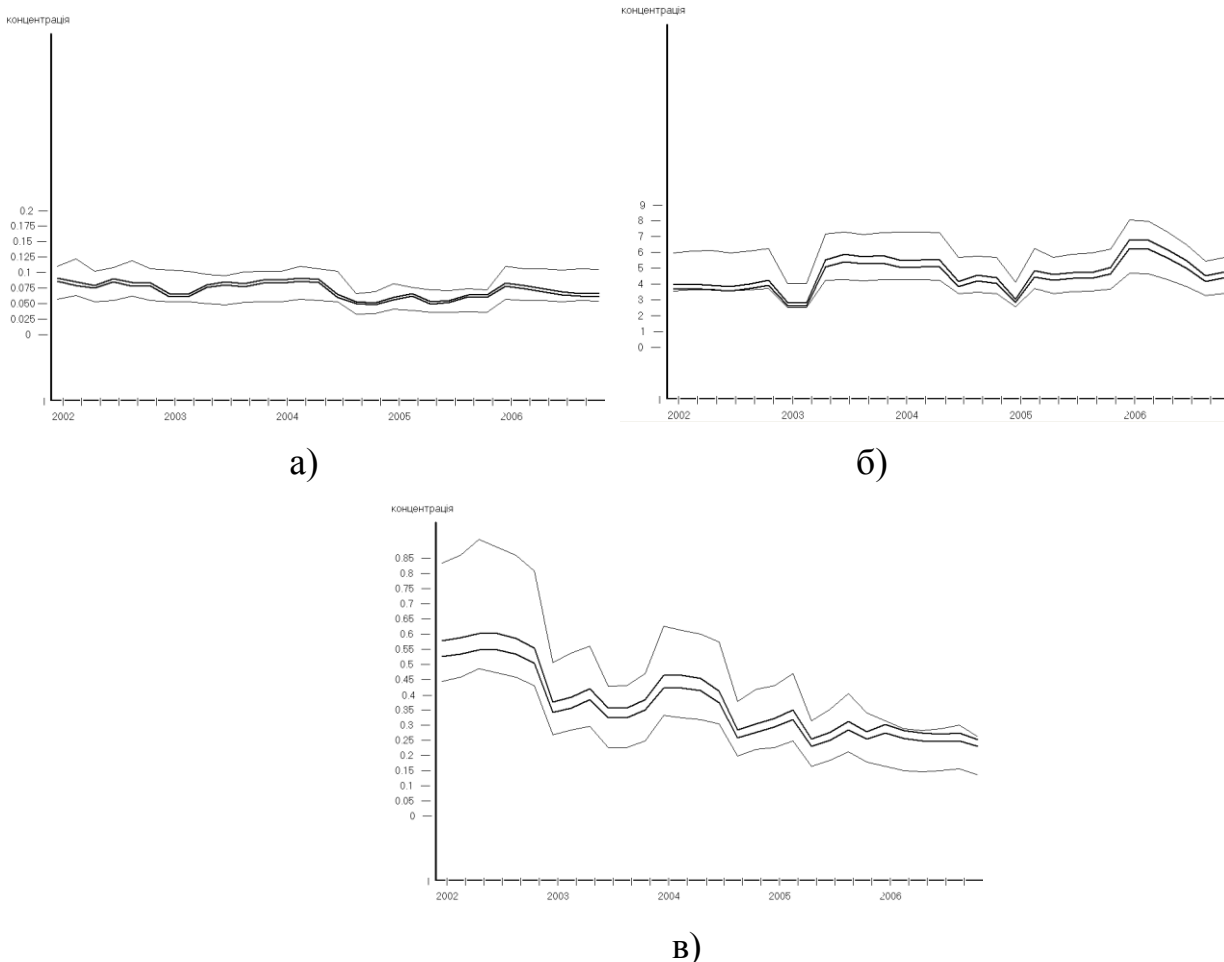


Рис. 4.7 - Динаміка концентрацій: а) двоокису азоту; б) окису вуглецю; в) завислих речовин

На рисунках 4.5 – 4.7: **————** лінією позначені прогностні коридори;

**————** лінією позначені експериментальні коридори.

На діаграмі, наведеній на рис. 4.8, показано, що на виконання програмного модуля для ідентифікації параметрів моделі затрачено малий час – розв’язок інтервальної системи лінійних рівнянь по трьом параметрам і 30 спостереженням (це складає 90 рівнянь ІСЛАР) знаходиться за в гіршому випадку за 1 хвилину 36 секунд, а в кращому – за 53 секунди.

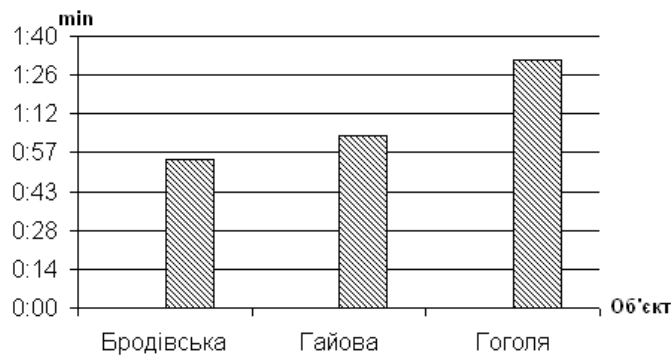


Рисунок 4.8 - Час виконання програмного модуля по об'єктах

#### 4.3. Аналіз адекватності моделі динаміки концентрацій шкідливих викидів

У процесі створення математичної моделі дослідникові практично завжди доводиться свідомо йти на спрощення наявних подань про реальні явища, що дає можливість описати їх і представити взаємодію між компонентами системи. Без розумного переліку допущень, моделювання більшості складних систем було б практично неможливо в силу обмеженості технічних можливостей використовуваної обчислювальної техніки. Однак, при спрощенні реальної системи й виборі параметрів, що відбивають властивості окремих компонентів моделі, дослідник повинен постійно стежити за тим, щоб отримана модель у заданих межах відповідала об'єкту. У процесі перевірки вірогідності моделі необхідно оцінити: чи дозволяє модель вирішити поставлені задачі моделювання, наскільки повна запропонована схема моделі і чи відбиває вона фактичну послідовність розвитку процесів у реальній системі. Дуже часто рівняння моделі одержують на підставі аналізу достовірних даних, тому необхідно провести перевірку згоди рівнянь із вихідною інформацією.

Однією з важливих процедур під час аналізу моделі є визначення ступеня її адекватності об'єкту дослідження. При цьому під адекватністю програмної моделі реальному об'єкту розуміють збіг із заданою точністю характеристик поведінки об'єкта й моделі. При відсутності адекватності проводять калібрування математичної моделі (уточнюють значення параметрів моделі, що відбивають компоненти реальної системи).

Якщо адекватність моделі доведена, необхідно досліджувати властивості моделі для того, щоб надалі правильно спланувати обчислювальний експеримент. Істотним моментом при цьому є визначення чутливості моделі.

Чутливість математичної моделі звичайно виражають величиною приросту обраного критерію якості, що обчислює по статистиках моделювання, при послідовному варіюванні параметрів моделювання на всьому діапазоні їхніх змін. У якості варіаційних параметрів можуть бути обрані як внутрішні параметри об'єкта, так і параметри зовнішнього середовища.

Адекватність є основною характеристикою побудованої моделі. Модель адекватна об'єкту якщо результати моделювання слугують для прогнозування поведінки реального об'єкта.

Поняття адекватності слугує для оцінки рівня виконання вимог, необхідних для досягнення мети моделювання. Ступінь адекватності моделі перевіряється експериментальним шляхом на основі введення міри адекватності. Властивість адекватності моделі безпосередньо зв'язана із властивістю ІСЛАР, яка побудована на основі заданої структури моделі та на основі аналізу експериментальних даних.

При цьому на відміну від стохастичних моделей в інтервальних моделях це поняття є однозначним. Тобто, якщо ІСЛАР для заданої структури є сумісною, то модель, побудована на даній структурі, є адекватною і, навпаки, якщо ІСЛАР для заданої структури є несумісною, то модель є однозначно неадекватною. Формально адекватність (неадекватність) моделі заданої структури можна задати такими правилами:

якщо  $\Omega|_{[\hat{x}_{k+1}]} \neq \emptyset$ , то модель  $\hat{x}_{k+1}$  адекватна.

якщо  $\Omega|_{[\hat{x}_{k+1}]} = \emptyset$ , то модель  $\hat{x}_{k+1}$  не адекватна.

У вказаних правилах  $\Omega|_{[\hat{x}_{k+1}]}$  означає множину розв'язків ІСЛАР.

У нашому випадку множина розв'язків ІСЛАР повністю задовольняє її. Отже, можна зробити висновок про адекватність моделі.

Проте, адекватність моделі не є однозначно визначальною. Поряд із адекватністю важливою є складність, точність та повнота моделі. Складність моделі або її спрощеність обумовлюється необхідністю оперувати нею, наприклад, за допомогою комп'ютерних засобів, обчислювальні ресурси яких є обмеженими. Оцінювання складності моделі проводиться під час синтезу структур моделі в ході структурної ідентифікації моделей статичних систем.

В нашому випадку структура моделі є лінійна. Так як ми досягли адекватності моделі при лінійній структурі, то можна говорити про низьку складність моделі.

Точність моделі являє собою кількісне вираження відмінностей між властивостями побудованої моделі системи та оригіналом [79].

Точність інтервальної моделі є однією із основних її характеристик. Оцінювання точності вимагає певних обчислювальних витрат. Розглянемо точність прогнозування моделі в точці, тобто при фіксованому наборі входів – змінних стану  $\vec{x}_k$ . Під прогнозуванням інтервальної моделі, будемо розуміти розрахунок виходу системи  $\hat{x}_{k+1}$  при заданому наборі входів  $\vec{x}_k$ , поза експериментальними точками, на основі яких будувалась модель, але в межах області експерименту. Основною характеристикою точності інтервальної моделі є похибка прогнозування, яка задається різницею меж коридору :

$$\Delta_{(\vec{x}_{k+1})} = \hat{x}_{ik+1}^+ - \hat{x}_{ik+1}^-.$$

В нашому випадку похибка прогнозування стала і дорівнює 15%. Вибрана похибка прогнозування задовольняє поставлені вимоги і дає достатню точність моделі.

#### 4.4. Дослідження прогностичних властивостей моделі динаміки концентрацій шкідливих викидів

Розглянемо можливість застосування розробленої моделі для прогнозування концентрацій шкідливих викидів в залежності від різної інтенсивності транспортного потоку для об'єкту №1 - перехрестя вулиць «Бродівська – Збараська - Довга».

Проведемо два експерименти:

1. Інтенсивність транспортного потоку є постійна на протязі всього періоду прогнозування. Інтенсивність транспортного потоку ( $u = const$ ) рівна 43 авто/хв графічно зображений на рис. 4.9.

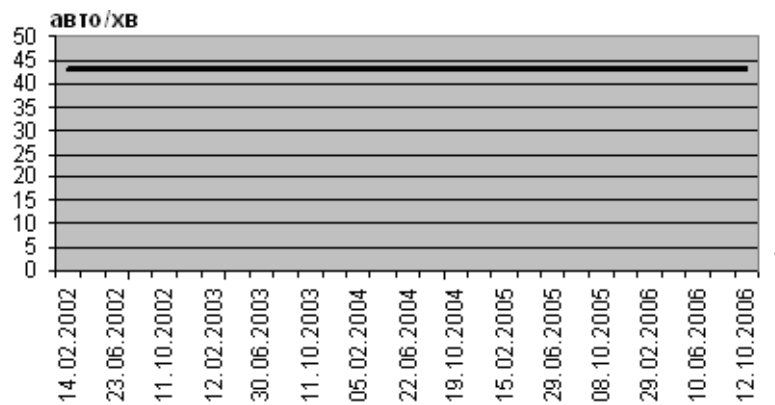


Рис. 4.9 - Інтенсивність транспортного потоку (стала)

При цьому початкові значення концентрацій задаємо у вигляді  $[x_0], [x_1], \dots, [x_{29}]$ .

Використаємо розроблену модель у вигляді:

$$[\hat{x}_{1,k+1}] = (1,17351 \quad -0,00439 \quad 0,023945 \quad 0,0002) \cdot [\hat{x}_k];$$

$$[\hat{x}_{2,k+1}] = (-0,9324 \quad 0,87125 \quad 0,61454 \quad 0,0002) \cdot [\hat{x}_k];$$

$$[\hat{x}_{3,k+1}] = (-0,22547 \quad 0,006154 \quad 1,0112248 \quad 0,0002) \cdot [\hat{x}_k].$$

Отримаємо прогнозні значення на основі моделі значення концентрацій шкідливих викидів, які наведені в таблиці 4.1. При чому різниця  $\tilde{\Delta}$  між прогнозними значеннями, наведена в останній колонці таблиці 4.1 розраховується за формулою:

$$\tilde{\Delta} = [\hat{x}_{k+1}] - [\hat{x}_{k+1}]_{u=const}.$$

Таблиця 4.1.

## Прогнозні концентрації шкідливих викидів

Період	$x_1^-$	$x_1^+$	$x_2^-$	$x_2^+$	$x_3^-$	$x_3^+$	$\tilde{\Delta}$
14.02.2002	0,088918	0,097372	3,789879	4,187909	0,535828	0,591326	0,0056
28.04.2002	0,046791	0,050811	4,536247	5,012841	0,317561	0,350083	0,0026
23.06.2002	0,052452	0,057068	5,058950	5,590566	0,463902	0,511829	0,0006
05.08.2002	0,071338	0,077942	4,109778	4,541482	0,608373	0,671507	0,0042
11.10.2002	0,078627	0,085998	4,442636	4,909377	0,570591	0,629748	0,0030
06.12.2002	0,114654	0,125817	3,359211	3,711907	0,413011	0,455581	0,0036
12.02.2003	0,099333	0,108884	2,832402	3,129645	0,354975	0,391436	0,0036
26.04.2003	0,095300	0,104427	3,868299	4,274583	0,352456	0,388652	0,0012
30.06.2003	0,091043	0,099721	4,297218	4,748652	0,298198	0,328682	0,0016
04.08.2003	0,088044	0,096406	5,308475	5,866357	0,362629	0,399895	0,0014
11.10.2003	0,095289	0,104414	3,487269	3,853445	0,215538	0,237320	0,0016
05.12.2003	0,091486	0,100210	2,874025	3,175649	0,577810	0,637727	0,0076
05.02.2004	0,100746	0,110446	2,728233	3,014510	0,354073	0,390439	0,0056
16.04.2004	0,141654	0,155660	5,917392	6,539371	0,462064	0,509797	0,0006
22.06.2004	0,100404	0,110068	2,866939	3,167816	0,576097	0,635833	0,0066
05.08.2004	0,068189	0,074461	5,223101	5,771996	0,375438	0,414053	0,0026
19.10.2004	0,089924	0,098485	4,704930	5,199281	0,252835	0,278543	0,0006
04.12.2004	0,077516	0,084770	3,608817	3,987787	0,325358	0,358701	0,0026
15.02.2005	0,085738	0,093858	4,042481	4,467100	0,134202	0,147424	0,0008
12.04.2005	0,029479	0,031677	2,173322	2,401188	0,210207	0,231429	0,0066
29.06.2005	0,082044	0,089775	3,155458	3,486706	0,156384	0,171940	0,0046
04.08.2005	0,103970	0,114008	4,647447	5,135746	0,307534	0,339000	0,0026
08.10.2005	0,197883	0,217808	1,444454	1,595596	0,105954	0,116201	0,0056
03.12.2005	0,065037	0,070977	2,661051	2,940256	0,174809	0,192304	0,0046
29.02.2006	0,047568	0,051670	3,641619	4,024042	0,213883	0,235492	0,0026
05.04.2006	0,045482	0,049364	3,553616	3,926776	0,202199	0,222577	0,0026
10.06.2006	0,080645	0,088229	3,791100	4,189258	0,186492	0,205218	0,0016
24.08.2006	0,180196	0,198258	4,194536	4,635161	0,190506	0,209655	0,0006
12.10.2006	0,088574	0,096993	4,010993	4,432297	0,192121	0,211439	0,0006
03.12.2006	0,107819	0,118263	4,188920	4,628953	0,195374	0,215035	0,0006

Графічно результати зображені на рис. 4.10.

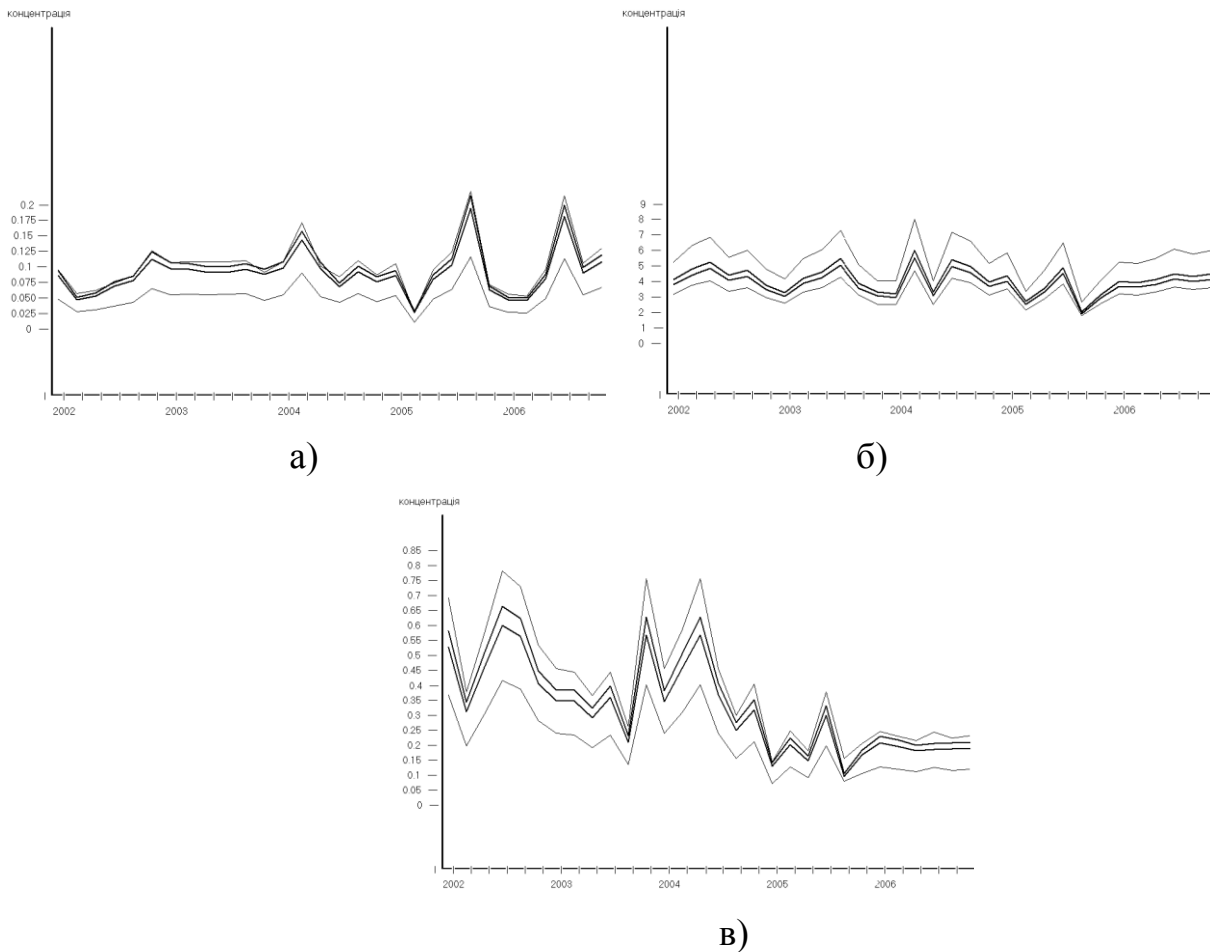


Рис. 4.10 - Пропоновані концентрації: а) двоокису азоту; б) окису вуглецю; в) завислих речовин

Як бачимо, незалежно від заданя вхідної змінної розроблена модель зберігає логіку динаміки реалізації продукції.

2. Другий варіант – враховуючи логіку потреб (сезонність).

Для аналізу використаємо наступні значення вхідної змінної.

Рік	Інтенсивність транспортного потоку ( $u_i$ ) (авто/хв.)
2002	45
2003	55
2004	69
2005	71
2006	76



Графічно обсяги збуту продукції зображені на рис. 4.11.

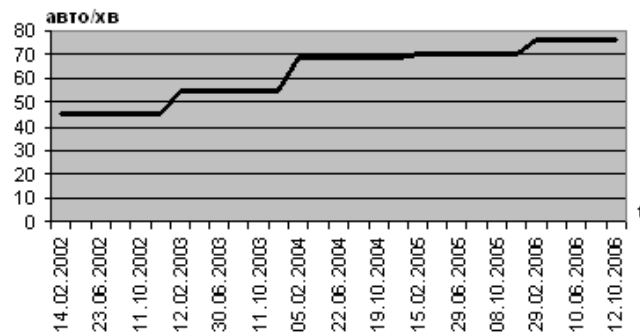


Рис. 4.11 - Інтенсивність транспортного потоку (по роках)

Різниця  $\tilde{\Delta}$  між прогнозними значеннями, наведена в останній колонці таблиці 4.2 розраховується за формулою:

$$\tilde{\Delta} = [\hat{x}_{k+1}] - [\hat{x}_{k+1}]|_{u_i}$$

Таблиця 4.2.

Прогнозні концентрації шкідливих викидів

Період	$x_1^-$	$x_1^+$	$x_2^-$	$x_2^+$	$x_3^-$	$x_3^+$	$\tilde{\Delta}$
14.02.2002	0,089318	0,097772	3,790279	4,188309	0,536228	0,591726	0,0060
28.04.2002	0,047191	0,051211	4,536647	5,013241	0,317961	0,350483	0,0030
23.06.2002	0,052852	0,057468	5,059350	5,590966	0,464302	0,512229	0,0010
05.08.2002	0,071738	0,078342	4,110178	4,541882	0,608773	0,671907	0,0046
11.10.2002	0,079027	0,086398	4,443036	4,909777	0,570991	0,630148	0,0034
06.12.2002	0,115054	0,126217	3,359611	3,712307	0,413411	0,455981	0,0040
12.02.2003	0,101733	0,111284	2,834802	3,132045	0,357375	0,393836	0,0060
26.04.2003	0,097700	0,106827	3,870699	4,276983	0,354856	0,391052	0,0036
30.06.2003	0,093443	0,102121	4,299618	4,751052	0,300598	0,331082	0,0040
04.08.2003	0,090444	0,098806	5,310875	5,868757	0,365029	0,402295	0,0010
11.10.2003	0,097689	0,106814	3,489669	3,855845	0,217938	0,239720	0,0040
05.12.2003	0,093886	0,102610	2,876425	3,178049	0,580210	0,640127	0,0100
05.02.2004	0,105946	0,115646	2,733433	3,019710	0,359273	0,395639	0,0108
16.04.2004	0,146854	0,160865	5,922592	6,544571	0,467264	0,514997	0,0058
22.06.2004	0,105604	0,115268	2,872139	3,173016	0,581297	0,641033	0,0118
05.08.2004	0,073389	0,079661	5,228301	5,777196	0,380638	0,419253	0,0078
19.10.2004	0,095124	0,103685	4,710130	5,204481	0,258035	0,283743	0,0058
04.12.2004	0,082716	0,089970	3,614017	3,992987	0,330558	0,363901	0,0078
15.02.2005	0,091338	0,099458	4,048081	4,472700	0,139802	0,153024	0,0064
12.04.2005	0,035079	0,037277	2,178923	2,406788	0,215807	0,237029	0,0122
29.06.2005	0,087644	0,095375	3,161058	3,492306	0,161984	0,177540	0,0102
04.08.2005	0,109570	0,119608	4,653047	5,141346	0,313134	0,344600	0,0082
08.10.2005	0,203483	0,223408	1,450054	1,601196	0,111554	0,121801	0,0112
03.12.2005	0,070637	0,076577	2,666651	2,945856	0,180409	0,197904	0,0102
29.02.2006	0,054168	0,058270	3,648219	4,030642	0,220483	0,242092	0,0092
05.04.2006	0,052082	0,055964	3,560216	3,933376	0,208799	0,229177	0,0092
10.06.2006	0,087245	0,094825	3,797700	4,195858	0,193092	0,211818	0,0082
24.08.2006	0,186796	0,204858	4,201136	4,641761	0,197106	0,216255	0,0072
12.10.2006	0,095174	0,103593	4,017593	4,438897	0,198721	0,218039	0,0072
03.12.2006	0,114419	0,124863	4,195520	4,635553	0,201974	0,221635	0,0072

Графічно результати зображені на рис. 4.12.

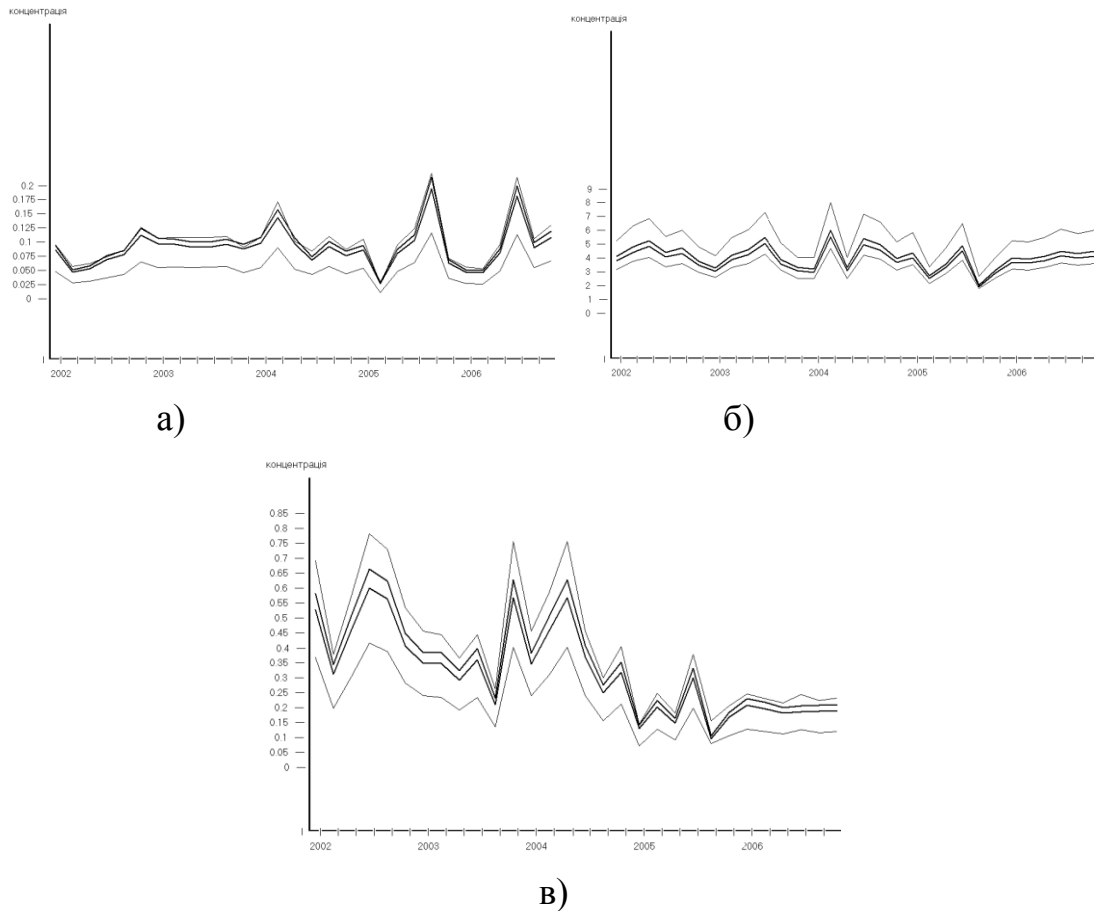


Рис. 4.12 - Пропоновані концентрації: а) двоокису азоту; б) окису вуглецю; в) завислих речовин

Як бачимо, наша модель і в даному випадку зберігає логіку динаміки концентрацій шкідливих викидів.

Запропонована модель відображає тенденції концентрацій шкідливих викидів. При врахуванні інтенсивності транспортного потоку по роках можна зробити висновок, що розроблена модель відображає динаміку концентрацій шкідливих викидів та може бути використана для регулювання інтенсивності руху транспортних потоків.

#### 4.5. Програмний комплекс для ідентифікації інтервальної моделі динаміки концентрації шкідливих викидів

Програмний комплекс був розроблений для реалізації методу параметричної ідентифікації дискретної динамічної моделі динаміки концентрації шкідливих викидів на основі інтервальних даних засобами комп'ютерного моделювання [11, 86-87, 93] із використанням ПК конфігурації Pentium III, 667 МГц, 256 Мб (блок-схема методу наведена на рис. 4.13) і є одним з модулів загального програмного комплексу, який призначений для функціонування бази даних «*EcoDB*»:

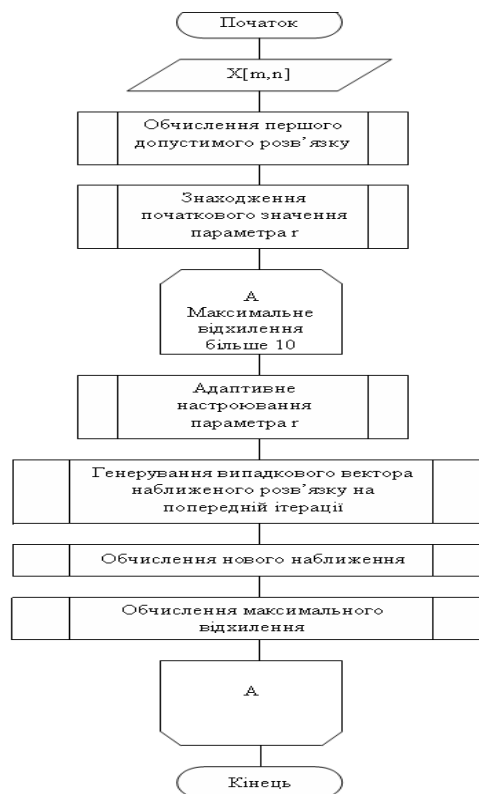


Рис. 4.13 - Блок-схема методу параметричної ідентифікації

Даний програмний комплекс складається з 5 головних модулів (рис. 4.14):

1. модуль обчислення початкового наближення допустимого розв'язку ІСЛАР;
2. модуль адаптивного настроювання параметра  $r$ ;
3. модуль обчислення максимального відхилення;
4. модуль генерування випадкового вектора наближеного розв'язку;
5. модуль обчислення нового обмеження.

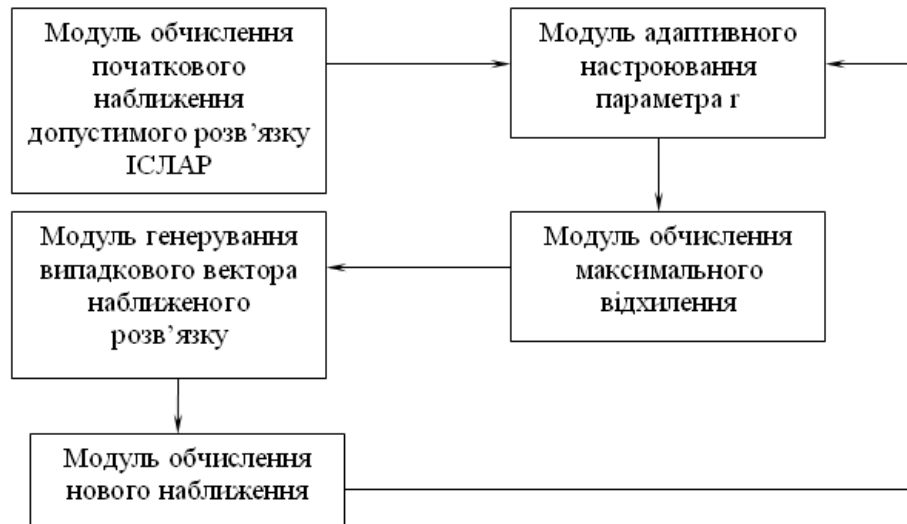


Рис. 4.14 - Головні модулі програмного комплексу

Модуль обчислення початкового наближення допустимого розв'язку ІСЛАР полягає в знаходженні оберненої матриці та перемноженні цієї матриці на матрицю-вектор.

Для знаходження оберненої матриці було вибрано наступний підхід:

1. Створюємо матрицю рівну одиничній, розмірність якої відповідає розмірності вибраного насиченого блоку  $(n \times n)$ .
2. За допомогою елементарних перетворень: додавання рядків, множення рядків на число, перестановка стовпців і рядків приведемо вхідну матрицю до одиничної. При цьому, паралельно, ті ж перетворення проводяться і з новою матрицею.
3. Результат - нова матриця буде оберненою матрицею до вхідної.

Розглянемо пункт 2 детальніше. Дана операція є циклічною з кількістю кроків відповідно до розмірності вхідної матриці. Кожна ітерація циклу побудована наступним чином:

1. На кожній ітерації вибираємо елемент головної діагоналі матриці  $a_{ii}$ . Якщо він рівний нулю, то ми шукаємо в матриці ненульовий елемент. Причому шукаємо його тільки в прямокутнику  $(i, i, n, n)$  матриці  $A$ . Якщо він знайдений і його координати  $(i2, j2)$ , то міняємо місцями  $i$ -ту стрічку з  $i2$ -ю, і  $j$ -й стовпчик з  $j2$ -м. Ті ж перестановки робимо в одиничній матриці.
2. Ділимо  $i$ -й рядок матриць на елемент  $a_{ii}$ . Таким чином елемент  $a_{ii}$  рівний 0.

3. За допомогою поділу  $i$ -о рядка матриці  $A$  на певний коефіцієнт, з останніх її стрічок обнуляємо всі елементи, що стоять вище і нижче головної діагоналі.

Після отримання оберненої матриці відбувається перемноження цієї матриці на вектор верхніх меж виходів – це і буде знайдене початкове наближення до допустимого розв'язку ІСЛАР.

Модуль адаптивного настроювання параметра  $r$  відбувається наступним чином:

1. Знаходяться всі варіанти розв'язків для вибраного насиченого блоку (використовуємо той, що і при знаходженні початкового наближення) системи, тобто відбувається цикл, в якому перемножуємо обернену матрицю на всі можливі комбінації меж виходів.

2. В наступному циклі знаходимо всі відстані (діагоналі) між отриманими розв'язками і виділяємо мінімальну.

3. Знаходимо параметр  $r$ , який рівний половині мінімальній діагоналі.

4. Поділ визначеного параметру  $r$  при певних умовах, які задаються під час пошуку допустимого розв'язку ІСЛАР.

В модулі обчислення максимального відхилення відбувається знаходження всіх відхилень ширини прогнозного коридору від коридору експериментальних даних і виділення максимального.

Модуль генерування випадкового вектора наближеного розв'язку складається з наступних кроків:

1. Генерується масив випадкових відхилень  $g$ . Для цього використовується функція  $random()$ , яка забезпечує нормальний розподіл випадкових чисел.

2. Для забезпечення генерування випадкових чисел на інтервалі  $[-1,1]$ , випадкове число генерується в межах від 0 до 200, для цього віднімаємо від нього 100 і ділимо на 100 і в результаті отримуємо число в потрібних межах з точністю до сотої долі.

Модуль обчислення нового наближення:

1. Знаходження  $R$ : корінь з суми квадратів згенерованих випадкових чисел.

2. Знаходження  $\xi$ : перемножуємо  $r$  на згенеровані випадкові числа поділені на  $R$ .

3. Знаходження нового наближення до допустимого розв'язку: до попереднього наближення додаємо  $\xi$ .

Для запуску програми на комп'ютер достатньо в стрічці меню бази даних «*EcoDB*» вибрати пункт меню «**Моделювання**».

Дана програма передбачає такі етапи виконання:

1. звернення до бази даних;
2. зчитування необхідних для моделювання даних;
3. обчислення параметрів моделі;
4. виведення знайдених параметрів на екран;
5. графічна демонстрація даних моделювання;
6. збереження вхідних та вихідних даних.

Перший етап роботи з програмою – задання даних. Після запуску програми з бази даних «*EcoDB*» з'являється форма задання даних (рис.4.15).

Рис. 4.15 - Форма задання даних

На даній формі потрібно:

1. вказати період моделювання (з, по які роки);
2. вказати точність даних, тобто з якою конкретизацією по періоду дані будуть опрацьовуватись(дні, місяці, тощо);
3. задати похибку задання вихідних даних;
4. задати розмірність задачі моделювання (рис. 4.16).

Програмний комплекс

Розмірність задачі моделювання

Кількість вхідних параметрів

Кількість спостережень

Готово

Рис. 4.16 - Форма задання розмірності моделі

Коли розмірність моделі задана – натискаємо кнопку «Готово» і повертаємось на попередню форму, на якій виведеться задана розмірність.

Коли форма задання даних заповнена – натиснути кнопку «Далі». Також можна вийти з програми, натиснувши кнопку «Вихід».

Якщо натиснута кнопка «Далі» програма виводить наступну форму (рис. 4.17) – форму зчитування даних з бази даних «EcoDB» і представлення їх в інтервальному вигляді.

Програмний комплекс

Файл Довідка

Бродівська-Збаразька-Довга

NO<sub>2</sub>

Вхідні дані у інтервальному вигляді

0.0315;	0.0585
2.94;	5.46
0.1302;	0.2418
0.1183;	0.2197
3.57;	6.63
0.1372;	0.2548
0.0546;	0.1014
3.171;	5.889
0.1225;	0.2275
0.0665;	0.1235
3.066;	5.694
0.1197;	0.2223
0.0602;	0.1118
3.36;	6.24
0.1267;	0.2353
0.0728;	0.1352
3.521;	6.539
0.1309;	0.2431

Далі

Рис. 4.17 - Форма зчитування даних

На даній формі необхідно вказати об'єкт вимірювання і вибрати речовину, по якій буде здійснюватись представлення її значень в інтервальному вигляді.

Після того, як дані для реалізації програмного модуля зчитані з бази даних і перетворені в інтервальні – натискаємо кнопку «Далі» і переходимо до наступної форми – задання інтенсивності транспортного потоку (управління) (рис. 4.18).

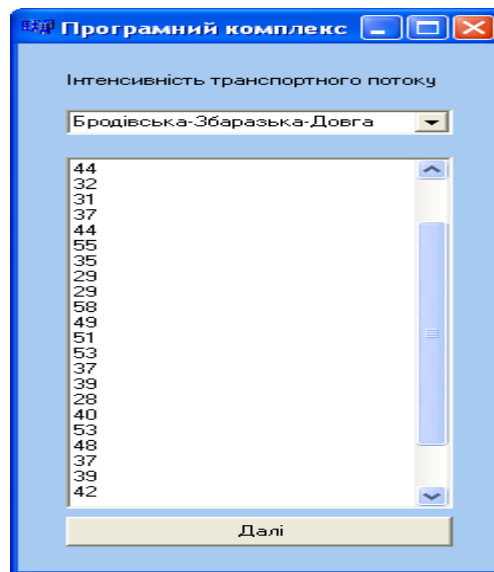


Рис. 4.18 - Форма для задання управління

Другий етап роботи програми – дані зчитані по всіх речовинах і автоматично додані програмою. Після цього, натиснувши кнопку «Графік», програма почне опрацювання даних. Даний процес може зайняти декілька хвилин часу в залежності від обсягів введеної інформації і від розмірності задачі моделювання.

Третій етап роботи програми – це виведення результату. Після обробки даних програма видасть наступні результати:

1. графічне відображення коридору експериментальних даних  $[\vec{x}_{k+1}]$  та прогнозного коридору  $[\hat{\vec{x}}_{k+1}]$ ;
2. значення ідентифікованих параметрів моделі, а також саму модель.

Дані по кожному об'єкту і по кожній речовині відображаються на окремих графіках. Щоб перейти до наступного графіку необхідно, користуючись кнопками навігації, вибирати наступний об'єкт чи речовину. Форма відображення графіків наведена на рис. 4.19.



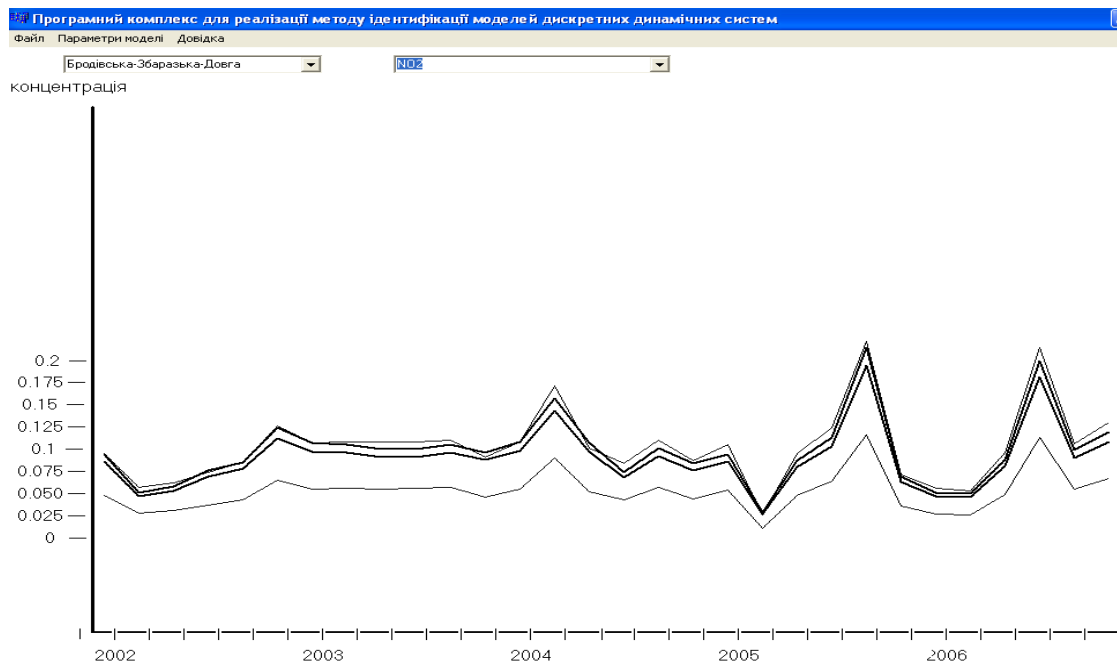


Рис. 4.19 - Форма перегляду графіків моделі

Щоб переглянути параметри моделі, які ми ідентифікуємо: матриці параметрів моделі  $G$  та  $Q$  потрібно у верхньому меню вибрати пункт «Параметри моделі». Форма перегляду ідентифікованих параметрів моделі зображена на рис. 4.20.

Рис. 4.20 - Форма виводу ідентифікованих параметрів моделі

Також на даній формі можна переглянути змодельовані інтервальні значення по кожній речовині і по кожному об'єкту.

Дані кожного етапу методу ідентифікації параметрів можна зберегти за допомогою головного меню, вибравши пункт меню «**Файл**» – «**Зберегти дані**» і вказавши шлях, куди зберігати дані. Дані можна зберігати як ті, що були зчитані з бази даних, так і ті, що вже обчислені.

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

1. Визначено основні задачі екологічного моніторингу на прикладі СЕС м. Тернополя.
2. Проаналізовану структуру бази інтервальних даних «*EcoDB*».
3. На основі розробленого методу параметричної ідентифікації моделей лінійних динамічних систем удосконалено інтервальні моделі для прогнозування концентрацій шкідливих викидів в атмосферу, які, на відміну від існуючих, враховують динаміку процесу, інтенсивність транспортних потоків та забезпечують прогноз концентрацій шкідливих викидів із заданою точністю в межах інтервальних похибок.
4. Проведено аналіз адекватності отриманої моделі динаміки концентрацій шкідливих викидів, а також досліджено її прогностичні властивості.
5. Створено програмний комплекс для параметричної ідентифікації моделей лінійних динамічних систем на основі аналізу інтервальних даних і використано його для розв'язування задач макромодельовання перехідних режимів трифазних трансформаторів, а також для задач екологічного моніторингу.

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розв'язано важливу науково-технічну задачу створення методу параметричної ідентифікації лінійних динамічних систем з дискретним часом, у випадку адитивних та обмежених за амплітудою похибок в каналах вимірювань, який відзначається низькою обчислювальною складністю і дозволяє будувати допускові коридори інтервальних моделей. Розроблений метод, алгоритм його реалізації та програмне забезпечення дозволяє будувати математичні моделі лінійних дискретних динамічних систем з дискретним часом на основі інтервальних даних у різних сферах, зокрема для дослідження перехідних режимів в електричних колах, для задач екологічного моніторингу та ін.

Основні наукові результати та висновки дисертаційних досліджень:

1. Проведено аналіз методів розв'язування задач параметричної ідентифікації лінійних динамічних систем з дискретним часом. Наведено коротку характеристику існуючих методів, які базуються на гіпотезі про випадковість похибок в експериментальних даних. Показано, що за умов малої вибірки даних, стохастичні характеристики випадкових даних отримати неможливо і обмеженість за амплітудою випадкових похибок є їх єдиною характеристикою.

2. Обґрунтовано застосування теоретико-множинного та інтервального підходів для параметричної ідентифікації лінійних дискретних динамічних систем у випадку обмежених за амплітудою випадкових похибок в каналах вимірювань. Показано, що існуючі методи параметричної ідентифікації в межах теоретико-множинного підходу відзначаються високою обчислювальною складністю і не придатні для побудови допускових коридорів інтервальних моделей динамічних систем із великою кількістю параметрів стану.

3. На основі аналізу інтервальних даних вперше встановлено, що у просторі параметрів множина допустимих оцінок параметрів моделей лінійних динамічних систем у випадку адитивних та обмежених за амплітудою похибок в каналах вимірювання є опуклим многогранником і породжує множину рівнозначних адекватних інтервальних моделей, що дозволило розробити принципи побудови

методу та алгоритму параметричної ідентифікації інтервальних моделей лінійних динамічних систем.

4. Вперше, на основі аналізу інтервальних даних, отримані співвідношення для вибору початкового наближення до допустимого вектора параметрів інтервальних моделей лінійних динамічних систем та для оцінки якості поточного наближення, що дозволило розробити метод параметричної ідентифікації цих моделей, який, на відміну від існуючих, відзначається низькою обчислювальною складністю, високою збіжністю, придатний для розв'язування задач високої розмірності та забезпечує побудову допускових коридорів інтервальних моделей.

5. Вперше отримано співвідношення для початкового вибору параметра пошуку допустимого розв'язку в методі параметричної ідентифікації лінійних динамічних систем з інтервальним представленням даних, що дозволило розробити процедуру адаптивного настроювання цього параметру і тим самим підвищити збіжність і знизити часову складність методу.

6. На основі розробленого методу параметричної ідентифікації моделей лінійних динамічних систем удосконалено інтервальні моделі для прогнозування концентрацій шкідливих викидів в атмосферу, які, на відміну від існуючих, враховують динаміку процесу, інтенсивність транспортних потоків та забезпечують прогноз концентрацій шкідливих викидів із заданою точністю в межах інтервальних похибок. Побудовані моделі використовувалися санітарно-епідеміологічною станцією м. Тернополя для дослідження збитків, нанесених екологічному середовищу внаслідок підвищення інтенсивності транспортних потоків.

7. Створено програмний комплекс для параметричної ідентифікації моделей лінійних динамічних систем на основі аналізу інтервальних даних і використано його для розв'язування задач макромодельовання перехідних режимів трифазних трансформаторів, а також для задач екологічного моніторингу.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
2. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 360 с.
3. Астафьев Н.М. Линейные неравенства и выпуклость. – М.: Наука, 1982. – 153 с.
4. Бакан Г.М. Аналитический синтез алгоритмов гарантированного оценивания состояний динамических процессов // Проблемы управления и информатики. – 2003. - № 3. – С. 38-55.
5. Бакан Г.М., Куссуль Н.Н. Аппроксимация пересечения четкого и нечеткого множеств в методе размытых эллипсоидов // Кибернетика и вычислительная техника.- 1995. – Вып.105. – С. 18 – 27.
6. Бакан Г.М., Куссуль Н.Н. Размытые эллипсоидальные множества в задачах нестохастического оценивания // Автоматика. – 1989. - №5. – С. 11 – 17.
7. Бакан Г.М., Шолохов А.В. К определению множества достижимости линейной управляемой системы // Проблемы управления и информатики.- 2005. - №4. – С. 15 – 24.
8. Бакан Г.М., Куссуль Н.Н. Теоретико-множественная идентификация линейных объектов в классе размытых эллипсоидальных множеств // Автоматика.- 1990. - №4.- С. 72 - 78.
9. Барткова Л.М., Дивак М.П. Реалізація методики вивчення комплексного впливу господарської діяльності підприємств на соціо-екологічне середовище для АТП-16127 міста Тернополя // Вісн. Тернопільського держ. техніч. ун-ту.- 1999.- Т. 4. - №4. -С.166-170.
10. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 631 с.
11. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: ИЛ, 1958.
12. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. – 2002. – 406 с.
13. Бобровски Д. Введение в теорию динамических систем с дискретным

временем. – 2006. – 360 с.

14. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений: Учебник для вузов – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1983. – 223 с.

15. Бочков А. Ф., Милевский М. В. Оценивание параметров модели для объектов с интервальной неопределенностью в выходных параметрах. - Москва, 1988. - 23 с. – Деп. в ВИНТИ, №926-B88.

16. Бочков А. Ф., Милевский М. В. Интервальные модели в задачах идентификации статистических объектов с неопределенностью. – Красноярск: 1990 (Препринт / ВЦ СО АН СССР; №17). – С. 7-10.

17. Бочков А.Ф., Воцинин А.П., Сотиров Г.Р. Интервальный анализ как альтернатива регрессионному анализу // Заводская лаборатория. – 1990. - №7. – С. 76 – 81.

18. Ватолин А. А. О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и матем. физики. - 1984. - Т. 24. -С. 1629-1637.

19. Волосов В.В. Об одном способе построения эллипсоидальных оценок в задачах нестохастической фильтрации и идентификации параметров управляемых систем // Автоматика. – 1991. - № 3. – С. 24-32.

20. Волосов В.В. К построению параметрических семейств эллипсоидальных оценок и их оптимизации в задачах нестохастической идентификации параметров и состояния многомерных дискретных объектов управления // Проблемы управления и информатики. – 1996. - № 4. – С. 37 - 54.

21. Волосов В.В., Калита А.С., Нижниченко Е.А. Исследование одного вида нестохастических алгоритмов идентификации с помощью прямого метода Ляпунова // Автоматика. – 1989. - № 3. – С. 34-42.

22. Волосов В.В., Одинцова Е.А. К задаче восстановления вектора фазового состояния и идентификации параметров линейных стационарных динамических систем // Автоматика. – 1986. - № 6. – С. 22-29.

23. Волосов В.В., Храмов С.А., Одинцова Е.А. Алгоритмы эллипсоидального оценивания матрицы параметров линейного дискретного

динамического объекта управления // Проблемы управления и информатики. – 1995. - № 1. – С. 63-77.

24. Воцинин А. П. Интервальный анализ: развитие и перспективы // Заводская лаборатория. – 2002. - №1. – С. 118-126.

25. Воцинин А. П. Решение задач оптимизации по интервальным оценкам критерия // Заводская лаборатория.- 1987.- №7. – С. 68 – 71.

26. Воцинин А. П., Дывак М. П. Планирование оптимального насыщенного эксперимента в задачах построения интервальных моделей // Заводская лаборатория. – 1993. - №1. – С.56 – 59.

27. Воцинин А. П., Сотиров Г. Р. Оптимизация в условиях неопределенности. – М.: МЭИ - София: Техника, 1989. – 224 с.

28. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - Москва: Наука, 1967. – 575 с.

29. Глонь О.В., Дубовой В.М. Моделювання систем керування в умовах невизначеностей. - Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2004. – 169с.

30. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302 с.

31. Дивак М.П. Аналіз точності лінійної інтервальної моделі в задачах статичної ідентифікації // Вісн. ДУ “Львівська політехніка”. Автоматика, вимірювання та керування. - 1999.- № 366. - С. 31-35

32. Дивак М.П. Використання насиченого експерименту для оцінювання параметрів інтервальної моделі при аналізі інтервальних даних // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. - 1999. - №2(5).-С.33-36.

33. Дивак М.П. Властивості інтервальних моделей при інтервальній формі їх параметрів // Сб. науч. тр. международного науч.-учеб. центра информ. технологий и систем, науч. совет НАН Украины по пробл. “Кибернетика”. Моделирование и управление состоянием эколого-экономических систем региона. – К., 2001. - С.58-63.

34. Дивак М. П. Теоретичні засади побудови моделей "вхід-вихід" статичних систем методами аналізу інтервальних даних // Дис. Доктора технічних наук. – Тернопіль: Тернопільська академія народного господарства, 2003. – 304 с.

35. Дивак М.П. Метод локалізації гарантованих оцінок в задачах



параметричної ідентифікації // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2000. - №4.-С.12 - 17.

36. Дивак М.П. Обчислювальні аспекти методів локалізації розв'язків задач параметричного оцінювання в умовах обмежених похибок. // Відбір та обробка інформації. - 2002. - №16 (92) - С. 43-47.

37. Дивак М.П. Допустиме оцінювання множини параметрів статичної системи в класі багатомірних еліпсоїдів // Комп'ютинг. – 2002. – Том 1. - №1. – С.108-114.

38. Дивак М.П., Гладій Г.М, Волощук С. В. Проектування інтервальних моделей соціально-екологічних систем на основі нечітких даних // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах: Зб. наук. праць. - 2002. – Вип. 9. – С. 130 – 135.

39. Дивак М.П., Крамар О.В. Алгоритм наближення області параметрів інтервальної моделі в задачах лінійної ідентифікації // Вісн. Тернопільської акад. нар. господарства. - 2000.- №10.- С.98-103.

40. Дивак М.П., Крамар О.В. Ідентифікація параметрів моделі на основі аналізу інтервальних даних // Вісн. Тернопільського держ. технічн. унів.- Тернопіль. - 1999.- Т. 4. - №1.- С.76-80.

41. Дивак М.П., Кобернюк В.П., Франко Ю.П., Пітух І.Р., Цимбалій В.П. Проблеми ідентифікації динамічних систем в умовах інтервальної невизначеності // Вимірювання та обчислювальна техніка в технологічних процесах: Зб. наук. праць.- 2001. – Вип. 8– С. 307 – 310.

42. Дивак М.П., Стахів П.Г. Ідентифікація моделей об'єктів в умовах інтервальної невизначеності на основі методів аналізу інтервальних даних // Пр. міжн. конф. з управління “АВТОМАТИКА-2000”, Львів 11-15 вересня 2000: В 7-ми томах. – Львів: Держ. НДІ інформ. інфраструкт., 2000.-Т. 2. – С. 90 - 97.

43. Дивак М.П., Стахів П.Г., Каліщук І.Я. Множинна ідентифікація параметрів лінійних динамічних систем на основі інтервальних даних // Міжнародний науково-технічний журнал Комп'ютинг, 2004.- Т. 3. – Вип. 3. – С. 58-64.

44. Дивак М.П., Стахів П.Г., Каліщук І.Я. Ідентифікація параметрів моделі “вхід-вихід” динамічних систем на основі інтервального підходу // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2004. – Т. 9. - № 4. – С. 109 – 117.
45. Дивак М.П., Стахів П.Г., Каліщук І.Я. Ітераційний метод пошуку допустимого розв’язку ІСЛАР в задачах ідентифікації параметрів динамічних моделей “вхід-вихід” // Відбір та обробка інформації. - 2005. – Випуск 23 (99). – С. 40-48.
46. Дивак М.П., Стахів П.Г., Максимова І.Я. Удосконалений метод допустимого оцінювання розв’язку ІСЛАР при ідентифікації параметрів динамічних моделей // Відбір та обробка інформації. – 2006. – Випуск 26 (102). – С. 27-35.
47. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. – М.: Мир, 1974.
48. Жуков А.А., Фурасов В.Д. Рекуррентное эллипсоидальное оценивание состояний дискретных систем // Развитие и применение метода функций Ляпунова/ Под ред. В.М.Матросова. – Новосибирск: Наука, 1992. – С. 220-224.
49. Жуков А.А., Фурасов В.Д. Эллипсоидальная аппроксимация и оценивание состояний дискретных систем // Техн. кибернетика. – 1990. - № 2. – С. 121-129.
50. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. Метод пространства состояний. – М.: Наука, 1970.
51. Захаров А.В., Шокин Ю.И. Синтез систем управления при интервальной неопределённости параметров их математических моделей // Докл. АН СССР. – 1988. - Т. 299 - №2. - С. 292-295.
52. Зюзин В. С. Об одном способе отыскания двусторонних интервальных приближений решения системы линейных интервальных уравнений // Дифференциальные уравнения и теория функций. - Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1987. - С. 28-32.
53. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971.
54. Калман Р. Идентификация систем с шумами // Успехи матем. наук. –

1985 – 40. - Вып. 4. – С. 27 – 41.

55. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. - Новосибирск: Наука, 1986. – 222с.

56. Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский матем. журнал. - 1962. - Т. 3 - №5. - С. 701-709.

57. Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Эллипсоидальное оценивание по обобщенному критерию // Автоматика и телемеханика. – 1991. - № 9. – С. 133-145.

58. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. / Пер. с англ., Изд. 2. – 2007. – 472 с.

59. Корноушенко Е.К. Интервальные по координатным оценки для множества достижимых состояний линейной стационарной системы // Автоматика и Телемеханика. – 1980. - Ч.1. - №5. С. 12-22.

60. Кришук В.М., Шило Г.М., Гапоненко М.П. Интервальні методи оптимізації допусків // Вісн. НУ “Львівська політехніка”. Комп’ютерні системи проектування: Теорія і практика.- 1999.- № 373. - С. 196 - 201.

61. Кунцевич В.М. Решение одной оптимальной задачи управления в условиях неопределенности // Проблемы управления и информатики. – 2002. - № 3. – С. 85-100.

62. Кунцевич В.М., Кунцевич А.В. Активная идентификация и управление при ограниченных шумах // Пр. міжн. конф. з управління “АВТОМАТИКА-2000”, Львів 11-15 вересня 2000: В 7-ми томах. – Львів: Держ. НДІ інформ. інфраструкт., 2000.- .-Т. 1. - С .7-13.

63. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Об оптимальном и адаптивном управлении динамическими объектами в условиях неопределенности // Автоматика и телемеханика. – 1979. - №1.- С. 79 – 88.

64. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Получение гарантированных оценок в задачах параметрической идентификации // Автоматика. – 1982. - №4. – С. 49 - 59.

65. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Управление в условиях неопределенности (синтез адаптивных систем управления) // Автоматика. – 1987. - №5. – С. 16 – 26.

66. Куржанский А. Б. Задача идентификации - теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. - 1991. - №4. - С. 3-26.
67. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
68. Куссуль Н.Н. Нечеткий эллипсоидальный наблюдатель состояния пониженного порядка // Проблемы управления и информатики.- 2000. - №5. – С.44 – 51.
69. Куссуль Н.Н., Шелестов А.Ю. Оценивание фазового состояния линейных многомерных динамических объектов с использованием размытых эллипсоидальных множеств // Проблемы управления и информатики. - №1. – 1995. – С. 50-60.
70. Лакеев А.В., Носков С.И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Сиб. математ. журнал. - 1994. - Т. 35 - №5. - С. 1074-1084.
71. Лебедев А.Н. Моделирование в научно-технических исследованиях. – М.: Радио и связь, 1989. – 224с.
72. Лисенков А.Н. О методах идентификации и управления в условиях неопределенности // Межд. конф. по интерв. и стох. методам в науке и технике. ИНТЕРВАЛ – 92: Сб. тр. – Москва, 1992.- Т.1.- 92 –96.
73. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. – М.: Физ. мат. изд., 1962. – 187 с.
74. Литвин І.С., Дивак М.П., Гладій Г.М. Інформаційно-картографічна система контролю екологічної ситуації // Тез. доп. 1 Української конференції з автоматичного керування “Автоматика 94”. – К.: - 1994.
75. Лычак М.М. Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода // Проблемы управления и информатики .- 1999. - №5. – С. 34-41.
76. Лычак М.М. Синтез дискретных адаптивных систем управления на основе теоретико- множественных моделей неопределенности // Дис. докт. физ. – мат. наук.- Киев: Ин- т киб., 1995.
77. Лычак М.М., Шевченко В.Н., Царук Н.П. Решение задачи линейного программирования на основе множественного подхода // Проблемы управления и информатики. –

2005. - №4. – С. 103-111.

78. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователей: Пер. с англ. / Под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 432 с.
79. Льюнг Л. О точности модели в идентификации систем // Известия АН. Техническая кибернетика, №6. – М.: Наука, 1992. – С. 55-64.
80. Максимова І.Я. Інтервальна модель динаміки концентрацій шкідливих викидів // Вісник Тернопільського державного технічного університету
81. Марков С.М. Некоторые задачи интерполяции, идентификации и оценивания для интервальных данных // Межд. конф. по интерв. и стох. методам в науке и технике. ИНТЕРВАЛ – 92: Сб. тр. – Москва, 1992.- Т.1.- 103.
82. Математическая энциклопедия. Том 2. - Москва: Советская Энциклопедия, 1979.
83. Математический энциклопедический словарь. - Москва: Наука, 1995.
84. Мессарович М., Такахара Я. Общая теория систем: Математические основы. – М.: Мир, 1978. – 311 с.
85. Налимов В.В. Теория эксперимента. М.: Наука, 1971. – 207с.
86. Недашковський М.О. Збалансовані обчислення для задач лінійної алгебри в комп'ютерних мережах // Вісн. Тернопільської акад. нар. господ. - 2000. - №10.- С. 9-14.
87. Пакеты прикладных программ: математическое моделирование / АН СССР. – М.: Наука, 1989. – 128с.
88. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрилидзе З.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961.
89. Росоловські Є., Гоголюк О., Стахів П., Козак Ю. Побудова макромоделі силового трансформатора // Вісник Нац. Ун-ту «Львівська політехніка» «Електроенергетичні та електромеханічні системи». – Львів, 2003. - № 485. – С. 131-138.
90. Растрингин Л.А., Маджаров Н.Е. Введение в идентификацию объектов управления. – М.: Энергия, 1987. – 216 с.
91. Сейдж А., Мелс Дж. Идентификация систем. – М.: Наука, 1976. – 495с.

92. Сеньо П.С., Дивак М.П., Гладій Г.М., Венгерський П.С. Інтервальні моделі в медико - екологічному прогнозуванні // Вісн. Львівського державного університету. Задачі та методи прикладної математики. – 1995.- Вип. 41. – С.105-108.
93. Справочник по типовым программам моделирования / А.Г. Ивахненко, Ю.В. Коппа, В.С. Степашко и др. / Под ред. А.Г. Ивахненко. – К: Техника, 1980. – 150с.
94. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / Пер. с англ. Под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1985. 296 с.
95. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
96. Тихонов А.Н., Уфимцев М.В. Статистическая обработка результатов экспериментов / Уч. пособие . – М.: Изд-во Московского госуверситета, 1988. – 174 с.
97. Томашевський В.М. Моделювання систем. – К.: Видавнича група ВНУ, 2005. – 352 с.
98. Цыпкин Я.З. Информационная теория идентификации. – М.: Наука, 1995. – 336 с.
99. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М.: Наука, 1977. – 351 с.
100. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 320 с.
101. Черноусько Ф.Л., Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов // Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1980. - №3. - С. 3 – 11.
102. Черноусько Ф.Л. Про оптимальне еліпсоїдалне оцінювання для динамічних систем, на які діють невизначені збурення // Кибернетика и системный анализ. – 2002. - № 2. – С. 85-95.
103. Шайдуrow В.В., Шарый С.П. Решение интервальной алгебраической

задачи о допусках: Препр./ ВЦ СО АН СССР, №5. – Красноярск: 1988. - 27 с.

104. Шарая И.А. О максимальной внутренней оценке множеств решений интервальных линейных систем // Вычислительные технологии. - 1998. - Т. 3 - №2. - С. 55-66.

105. Шарый С. П. Анализ чувствительности интервальных линейных статических систем // Труды XI международной Байкальской школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск, Байкал, 5-12 июля 1998 г., секция 4. - Иркутск ИСЭМ, 1998. - С. 187-190.

106. Шарый С.П. Алгебраический подход во "внешней задаче" для интервальных линейных систем // Вычислительные Технологии. - 1998. - Т. 3, №2. - С. 67-114

107. Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределённостью // Известия РАН. Теория и системы управл. - 1997. - №3. - С. 51-61.

108. Шарый С.П. Внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем // Вычислительные Технологии. - 1999. - Т. 4, №4. - С. 82-110.

109. Шарый С.П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение // Дис. доктора физ. –математ. наук. - Новосибирск: Ин-т вычисл. Технологий СО РАН, 2000. - 322 с.

110. Шарый С.П. Интервальный анализ: прошлое, настоящее и будущее // Наука в Сибири. - 1997. - №41 (2127). - С. 3.

111. Шарый С.П. Линейные статические системы с интервальной неопределенностью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации. Препр. // Вычислительные Технологии. - 1995. – Т.4, № 13. – С. 64-80.

112. Шарый С.П. Новый подход к анализу статических систем с интервальной определённостью в данных // Вычислительные Технологии. - 1997. - Т. 2 - №1.- С. 84-102.

113. Шарый С.П. О разрешимости линейной задачи о допусках // Interval Computations.- 1991. - №1. - С. 92-97.

114. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. – Новосибирск: Наука, 1981. – 116 с.
115. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975.- 531 с.
116. Яковлев А.Г. Интервальные вычисления – предмет исследований и полезный инструмент // Интервальные вычисления. – 1991. - №1. - С. 10 – 26.
117. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-Valued Analysis. - Boston: Birkhauser, 1990.
118. Alefeld G., Mayer G. Interval analysis: theory and applications / Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2000. - № 121. – P. 421-464.
119. Brockett R.W. Finite dimensional systems. – New York: Wiley, 1970.
120. Design of experiments and data analysis: New trends and results / Letzky E.K., Voshinin A.P., Dyvak N.P., Simoff S.J., Orlov A.I., Gorsky V.G., Nikitina E.P., Nosov V.N. / Edited by E.K. Letzky. – Moscow.: ANTAL., 1993 – 192p.
121. Dyvak M., Hladiy G. Application interval methods in static identification of the medical and ecological conditions of on average industrial city // Ref. IV krajowa konf. “Modelowanie Systemow Biologicznych”.- Krakow: 1995. -P. 95-99.
122. Dyvak M., Hladiy G., Dnistrian S. The geographic information systems for control of medical and ecological conditions of on average industrial city // Materialy 8 krajowa konf. naukowa “Uniwersalnosc cybernetyki” .- T.1.- Krakow: 1996.-P.3-4.
123. Dyvak M., Hladiy G., Zhang D. Identification socio - ecological system and design of interval model on the basis fuzzy – data // Abstracts 2<sup>nd</sup> IMACS International Multiconference CESA’98 “Computational engineering in systems applications”. – Tunisia: 1998. P.234.
124. Dyvak M., Stakchiv P., Calishchuc I. Interval parameter’s identification of the linear dynamic system on the basis of interval data // Proc. of the VIth International Workshop Computational Problems of Electrical Engineering. – Zakopane, Poland, September 1-4, 2004.- P. 66-68.
125. Dyvak M., Stakchiv P., Calishchuc I. Identyfikacja dynamicznego modelu obwodu elektrycznego na podstawie danych interwałowych // Przegląd Elektrotechniczny , Nr. 2/2005. – P. 60-62.
126. Dyvak M., Kalishchuk I. Tolerance estimation of the parameters of “input-



output” dynamic model on the basis of interval data analysis // Proceedings of the 8-th International Conference CADSM’2005. - Lviv-Polyana, Ukraine, 23 - 26 February 2005. – P. 151-153.

127. Dyvak M., Stakchiv P., Kalishchuk I. The method of finding of tolerance solution of ISLAE in the tasks of parameters identification of “input-output” dynamic models // Proceedings of the XIII Internatinal Symposium on Theoretical Electrical Engineering ISTET’05, July 4-7, 2005, Lviv, Ukraine. – P. 264-267.

128. Dyvak M., Stakchiv P., Kalishchuk I. Algorithm of tolerance identification of “input-output” interval dynamic model // Proceedings of the Third IEEE Workshop on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications IDAACS’2005, Sofia, Bulgaria, September 5-7, 2005. – P. 488-491.

129. Dyvak M., Kalishchuk I., Martsenyuk Ye. Interval identification of dynamic model of realization of bakery produce // Proceedings of the International Conference Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science TCSET’2006. – Lviv-Slavsko, Ukraine, February 28 – March 4, 2006. – P. 159-163.

130. Dyvak M., Martsenyuk Ye., Kalishchuk I. Research of properties of area of parameters of interval discrete model of dynamic system // Proceedings of the VII International Workshop of Computational Problems of Electrical Engineering CPEE’2006. – Odessa, Ukraine, August 27-30, 2006. - P. 26-30.

131. Dyvak M., Stakchiv P., Maksymova I., Potravych O. Identification of the dynamic models by the adaptive method of tolerance estimation // Proceedings of the IX-th International Conference CADSM’2007. - Lviv-Polyana, Ukraine, 20 - 24 February 2007. - P. 365-369.

132. Eilenberg S. Automata, languages and machines, vol. A. – New York: Academic Press, 1974.

133. Fuhrmann P. Algebraic system theory: An analyst’s of view // J. Franklin Inst. – 1976. – V. 301. – P. 521-540.

134. Fuhrmann P. Algebraic methods in system theory // R.E. Kalman Festschrift. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – P. 233-265.

135. Fuhrmann P. Duality in polynomial models with some applications to

geometric control theory // IEEE Trans. Autom. Control. – 1981. – V. AC-26. – P. 284-295.

136. Fuhrmann P. Linear systems and operators in Hilbert space. – New York: McGraw-Hill, 1981.

137. Hadjihassan S., Walter E., Pronzato L. Quality improvement via optimization of tolerance intervals during the design stage // Applications of Interval Computations / Kearfott R. B., Kreinovich V., eds. - Dordrecht: Kluwer, 1996. - P.91-131.

138. Ho B.L., Kalman R.E. Effective construction of linear state-variable models for input/output function // Proc. Third Allerton Conf., 1965. – P. 449-459; Regelungstechnik. – V. 14, Jahrg. Heft. 12. – P. 545-548.

139. Kalman R.E. Realization theory of linear dynamical systems // Control Theory and Topics in Functional Analysis, Vol. II. – Vienna: International Atomic Energy Agency, 1976. – P. 235-236.

140. Kalman R.E. Mathematical description of linear dynamic systems // SIAM J. Contr. – 1963. – V. 1. – P. 152-192.

141. Kalman R.E. Lectures on controllability and observability // CIME Summer Course, 1968. - Cremonese, Roma, 1969.

142. Kalman R.E., Bertram J.E. General synthesis procedure for computer control of single and multi-loop linear systems // Trans. AIEEE. – 1959. – 77 II. – P. 602-609.

143. Kalman R.E., Rouchaleau Y. Realization theory of linear systems over commutative ring // Automatica, Languages and Program. – Amsterdam e.a., 1974. – P. 61-65.

144. Kearfott R.B. Rigorous global search: continuous problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

145. Ljung L., Soderstrom T. Theory and practice of recursive identification – Cambr., Mass: MIT Press, 1983. – 529 p.

146. Moore R.E. Interval Analysis. - Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966. – 145 p.

147. Moore R.E. Methods and Applications of Interval Analysis. - SIAM, Philadelphia, 1979 – 190 p.

148. Moore R.E. Interval methods for nonlinear systems // Fundamentals of numerical computation (computer-oriented numerical analysis). Computing Supplement. – Wienn: Spring Verbag, 1980. – P. 113-120.
149. Rohn J. Input-output model with interval data // Econometrica. - 1980. - Vol. 48.- P. 767-769.
150. Shary S.P. Solving the linear interval tolerance problem // Mathematics and Computer in Simulation. – 1995. – V. 39. – P. 53-85.
151. Walter E., Pronzato L. Identification of parametric model from experimental data. - London, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, Tokyo: Springer, 1997. – 413 p.