9. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
10. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987. — 688 с.

The method of delta-like sequence (Cauchy kernel) inculcates hybrid integral transformation of Bessel-Legendre-Fourier type on polar axis with two points of interface in supposition, that a spectral parameter takes part in the conditions of interface.

Key words: *hybrid differential operator, hybrid integral transformation, Cauchy kernel, functions of influencing, spectral function, gravimetric function, spectral density, basic identity.*

Отримано: 17.05.2011

УДК 517.927

В. Б. Поселюжна, канд. фіз.-мат. наук,
Л. М. Семчишин, викладач

Чортківський інститут підприємництва і бізнесу
Тернопільського національного економічного університету, м. Чортків

ДО ПИТАННЯ ЗБІЖНОСТІ КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ І ПАРАМЕТРАМИ

У статті досліджується питання збіжності колокаційно-ітеративного методу до розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і параметрами. Встановлено умови збіжності методу, оцінки похибок.

Ключові слова: *крайова задача, диференціальні рівняння, інтегральне рівняння, колокаційно-ітеративний метод, імпульсний вплив.*

Вступ. Переважна більшість задач прикладного та теоретичного характеру зводиться до розв'язування різних класів диференціальних, інтегральних, інтегрально-функціональних та функціонально-диференціальних рівнянь та їх систем. У більшості практичних ситуацій отримання точного аналітичного розв'язку є досить складним і потребує значних зусиль, або знайдений розв'язок є не досить зручним для використання. Тому в останні десятиріччя широкого розповсюдження набули наближені методи розв'язування таких задач. У той же час пошук нових, більш ефективних, і удосконалення вже існуючих методів продовжує залишатися досить актуальною задачею.

Останнім часом увагу дослідників привертають задачі з параметрами, з імпульсним впливом, задачі з обмеженнями. Теоретичні основи таких задач закладені у працях А. М. Самойленка, М. О. Перестюка [7; 8], А. Ю Лучки [3—6], О. А. Бойчука [1] та ін.

Методи проекційно-ітеративного типу, загальна теорія яких створена А. Ю. Лучкою, належать до ефективних наближених методів розв'язування широких класів лінійних та нелінійних рівнянь, зокрема диференціальних та інтегральних, інтегро-диференціальних та функціонально диференціальних. До методів проекційно-ітеративного типу відносимо і колокаційно-ітеративний метод, який виник на основі звичайного методу послідовних наближень і методу колокації. Слід зауважити, що перевага колокаційно-ітеративного методу перед ітераційними методами в тому, що розширюється область застосування, оскільки не потрібно накладати обмеження на норму чи спектральний радіус інтегрального оператора. В порівнянні з методом колокації колокаційно-ітеративний метод збігається швидше.

У роботі [9], досліджувалося питання застосування колокаційно-ітеративного методу для розв'язування крайової задачі для диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і параметрами. В даній роботі запропоновано обґрунтування даного методу і встановлено умови збіжності.

Постановка проблеми. Знайдемо кусково-неперервну функцію $x(t)$ з розривами першого роду при $t=\tau_i$, що задовольняє диференціальне рівняння виду

$$p_m(t)x^{(m)}(t)+p_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t)+\ldots+p_0(t)x(t)=f(t)+c(t)\lambda,\qquad t\neq\tau_i,\ t\in(0,T),\ i=\overline{1,n-1},\tag{1}$$

і такі умови

$$\Phi(x)=\alpha,\alpha\in R^p,p=m+l\,,\tag{2}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\Big(c_{ij}x^{(j)}\left(\tau_i+0\right)+d_{ij}x^{(j)}\left(\tau_i-0\right)\Big)=B_i,i=\overline{1,n-1}\,,\tag{3}$$

де $c(t)\lambda$ — скалярний добуток вектора $\lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_l\right)$ і кусково-неперервної вектор-функції $c(t)=\left(c_1(t),\,c_2(t),...,c_l(t)\right)$ з можливими розривами першого роду при $t=\tau_i,i=\overline{1,n-1}$; $f(t),p_k(t),k=\overline{0,m}$ — кусково-неперервні функції з можливими розривами першого роду при $t=\tau_i$, $i=\overline{1,n-1}$, причому $p_m(t)>0$; $\tau_i\in(0,T)$ — фіксовані моменти часу імпульсного впливу; $\Phi(x)=\big(\Phi_1(x),\Phi_2(x),...,\Phi_p(x)\big)$, $p=m+l$ — вектор, компоненти якого — лінійні обмежені функціонали на класі кусково-неперервних функцій з можливими розривами першого роду при $t = \tau_i$, $i = \overline{1, n-1}$, як частковий випадок

$$\Phi_к(x) = x(t_k),$$

де

$$a \le t_1 < t_2 < ... < t_p \le b,\ k = \overline{1, p},.\ t_k \ne \tau_i$$

Виклад основного матеріалу. Під розв'язком задачі (1)—(3) будемо розуміти таку кусково-неперервно диференційовану функцію $x(t)$ з розривами першого роду при $t = \tau_i$, $i = \overline{1, n-1}$, і такий вектор $\lambda \in R^l$, що при підстановці їх в рівняння (1) ми отримаємо тотожність для всіх $t \in I \setminus \{\tau_i\}$, функція $x(t)$ задовольняє умови стрибка (3) при $t = \tau_i$ і умови (2).

Введемо в розгляд оператор

$$(Lx)(t) := p_m(t)x^{(m)}(t) + p_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) + ... + p_0(t)x(t) \tag{4}$$

і запишемо задачу (1)—(3) у вигляді

$$(Lx)(t) := f(t) + c(t)\lambda, \tag{5}$$

$$\Phi(x) = \alpha,\ \alpha \in R^p, \tag{6}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left(c_{ij}x^{(j)}\left(\tau_i + 0\right) + d_{ij}x^{(j)}\left(\tau_i - 0\right)\right) = B_i,\ i = \overline{1, n-1}, \tag{7}$$

Представимо крайову задачу (5)—(7) у вигляді

$$(Ax)(t) + b(t)\lambda = f(t) + d(t)\lambda + (Bx)(t), \tag{8}$$

$$\Phi(x) = \alpha,\ \alpha \in R^p, \tag{9}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left(c_{ij}x^{(j)}\left(\tau_i + 0\right) + d_{ij}x^{(j)}\left(\tau_i - 0\right)\right) = B_i,\ i = \overline{1, n-1}, \tag{10}$$

де

$$(Ax)(t) := a_m(t)x^{(m)}(t) + a_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) + ... + a_0(t)x(t), \tag{11}$$

$$(Bx)(t) := g_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t) + g_{m-2}(t)x^{(m-2)}(t) + ... + g_0(t)x(t), \tag{12}$$

$$d(t) = b(t) + c(t), \tag{13}$$

$$a_m(t) = p_m(t),\ g_i(t) = a_i(t) - p_i(t),\ i = \overline{0, m-1},$$

$a_i(t)$, $g_i(t)$, $i = \overline{0, m-1}$, кусково-неперервні функції з можливими розривами першого роду при $t = \tau_i$, $i = \overline{1, n-1}$, а кусково-неперервна вектор-функція $b(t)$ підібрана таким чином, що однорідна крайова задача

$$(A\vartheta)(t) + b(t)\mu = 0, \tag{14}$$

$$\Phi(\vartheta) = 0, \tag{15}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}(c_{ij}x^{(j)}(\tau_i+0)+d_{ij}x^{(j)}(\tau_i-0))=B_i,\ i=\overline{1,n-1}, \tag{16}$$

має тільки тривіальний розв'язок

$$\vartheta(t)=0,\ \mu=0.$$

У роботі [9], показано, що крайова задача (8)—(10) зводиться до рівносильної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з параметрами без імпульсів, яка в свою чергу рівносильна системі інтегральних рівнянь.

Побудова алгоритму. Застосуємо до задачі (8)—(10) колокаційно-ітеративний метод.

Нехай на відрізку $[0,T]$ задано систему вузлів колокації $\{t_j\}_{j=1}^{N}$, причому $t_j\neq\tau_i$, $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{1,N}$.

Наближені розв'язки будемо визначати із допоміжної задачі

$$(Ax_k)(t)+b(t)\lambda_k=f(t)+d(t)\mu_k+(Bz_k)(t) \tag{17}$$

причому $t_j\neq\tau_i$ $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{1,N}$

$$\Phi(x_k)=\alpha,\alpha\in R^p, \tag{18}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left(c_{ij}x_k^{(j)}(\tau_i+0)+d_{ij}x_k^{(j)}(\tau_i-0)\right)=B_i,\ t=\tau_i,\ i=\overline{1,n-1} \tag{19}$$

де

$$z_k(t)=x_{k-1}(t)+\alpha_k(t),\ \mu_k(t)=\lambda_{k-1}(t)+\theta_k, \tag{20}$$

$$\alpha_k(t)=\sum_{j=1}^{N}a_j^k\eta_j(t),\ \theta_k=\sum_{j=1}^{N}a_j^k\nu_j, \tag{21}$$

Невідомі параметри a_j^k визначаємо із умови

$$(Lz_k)(t_j)-c(t_j)\mu_k-f(t_j)=0,\ j=\overline{1,N}, \tag{22}$$

де $\{t_j\}_{j=1}^{N}$ — вузли колокації, а оператор L має вигляд

$$\begin{gathered}(Lx)(t):=p_m(t)x^{(m)}(t)+p_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t)+\ldots+p_0(t)x(t)=f(t)+c(t)\lambda,\\ t\neq\tau_i,\ t\in(0,T),\ i=\overline{1,n-1},\end{gathered} \tag{23}$$

Нульове наближення визначаємо із задачі

$$(Ax_0)(t)+b(t)\lambda_0=u_0(t),\ \ t\neq\tau_i,\ i=\overline{1,n-1} \tag{24}$$

$$\Phi(x_0)=\alpha,\ \alpha\in R^p, \tag{25}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left(c_{ij}x_0^{(j)}\left(\tau_i+0\right)+d_{ij}x_0^{(j)}\left(\tau_i-0\right)\right)=B_i, t=\tau_i, i=\overline{1,n-1}, \qquad (26)$$

в якій $u_0(t)$ – задана функція.

Координатна система функцій $\left\{\eta_j(t)\right\}_{j=1}^{N}$ і система векторів $\left\{\nu_j\right\}_{j=1}^{N}$ задовольняють рівняння

$$\left(A\eta_j\right)(t)+b(t)\nu_j(t)=\varphi_j(t) \qquad (27)$$

та однорідні умови є

$$\Phi\left(\eta_j\right)=0, \qquad (28)$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left(c_{il}\eta_j^{(l)}\left(\tau_i+0\right)+d_{il}\eta_j^{(l)}\left(\tau_i-0\right)\right)=0,\ i=\overline{1,n-1}. \qquad (29)$$

У рівнянні (27) $\left\{\varphi_j(t)\right\}_{j=1}^{N}$ — задана система лінійно-незалежних, кусково-неперервних функцій з можливими розривами першого роду при $t\neq\tau_i$, $i=\overline{1,n-1}$.

На основі співвідношень (20)—(22) звичайним способом для визначення невідомих параметрів a_j^k отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$\sum_{j=1}^{N}\beta_{ij}a_j^k=b_i^k,\ i=\overline{1,N}, \qquad (30)$$

в якій

$$\beta_{ij}=\left(L\eta_j\right)\left(t_i\right)-c\left(t_i\right)\nu_j,\ i,j=\overline{1,N}$$

$$b_i^k=c\left(t_i\right)\lambda_{k-1}+f\left(t_i\right)-\left(Lx_{k-1}\right)\left(t_i\right),\ i=\overline{1,N}.$$

Система (30) може бути представлена у вигляді

$$\Lambda a_k=b_k, \qquad (31)$$

де

$$a_k=\left\{a_1^k,a_2^k,\dots,a_N^k\right\},\ b_k=\left\{b_1^k,b_2^k,\dots,b_N^k\right\},$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1N}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2N}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \beta_{N1} & \beta_{N2} & \dots & \beta_{NN}\end{pmatrix}.$$

Як встановлено в роботі [9] запропонований вище алгоритм зводиться до колокаційно-ітеративного методу розв'язування системи інтегральних рівнянь

$$u_i^k(\xi) = l_i(\xi) + \sum_{j=1}^{n} \int_a^b K_{ij}\left(\xi, s\right)\left(u_j^{k-1}(s) + \omega_j^k(s)\right)ds\ , \tag{32}$$

$$\omega_i^k(\xi) = \sum_{j=1}^{N} a_j^k \varphi_{ji}(\xi)\ ,\ i = \overline{1, n}\ , \tag{33}$$

$$u_i^{k-1}\left(\xi_j^i\right) + \omega_i^k\left(\xi_j^i\right) - u_i^k\left(\xi_j^i\right) = 0\ .\ i = \overline{1, n}\ ,\ j = \overline{1, N_i}\ . \tag{34}$$

Дослідимо питання збіжності методу (17)—(22).

Задачу (1)-(3) запишемо у вигляді (8)—(10) і припустимо, що крайова задача

$$(A\vartheta)(t) + b(t)\mu = 0\ , \tag{35}$$

$$\Phi(v) = 0\ , \tag{36}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left(c_{ij}v^{(j)}\left(\tau_i + 0\right) + d_{ij}v^{(j)}\left(\tau_i - 0\right)\right) = 0_i\ , i = \overline{1, n-1}\ , \tag{37}$$

має тільки тривіальний розв'язок $\vartheta(t) = 0, \mu = 0$.

Надалі, не обмежуючи загальності, будемо вважати, що система вектор-функцій

$$\varphi_j(\xi) = \left\{\varphi_{j1}(\xi), \varphi_{j2}(\xi), ..., \varphi_{jn}(\xi)\right\}$$

фундаментальна.

Виконавши нескладні перетворення, легко показати, що побудова функції $\omega_i^k(\xi)$, $i = \overline{1, n}$, на основі співвідношень (32), (34) рівносильна обчисленню інтеграла

$$\omega_i^k(\xi) = \int_a^b S_{iN_i}\left(\xi, s\right)\left(u_i^k(s) - u_i^{k-1}(s)\right)ds\ ,\ i = \overline{1, n}\ , \tag{38}$$

де

$$S_{iN_i}(\xi, s) = \sum_{j=1}^{N_i} \varphi_{ji}(\xi)\delta\left(s - \xi_j^i\right). \tag{39}$$

Розглянемо, враховуючи співвідношення (32), наступну різницю

$$u_i^k(\xi) - u_i^{k-1}(\xi) = \varepsilon_i^k(\xi) + \sum_{m=1}^{n} \int_a^b K_{im}\left(\xi, s\right)\omega_m^k(s)ds\ , \tag{40}$$

в якій під $\varepsilon_i^k(\xi)$ будемо розуміти

$$\varepsilon_i^k(\xi) = l_i(\xi) + \sum_{m=1}^{n} \int_a^b K_{im}\left(\xi, s\right)u_m^{k-1}(s)ds - u_i^{k-1}(\xi)\ . \tag{41}$$

Підставимо співвідношення (40) у (38), тоді для визначення поправок $\omega_i^k(\xi)$ на кожному кроці отримаємо систему інтегральних рівнянь виду

$$\omega_i^k(\xi) = g_i^k(\xi) + \sum_{m=1}^{n} \int_a^b H_{im}^{(N_i)}\left(\xi, s\right) \omega_m^k(s) ds\,,\ i = \overline{1,n}\,, \tag{42}$$

в якій

$$g_i^k(\xi) = \int_a^b S_{iN_i}(\xi, s) \varepsilon_i^k(s) ds\,,\ i = \overline{1,n}\,, \tag{43}$$

$$H_{im}^{(N_i)}(\xi, s) = \int_a^b S_{iN_i}(\xi, \tau) K_{im}(\tau, s) d\tau\,,\ i, m = \overline{1,n}\,. \tag{44}$$

Припустимо, що система інтегральних рівнянь (42) має єдиний розв’язок, тобто

$$\omega_i^k(\xi) = \sum_{m=1}^{n} \int_a^b R_{im}\left(\xi, s\right) g_m^k(s) ds\,,\ i = \overline{1,n}\,. \tag{45}$$

Причому для функцій $R_{im}(\xi, s)$ будуть справедливі співвідношення

$$R_{im}(\xi, s) = \int_a^b R_{im}(\xi, \tau) S_{iN_i}(\tau, s) d\tau\,, \tag{46}$$

$$R_{im}(\xi, s) = \int_a^b S_{iN_i}(\xi, \tau) R_{im}(\tau, s) d\tau\,,\ i, m = \overline{1,n}\,, \tag{47}$$

Співвідношення (41) з урахуванням (32) можна записати у вигляді

$$\varepsilon_i^k(\xi) = \sum_{m=1}^{n} \int_a^b K_{im}\left(\xi, s\right) \vartheta_m^{k-1}(s) ds\,,\ i = \overline{1,n}\,, \tag{48}$$

де використано наступне позначення

$$\vartheta_i^k(\xi) = u_i^k(\xi) - u_i^{k-1}(\xi) - \omega_i^k(\xi)\,,\ i = \overline{1,n}\,. \tag{49}$$

Якщо підставити співвідношення (45) у (40) і врахувати позначення (43) та співвідношення (48), (46), (47), то отримаємо

$$u_i^k(\xi) - u_i^{k-1}(\xi) = \sum_{m=1}^{n} \int_a^b M_{im}\left(\xi, s\right) \vartheta_m^{k-1}(s) ds\,,\ i = \overline{1,n}\,, \tag{50}$$

в якому оператор $M_{im}(\xi, s)$ має вигляд

$$M_{im}(\xi, s) = K_{im}(\xi, s) + \sum_{p=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \int_a^b \int_a^b K_{ip}(\xi, \tau) R_{pl}(\tau, \eta) K_{lm}(\eta, s) d\eta d\tau\,. \tag{51}$$

В силу співвідношень (49), (40), (38) маємо

$$\vartheta_i^k(\xi) = \sum_{m=1}^{n}\int_a^b L_{im}\left(\xi,s\right)\vartheta_m^{k-1}(s)ds\,,\ i=\overline{1,n}\,, \tag{52}$$

де оператор $L_{im}(\xi,s)$ має вигляд

$$L_{im}(\xi,s) = M_{im}(\xi,s) - \int_a^b S_{iN_i}(\xi,\tau)M_{im}(\tau,s)d\tau\,. \tag{53}$$

Нехай для будь-якої функції $\vartheta_i \in L_2\left(\left[a,b\right]\right)$, $i=\overline{1,n}$ виконуються нерівності

$$\int_a^b\left\{\sum_{m=1}^{n}\int_a^b M_{im}(\xi,s)\vartheta_m(s)ds\right\}^2 d\xi \le p_i^2\sum_{m=1}^{n}\int_a^b \vartheta_m^2(s)ds\,,\ i=\overline{1,n}\,, \tag{54}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_a^b\left\{\sum_{m=1}^{n}\int_a^b L_{im}(\xi,s)\vartheta_m(s)ds\right\}^2 d\xi \le q_{_N}^2\sum_{m=1}^{n}\int_a^b \vartheta_m^2(s)ds\,, \tag{55}$$

За даних припущень випливає наступне твердження, яке виражає умови збіжності запропонованого колокаційно-ітеративного (17)—(29) методу.

Теорема 1. Якщо $q_{_N} < 1$, то крайова задача (1)—(3) має єдиний розв'язок $x^*(t)$, λ^* і послідовності $\left\{x_k(t)\right\}$, $\left\{\lambda_k\right\}$, побудовані згідно колокаційно-ітеративного методу (17)—(29) збігаються до цього розв'язку.

Доведення. Крайова задача (1)—(3), як встановлено в роботі [8], рівносильна системі інтегральних рівнянь

$$u_i(\xi) = l_i(\xi) + \sum_{j=1}^{n}\int_a^b K_{ij}(\xi,s)u_j(s)ds\,,\ i=\overline{1,n}\,, \tag{56}$$

де

$$l_i(\xi) = f_i(\xi) + d_i(\xi)\sigma + \left(B_i h_i\right)(\xi)\,,\ i=\overline{1,n}\,, \tag{57}$$

$$K_{ij}(\xi,s) = d_i(\xi)\Gamma_j(s) + B_i\left[G_{ij}(\xi,s)\right],\ i,j=\overline{1,n}\,,$$

а, отже, має розв'язки тоді і тільки тоді, коли система інтегральних рівнянь (56) має розв'язки.

Покажемо, що при $q_{_N} < 1$ система рівнянь (56) має єдиний розв'язок і послідовності $\left\{u_i^k(\xi)\right\}$, $i=\overline{1,n}$, побудовані згідно методу (32)—(34), збігаються до цього розв'язку.

Справді, на основі співвідношень (50), (52), (54) та (55), отримаємо

$$\left\|u_i^k - u_i^{k-1}\right\|^2 = \int_a^b\left(u_i^k(\xi) - u_i^{k-1}(\xi)\right)^2 d\xi =$$

$$=\int_a^b \left\{ \sum_{m=1}^n \int_a^b M_{im}(\xi,s)\vartheta_m^{k-1}(s)ds \right\}^2 d\xi \le p_i^2 \sum_{m=1}^n \int_a^b \left\{ \vartheta_m^{k-1}(s) \right\}^2 ds = \tag{58}$$

$$= p_i^2 \sum_{m=1}^n \left\| \vartheta_m^{k-1} \right\|^2,$$

та

$$\sum_{i=1}^n \left\| \vartheta_i^k \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \int_a^b \left\{ \vartheta_i^k(\xi) \right\}^2 d\xi =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_a^b \left\{ \sum_{m=1}^n \int_a^b L_{im}(\xi,s)\vartheta_m^{k-1}(s)ds \right\}^2 d\xi \le q_N^2 \sum_{m=1}^n \int_a^b \left\{ \vartheta_m^{k-1}(s) \right\}^2 ds = \tag{59}$$

$$= q_N^2 \sum_{m=1}^n \left\| \vartheta_m^{k-1} \right\|^2 .$$

Тоді, в силу співвідношень (58), (59), отримаємо

$$\left\| u_i^k - u_i^{k-1} \right\|^2 \le p_i^2 q_N^{2(k-1)} \sum_{m=1}^n \left\| \vartheta_m^1 \right\|^2 . \tag{60}$$

Якщо, $q_N < 1$, то послідовності $\left\{ u_i^k(\xi) \right\}$, $i = \overline{1,n}$, фундаментальні.

Справді,

$$\left\| u_i^{k+p} - u_i^k \right\|^2 \le \left\| u_i^{k+p} - u_i^{k+p-1} \right\| + \left\| u_i^{k+p-1} - u_i^{k+p-2} \right\| + \ldots +$$

$$+ \left\| u_i^{k+1} - u_i^{k1} \right\| \le p_i \left(q_N^{k+p-1} + q_N^{k+p-2} + \ldots + q_N^k \right) \cdot \left\{ \sum_{m=1}^n \left\| \vartheta_m^1 \right\|^2 \right\}^{1/2} \le \tag{61}$$

$$\le \frac{p_i q_N^k}{1-q_N} \cdot \left\{ \sum_{m=1}^n \left\| \vartheta_m^1 \right\|^2 \right\}^{1/2}, \ i = \overline{1,n} .$$

Оскільки, $q_N \to 0$, при $k \to \infty$, то оцінка (61) показує, що послідовності $\left\{ u_i^k(\xi) \right\}$, $i = \overline{1,n}$ — фундаментальні, а, отже, в силу повноти простору $L_2\left(\left[a,b\right]\right)$ збігаються до деяких функцій $u_i^*(\xi)$.

Функції $u_i^*(\xi)$ є розв'язками системи (56), щоб переконатися в цьому достатньо перейти до границі в співвідношеннях (32), (38).

Із умови $q_N < 1$, вдало [2], випливає єдиність розв'язку.

Оскільки для $t \in \left(\tau_{i-1}, \tau_i\right)$ маємо

$$x^*(t) = x^*\left(\tau_{i-1} + \chi_i\left(\xi - a\right)\right) = y_i^*(\xi), \ \xi \in (a,b),$$

$$x_k(t)=x_k\left(\tau_{i-1}+\chi_i\left(\xi-a\right)\right)=y_i^k(\xi),\ \xi\in(a,b),$$

то, врахувавши той факт, що розв’язок задачі (17)—(19) має вигляд

$$y_i^k(\xi)=h_i(\xi)+\sum_{m=1}^{n}\int_a^b G_{im}\left(\xi,s\right)u_m^k(s)ds,$$

$$\lambda_k=\sigma+\sum_{m=1}^{n}\int_a^b \boldsymbol{\Gamma}_m(s)u_m^k(s)ds,$$

Отримаємо

$$x^*(t)-x_k(t)=y_i^*(\xi)-y_i^k(\xi)=\sum_{m=1}^{n}\int_a^b G_{im}\left(\xi,s\right)\left(u_m^*(s)-u_m^k(s)\right)ds,\quad i=\overline{1,n},\qquad(62)$$

$$\lambda^*-\lambda_k=\sum_{m=1}^{n}\int_a^b \boldsymbol{\Gamma}_m(s)\left(u_m^*(s)-u_m^k(s)\right)ds.\qquad(63)$$

Аналізуючи співвідношення (62), (63), приходимо до висновку, що при виконанні умови $q_N<1$ крайова задача (1)—(3) має єдиний розв’язок і послідовності $\left\{x_k(t)\right\}$, $\left\{\lambda_k\right\}$, побудовані згідно колокаційно-ітеративного методу (17)—(29) збігаються до цього розв’язку.

Теорема доведена.

Умови збіжності методу характеризує теорема.

Теорема 2. Нехай крайова задача (1)—(3) має єдиний розв’язок $x^*(t)$, λ^*, і нехай система вектор-функцій

$$\varphi_j(\xi)=\left\{\varphi_{j1}(\xi),\varphi_{j2}(\xi),...,\varphi_{jn}(\xi)\right\},\ j=\overline{1,N},$$

і вузли колокації підібрані таким чином, що

$$\lim_{N_i\to\infty}\int_a^b\int_a^b\left|K_{il}\left(\xi,s\right)-H_{il}^{(N_i)}(\xi,s)\right|^2 d\xi ds=0,\quad i,l=\overline{1,n}.\qquad(64)$$

Тоді існує такий номер $N_0=\min\left\{N_i^0\right\}$, $i=\overline{1,n}$, що при всіх фіксованих $N\geq N_0$ послідовності $\left\{x_k(t)\right\}$ та $\left\{\lambda_k\right\}$, побудовані згідно колокаційно-ітеративного методу (17)—(29), збігаються до розв’язку $x^*(t)$, λ^* задачі (1)-(3).

Оцінки похибки. Встановимо оцінки похибки методу (17)—(29).

Для цього позначимо через $\left\|\cdot\right\|_0$ — норма вектора $d=\left(d_1,d_2,...,d_l\right)$ в просторі R^l, тобто

$$\left\|d\right\|_0^2=\sum_{i=1}^{l}d_i^2.$$

Нехай

$$\beta_i^k = \int_a^b S_{iN_i}(\xi,s)\Big(u_i^*(s) - u_i^k(s)\Big)ds\ ,\ i=\overline{1,n}\ , \tag{65}$$

ω_i, ρ_i — додатні константи, які фігурують у наступних нерівностях

$$\int_a^b \left\{ \sum_{m=1}^{n} \int_a^b G_{im}(\xi,s)\vartheta_m(s)ds \right\}^2 d\xi \le \omega_i^2 \sum_{m=1}^{n} \int_a^b \Big\{\vartheta_m(s)\Big\}^2 ds\ , \tag{66}$$

$$\left\{ \sum_{m=1}^{n} \int_a^b \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{im}}(s)\vartheta_m(s)ds \right\}^2 \le \rho_i^2 \sum_{m=1}^{n} \int_a^b \vartheta_m^2(s)ds\ , \tag{67}$$

і

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \chi_i^{1/2} \cdot \omega_i\ ,\ \rho = \sum_{i=`1}^{l} \rho_i^2\ .$$

Тоді буде справедливе таке твердження.

Теорема 3. Якщо $q_N < 1$, то будуть справедливі наступні оцінки, які характеризують швидкість збіжності методу

$$\left\| x^* - x_k \right\| \le \gamma\, p_N q_N^{k-1} \sum_{l=1}^{n} \left\| u_l^* - u_l^0 - \beta_l^0 \right\|, \tag{68}$$

$$\left\| \lambda^* - \lambda_k \right\| \le \rho\, p_N q_N^{k-1} \sum_{l=1}^{n} \left\| u_l^* - u_l^0 - \beta_l^0 \right\|, \tag{69}$$

та конструктивні оцінки

$$\left\| x^* - x_k \right\| \le \gamma \frac{p_N}{1-q_N} \sum_{l=1}^{n} \left\| u_l^k - u_l^{k-1} - \omega_l^k \right\|, \tag{70}$$

$$\left\| \lambda^* - \lambda_k \right\| \le \rho \frac{p_N}{1-q_N} \sum_{l=1}^{n} \left\| u_l^k - u_l^{k-1} - \omega_l^k \right\|. \tag{71}$$

Доведення. Дані оцінки випливають із відповідних оцінок для колокаційно-ітеративного методу розв’язування системи інтегральних рівнянь (56).

Справді, виконавши нескладні перетворення, для системи інтегральних рівнянь отримаємо наступні оцінки

$$\left\| u_i^* - u_i^k \right\| \le p_i q_N^{k-1} \sum_{m=1}^{n} \left\| u_m^* - u_m^0 - \beta_m^0 \right\|, \tag{72}$$

$$\left\| u_i^* - u_i^k \right\| \le \frac{p_i}{1-q_N} \sum_{m=1}^{n} \left\| u_m^k - u_m^{k-1} - \omega_m^k \right\|. \tag{73}$$

Тоді, на основі співвідношень (66), (67), виконавши нескладні перетворення, отримаємо

$$\left\|x^* - x_k\right\| \le \sum_{i=1}^{n}\left\{\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\left(x^*(t) - x_k(t)\right)^2 dt\right\}^{1/2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\chi_i\int_a^b\left(y_i^*(\xi) - y_i^k(\xi)\right)^2 d\xi\right\}^{1/2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\chi_i\int_a^b\left\{\sum_{m=1}^{n}\int_a^b G_{im}(\xi,s)\left(u_m^*(s) - u_m^k(s)ds\right)\right\}^2 ds\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\chi_i^{1/2}\omega_i\left\{\sum_{m=1}^{n}\int_a^b\left(u_m^*(s) - u_m^k(s)\right)^2 ds\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \gamma\sum_{m=1}^{n}\left\|u_m^* - u_m^k\right\| \le \gamma p_N q_N^{k-1}\sum_{k=1}^{n}\left\|u_l^* - u_l^0 - \beta_l^0\right\|.$$

Аналогічними перетвореннями отримаємо оцінку і для параметрів

$$\left\|\lambda^* - \lambda_k\right\|_0 = \left\{\sum_{i=1}^{l}\left|\lambda_i\right|^2\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{l}\left\{\sum_{m=1}^{n}\int_a^b \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{im}}(s)\left(u_m^*(s) - u_m^k(s)\right)ds\right\}^2\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \left\{\sum_{i=1}^{l}\rho_i^2\sum_{m=1}^{n}\int_a^b\left(u_m^*(s) - u_m^k(s)\right)^2 ds\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \rho\sum_{m=1}^{n}\left\|u_m^* - u_m^k\right\| \le \left\|u_i^* - u_i^k\right\| \le \rho p_N q_N^{k-1}\sum_{l=1}^{n}\left\|u_l^* - u_l^0 - \beta_l^0\right\|.$$

Теорема доведена.

Список використаних джерел:

1. Бойчук А. А. Конструктивные методы анализа краевых задач / А. А. Бойчук. — К. : Наук. думка, 1990. — 96 с.
2. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы / А. Ю. Лучка. — К. : Наук. думка, 1993. — 288 с.
3. Лучка А. Ю. Методи дослідження імпульсних систем диференціальних рівнянь з параметрами та обмеженнями / А. Ю. Лучка, Ю. О. Захарійченко // Теорія обчислень. — К. : Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова, 1999. — С. 232—236.

4. Лучка А. Ю. Ітераційний метод побудови розв'язків лінійних рівнянь з обмеженнями / А. Ю. Лучка, Т. А. Кучерук // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 4. — С. 472—482.
5. Лучка А. Ю. Проекційно-ітеративний метод для диференціальних рівнянь з обмеженнями / А. Ю. Лучка // Нелінійні коливання. — 2002. — Т. 5, № 4. — С. 465—488.
6. Лучка А. Ю. Дослідження систем диференціальних рівнянь з параметрами в імпульсних умовах та обмеженнях / А. Ю. Лучка, Ю. О. Захарійченко // Нелінійні коливання. — 2000. — Т. 3, № 4. — С. 218—225.
7. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — К. : Вища шк., 1987. — 287 с.
8. Самойленко А. М. О применении итерационных процессов к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и параметрами / А. М. Самойленко, А. Ю. Лучка, В. В. Листопадова // Докл. НАН Украины. — 1994. — № 2. — С. 15—20.
9. Поселюжна В. Б. Про один метод розв'язування крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом і параметрами / В. Б. Поселюжна // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, 2009. — Вип. 1. — С. 111—120.

The question of collocation-iterative method interfluenceconcerning the boundary problem solution for the simple differential equationswith impulsive influence and parameters is investigated in the article. Interfluenceconditions method, blunder evaluation are fixed.

Key words: *boundary problem, differential equations, integral equations, collocation-iterative method.*

Отримано: 12.03.2011