УДК 518.25

Л. М. Семчишин, канд. фіз.-мат. наук,
В. Б. Поселюжна, канд. фіз.-мат. наук

Чортківський інститут підприємництва і бізнесу Тернопільського національного економічного університету, м. Чортків

РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ З СИМВОЛЬНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ НА ЕОМ

У статті розглянуто новий підхід до розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з символьними елементами на ЕОМ. Проаналізовано особливості розв'язання систем алгебричних рівнянь з символьними елементами. Проведено оцінку ефективності деяких числових методів розв'язання алгебричних систем лінійних рівнянь у випадку систем з символьними елементами. Описано загальний алгоритм розв'язання символьних систем з щільно заповненою матрицею. Розглянуто тестування алгоритмів розв'язання щільно заповнених числових систем лінійних алгебричних рівнянь на ЕОМ.

Ключові слова: *системи алгебричних рівнянь, символьні елементи, метод виключення, визначники, щільно заповнена матриця, обчислювальні алгоритми.*

Вступ. Успішне розв'язання численних задач математики стало можливим лише завдяки широкому використанню математичних моделей, обчислювальних методів і комп'ютерних технологій. Однією з найважливіших складових частин базового програмного забезпечення сучасних комп'ютерних систем є обчислювальні методи алгебри, тобто методи, які ґрунтуються на побудові скінченної послідовності дій над скінченною множиною чисел. Використовуючи такі методи, розв'язок математичної задачі отримують у вигляді числового результату. В останні роки зросла також потреба широкого використання алгоритмів комп'ютерної алгебри для розрахунку і оптимізації математичних моделей, в задачах лінійного і параметричного програмування. Подібні задачі зустрічаються також в задачах хімічної кінетики, при розв'язанні задач синтезу великих електронних схем, в задачах будівельної механіки, в динамічному програмуванні.

Головні переваги математики як засобу наукового пізнання найповніше розкриваються саме у процесі побудови математичних моделей.

Постановка проблеми. Сьогодні існує й успішно розвивається декілька напрямків і концепцій щодо виконання символьних перетворень. Із комп'ютерних систем універсального характеру широкого розповсюдження набули REDUCE, muMATH, SCRATCHPAD, MATHEMATICA, MAPLE, MatLab, DERIVE, MatCad. З більшим чи меншим успіхом їх можна застосувати для різних задач комп'ютерної алгебри, у тому числі й розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь. Однак цей розділ ще не настільки високо розвинутий, як методи для числових систем.

Зупинимося на специфіці побудови ефективних алгоритмів для розв'язання символьних лінійних систем алгебричних рівнянь. Стосовно визначення обернених матриць та інших пов'язаних з цим задач, зокрема щодо розв'язання систем лінійних рівнянь і визначення детермінантів, безпосередньо алгоритми числового аналізу застосовувати не вдається, оскільки труднощі, що виникають у комп'ютерній алгебрі та в числовому аналізі суттєво відрізняються. Передусім, у комп'ютерній алгебрі немає проблеми числової стійкості, тому будь-який ненульовий елемент є хорошим провідним елементом для алгоритму виключення.

Аналіз останніх публікацій. У роботі [5, с. 86—96] запропоновано новий підхід до розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь із числовими елементами. Проведено порівняльну характеристику СЛАР з числовими елементами та описано тестування процедур лінійної алгебри в середовищі MatLab. Показано тестування кліткових алгоритмів розв'язання числових систем лінійних алгебричних рівнянь.

Актуальність теми. Розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з символьними елементами вимагає застосування ефективних чисельних методів.

Слід зауважити, що питання розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з символьними елементами розглядалися у працях [1; 2; 7].

Мета роботи. Метою цієї роботи є дослідження систем лінійних алгебричних рівнянь з символьними елементами на ЕОМ. Проведення аналізу розв'язання, одержання деяких теоретичних оцінок та розгляд підходів розв'язку одержаних систем числових рівнянь.

Основна частина. Проаналізуємо особливості розв'язання на ЕОМ систем алгебричних рівнянь з символьними елементами.

Нехай задана система такого вигляду:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = a_{i,n+1} \ (i = 1, 2, 3, ..., n), \qquad (1)$$

елементи $a_{i,j}$ якої є символами. Для одержання запису розв'язків x_j $(j = 1, 2, ..., n)$ системи (1) розглянемо два підходи.

Проведемо оцінку ефективності можливого узагальнення деяких числових методів розв'язання алгебричних систем лінійних рівнянь у випадку систем з символьними елементами.

Застосуємо метод виключення. Спочатку детально зупинимося на одному з найкраще відпрацьованих числових методів лінійної алгебри — алгоритмі виключення Гауса. Під методом Гауса, як і в числовому аналізі, розумітимемо алгоритм розв'язання систем, що складається з двох етапів: прямого і зворотного ходу. Прямий хід полягає в послідовному виключенні невідомих за функціонально-зв'язаними співвідношеннями:

$$\left.\begin{aligned} a_{i,j}^{(1)} &= a_{i,j} - \frac{a_{i,1}a_{1,j}}{a_{1,1}} \left(i=\overline{2,n};\ j=\overline{2,n+1}\right); \\ a_{i,j}^{(k)} &= a_{i,j}^{(k-1)} - \frac{a_{i,k}^{(k-1)}a_{j,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} \left(k=\overline{2,n-1};\ i=\overline{k+1,n};\ j=\overline{k+1,n+1}\right). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Потім, під час зворотного ходу, послідовно визначаються всі невідомі за співвідношенням:

$$\left.\begin{aligned} x_n &= a_{n,n-1}^{(n-1)} / a_{n,n}^{(n-1)}; \\ x_i &= \left(a_{i,n+1}^{(i-1)} - a_{i,j}^{(i-1)} x_j\right) / a_{i,i}^{(i-1)}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Тепер оцінимо кількість символів, що записуються ЕОМ при реалізації алгоритму. Згідно (3) під час прямого ходу методу виключення на k -ому кроці буде виконано $(n-k)(n+1-k)\cdot 5$ записів на ЕОМ.

Отже, з точністю до головного члена, при виконанні прямого ходу буде виконано $5/3n^3$ записів. При зворотному ході запишеться $3/2n^2$ символів.

Отже, з точністю до головного члена, складність алгоритму — $5/3n^3$ записів. Для інших відомих методів лінійної алгебри оцінки часу запису будуть того ж самого порядку.

Розв'язати задачу запису розв'язків системи в аналітичному вигляді за рахунок тривіального узагальнення звичайних числових методів, як правило, не вдається.

Розглянемо, наприклад, можливості застосування методу виключення для розв'язання даної задачі. Дійсно, співвідношеннями (2) та (3) можна скористатися, щоб поетапно представити невідомі $(i = 1, 2, \dots n)$. Однак в методі Гауса для запису $a_{i,j}^{(k)}$ на k -ому поверсі використовуються 4 записи $(k-1)$ -го поверху алгоритму $a_{i,j}^{(k-1)}, a_{i,k}^{(k-1)}, a_{j,k}^{(k-1)}, a_{k,k}^{(k-1)}$. Нескладні розрахунки показують, що згідно з теоремою [4].

Теорема. Нехай деяка обчислювальна задача із вхідними даними $\{a_i\}$ розв'язується на ЕОМ за алгоритмом $\psi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ і складається з k кроків $\psi_j\ (j = 1, 2, \dots, k)$. Якщо на кожному кроці реалізації алгоритму $\varphi(A)$ має місце хоча б один запис виду $\psi_{ji_1}(A) * \psi_{ji_2}(A)$, який використовує результат попереднього кроку, то загальна складність Q_ψ

задачі буде не меншою 2^k, але не більшою H^k записів, де H — найбільша ширина алгоритму на k кроках.

Для виконання прямого ходу методу і запису x_n потрібно буде 4^n елементарних записів. А для зворотного ходу кількість записів наростає ще скоріше і може бути оцінена як $O\left[\left(4^n\right)!\right]$. Такі обчислювальні схеми називають NP-складними [3].

Метод Крамера, що записує визначник матриці порядку n вигляді суми $n!$ добутків по n елементів матриці, для чисел має надзвичайно низьку ефективність: число операцій дорівнює $O\left[n(n!)\right]$ замість $O\left(n^3\right)$ в алгоритмі виключення. Але в комп'ютерній алгебрі ціна операції залежить від розміру даних, які використовуються. Тому для матриць поліномів від багатьох змінних ефективність алгоритму Крамера значно збільшується, порівняно з іншими методами, що базуються на виключенні.

Ефективні методи обчислення детермінантів обговорюються в роботі Е. Е. Тиртишнікова [7]. Для обчислення визначників з символьними елементами пропонується застосовувати, власне кажучи, його означення:

$$A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^{n-1} \delta_l \prod_{i=1}^{n} a_{il},$$

причому $l_i \neq l_j$ для всіх $i \neq j$; вектор $L = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ — не що інше як перестановка елементів натурального ряду чисел від 1 до n;

$\left\| a_{i,l} \right\|$ — елементи матриці розміру $n \times n$;

$$\delta_l = \begin{cases} +1, & \text{якщо перестановка елементів парна,} \\ -1, & \text{якщо перестановка елементів непарна;} \end{cases}$$

k — кількість перестановок без урахування перестановок з нульовими елементами.

Для алгоритмів, що базуються на подібному підході, характерний один недолік, який звужує сферу їх застосування, — незручність та неефективність використання для розв'язання систем з розрідженими матрицями. Тому зупинимося на методах розв'язання символьних систем лінійних алгебричних рівнянь, що використовують апарат ланцюгових дробів [6]. Такий підхід придатний як для систем загального вигляду, так і для розріджених систем багатьох типів.

Спочатку опишемо загальний алгоритм розв'язання символьних систем з щільно заповненими матрицями. Для компактності подальших записів введемо ряд позначень. Під $A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_s \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_s \end{bmatrix}$, як і раніше, розуміється мінор, розміщений на перетині рядків $i_1, i_2, ..., i_s$ та стовпців $j_1, j_2, ..., j_s$ $(s = 1, 2, ..., n)$; N — множина. $N = \{1, 2, 3, ..., n\}$, і за аналогією через $N(k_1, k_2, ..., k_s)$ позначимо множину:

$$N(k_1, k_2, ... k_s) = \{ j \in N, j = k_1, k_2, ... k_s \}.$$

З урахуванням цих позначень, на основі правила Крамера для системи (1) з символьними елементами, можемо записати:

$$x_i = \sum_{j_1 \in N} \cfrac{(-1)^{i+j_1} a_{j_1, n+1}}{\sum\limits_{j_2 \in N(j_1)} \cfrac{(-1)^{i+j_2} a_{j_2, i}}{\sum\limits_{j_3 \in N(i)} \cfrac{(-1)^{j_2+j_3}}{a_{j_1 j_3} + ...}}}$$

$$... + \sum_{j_{2n-1} \in N(j_1 ... j_{2n-1})} \frac{(-1)^{j_{2N-2}+j_{2N-1}} a_{j_{2N-2}, j_{2N-1}}}{a_{j_{2N-3}, j_{2N-1}}}$$

Суттєвою відмінністю даного підходу [7] є, передусім його універсальність. Крім того, на відміну від інших алгоритмів, вдається одержати конструктивний аналітичний запис для розв'язків системи.

Тестування алгоритмів розв'язання щільно заповнених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь середньої розмірності

Опис тестування функції ESSEMP

Система лінійних рівнянь Дж. Х. Уілкінсона. Для перевірки наростання похибок заокруглення в методах виключення невідомих за рахунок росту проміжних елементів в процесі перетворення матриці Дж. Х. Уілкінсон запропонував систему з такою матрицею:

$$A_W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У методах виключення з вибором провідного елемента по стовпцях через ріст елементів у процесі перетворень при подібному заповненні матриці досягається похибка заокруглення порядку $n2^n$. Тут n — порядок системи.

Для спрощення аналізу точності одержаних значень невідомих x_i права підібрана так, щоб точний розв'язок був $x_i = i$ для всіх $i = 1, 2, \cdots, n.$

Для розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab написана і протестована функція Essemp. Ця функція реалізує другий алгоритм відсічених систем і написана за допомогою об'єктно-орієнтованої макромови MatLab.

Для спрощення її можливого використання поданий її текст разом з блоком формуванням системи лінійних алгебричних рівнянь, яка має щойно описану матрицю Дж. Х. Уілкінсона.

```
function [] =Essemp_Wilkinson_Test( Dimension )
%------------------------------------------------
%<< E S S E M P >> - процедура для рішення невироджених 
систем
%лінійних алгебричних рівнянь Ax=b з багатьма правими 
частинами
%Вхідні параметри:
%N - кількість невідомих системи
%Np — кількість правих частин системи
%X - одномірний масив розміру RBxKB для зберігання об-
числених
%значень невідомих;
%Y - одномірний робочий масив довжини N.
%Det - значення визначника системи
%------------------------------------------------
%Ввід початкових даних тестової системи
clc
N=0;
while N<=36
N=N+12
for i=1 : N
  Sum=0;
  for j=1 : N
    if (i<j) A(i,j)=0.0; end
    if (i>j) A(i,j)=-1.0; end
    A(i,i)=1.0;
    A(i,N)=1.0;
    Sum=Sum+A(i,j)*j;
  end
  A(i,N+1)=Sum;
end
%Тіло програми
N1=N+1;
Np=1;
B=zeros(N);
```

```
X=zeros(N);
Y=zeros(N);
Det=1.0;
P=0;
Piv=0;
Sum=0;
for m=1 : N
    M1=m-1;
    M2=m-2;
    MP1=m+1;
    Piv=0.0;
    iv =m;
    for i=m : N
       P=A(i,m);
       if (m>1)
         for j=1 : M1 P=P-A(i,j)*X(j,1); end
       end
       if abs(Piv)<abs(P) Piv=P; iv=i; end
       B(i,m)=P;
    end
     for j=1 : m
       Sum=B(m,j);
       B(m,j)=B(iv,j);
       B(iv,j)=Sum;
     end
     for j=1 : N1
       Sum=A(m,j);
       A(m,j)=A(iv,j);
       A(iv,j)=Sum;
      end
    Det=Det*B(m,m);
      if m<N for i=MP1 : N B(i,m)=B(i,m)/B(m,m); end
      end
      if m>1 Y(M1)=B(m,M1); end
      if m>2 for jr=1 : M2
            j=m-jr-1;
            Y(j)=B(m,j);
            js=j+1;
            for i=js : M1 Y(j)=Y(j)-B(i,j)*Y(i); end
           end
      end
      for j=MP1 : N+Np
         P=A(m,j);
```

```
      if m>1 for i=1 : M1 P=P-A(i,j)*Y(i); end
   end
      B(m,j)=P/B(m,m);
   end
   X(m,1)=B(m,MP1);
   if m>1 for ir=1 :M1
         i=m-ir;
         X(i,1)=B(i,MP1);
         is=i+1;
         for j=is:m X(i,1)=X(i,1)-B(i,j)*X(j,1); end
        end
   end
   if m>=N for j=2 : Np
           X(m,j)=B(m,N+j);
           for ir=1 : M1
            i=m-ir;
            X(i,j)=B(i,N+j);
            is=i+1;
     for jj=is : m X(i,j)=X(i,j)-B(i,jj)*X(jj,j); end
          end
    end
   end
 end
N
Det
disp('X=')
  for j=1:Np
     X_i= X(:,j);
  end
 X_i'
end
end
```

Складність даного алгоритму — це $10n^2(n!)$ елементарних записів. Як і алгоритм, запропонований в [7], цей метод передбачає дуже високі вимоги до пам'яті, швидкодії, зовнішніх пристроїв ЕОМ.

Висновки. У статті розглянуто новий підхід до розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з символьними елементами на ЕОМ. Проаналізовано особливості розв'язання СЛАР з символьними елементами. Створено оптимізаційну модель для розв'язання систем алгебричних рівнянь з символьними елементами та запропоновано ефективний обчислювальний метод реалізації цієї моделі.

Проведено оцінку ефективності деяких числових методів розв'язання алгебричних систем лінійних рівнянь у випадку систем з символьними елементами. Описано загальний алгоритм розв'язання символьних систем з щільно заповненою матрицею.

Розглянуто тестування алгоритмів розв'язання щільно заповнених числових систем лінійних алгебричних рівнянь на ЕОМ.

Запропонований алгоритм може ефективно використовуватися в системах комп'ютерної алгебри, в економіко-математичних дослідженнях та для аналітично-числового розв'язання інженерних прикладних задач.

На основі запропонованого підходу в пакеті MatLab були проведені числові експерименти для розв'язання щільно заповнених числових систем лінійних алгебричних рівнянь середньої розмірності. Вони підтверджують ефективність алгоритму.

Список використаних джерел:

1. Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы / В. В. Воеводин. — М. : Наука, 1976. — 312 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1967. — 324 с.
3. Дэвенпорт Дж. Компьютерная алгебра / Дж. Дэвенпорт, И. Сирэ, Э. Турнье. — М. : Мир, 1991. — 352 с.
4. Недашковський М. О. Обчислення з λ-матрицями / М. О. Недашковський, О. Я. Ковальчук. — К. : Наук. думка, 2007. — 294 с.
5. Семчишин Л. М. Застосування методу відсічених систем у середовищі MATLAB / Л. М. Семчишин, В. Б. Поселюжна // Вісник Запорізького національного університету. — Запоріжжя, 2011. — Вип. 2. — С. 86–96.
6. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и её применение в вычислительной математике / В. Я. Скоробогатько. — М. : Наука, 1983. — 312 с.
7. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. — М. : Физматлит, 2007. — 480 с.

A new approach to the solution of the linear algebraic equation with symbolic elements on the ECM is considered in the article. Peculiarities of the linear algebraic equation with symbolic elements solution are analyzed. The effectiveness of some numerical methods of the linear algebraic equation solution in the case of systems with symbolic elements are estimated. General algorithm of the symbolic system with the tightly filled matrix is described. Testing of the tightly filled numerical system of the linear algebraic equation on the ECM algorithm solution is examined.

Key words: *systems of the algebraic equation, symbolic elements, excluding method, determiners, tightly filled matrix, calculative algorithms.*

Отримано: 12.04.2013