Доказательство. Предположим, что nC_5 – Фибоначчи грациозный граф. Тогда цикл C_5, содержащий вершину с меткой 0, будет иметь метки ребер F_{5n}, F_{5n-1}, F_{5n-3}, F_{5n-5}, F_{5n-6}. Число F_{5n-2} должно быть меткой ребра любого другого цикла. В этом случае не существует последовательности чисел, удовлетворяющих условию следствия 1.3. Пришли к противоречию. Следовательно, граф nC_5 не является Фибоначчи грациозным графом для любого натурального $n \geq 2$. Теорема доказана.

ВЫВОДЫ

Для повышения быстроты и эффективности получения результатов по классу задач, использующих Фибоначчи грациозность графов, требуется разработка алгоритмов. Нами предложены теоретические основы на пути к созданию подобных алгоритмов. При исследовании структуры графов, не допускающих Фибоначчи грациозную разметку, доказана теорема, исключающая определенный класс графов из списка Фибоначчи грациозных графов.

Полученная в данной работе методика построения Фибоначчи грациозной разметки графа nC_3 может быть использована в дальнейших теоретических исследованиях, а также при создании алгоритмов конструктивного перечисления Фибоначчи грациозных разметок определенных классов графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kovar P. Decompositions and Factorizations of Complete Graphs / P. Kovar // Structural Analysis of Complex Networks. Edited by Matthias Dehmer. — Springer, 2010.
2. Koh K. M. Fibonacci trees / K. M. Koh, D. G. Lee, T. Tan // SEA bull. math. — 1978. — №2. — P. 45–47.
3. Bange D. W. Fibonacci graceful graphs / D. W. Bange, A. E. Barkauskas // Fibonacci quarterly. — 1983. — Vol. 21, № 3. — P. 174–188.
4. Vaidya S. K. Fibonacci and super Fibonacci graceful labeling of some cycle related graphs / S. K. Vaidya, U. M. Prajapati // International J. Math. Combin. — 2011. — №4 — P. 56–69.
5. Kathiresan K. M. Fibonacci graceful graphs. Ph. D. Thesis / K. M. Kathiresan, S. Amutha // Madurai Kamaraj University, October 2006.
6. Sridevi R. Super Fibonacci graceful labeling / R. Sridevi, S. Navaneethakrishnan, K. Nagarajan // International J. Math. Combin. — 2010. — №3. — P. 22–40.
7. Sridevi R. Super Fibonacci graceful labeling of some special class of graphs / R. Sridevi, S. Navaneethakrishnan, K. Nagarajan // International J. Math. Combin. — 2011. — №1. — P. 59–72.

УДК 518.25

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ РОЗВ’ЯЗАННЯ РОЗРІДЖЕНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Семчишин Л. М., к.ф.-м.н

Чортківський навчально-науковий інститут підприємництва і бізнесу,
Тернопільський національний економічний університет

Запропоновано новий підхід до розв’язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами, а також метод розв’язування розріджених систем із деякими найхарактернішими способами заповнення. Розкладено невідомі x_i цієї розрідженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь у скінчені матричні ланцюгові дроби. Проведено підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць. Охарактеризовано складність алгоритму з точки зору комп’ютерної алгебри. Проведено порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Обчислено кількість записів для методу прогонки. Описаний алгоритм застосований і у випадку систем із проріджениими трьохдіагональними матрицями.
Протестовано алгоритми розв’язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв’язано трьохдіагональні системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом ланцюгових дробів. У роботі показано ефективність запропонованого алгоритму.

Ключові слова: розріджені системи, ланцюгові дроби, скінченні суми, кількість записів, складність алгоритму, комп’ютерна алгебра, тестування алгоритмів.

Семчишин Л. М. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ РАЗРЕЖЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ / Чертковский учебно-научный институт предпринимательства и бизнеса, Тернопольский национальный экономический университет, Украина

Предложен новый поход к *решению* разреженных систем линейных алгебраических уравнений с блочными элементами, а также метод решения разреженных систем с некоторыми характерными способами заполнения. Разложены неизвестные x_i данной разреженной системы линейных алгебраических уравнений в *конечные м*атричные цепные дроби. Проведен подсчет количеств записей *и операций при* численной реализации алгоритма умножения матриц. Охарактеризована сложность алгоритма с точки зрения компьютерной алгебры. Проведено сравнение предложенного алгоритма и блочного метода прогонки. Вычислено количество записей для метода прогонки. Описанный алгоритм применен и в случае систем *с прореженными* трехдиагональными матрицами.

Протестированы алгоритмы решения некоторых типов разреженных числовых систем линейных алгебраических уравнений. Проведено решения трехдиагональных систем линейных *алгебраических* уравнений методом цепных дробей. В работе показана эффективность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: разреженные системы, цепные дроби, конечные суммы, количество записей, сложность алгоритма, компьютерная алгебра, тестирование алгоритмов.

Semchyshyn L. M. PROGRAM REALIZATION OF THE RAREFIED SYSTEMS LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS SOLUTION / Chortkiv scientific educational Institute of enterprise and business, Ternopil National Economic University, Ukraine

New approach to the linear algebraic equations rarefied systems with block elements solution and the method of rarefied systems with the specific ways of filling solution is suggested in the article. Minor denotation, which lies on the intersection of the block tapes and block columns is introduced. In the suggested work the Cramer's generalized rule is used, and Leonard Eiler equality, which ties chain fractions with lines and finite sums is applied. The variables of the x_i rarefied system of the linear algebraic equations into the finite matrix chain fractions are decomposed. Statement for the algorithm complexity estimation in terms of computer algebra is used. Calculation of the records number and operations under the numerical realization of the matrix multiplication algorithm is conducted. The algorithm complication from the point of view of computer algebra is characterized. Comparison of the suggested algorithm and the block tridiagonal matrix algorithm is carried out. The number of records for the tridiagonal matrix algorithm is calculated. The suggested algorithm significantly dominates the classical tridiagonal matrix algorithm. It can be realized both in the analytical and numerical aspect. The described algorithm is used in the case of systems with the rarefied three-diagonal matrix. Matrix can be framed from one side as well as from both sides.

Algorithms of some types rarefied numerical systems of the linear algebraic equations are tested. Three-diagonal systems of the linear algebraic equations solution by the method of chain fractions. The high accuracy of the suggested solution is shown.

Function ESSELS is written and tested for the linear algebraic equations with numerical elements solution systems in the MatLab medium. This function implements the algorithm of the linear algebraic equations solution using the method of cut-off systems. This algorithm allows to solve equation systems in two ways: – in the case of symmetrical filling (the quantity of under-diagonals equals the quantity of above-diagonals), and when the quantity of matrix under-diagonals and the quantity of above-diagonals are different. For the comparison of the MatLab package with regular programs a small program MatLabFC_Three_Diag_Sys was written. The system of equations for testing of the threediagonal linear algebraic equations algorithm using the method of chain fractions was used. It's asymmetric system of equations without a diagonal dominance and with the average meaning of spectrum number conditionality.

FC_Three_Diag_Sys function realizes the procedure of the linear algebraic equations tape systems by means of MatLab. Suggested the simplification of possible usage the text with the block forming of the linear algebraic equations, with the described matrix.

The results of both systems comparison are carried out in the chart. A simple test shows the high accuracy of the suggested method of threediagonal systems solving by the method of chain fractions. Algorithms for the given test system of the average dimension have a considerable advantages in comparison with the standard functions of the MatLab package. Efficiency of the suggested algorithm is shown in the article. Theoretical and methodological basis of investigation comprise methods of optimization and mathematic modeling. The given algorithm can be effectively used in computer algebra systems and for the engineering and applied in analytical and numerical problems solution.

Key words: rarefied systems, chain fractions, finite sums, quantity of records, algorithm difficulty, computer algebra, algorithm testing.

ВСТУП

Постановка проблеми. Актуальною задачею обчислювальної математики є розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Обчислювальна математика вивчає чисельні методи розв'язування різних математичних задач, тобто методи, які ґрунтуються на побудові скінченної послідовності дій над скінченною множиною чисел. Обчислювальні методи є одними з базових інструментів математичного моделювання і важливою частиною програмного забезпечення для комп'ютерів усіх поколінь. За умови використання таких обчислювальних методів застосовують математичне моделювання до розв'язку математичної задачі. Тоді розв'язок одержується у вигляді числового результату. Його ефективність визначається продуктивністю ЕОМ та якістю обчислювальних алгоритмів і програм, що використовуються.

Побудова ефективних методів визначення невідомих для таких систем – потрібна і досить непроста задача.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Багато відомих вітчизняних і закордонних вчених займалися проблемами розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Серед них: В. Воєводін [1, 2], В. Воєводін, Ю. Кузнєцов [3], Є. Тиртишніков [4], Дж. Уілкінсон [5] та ін. Розв’язуванню розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами присвячені роботи В. Воєводіна [6], Ф. Гантмахера [7]. Однак деякі проблеми не мають однозначного розв’язання і потребують уточнення. У роботі М. Недашковського і О. Ковальчук [8] розглянуто комп’ютерні алгоритми для систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Особлива увага приділялася методам аналізу обчислювальної стійкості алгоритмів у працях таких вчених, як: С. Ашманов [9], В. Валях [10], Д. Девенпорт, І. Сире, Е. Турньє [11].

Мета роботи. Дослідити новий підхід до розв’язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Провести підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць. Порівняти запропонований алгоритм та блочний метод прогонки. Обчислити кількість записів для методу прогонки. Протестувати алгоритми розв’язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Показати ефективність запропонованих алгоритмів.

Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації та математичне моделювання.

Дослідження задачі та обґрунтування отриманих наукових результатів. У значній кількості прикладних задач виникає необхідність розв’язання розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами [1, 2]. Розглянемо метод розв’язування розріджених систем із деякими найхарактернішими способами заповнення.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,n+1} \\ A_{2,n+1} \\ A_{3,n+1} \\ \dots \\ A_{n-1,n+1} \\ A_{n,n+1} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

елементи якої A_{ij} – це блоки розмірності $m \times m$. Позначимо через $A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{bmatrix}$ мінор, розміщений на перетині блочних стрічок $i_1, i_2, \dots, i_k$ та блочних стовпців $j_1, j_2, \dots, j_k$. За узагальненим правилом Крамера [2]

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{1,n+1} & 0 & 0 \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \ddots & A_{2,n+1} & \ddots & 0 \\ \ddots & A_{3,2} & \ddots & A_{3,n+1} & \ddots & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & A_{n,n+1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}.$$

Розкладаючи чисельник за мінорами, можна записати

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix} \right). \qquad (2)$$

Введемо позначення

$$\alpha_{ik} = A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix},\ i,k = \overline{1,n}.$$

Тоді для визначення невідомої x_1 маємо співвідношення

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k}. \tag{3}$$

Для компактності запису надалі будемо позначати результат виконання операції множення на обернену матрицю зліва у вигляді $C^{-1}D = D/C$. Тоді вираз $D_1/(C_1 + D_2/C_2)$ означатиме $\left(C_1 + C_2^{-1}D_2\right)^{-1} \cdot D_1$.

Якщо до співвідношення (3) застосувати відому рівність Леонарда Ейлера [4], яка пов'язує ланцюгові дроби з рядами та скінченними сумами, то для x_1 одержимо

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k} = \frac{A\begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}} \times$$

$$\times \cfrac{A_{1,n+1}}{E + \cfrac{A_{2,n+1}\alpha_{1,2} / A_{1,n+1}\alpha_{1,1}}{E - \cfrac{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}{A_{1,n+1}\alpha_{1,2}} + \cfrac{A_{3,n+1}\alpha_{1,3} / A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}{E - \cfrac{A_{3,n+1}\alpha_{1,3}}{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}} + \ddots}}} \tag{4}$$

$$\ddots + \cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{1,n} / A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1}}{E - \cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{1,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1}}}$$

Тут і далі E – означає одиничну матрицю.

Вираз $\alpha_{1,k+1}^{-1} \cdot \alpha_{1,k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ також можна розкласти в ланцюгові дроби [11]

$$\frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{1,k+1}} = \frac{A_{1,k} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}}{A_{k+1,k+1} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix} - A_{k+1,k} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{A_{1,k}\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}}{A_{k+1,k+1} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix} - A_{k+1,k} A_{k,k+1} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{E}{A_{k+1,k+1} - A_{k+1,k} A_{k,k+1} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix} A^{-1}\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{E}{A_{k+1,k+1} - A_{k+1,k} A_{k,k+1} \left(A^{-1}\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}^T A^T \begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix} \right)^T} =$$

$$= \ldots = \cfrac{E}{A_{k+1,k+1} - \cfrac{A_{k+1,k}A_{k,k+1}}{A_{k,k} - \cfrac{A_{k-1,k}A_{k,k-1}}{A_{k-1,k-1} - \ddots \cfrac{}{\ddots - \cfrac{A_{1,2}A_{2,1}}{A_{1,1}}}}}}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{5}$$

В подібний спосіб

$$\frac{A\begin{bmatrix}2 & 3 & \ldots & n\\ 2 & 3 & \ldots & n\end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ 1 & 2 & \ldots & n\end{bmatrix}} = \frac{E}{A_{1,1} - A_{2,1}A_{1,2}\left[A^{-1}\begin{bmatrix}2 & 3 & \ldots & n\\ 2 & 3 & \ldots & n\end{bmatrix}^T A\begin{bmatrix}3 & 4 & \ldots & n\\ 3 & 4 & \ldots & n\end{bmatrix}^T\right]} =$$

$$= \ldots = \cfrac{E}{A_{1,1} - \cfrac{A_{2,1}A_{1,2}}{A_{2,2} - \cfrac{A_{2,3}A_{3,2}}{A_{3,3} - \ddots \cfrac{}{\ddots - \cfrac{A_{n-1,n}A_{n,n-1}}{A_{n,n}}}}}}.$$

За аналогічною схемою знаходимо решту невідомих x_i

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ 1 & 2 & \ldots & n\end{bmatrix}\right)^{-1}\left(\frac{A_{i,n+1}}{2}\alpha_{i,i} + \sum_{k=1}^{i-1}(-1)^{i+k}A_{k,n+1}\alpha_{i,k} + \frac{A_{i,n+1}}{2}\alpha_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n}(-1)^{i+k}A_{k,n+1}\alpha_{i,k}\right) =$$

$$= \left[(-1)^{2i-1}A_{i-1,i}\alpha_{i,i-1}/\alpha_{i,i} + (-1)^{2i}A_{i,i} + (-1)^{2i+1}A_{i+1,i}\alpha_{i,i+1}/\alpha_{i,i}\right]^{-1} \times$$

$$\times\left[\cfrac{\frac{1}{2}A_{i,n+1}}{E - \cfrac{2\left(A_{i,n+1}\alpha_{i,i}\right)^{-1}A_{i-1,n+1}\alpha_{i,i-1}}{E + \cfrac{2A_{i-1,n+1}\alpha_{i,i-1}}{A_{i,n+1}\alpha_{i,i}} - \ddots \cfrac{}{\ddots - \cfrac{\frac{A_{1,n+1}\alpha_{i,1}}{A_{2,n+1}\alpha_{i,2}}}{E + \frac{A_{1,n+1}\alpha_{i,1}}{A_{2,n+1}\alpha_{i,2}}}}}} - \cfrac{\frac{1}{2}A_{i,n+1}}{E - \cfrac{2\left(A_{i,n+1}\alpha_{i,i}\right)^{-1}A_{i+1,n+1}\alpha_{i,i+1}}{E + \cfrac{2A_{i+1,n+1}\alpha_{i,i+1}}{A_{i,n+1}\alpha_{i,i}} - \ddots \cfrac{}{\ddots - \cfrac{\frac{A_{n,n+1}\alpha_{i,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{i,n-1}}}{E + \frac{A_{n,n+1}\alpha_{i,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{i,n-1}}}}}}\right].$$

А для кожного відношення $\alpha_{i,k}/\alpha_{i,k+1}$ в свою чергу можна записати:

$$\frac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{i,k+1}} = \frac{A\begin{bmatrix}1 & 2 & \ldots & i-1\\ 1 & 2 & \ldots & i-1\end{bmatrix}\prod_{s=i+1}^{k-1}A_{s,s+1}A\begin{bmatrix}k+1 & \ldots & \ldots & n\\ k+1 & \ldots & \ldots & n\end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix}1 & 2 & \ldots & i-1\\ 1 & 2 & \ldots & i-1\end{bmatrix}\prod_{s=i+1}^{k}A_{s,s+1}A\begin{bmatrix}k+2 & \ldots & \ldots & n\\ k+2 & \ldots & \ldots & n\end{bmatrix}} = \frac{A\begin{bmatrix}k+1 & \ldots & \ldots & n\\ k+1 & \ldots & \ldots & n\end{bmatrix}}{A_{k,k+1}A\begin{bmatrix}k+1 & \ldots & \ldots & n\\ k+1 & \ldots & \ldots & n\end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}} - \frac{A_{k+1,k+2}A_{k+2,k+1}}{A_{k,k+1}\left(A^{-1}\begin{bmatrix}k+3 & \ldots & n\\ k+3 & \ldots & n\end{bmatrix}^T A^T\begin{bmatrix}k+2 & \ldots & n\\ k+2 & \ldots & n\end{bmatrix}\right)^T} =$$

$$= \ldots = \frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}} - \cfrac{A_{k+1,k+2}A_{k+2,k+1}/A_{k,k+1}}{A_{k+2,k+2} - \cfrac{A_{k+3,k+2}A_{k+2,k+3}}{A_{k+3,k+3} - \cfrac{A_{k+3,k+4}A_{k+4,k+3}}{A_{k+4,k+4} - \ddots \; \ddots - \cfrac{A_{n-1,n}A_{n,n-1}}{A_{n,n}}}}}.$$

Отже, одержуємо аналітичне розвинення невідомих x_i даної розрідженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь у скінчені матричні ланцюгові дроби.

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ АЛГОРИТМУ

Тепер підрахуємо необхідну кількість записів при символьному розв'язуванні задачі та кількість операцій під час чисельної реалізації алгоритму множення матриць $A_{ij} \cdot A_{kl}$.

Твердження [8]. Нехай деяка обчислювальна задача з вхідними даними $\{A_i\}$ розв'язується на ЕОМ за алгоритмом ψ ($A_1, A_2, \ldots, A_n$) і складається з k кроків ψ_j ($j = \overline{1,k}$). Якщо на кожному кроці алгоритму $\psi(A)$ реалізується хоча б один запис виду $\psi_{ji_1}(A) \cdot \psi_{ji_2}(A)$, який використовує результат попереднього кроку, то загальна складність Q_ψ задачі буде не меншою $2^k \cdot m^2$, але не більшою H^k записів, де H – найбільша ширина алгоритму на k кроках.

Використаємо це твердження для оцінки складності алгоритму з точки зору комп'ютерної алгебри [11]. Для чисел x_i ($i = \overline{1,n}$) на одному поверсі реалізація алгоритму вимагає одне блочне множення, одне блочне ділення, одне блочне додавання, а для n поверхів – $3n$ операцій, тобто по n блочних множень, ділень та додавань.

Обчислення показують, що для визначення всіх $A_{i,k} / A_{i,k+1}$ потрібно $5k$ записів, якщо $k < i$, і $5(n-k)$, якщо $k > i$. Так необхідно виконати

$$5\sum_{k=1}^{i} k + 5\sum_{k=i}^{n} n-k = 5\left[\frac{(1+i)i}{2} + n(n-i+1) - \frac{(i+n)(n-i+1)}{2}\right] = 5\left[i^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - ni\right].$$

Отже, загальна складність методу становить

$$5\sum_{i=1}^{n}\left[i^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - ni\right] = \frac{5}{2}\left(n^3 + n\right).$$

Відомо [7, 10], що алгоритм прогонки реалізується співвідношеннями

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad \alpha_{i+1} = \frac{a_{i,i+1}}{a_{i,i} - a_{i,i-1}}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_{i,n+1} + a_{i,i-1}\beta_i}{a_{i,i} - a_{i,i-1}}$$

для прямого та зворотного ходу.

Проведемо порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Кількість записів для методу прогонки, який реалізується співвідношеннями

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \beta_2, \quad \alpha_2 = \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}, \quad \beta_2 = \frac{a_{1,n+1}}{a_{1,1}},$$

$$x_2 = \alpha_3 x_3 + \beta_3, \quad \alpha_3 = \frac{a_{2,3}}{a_{2,2} - a_{2,1}}, \quad \beta_3 = \frac{a_{2,n+1}}{a_{2,2} - a_{2,1}},$$

$$x_{n-1} = \alpha_n x_n + \beta_n, \quad \alpha_n = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1} - a_{n-1,n-2}}, \quad \beta_n = \frac{a_{n-1,n+1}}{a_{n-1,n-1} - a_{n-1,1}},$$

буде оцінюватися відповідно до *твердження*. Розрахунки свідчать, що для обчислення α_{i+1} та β_{i+1} необхідно записати по i операцій блочного додавання, блочного множення та блочного ділення.

Тоді для обчислення кожного x_k треба записати $\sum_{k=1}^{i} k = (1+i)i/2$ записів, а для обчислення всіх x_i $i=\overline{1,n}$ потрібно $(n^3+n^2+2n)/4$ записів.

Отже, із точки зору комп'ютерної алгебри запропонований алгоритм суттєво переважає класичний алгоритм прогонки. Він може бути реалізований як в аналітичному, так і в числовому вигляді. Для реалізації запропонованого алгоритму потрібно по $6n$ блочних додавань і блочних ділень і $4n$ блочних множень, оскільки в цьому випадку результати обчислень проміжних дробів можуть використовуватися багаторазово.

Відзначимо, що описаний алгоритм можна також застосовувати і у випадку систем із проріджeними трьохдіагональними матрицями наступного вигляду

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & A_{1,k} & & & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \ddots & A_{2,k+1} & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & \ddots & & 0 \\ A_{k,1} & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & A_{n-k,n} \\ 0 & A_{k+1,2} & \ddots & & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{n,n-k} & \ddots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Матриці можуть також бути і обрамленими з однієї або двох сторін. Системи з подібним заповненням розпадаються на k систем вигляду (1), кожна з яких матиме порядок n/k.

Тестування алгоритмів розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Опис тестування функції FC_Three_Diag_Sys

Для перевірки алгоритму розв'язання трьохдіагональних систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом ланцюгових дробів була використана система рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1{,}5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1{,}5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Це несиметрична система рівнянь без діагонального домінування із середнім значенням спектрального числа обумовленості.

Для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab написана і протестована функція FC_Three_Diag_Sys. Ця функція реалізує алгоритм розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом ланцюгових дробів і написана за допомогою об'єктно-орієнтованої макромови MatLab.

Для спрощення її можливого використання поданий текст разом з блоком формуванням системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має описану матрицю.

```
function [] =FC_Three_Diag_Sys( )
 %  Розв'язування трьохдіагональних систем лінійних алгебраїчних  рівнянь
 %          Ax=b
 %  за допомогою матричних ланцюгових дробів
   clc
   n=25;
 % формування тестової системи лінійних рівнянь
    for i=1 : n
       for j=1: n
```

```
            A(i,j)=0;
            if (i==j)   A(i,j)=1.5;  end
            if(i==j+1) A(i,j)=-1; end
            if(j==i+1) A(i,j)=1; end
        end
         b(i)=0;
    end;
    b(1)=3;
 %, обчислення X(1) і решти невідомих
  D(n)=A(n,n);
  i=n;
  while (i>1);
      i = i-1;
      D(i)=A(i,i)-A(i+1,i)*A(i,i+1)/D(i+1);
  end;
  x(1)=b(1)/D(1);
  i=1;
  while (i<n)
    i=i+1;
    x(i)=-A(i,i-1)*x(i-1)/D(i);
 end
x
 end
```

Результати тестування функції FC_Three_Diag_Sys для $n = 25$ скопійовані з вікна MatLab і подані у таблиці:

Значення n	**Значення невідомих x_i**
25	1.5000 0.7500 0.3750 0.1875 0.0938 0.0469 0.0234 0.0117 0.0059 0.0029 0.0015 0.0007 0.0004 0.0002 0.0001 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

Нескладна перевірка показує високу точність запропонованого методу розв'язання трьохдіагональних систем методом ланцюгових дробів.

Опис тестування функції ESSELS

Тут мова піде про розв'язування систем зі стрічковим заповненням. Позначимо через L – кількість наддіагоналей, а через M – кількість піддіагоналей конкретної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. У такому разі обчислення можна вести, звичайно, і за формулами (2) та (3). Однак з врахуванням характеру заповнення стрічкової матриці їх можна привести до вигляду

$$\left.\begin{aligned} & b_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{j=1}^{M} a_{i,j} x_j^{(k-1)}}{a_{k,k} - \sum_{j=1}^{M} a_{k,j} x_j^{(k-1)}}, \quad \left(i = \overline{k+1, n}\right); \\ & z_k^{(k)} = b_{k+1,k}, \quad \left(k = \overline{1, n-1}\right); \quad z_s^{(k)} = b_{k+1,s} - \sum_{i=s+1}^{M} b_{i,s} z_i^{(k)}, \quad \left(s = \overline{k-1, 1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&b_{i,k}=\frac{a_{i,k}-\sum\limits_{j=1}^{L}a_{i,j}x_j^{(k-1)}}{a_{k,k}-\sum\limits_{j=1}^{L}a_{k,j}x_j^{(k-1)}}, \quad \left(i=\overline{k+1,n}\right);\\
&z_k^{(k)}=b_{k+1,k}, \quad \left(k=\overline{1,n-1}\right); \quad z_s^{(k)}=b_{k+1,s}-\sum\limits_{i=s+1}^{L}b_{i,s}z_i^{(k)}, \quad \left(s=\overline{k-1,1}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

За рекурентними формулами (6) та (7) на деякому k -му кроці обчислюються лише ті $b_{i,j}$ і $b_{j,i}$, для яких існує хоча б один ненульовий елемент $a_{i,j}$ початкової матриці.

Алгоритм дозволяє розв’язати системи рівнянь як у випадку симетричного заповнення (кількість піддіагоналей дорівнює кількості наддіагоналей), так і тоді, коли кількість піддіагоналей та наддігоналей матриці різна.

Отже, запропонований алгоритм для даної тестової системи середньої розмірності має суттєві переваги у порівнянні зі стандартними функціями пакету MatLab.

ВИСНОВКИ

У статті розглянуто новий підхід до розв’язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Проведено підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць. Охарактеризовано складність алгоритму з точки зору комп’ютерної алгебри. Проведено порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Обчислено кількість записів для методу прогонки. Протестовано алгоритми розв’язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Показано ефективність запропонованого алгоритму.

Запропонований алгоритм можна ефективно використовувати в системах комп’ютерної алгебри та для аналітично-числового розв’язування інженерних задач та прикладних задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В. В. Воеводин. — М. : Наука, 1977. — 303 с.
2. Воеводин В. В. Линейная алгебра / В. В. Воеводин. — С.-Пб. : Лань, 2008. — 416 с.
3. Воеводин В. В. Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. — М. : Наука, 1984. — 320 с.
4. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. — М. : Физматлит, 2007. — 480 с.
5. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж. Х. Уилкинсон. — М. : Наука, 1970. — 564 с.
6. Воеводин В. В. Математические модели и методы в параллельных процессах / В. В. Воеводин. — М. : Наука, 1986. — 296 с.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1967. — 324 с.
8. Недашковський М. О. Обчислення з λ -матрицями / М. О. Недашковський, О. Я. Ковальчук. — К. : Наук. думка, 2007. — 294 с.
9. Ашманов С. А. Линейное программирование / С. А. Ашманов. — М. : Наука, 1981. — 340 с.
10. Валях В. Е. Последовательно-параллельные вычисления / В. Е. Валях. — М. : Мир, 1985. — 456 с.
11. Дэвэнпорт Д. Компьютерная алгебра /Д. Дэвэнпорт, И. Сирэ, Э. Турнье. — М. : Мир, 1991. — 352 с.