КОМПЬЮТЕРНАЯ
МАТЕМАТИКА

УДК 518.25

Л.М. СЕМЧИШИН

КЛЕТКОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С БЛОЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ В МОДЕЛЯХ В. ЛЕОНТЬЕВА

Предлагается новый подход к решению клеточных алгоритмов для систем линейных алгебраических уравнений с блочными элементами. Описаны блочные модели Леонтьева и Форда. Рассмотрено блочный вариант второго алгоритма отсечных систем, а также описан блочный алгоритм для трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений. Проведено подсчет количества операций, нужных для реализации блочного варианта второго алгоритма отсечных систем на ЭВМ, а также количества операций во время численной реализации алгоритма умножения матриц. Показана эффективность данного алгоритма.

Введение. Математическое моделирование в научных исследованиях и практических применениях является неотъемлемой чертой технического прогресса. Его эффективность определяется производительностью ЭВМ, качеством вычислительных алгоритмов и программ, которые используются. Вычислительные методы алгебры – один из базовых инструментов при моделировании на ЭВМ и важная часть программного обеспечения для компьютеров всех поколений.

В значительном количестве прикладных задач возникает необходимость решения клеточных алгоритмов для систем линейных алгебраических уравнений с блочными элементами в моделях В. Леонтьева. Решению таких систем посвящены работы В.В. Воеводина [1] , В.В. Воеводина, Ю.А. Кузнецова [2], А.Ф. Волошина, Н.Б. Чорней [3], Дж. Дзвенпорт, И. Сирэ, Э. Турнье [4], Х.Д. Икрамова [5], М.О. Недашковского, В.Я. Скоробагатько [6] ,

В данной работе рассматривается решение клеточных алгоритмов с некоторыми характерными способами заполнения.

Описание блочных моделей Леонтьева, Форда. Системы линейных алгебраических уравнений широко применяются на практике. Обусловлено это многими объективными факторами, среди которых можно выделить два основных. Во-первых, значительное количество задач из экономики имеет свойства делимости и аддитивности. Во-вторых, в тех случаях, когда математические модели нелинейные, их можно линеаризировать, т. е. приближенно заменить адекватной линейной моделью. В этом случае уступим точности оценки ситуации и сможем осуществить необходимые вычисления.

Метод "затраты-выпуск" это мощный и эффективный инструмент для реализации экономико-технических проектов государственного и межгосударственного масштаба. В определенной степени, по анализу "затраты-выпуск" можно сделать вывод о динамике развития экономики в общем, что используют для программного развития передовые государства с рыночной экономикой. Тем не менее, многосекторная модель – это модель структуры капитала, перенесенная на макроэкономический уровень, а "затраты-выпуск" по областям – статический аспект выпуска и распределения большого количества разнородной продукции без учета причинно-следственных связей. По значительному возрастанию объемов производства и резкого изменения его экономической структуры стали очевидными ограниченные возможности этого метода для решения современных экономических проблем. Примером простейшей линеаризованной модели является замена функции двух сменных (которая, например, выражает критерий эффективности) ее развитием в ряд Тейлора [7]:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_1}(x_i - x_i^{(0)}) + 0\left(\left\|x - x^0\right\|^2\right). \qquad (1)$$

Отбросив $0\left(\left\|x - x^0\right\|^2\right)$ и положив $f(x_1, x_2) = c$, получим линейное уравнение, которое отвечает фиксированному значению функции (1). Укажем, что математические модели реальных задач описываются системами линейных алгебраических уравнений, которые имеют большую измеримость [8]. Они содержат десятки, сотни или тысячи уравнений и неизвестных, определения которых требуют использования электронно-вычислительной техники. Например, если в ситуации, предложенной Франсуа Кене, для вычислений достаточно системы трехлинейных уравнений, то в расчетах экономики современного предприятия, которое выпускает десятки единиц продукции, их будет уже не меньше количества конечного продукта.

Второй особенностью применения линейных уравнений является тот факт, что почти все коэффициенты матрицы системы уравнений вычисляют приблизительно. Поэтому вычисления нужно выполнять с определенной точностью (0,1%, четыре знака после запятой и т. п.). Выбирая методы решения системы уравнений, следует ориентироваться на те, которые не ухудшают точности вычислений.

Третьей особенностью практических линейных моделей является блочная структура коэффициентов матрицы системы уравнений, среди которых есть много нулей или таких, что повторяются. Например, модель планирования может характеризоваться блочной структурой (рис. 1), где E – единичные подматрицы, а заштрихованные прямоугольники – блоки подматрицы с ненулевыми коэффициентами. Остальные элементы – нули.

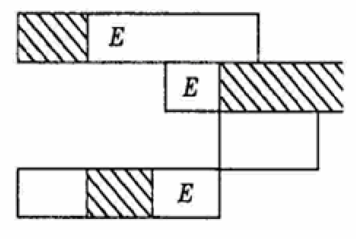

РИС. 1. Блочная структура модели планирования

В 20–30-х годах XX столетия американский экономист Василий Леонтьев положил начало систематизированному исследованию структуры экономики в частично разукрупненном виде. При таком подходе производственные процессы в экономике розукрупняются к уровню N секторов (областей) производства, хотя и не к уровню отдельных предприятий или фирм, и анализируются перемещения продуктов, товара, услуг между этими областями. Укажем, что "чистая область" является некоторой экономической абстракцией. Она не обязательно существует реально в виде некоторого министерства или объединения. Например, под областью "электроэнергетика" можно понимать совокупность всех электростанций независимо от ведомственной принадлежности. Такая отдаленность областей затрудняет практическое применение добытых результатов, но, с другой стороны, дает возможность провести детальный анализ технологической структуры общественного производства и распределения.

Основные предположения модели, которые в дальнейшем будем называть моделями Леонтьева, такие:

1) в экономической системе вырабатывается, покупается, потребляется и инвестируется n видов продукции, которые будем обозначать индексами 1, 2, 3,..., n;

2) каждая область вырабатывает лишь один вид продукции. Итак, общее производство разных товаров исключается. Каждая область вырабатывает разные товары и поэтому область, которая вырабатывает продукцию вида i, будем обозначать индексом 1, 2, 3,..., n;

3) под производственным процессом в каждой области будем понимать преобразование некоторых (возможно, всех) видов продукции, взятых в определенных количествах, на некоторое количество продукции одного или другого вида. При этом полагается, что соотношения израсходованной и выпущенной продукции являются постоянными.

В модели Леонтьева такой характер преобразований можно описать так: если для производства единицы продукции в j-й области нужно израсходовать a_{ij} единиц i-й продукции, то выпуск λ единиц j-й продукции требует затрат λa_{ij} единиц i-й продукции $(i = 1,...,n)$. Эти n величин a_{ij} называют затратными (или технологическими) коэффициентами. Допускается, что они постоянные. По терминологии экономистов в модели сохраняется постоянство удельного выпуска при постоянных пропорциях затрат (независимо от масштабов производства).

Обозначим X_i – общий объем продукции, выпущенной областью под номером i за единицу времени (например, год). Эти величины определяют валовой выпуск i-й области. Часть валового выпуска потребляется в виде затрат, необходимых для производства. Тогда конечную продукцию Y_i запишем как различие между валовым выпуском X_i i-й области и продукцией, потребляемой как производственные затраты во всей экономической системе. Последняя часть продукции вычисляется по формуле $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_j$.

Обозначив конечную продукцию Y_i, т. е. часть, которая была потреблена в непроизводственной сфере для создания запасов, инвестиций, экспорта и т. п., получим систему уравнений

$$X_i - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_j = Y_i \qquad (i = 1, ..., n), \tag{2}$$

которую называют моделью Леонтьева "затраты-выпуск". Система уравнений (2) имеет все те свойства, что и любая система линейных алгебраических уравнений. Одна особенность этой системы вызывает повышенный интерес как у математиков, так и у экономистов. Эта особенность состоит в том, что из очевидных экономических соображений и коэффициенты, и сменные системы уравнений (2) должны быть неотрицательными. Другими словами, нормы затрат a_{ij}, валовые выпуски X_i и объемы конечной продукции Y_j удовлетворяют условию $a_{ij} \geq 0, X_i \geq 0, Y_i \geq 0$ $(i, j = 1,\ldots, n)$. Отсюда вытекает задача, которая определяет новую математическую проблему сравнительно с теми, которые рассматривались: при каких коэффициентах a_{ij} и Y_i существует неотрицательное решение X_j системы уравнений (2).

С экономической точки зрения наличие решения системы уравнений (2) значит, что она "работает", т. е. модель Леонтьева – продуктивна. А поскольку модель Леонтьева – Форда является обобщением модели Леонтьева, то естественно, что она унаследовала проблемы своей предшественницы. А именно: сложность работы с матрицами большой размерности, плохую обусловленность и вырождение матрицы нормативных коэффициентов, целочисельные сменные, что значительно уменьшает возможность применения известных численных методов, нечеткую информацию о значении нормативных коэффициентов, разреженность матрицы нормативных коэффициентов. Кроме того, в модели Леонтьева – Форда, в отличие от модели Леонтьева, появилась еще одна компонента, которая входит в модель со знаком "минус", – производство предметов потребления. Поэтому очевидной становится проблема разработки эффективных методов решения эколого-экономической балансовой модели и оптимизационных моделей, которые бы учитывали указанные обстоятельства.

Одним из подходов, на основе которого были разработаны алгоритмы для широких классов задач, позволяющим решать указанные проблемы, является последовательный анализ вариантов, общий формализм которого разработан в шестидесятые годы двадцатого столетия. Схему последовательного анализа вариантов с успехом применяют для решения многих задач оптимизации планирования и проектирования. В особенности полезным метод последовательного анализа вариантов оказывается при построении алгоритмов решения оптимизационных задач большой размерности.

Модели В. Леонтьева. Модель в матричном виде имеет следующий вид:

$$X = Ax + Y \tag{3}$$

при условиях $A \geq 0$, где A – нормы затрат, $Y > 0$, Y – объем конечной продукции, $x \geq 0$, x – неизвестные.

Модели Леонтьева – Форда. Матричный вариант данной модели имеет такой вид:

$$\text{Условие: } \left.\begin{aligned} X_1 &= A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + Y_1, \\ X_2 &= A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 - Y_2. \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$, $A_{11}, A_{12}, ...$ – нормы затрат производства;

$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} > 0$, Y_1, Y_2 – объемы выпущенной продукции;

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \geq 0$, X_1, X_2 – валовые выпуски групп товаров.

Обобщенные модели Леонтьева – Форда. В этом случае система уравнений имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 + A_{1,3}X_3 + Y_1, \\ X_2 &= A_{2,1}X_1 + A_{2,2}X_2 + A_{2,3} - Y_2, \\ X_3 &= A_{3,1}X_1 + A_{3,2}X_2 + A_{3,3} - Y_3 . \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Первое уравнение описывает производство средств производства, второе – производство предметов потребления, третье – очистительные сооружения.

2. Компьютерные алгоритмы для блочных моделей Леонтьева – Форда

2.1. Блочный вариант второго алгоритма усеченных систем. При компьютерной реализации моделей Леонтьева и Форда (3) – (5) нужно иметь эффективные клетковые вычислительные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. В начале рассмотрим системы уравнений с плотно заполненной матрицей. Для этого случая можно использовать обобщение второго алгоритма отсеченных систем [9, с. 34]. Предположим, что все главные миноры порядка $kp(k = 1, 2, ..., m)$ не равняются нулю. Кроме того, введем к рассмотрению следующие отсеченные системы:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kk} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_{1,k} \\ X_{2,k} \\ \dots \\ X_{k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,k+1} \\ A_{2,k+1} \\ \dots \\ A_{k,k+1} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

и

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{k1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{kk} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_{1,k} \\ Y_{2,k} \\ \dots \\ Y_{k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{k+1,,1} \\ A_{k+1,2} \\ \dots \\ A_{k+1,k} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Предположим, что все системы вида (6), (7) уже каким-то способом решены до порядка $k-l$ включительно.

Тогда для неизвестных X_{kk} и Y_{kk} на основе [10, с. 129] можно записать:

$$\left. Y_{kk} = \begin{matrix} \left[A_{kk} - (X_{1,k-1} X_{2,k-1\dots} \dots X_{k-1,k-1})(A_{k,1} A_{k,2} \dots A_{k,k-1})^T \right]^{-1} \times \\ \left[A_{k+1,k} - (X_{1,k-1} X_{2,k-1\dots} \dots X_{k-1,k-1})(A_{k+1,1}\ A_{k+1,2} \dots A_{k+1,k-1})^T \right] \end{matrix} \right\}$$

и

$$\left. X_{kk} = \begin{matrix} \left[A_{kk} - (Y_{1,k-1} Y_{2,k-1\dots} \dots Y_{k-1,k-1})(A_{1,k}\quad A_{2,k} \dots A_{k-1,k})^T \right]^{-1} \times \\ \left[\times A_{k,k+1} - (Y_{1,k-1} Y_{2,k-1\dots} \dots Y_{k-1,k-1})(A_{1,k+1} A_{2,k+1} \dots A_{k-1,k+1})^T \right] \end{matrix} \right\}.$$

После вычисления X_{kk} и Y_{kk} сразу можно приступать и к определению X_{sk} и Y_{sk}, $(s = 1, 2, \dots, k-1)$. Для этого при решении (6) можно воспользоваться соотношениями

$$\left. \begin{aligned} X_{s,k} &= B_{s,k+1} - \sum_{i=s+1}^{k} B_{s,i} X_{i,k}, \\ B_{s,i} &= \left(A_{i,s} - \sum_{j=1}^{s-l} Y_{j,s-1} A_{s,j} \right)^{-1} \left(A_{s,i} - \sum_{j=1}^{s-1} Y_{j,s-1} A_{i,j} \right) \quad \left(i = \overline{s+1, n+1} \right) \end{aligned} \right\}. \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} &Y_{s,k} = B_{k+1,s} - \sum_{i=s+1}^{k} B_{i,s} Y_{i,k}, \\ &B_{i,s} = \left(A_{s,s} - \sum_{j=1}^{s-1} Y_{j,s-1} A_{j,s} \right)^{-1} \left(A_{i,s} - \sum_{j=1}^{s-1} X_{j,s-1} A_{j,i} \right) \quad \left(i = \overline{s+1,n} \right) \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Обоснования формул (8)–(9) базируется на том, что

$$B_{i,s} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{s-1,1} & A_{i,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \dots & A_{s-1,2} & A_{i,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1,s} & A_{2,s} & \dots & A_{s-1,s} & A_{i,s} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{s-1,1} & A_{s,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \dots & A_{s-1,2} & A_{s,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1,s} & A_{2,s} & \dots & A_{s-1,s} & A_{s,s} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Здесь $A_{i,j}$, $B_{i,s}$ – блоки размерностью $p \times p$. В данном детерминантном равенстве элементами являются матрицы $p \times p$. Таким образом, на основе [10, с. 128], процесс решения начальной системы может быть реализован совокупностью рекуррентных соотношений:

$$\left.\begin{aligned} &B_{k,i} = \left(A_{k,k} - \sum_{j=1}^{s-1} Y_{j,k-1} A_{j,k} \right)^{-1} \left(A_{k,i} - \sum_{j=1}^{s-1} Y_{j,k-1} A_{j,i} \right); \\ &X_{k,k} = B_{k,k+1} \qquad \left(k = \overline{1,n}; \quad i = \overline{k+1,n; \quad s = k-1,1} \right); \\ &X_{s,k} = B_{s,k+1} - \sum_{i=s+1}^{k} B_{s,i} X_{i,k} \end{aligned}\right\}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &B_{i,k} = \left(A_{k,k} - \sum_{j=1}^{s-1} Y_{j,k-1} A_{j,k} \right)^{-1} \left(A_{i,k} - \sum_{j=1}^{s-1} X_{j,k-1} A_{i,j} \right); \\ &Y_{r,k} = B_{k+1,k} \qquad \left(k = \overline{1,n-1,} \qquad i = \ \overline{k+1,n} \qquad s = \overline{k-1,1} \right); \\ &Y_{s,k} = B_{k+1,s} - \sum_{i=s+1}^{k} B_{i,s} Y_{i,k}. \end{aligned}\right\}$$

Процесс вычисления начинается с левого верхнего угла матрицы системы, и последовательно находятся решения отсеченных клетковых систем всех порядков.

Остановимся теперь на вычислительных характеристиках метода.

Особенности реализации алгоритма на ЭВМ

Сложность алгоритма. Подсчитаем количество операций, нужных для реализации алгоритма на ЭВМ. Пусть $n = pm$, т. е. данная система состоит из m блоков p-го порядка. Подсчитаем Q_k – количество операций, необходимых для решения системы, которая состоит из k блоков p-го порядка. Для вычисления произведения

$$(X_{1,k-i-j}, X_{2,k-i-j}, ..., X_{k-i,k-i-j})(A_{k+1,1}, A_{k+1,2}, ..., A_{k+1,k-1})^T$$

нужно $(k-i-1)p^3$ умножений и $(k-i-1)p^3$ операций добавления (отношения). Кроме того, для определения $B_{k+1,s}$ также используются по $(k-i-1)p^3$ умножениям и добавлений. Несложные подсчеты показывают, что $Q_k = (m-k)2l^3 + 4/3l^3 + lk^2$.

Всего нужно решить m пар таких систем. Поэтому общее количество арифметических операций может быть подсчитано так:

$$Q = \sum_{k=1}^{m} Q_k = \sum_{k=1}^{m} \left[(m-k)2l^3 + 4/3l^3 + lk^2 \right].$$

Итак, окончательно с точностью до главного члена $Q \cong 4n^3/3$ и при этом будет выполнено $2/3n^3$ операций умножения.

2.2. Описание блочного алгоритма решения разреженных систем. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений [10]

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,n+1} \\ A_{2,n+1} \\ A_{3,n+1} \\ ... \\ A_{n-1,n+1} \\ A_{n,n+1} \end{pmatrix},$$

элементы которой A_{ij} – это блоки размерностью $m \times m$. Обозначим $A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & ... & i_k \\ j_1 & j_2 & ... & j_k \end{bmatrix}$ минор, размещенный на пересечении блочных лент $i_1, i_2, ..., i_k$ и блочных столбцов $j_1, j_2, ..., j_k$. По обобщенному правилу Крамера [2] и, разлагая числитель по минорам, можно записать

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix} \right). \quad (11)$$

Если ввести обозначение

$$\alpha_{ik} = A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}, \quad i,k=\overline{1,n}$$

тогда для определения неизвестной x_i предлагаются соотношения

$$x_i = \frac{A\begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}} \times$$

$$\times \frac{\alpha_{2,n}}{\alpha_{1,n}} \times A_{1,n+1} \big/ (E + \dots + A_{n,n+1}\alpha_{1,n} \big/ A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1} //$$

$$// \left(E - A_{n,n+1}\alpha_{1,n} / A_{n-1,n+1})\right), \tag{12}$$

где

$$\frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,n+1}} = \frac{A_{n+1,\,n+1}}{A_{n,\,n+1}} - \cfrac{A_{n+1,\,n+2}A_{n+2,\,n+1} / A_{n,\,n+1}}{A_{n+2,\,n+2} - \ddots \; \ddots - \cfrac{A_{n-1,\,n}A_{n,\,n-1}}{A_{n,\,n}}}, \tag{13}$$

$$\frac{A\begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}} = \cfrac{E}{A_{1,1} - \cfrac{A_{2,1}A_{1,2}}{A_{2,2} - \ddots \; \ddots - \cfrac{A_{n-1,n}A_{n,n-1}}{A_{n,n}}}}. \tag{14}$$

Здесь E означает единичную матрицу.

По аналогичной схеме находим остальные неизвестные x_i

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 \; 2 \; \dots \; n \\ 1 \; 2 \; \dots \; n \end{bmatrix}\right)^{-1} \left(\frac{A_{i,n+1}}{2}\alpha_{i,i} + \sum_{k=1}^{i-1}(-1)^{i+k} A_{k,n+1}\alpha_{i,k} + \frac{A_{i,n+1}}{2}\alpha_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n}(-1)^{i+k} A_{k,n+1}\alpha_{i,k}\right) =$$

$$= \left[(-1)^{2i-1} A_{i-1,i}\alpha_{i,i-1} / \alpha_{i,i} + (-1)^{2i} A_{i,i} + (-1)^{2i+1} A_{i+1,i}\alpha_{i,i+1} / \alpha_{i,i}\right]^{-1} \times$$

$$\times\left[\frac{\frac{1}{2}A_{i,n+1}}{E-\cfrac{2\left(A_{i,n+1}\alpha_{i,i}\right)^{-1}A_{i-1,n+1}\alpha_{i,i-1}}{E+\cfrac{2A_{i-1,n+1}\alpha_{i,i-1}}{A_{i,n+1}\alpha_{i,i}}-\ddots\,\ddots-\cfrac{\cfrac{A_{1,n+1}\alpha_{i,1}}{A_{2,n+1}\alpha_{i,2}}}{E+\cfrac{A_{1,n+1}\alpha_{i,1}}{A_{2,n+1}\alpha_{i,2}}}}}-\frac{\frac{1}{2}A_{i,n+1}}{E-\cfrac{2\left(A_{i,n+1}\alpha_{i,i}\right)^{-1}A_{i+1,n+1}\alpha_{i,i+1}}{E+\cfrac{2A_{i+1,n+1}\alpha_{i,i+1}}{A_{i,n+1}\alpha_{i,i}}-\ddots\,\ddots-\cfrac{\cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{i,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{i,n-1}}}{E+\cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{i,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{i,n-1}}}}}\right]$$

А для каждого отношения $\alpha_{i,k}/\alpha_{i,k+1}$ в свою очередь можно записать:

$$\frac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{i,k+1}}=\frac{A\begin{bmatrix}1&2&\dots&i-1\\1&2&\dots&i-1\end{bmatrix}\prod\limits_{s=i+1}^{k-1}A_{s,s+1}A\begin{bmatrix}k+1&\dots&\dots&n\\k+1&\dots&\dots&n\end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix}1&2&\dots&i-1\\1&2&\dots&i-1\end{bmatrix}\prod\limits_{s=i+1}^{k}A_{s,s+1}A\begin{bmatrix}k+2&\dots&\dots&n\\k+2&\dots&\dots&n\end{bmatrix}}=\frac{A\begin{bmatrix}k+1&\dots&\dots&n\\k+1&\dots&\dots&n\end{bmatrix}}{A_{k,k+1}A\begin{bmatrix}k+1&\dots&\dots&n\\k+1&\dots&\dots&n\end{bmatrix}}=$$

$$=\dots=\frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}}-\cfrac{A_{k+1,k+2}A_{k+2,k+1}/A_{k,k+1}}{A_{k+2,k+2}-\cfrac{A_{k+3,k+2}A_{k+2,k+3}}{A_{k+3,k+3}-\cfrac{A_{k+3,k+4}A_{k+4,k+3}}{A_{k+4,k+4}-\ddots\,\ddots-\cfrac{A_{n-1,n}A_{n,n-1}}{A_{n,n}}}}}.$$

Итак, получаем аналитическое развитие неизвестных x_i данной разреженной системы линейных алгебраических уравнений в оконченные матричные цепные дроби. Схема может приниматься и для разреженных трех диагональных заполнений матрицы A.

Вычислительные характеристики алгоритма

Теперь подсчитаем необходимое количество записей при символьном решении задачи и количество операций во время численной реализации алгоритма умножения матриц $A_{ij}\cdot A_{kl}$.

Утверждение [6]. Пусть некоторая вычислительная задача с входными данными $\{A_i\}$ решается на ЭВМ по алгоритму $\psi(A_1,A_2,\dots,A_n)$ и состоит из k шагов ψ_j. Если на каждом шаге алгоритма $\psi(A)$ реализуется хотя бы одна запись вида $\psi_{ji_1}(A)\cdot\psi_{ji_2}(A)$, которая использует результат предыдущего шага, то общая сложность Q_ψ задачи будет не меньшей $2^k\cdot m^2$, но не большей H^k записей, где H – наибольшая ширина алгоритма на k шагах.

Используем это утверждение для оценки сложности алгоритма с точки зрения компьютерной алгебры [4]. Для чисел x_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ на одном этаже реализации алгоритма требуется одно блочное умножение, одно блочное деление, одно блочное добавление, а для n этажей – $3n$ операций, т.е. по n блочным умножений, делений и добавлений.

Вычисления показывают, что для определения всех $A_{i,k}/A_{i,k+1}$ нужно $5k$ записей, если $k<i$, и $5(n-k)$, если $k>i$. Таким образом необходимо выполнить

$$5\sum_{k=1}^{i}k+5\sum_{k=i}^{n}n-k=5\left[\frac{(1+i)i}{2}+n(n-i+1)-\frac{(i+n)(n-i+1)}{2}\right]=5\left[i^2+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-ni\right].$$

Итак, общая сложность метода составляет

$$5\sum_{i=1}^{n}\left[i^2+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-ni\right]=\frac{5}{2}(n^3+n).$$

Заключение. Рассмотрен метод для линейных алгебраических уравнений с блочными элементами в моделях Леонтьева и Форда. Предложенный алгоритм может эффективно использоваться в системах компьютерной алгебры и для аналитически-числового решения инженерных прикладных задач механики. На основе предложенного подхода в пакете MatLab проведены числовые эксперименты для линейных алгебраических уравнений с блочными элементами. Они подтверждают эффективность алгоритма.

Л.М. Семчишин

КЛІТКОВІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ БЛОЧНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ В МОДЕЛЯХ В. ЛЕОНТЬЄВА

Запропоновано новий підхід до застосування кліткових алгоритмів для систем лінійних алгебраїчних рівнянь з блочними елементами. Описано блочні моделі Леонтьєва і Форда. Розглянуто блочний варіант другого алгоритму відсічних систем, а також описано блочний алгоритм для трьохдіагональної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Проведено підрахунок кількості операцій, потрібних для реалізації блочного варіанта другого алгоритму відсічних систем на ЕОМ, а також кількість операцій під час числової реалізації алгоритму множення матриць. Показано ефективність запропонованого алгоритму.

L.M. Semchyshyn

BIT-MAPPED ALGORITHM FOR THE LINEAR ALGEBRAIC EQUATION SYSTEM WITH BLOCK ELEMENTS IN THE V. LEONTYEV'S MODELS

New approach to the bit-mapped algorithm for the linear algebraic equation system with block elements is suggested. Leontyev's and Ford's block models are described. Block variant of the severed system second algorithm and block algorithm for the three-diagonal system of linear algebraic equations are considered. The number of operations necessary for the severed system second algorithm block variant computer implementation and the number of operations needed for numerical implementation of the matrix multiplication algorithm are summarized. The effectiveness of the suggested algorithm is shown.

1. *Воеводин В.В.* Численные методы алгебры. – М.: Наука, 1966. – 246 с.
2. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
3. *Волошин А.Ф., Чорней Н.Б.* Исследование алгоритма последовательного анализа вариантов для модели Леонтьева – Форда с разреженной матрицей нормативных коэффициентов // Проблемы управления и информатики. – 2001.– № 3. – С. 97–103.
4. *Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э.* Компьютерная алгебра. – М.: Мир, 1991. – 352 с.
5. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 192 с.
6. *Недашковський М.О., Скоробогатько В.Я.* Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом гіллястих ланцюгових дробів. В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 84–92.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 324 с.
8. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 2001. – 606 с.
9. *Недашковський М.О., Ковальчук О.Я.* Обчислення з λ-матрицями. – К.: Наук. думка, 2007. – 294 с.
10. *Семчишин Л.М.* Розв'язання розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. В кн.: Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Львів; 2007. – Вип. 6. – С. 128–135.

Получено 10.03.2009

Об авторе:

Семчишин Лидия Михайловна,
преподаватель кафедры высшей математики и компьютерной техники
Чортковского института предпринимательства и бизнеса
Тернопольского национального экономического университета.
Lida55718@ukr.net