

Тернопільська академія народного господарства

*На правах рукопису*

УДК 519.876.5

**Дивак Микола Петрович**

**Теоретичні засади побудови моделей “вхід-вихід”  
статичних систем методами аналізу інтервальних даних**

01.05.02 – *математичне моделювання та обчислювальні методи*

Дисертація на здобуття наукового ступеня  
доктора технічних наук

Науковий консультант -  
доктор технічних наук,  
професор **Стахів П.Г.**

*Ідентичність всіх примірників дисертації*

**ЗАСВІДЧУЮ:**

*Вчений секретар спеціалізованої  
вченої ради*

**/Д.В. Федасюк/**

Тернопіль - 2003

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1	
АНАЛІЗ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ	
СИСТЕМ НА ОСНОВІ ІНТЕРВАЛЬНИХ ДАНИХ.....	16
1.1. Особливості синтезу моделей “вхід-вихід” статичних систем на основі експериментальних даних.....	16
1.2. Основи інтервального аналізу та його застосування для моделювання об’єктів.....	25
1.3. Способи зображення вихідних змінних моделей статичних систем у інтервальному вигляді.....	32
1.4. Математичні та обчислювальні аспекти методів аналізу інтервальных даних.....	39
1.4.1. Властивості лінійної системи інтервальных рівнянь та інтервальных моделей, побудованих на її розв’язках.....	40
1.4.2. Обчислювальні аспекти методів оцінювання множини параметрів інтервальної моделі статичної системи.....	50
1.5. Планування насичених експериментів у випадку інтервального представлення вихідних змінних моделей статичних систем.....	59
Висновки.....	67
РОЗДІЛ 2	
ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНО-ПАРАМЕТРИЧНИХ ІНТЕРВАЛЬНИХ	
МОДЕЛЕЙ СТАТИЧНИХ СИСТЕМ.....	69
2.1. Синтез структури моделі статичної системи при аналізі інтервальных даних та наближення складних моделей, простішими.....	71
2.2. Аналіз властивостей інтервальных моделей статичних систем у випадку застосування насиченого експерименту.....	84
2.3. Інтервальні моделі статичних систем, побудовані на основі інтервальных оцінок параметрів.....	89

2.4. Властивості інтервальних моделей статичних систем у випадку локалізації області параметрів еліпсоїдом.....	96
Висновки.....	106
<b>РОЗДІЛ 3</b>	
<b>ЛОКАЛІЗАЦІЯ МНОЖИНИ ПАРАМЕТРІВ</b>	
<b>ІНТЕРВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ СТАТИЧНИХ СИСТЕМ.....</b>	
3.1. Інтервальна локалізація параметрів моделі на основі модифікованого симплекс-методу розв’язування задач лінійного програмування.....	108
3.2. Метод локалізації розв’язків системи інтервальних рівнянь з виділенням насиченого блоку.....	118
3.3. Обчислювальна схема методу локалізації параметрів інтервальних моделей з виділенням насиченого блоку.....	124
3.4. Активна ідентифікація параметрів інтервальних моделей методом локалізації з виділенням насиченого блоку експерименту.....	130
Висновки.....	135
<b>РОЗДІЛ 4</b>	
<b>ДОПУСТИМЕ ОЦІНЮВАННЯ МНОЖИНИ ПАРАМЕТРІВ</b>	
<b>МОДЕЛЕЙ “ВХІД-ВИХІД” СТАТИЧНИХ СИСТЕМ</b>	
<b>В КЛАСІ ЕЛІПСОЇДІВ.....</b>	
4.1 Побудова допустимих еліпсоїдальних оцінок із заданими номінальними значеннями параметрів моделей.....	137
4.2. Побудова допустимих еліпсоїдальних оцінок множини параметрів інтервальних моделей статичних систем.....	146
4.2.1. Допустима еліпсоїдальна оцінка у випадку локалізації параметрів інтервальної моделі.....	146
4.2.2. Допустиме оцінювання параметрів лінеаризованої інтервальної моделі в умовах ідентифікації базових функцій.....	151
4.3. Оцінка імовірності працездатності статичної системи на основі аналізу допустимої множини параметрів її моделі.....	156

Висновки.....	167
<b>РОЗДІЛ 5</b>	
<b>ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ ПРИ ПОБУДОВІ</b>	
<b>ІНТЕРВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ СТАТИЧНИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>168</b>
5.1. Планування апріорних $I_G$ - та $I_E$ -оптимальних експериментів.....	169
5.2. Послідовно $I_G$ -оптимальне планування експериментів.....	175
5.3. Оптимальне планування експерименту у випадку локалізації параметрів інтервальної моделі з виділенням насиченого блоку.....	184
5.3.1. Критерії оптимальності “локалізаційного” експерименту з випадковими інтервальними похибками.....	184
5.3.2. Синтез $M(I_D)$ -оптимальних планів.....	188
5.3.3. Умови еквівалентності між $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ - та $M(I_E)$ -оптимальними планами.....	194
5.3.4. Приклади синтезу $M(I_A)$ -оптимальних планів.....	196
Висновки.....	201
<b>РОЗДІЛ 6</b>	
<b>ЗАСТОСУВАННЯ РОЗРОБЛЕНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ ПОБУДОВИ</b>	
<b>МОДЕЛЕЙ “ВХІД-ВИХІД” СТАТИЧНИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>203</b>
6.1. Моделювання технологічного процесу герметизації інтегрованих мікросхем.....	203
6.2. Інтервальне моделювання та прогнозування кількості захворювань в системі екологічного контролю м. Тернопіль.....	214
6.2.1. Особливості отримання узагальнених соціальних та екологічних чинників.....	216
6.2.2. Ідентифікація інтервальної моделі взаємозв’язку між соціально-екологічними чинниками та рівнем захворюваності.....	221
6.2.2.1. Синтез оптимальної структури моделі.....	221
6.2.2.2. Локалізація параметрів інтервальної моделі з виділенням насиченого блоку.....	226

	5
6.2.2.3. Оцінка прогнозних властивостей моделі.....	229
6.3. Особливості побудови та застосування таблиць оптимальних планів експерименту при локалізації параметрів на основі виділення насиченого блоку для поліноміальних моделей.....	233
Висновки.....	241
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....	242
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	247
ДОДАТОК А. Особливості алгоритмічного та програмного забезпечення побудови інтервальних моделей статичних систем.....	274
ДОДАТОК Б. Структура та особливості побудови інформаційно- картографічної системи екологічного контролю.....	290
ДОДАТОК В. Таблиці $M(I_D)$ -, $M(I_A)$ - $M(I_E)$ - оптимальних планів.....	299
ДОДАТОК Д. Акти та довідки про впровадження.....	310

## ВСТУП

При дослідженні статичних систем різного призначення широко використовуються математичні моделі “вхід-вихід”, які будуються за результатами експерименту.

Моделювання статичних систем на основі експериментальних даних вимагає розв’язування трьох взаємопов’язаних задач: планування експерименту та його реалізації; ідентифікації структури моделі та її параметрів; наближення складної моделі більш простішою. Незалежно від способу отримання моделей, усі вони є лише наближеним, спрощеним описом досліджуваної системи, оскільки будуються в умовах невизначеності та неповноти інформації. Неточність побудованої моделі може бути зумовлена, наприклад, неврахуванням усіх факторів, що впливають на систему, лінеаризацією її характеристик, наявністю похибок в експериментальних даних. Найбільш частіше для опису невизначеності та побудови моделей “вхід-вихід” статичних систем використовуються стохастичні методи, побудовані на гіпотезах про імовірнісні властивості об’єктів. Недоліком стохастичних методів є потреба в отриманні чи апріорному заданні статистичних властивостей об’єкта дослідження, жорсткість гіпотез, на яких побудовані методи, і достатньо серйозні наслідки при їх порушенні.

На протязі останніх трьох десятиліть, для моделювання статичних систем інтенсивно застосовуються методи інтервального аналізу. Особливість цих методів полягає у множинному представленні оцінок параметрів моделі “вхід-вихід”, побудованої за результатами експерименту, в якому вихідні змінні отримані в інтервальному вигляді. У результаті застосування методів інтервального аналізу, замість однієї моделі “вхід-вихід” отримують коридор (множину) рівнозначних інтервальних моделей статичної системи. При цьому властивості отриманих моделей залежать від застосованого методу множинного оцінювання параметрів. Переважно множини оцінок параметрів шукають у вигляді многогранника, багатовимірного еліпсоїда чи прямокутного

паралелепіеда, який задає інтервали значень параметрів. Вагомий внесок у розвиток цих методів внесли українські та зарубіжні вчені Бакан Г.М., Вошинін О.П., Грановський В.А., Кунцевич В.М., Красовський Н.Н., Куржанський А.Б., Личак М.М., Пшеничний Б.Н., Шарий С.П., Шокін Ю.І., Черноусько Ф.Л., Milanese M., Norton J. P., Pronzanto L., Schwepper F.S. Vicino Walter E., та ін.

Враховуючи, що методи моделювання статичних систем, побудовані на аналізі інтервальних даних, вимагають мінімальної кількості інформації про систему, їх застосування дозволяє суттєво розширити клас досліджуваних систем.

**Актуальність теми.** Разом з тим, розроблені в рамках інтервального аналізу методи не забезпечують все зростаючих потреб у математичному моделюванні складних статичних систем.

При застосуванні існуючих методів множинного оцінювання параметрів відсутній систематизований підхід до дослідження властивостей інтервальних моделей статичних систем, що не дозволяє порівнювати ефективність та обчислювальні затрати цих методів при побудові моделей даного класу. Існуючі методи множинного оцінювання, переважно, дозволяють розв'язувати задачі параметричної ідентифікації без можливості організації оптимального експерименту. Тим часом актуальними залишаються задачі оптимального допустимого оцінювання множини параметрів моделей, синтезу оптимальних структур та активної ідентифікації інтервальних моделей статичних систем.

Проблема організації оптимального експерименту в рамках інтервального аналізу та зростання розмірності задач побудови математичних моделей “вхід-вихід” статичних систем, поряд із застосуванням існуючих методів множинного оцінювання області параметрів, вимагає розробки нових, із можливістю розпаралелювання обчислювальних процесів і задання конфігурації локалізаційної (зовнішньої) чи допустимої множини параметрів.

Розглянуті проблеми вимагають систематизованого теоретичного підходу, який би включав можливість послідовного розв'язування задач планування

експерименту, ідентифікації структури моделі, локалізації чи допустимого оцінювання множини її параметрів, наближення складних моделей простішими. Теоретичні засади мають стати базою для розробки алгоритмічного та програмного забезпечення побудови математичних моделей “вхід-вихід” статичних систем за умов інтервального представлення вихідних змінних.

Тому розробка теоретичних засад побудови моделей типу “вхід-вихід” статичних систем на основі методів аналізу інтервальних даних, що розглядається в дисертаційній роботі є актуальною та важливою проблемою математичного моделювання.

**Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Науково-дослідна робота за темою дисертації проводилася у відповідності з координаційним планом науково-дослідних робіт і науково-технічних програм Міністерства освіти та науки України, розділ “Моделювання складних соціально-економічних та технічних систем на основі перспективних інформаційних технологій” (фаховий напрям “Інформатика і нові інформаційні технології” №40), відповідно з планами навчальної та науково-дослідної роботи Тернопільської академії народного господарства та Національного університету “Львівська політехніка”, зокрема: науково-дослідної роботи “Розроблення методів та паралельних алгоритмів розрахунку динамічних процесів неоднорідних електротехнічних систем” (“ДБ/ЧИСЕН”), рішення НТ ради Національного університету “Львівська політехніка”, протокол №12, від 21.12.99р., № держ. реєстр. 0100U000500; науково-дослідної роботи “Розробка теоретичних засад, алгоритмічного та програмного забезпечення моделювання технічних, екологічних та економічних систем на основі аналізу інтервальних даних” (МОЕСП-61-02 “К”), № держ. реєстр. 0102U002565; науково-дослідної роботи “Розробка інформаційно-картографічної системи екологічного контролю в м. Тернополі”, виконаної згідно договору ІОСУ-29-93Б від 29.10.93 між санітарно-епідеміологічною станцією м. Тернопілля і Тернопільською академією народного господарства, у яких здобувач був виконавцем,



відповідальним виконавцем та науковим керівником.

**Мета і задачі дослідження.** Метою дисертаційної роботи є розробка теоретичних засад, алгоритмічного та програмного забезпечення побудови моделей “вхід-вихід” статичних систем в умовах представлення вихідних змінних в інтервальному вигляді і на їх основі розвиток методів планування експерименту, ідентифікації структур моделей, локалізації та допустимого оцінювання множин їхніх параметрів, наближення складних моделей простішими, а також застосування розроблених методів для розв’язування прикладних задач.

Для досягнення поставленої мети в дисертації вирішуються такі основні задачі:

- аналіз задач математичного моделювання статичних систем на основі інтервальних даних;
- аналіз властивостей інтервальних моделей статичних систем при застосуванні еліпсоїдальних та інтервальних методів оцінювання множини параметрів;
- розробка методу синтезу структур моделей “вхід-вихід” статичних систем та наближення складних моделей простішими за умов представлення вихідних змінних у інтервальному вигляді;
- розвиток методів інтервального оцінювання параметрів моделей статичних систем у напрямку зменшення обчислювальних витрат при їх реалізації;
- створення нових методів гарантованого оцінювання множини параметрів моделей у випадку інтервальних даних, які забезпечують можливість оптимального планування експерименту і можливість розпаралелення обчислювальних процесів;
- створення нових методів допустимого оцінювання множини параметрів моделей статичних систем із заданими номінальними значеннями параметрів та коли параметри моделі представлені у множинному вигляді;
- розробка методу оцінки імовірності працездатності статичної системи на

основі аналізу допустимої області параметрів її моделі;

- розробка нових методів планування оптимальних апріорних та послідовних експериментів для випадку побудови інтервальних моделей статичних систем;

- створення критеріїв оптимальності та розробка нових методів планування експерименту для локалізації множини параметрів інтервальних моделей статичних систем.

- використання розроблених теоретичних засад алгоритмічного та програмного забезпечення побудови моделей “вхід–вихід” статичних систем на основі інтервальних даних для конкретних систем та розробки таблиць оптимальних планів.

*Об’єкт та предмет дослідження.* Об’єктом дослідження є статичні системи з вихідними змінними, представленими в інтервальному вигляді. Предметом дослідження є математичні моделі “вхід-вихід” статичних систем та обчислювальні методи їх побудови на основі аналізу інтервальних даних.

*Методи дослідження.* Для вирішення поставлених задач дисертації застосовувались методи інтервального аналізу, теорія імовірностей та математична статистика, теорія планування експерименту, методи математичного програмування, теорія матриць, теорія допусків, чисельні методи.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в тому, що:

- дістали подальший розвиток методи синтезу структур моделей статичних систем при аналізі інтервальних даних та наближення складних моделей простішими;

- вперше співставлено властивості моделей типу “вхід-вихід” статичних систем, побудованих на різних методах множинного оцінювання їх параметрів;

- отримано новий метод гарантованого оцінювання множини параметрів моделей, придатний для організації оптимального експерименту, та активної ідентифікації і отримано рекурентні формули для організації паралельного обчислювального процесу його реалізації;

– вперше, для випадку, коли кількість виходів співпадає з кількістю параметрів, отримано оптимальну допустиму еліпсоїдальну оцінку області параметрів лінеаризованих моделей статичних систем, залежну від плану експерименту, виведено формулу цієї залежності;

– вперше отримано умови існування області допусків, коли статична система описується інтервальною моделлю;

– вперше формалізовано задачу допустимого оцінювання параметрів лінеаризованої інтервальної моделі статичної системи в умовах ідентифікації базових функцій і розроблено підходи до вибору конфігурації її допустимої еліпсоїдальної оцінки;

– для випадку синтезу моделі статичної системи з параметрами, значення яких розподілені згідно нормального чи логнормального законів, вперше на основі множинного підходу розроблено метод оцінювання імовірності працездатності системи;

– дістали подальший розвиток методи планування оптимальних апріорних та послідовних експериментів у випадку аналізу інтервальних даних. Вперше, для загального випадку отримано умови еквівалентності оптимальних планів, що мінімізують розміри множини параметрів та максимальну похибку прогнозування інтервальних моделей;

– вперше, при побудові моделей статичних систем методами аналізу інтервальних, отримано умови ортогональності та еквівалентності оптимальних планів експерименту за усіма існуючими критеріями оптимальності;

– вперше розроблено критерії та формалізовано задачу знаходження оптимальних планів експериментів із випадковими інтервальними похибками і розроблені методи синтезу цих планів для нового методу локалізації множини параметрів моделей статичних систем з виділенням насиченого блоку експерименту.

Обґрунтованість наукових положень та висновків підтверджується використанням коректних методів досліджень, строгим доведенням тверджень,

узгодженням розрахунків із раніше відомими з літературних джерел результатами, співставленням результатів чисельних експериментів із реальними даними.

**Практичне значення одержаних результатів** полягає в тому, що:

– із застосуванням алгоритму інтервальної локалізації параметрів моделі модифікованим симплекс-методом розв’язування задач лінійного програмування розроблено алгоритмічне та програмне забезпечення, яке дозволяє ідентифікувати оптимальні структури моделей типу “вхід-вихід” на основі інтервальних даних для широкого класу статичних систем;

– розроблений метод та алгоритм методу локалізації параметрів моделей статичних систем з виділенням насиченого блоку експерименту, реалізований на паралельних обчислювальних графах, значно розширює клас систем та розмірність задач до яких можна застосовувати методи аналізу інтервальних даних;

– із застосуванням методів синтезу оптимальних планів експерименту у випадку інтервальних даних, розроблено таблиці планів, які апріорі чи послідовно забезпечують задані властивості інтервальних моделей та множин їх параметрів;

Практичне значення роботи підтверджується застосуванням розроблених теоретичних засад на ВАТ “Квантор”, м. Збараж для ідентифікації інтервальних моделей статичних режимів технологічного процесу герметизації мікросхем, визначення його допустимих параметрів та для ідентифікації моделей прогнозування кількості захворювань в системі екологічного контролю м. Тернополя, при розробці якої здобувач був відповідальним виконавцем.

На основі проведених досліджень здобувачем розроблено методичне та програмне забезпечення, яке використане у навчальному процесі в Тернопільській академії народного господарства при викладанні дисциплін “Теорія систем та системний аналіз” та “Економічна кібернетика”, а також у Національному університеті “Львівська політехніка” при викладанні дисципліни “Математичне моделювання електромеханічних систем”.

**Особистий внесок здобувача.** Усі наукові результати дисертації отримані здобувачем самостійно.

У друкованих працях, опублікованих у співавторстві, особисто дисертанту належить: [9, 187] – підхід до вивчення методики комплексного впливу господарської діяльності на соціо-екологічне середовище та метод побудови інтервальної моделі; [31, 192] – система критеріїв для планування насиченого експерименту у випадку інтервальних даних, метод синтезу оптимальної структури інтервальної моделі, наближення складних моделей простішими та побудова інтервальної моделі характеристик електротехнічного обладнання; [43] – постановка задачі, метод розв’язування, проведення чисельних експериментів; [52] – постановка задачі, спосіб отримання узагальнених чинників на основі нечіткої інформації; [53, 115, 148, 200, 201, 234] – постановка задач, метод та алгоритми побудови інтервальних моделей прогнозування захворюваності, структура інформаційно-картографічної системи екологічного контролю в м. Тернополі, інтервальні моделі прогнозування захворюваності та отримання результатів застосування моделей; [55] – постановка задачі, аналіз невизначеності; [56, 57] – чисельний метод та алгоритм локалізації розв’язків лінійної системи інтервальних рівнянь, шляхом виділення у ній насиченого блоку; [58, 197] – метод активної ідентифікації параметрів моделі, чисельний експеримент; [59] – аналіз властивостей інтервальних похибок; [60] – основи методів аналізу інтервальних даних та побудова інтервальної моделі виробничої функції; [61] – метод локалізації параметрів інтервальних моделей з виділенням насиченого блоку експерименту, рекурентні співвідношення реалізації методу, розробка паралельних обчислювальних графів та чисельний експеримент; [62, 63] – отримання оптимальної допустимої еліпсоїдальної оцінки області параметрів лінеаризованих моделей статичних систем, пов’язаної з планом експерименту та її застосування для опису допустимої області параметрів технологічного процесу; [64] – оцінювання розв’язків лінійної системи інтервальних рівнянь на основі виділення насиченого блоку; [65] – постановка задачі; [67] – алгоритм

модифікації симплекс-методу розв'язування задач лінійного програмування для побудови інтервальних моделей та його апробація; [141] – модель прогнозування собівартості виробництва; [195] – модифікація “алгоритму повного перебору” знаходження многогранної області параметрів інтервальної моделі; [196] – постановка та розв'язування задач; [199] – алгоритм знаходження многогранної області параметрів інтервальної моделі технологічного процесу; [202] – метод побудови інтервальної моделі та ідея застосування узагальненого екологічного фактора у вигляді лінгвістичної змінної.

**Апробація результатів дисертації.** Матеріали дисертації доповідалися та обговорювалися на 14 міжнародних, 7 національних конференціях та семінарах, а саме на: International Conference on Interval and Computer-Algebraic Methods in Science and Engineering “Interval’94” (St. Petersburg, 1994), 1-й Українській конференції з автоматичного керування “Автоматика 94” (Київ, 1994), IV krajowa konferencja “Modelowanie Systemow Biologicznych” (Krakow, 1995), міжнародній НТК, присвяченій 150-річчю від дня народження видатного українського фізика і електротехніка Івана Пулюя (Тернопіль, 1995), 8 krajowa konferencja naukowa “Uniwersalnosc cybernetyki” (Krakow, 1996), конференції “Методичні основи викладання та наукові проблеми екології сьогодення” (Тернопіль, 1997), 2-nd IMACS International Multiconference “Computational engineering in systems applications” (Tunisia, 1998), 3-й міжнародній науково-технічній конференції “Математичне моделювання в електротехніці, електроніці та електроенергетиці”, (Львів, 1999), 5-й міжнародній науково-технічній конференції “Досвід розробки і застосування САПР в мікроелектроніці” (Львів, 1999), міжнародній конференції “Modern problem of telecommunication, computer science and engineeris training” (Lviv, 2000), Міжнародній конференції “Автоматика – 2000” (Львів, 2000), 4-й науково-технічній конференції "Прогресивні матеріали, технології та обладнання в машино- і приладобудуванні " (Тернопіль, 2000), V krajowa konferencja "Modelowanie cybernetyczne systemow biologicznych" (Krakow 2000), 7-й

науково-технічній конференції “Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах” (Хмельницький, 2000), VI International Conference “The Experience of Designing and Application of CAD System in Microelectronics” (Lviv, 2001), International Workshop “Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications” (Foros, 2001), 8-й науково-технічній конференції “Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах” (Хмельницький, 2001), спільній українсько-польській школі-семінарі “Актуальні проблеми теоретичної електротехніки: наука і дидактика” (Алушта, 2001), Proceedings of International Conference “Modern problem of telecommunication, computer science and engineeris training” (Lviv-Slavsk, 2002), 9-й міжнародній науково-технічній конференції “Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах” (Хмельницький, 2002), на постійно діючому семінарі “Математичне моделювання електричних кіл та електромеханічних систем” НАНУ при НУ “Львівська політехніка”.

**Публікації.** Результати дисертації опубліковано у 47 наукових працях, у тому числі 21 стаття у фахових наукових виданнях (12 статей написані і опубліковані одноосібно), 8 статей у наукових журналах та збірниках наукових праць, 18 публікацій у матеріалах конференцій та тезах доповідей.

## РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ НА  
ОСНОВІ ІНТЕРВАЛЬНИХ ДАНИХ

1.1. Особливості синтезу моделей “вхід-вихід” статичних систем на основі експериментальних даних

Найбільшого поширення серед моделей систем, що будуються в умовах невизначеності, набули статистичні та імовірнісні моделі типу “вхід-вихід”, які задають залежність між вихідними показниками системи та її входами [29, 35, 69, 85, 86, 129, 147, 162, 163, 179]. Серед них можна виділити регресійні моделі [1, 3, 12, 37, 69, 114, 129, 141, 146], якими описують статичні (безінерційні) системи. При цьому висувають припущення, що систему можна описати функціональною залежністю у такому вигляді [3]:

$$y = \eta(\vec{x}, \vec{b}, \vec{z}),$$

де  $y$  – вихідна змінна;

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  – вектор вхідних змінних, які можна змінювати в деякій області  $\chi$ ;

$\vec{b}$  – вектор параметрів функції  $\eta$ ;

$\vec{z}$  – вектор неврахованих або невизначених факторів, шумів, похибок (як правило) випадкової природи та ін.

Переважно кожна вихідна характеристика системи описується окремою функціональною залежністю. Тому надалі не обмежуючи загальності будемо розглядати моделі статичних систем з однією вихідною змінною, за виключенням розділу 4.

Основою для побудови математичної моделі системи часто є результати експерименту, який можна зобразити у вигляді матриці значень вхідних та вектора значень вихідної змінної у всіх спостереженнях [31]:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \dots x_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ x_{N1} \dots x_{Nn} \end{pmatrix}; \quad \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$



Рядкам матриці  $X$  відповідають вектори  $\vec{x}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) вхідних змінних, що при експериментуванні викликають відповідні значення вихідної змінної  $y_i$ . Комбінацію  $\vec{x}_i, y_i$  називатимемо спостереженням. Загальна кількість комбінацій  $N$  задає кількість спостережень експерименту.

Надалі експериментальні дані будемо розглядати у більш розширеному тлумаченні: – не лише як результат вимірювання значень змінних на реальній системі, але й як результати розрахунків на ЕОМ із застосуванням імітаційної моделі системи, дані експертного опитування і т.д.

Розглянемо три найпоширеніших задачі, що базуються на даних експерименту у вигляді (1.1) .

Представлення даних  $X, \vec{Y}$  деякою функцією  $f(\vec{x}, \vec{\beta})$  називають задачею ідентифікації статичної системи. На сьогоднішній день існує велика кількість публікацій, присвячена задачам ідентифікації широкого класу статичних систем [12, 35, 37, 146, 147]. При цьому виділяють задачі ідентифікації об'єкта в “широкому” тлумаченні, коли потрібно знайти вид (структуру) функції  $f(\vec{x}, \vec{\beta})$  та її параметри  $\vec{\beta}$  [3, 37, 150, 151, 192, 207] і найпростішу параметричну задачу ідентифікації [1, 12, 29, 112, 113]. У випадку параметричної ідентифікації структуру функції вважають відомою. Тоді задача ідентифікації зводиться лише до оцінювання невідомих параметрів. Вона розв'язується просто, якщо функція  $f(\vec{x}, \vec{\beta})$  є лінійно-параметричною, тобто записується у такому вигляді [3]:

$$f(\vec{x}, \vec{\beta}) = \beta_1 \varphi_1(\vec{x}) + \dots + \beta_m \varphi_m(\vec{x}), \quad (1.2)$$

де  $\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_m(\vec{x})$  – відомі базисні функції;

$\beta_1, \dots, \beta_m$  – невідомі параметри.

Очевидно, що в формулі (1.2) функцію  $f(\vec{x}, \vec{\beta})$  можна задати деяким скінченим рядом, наприклад  $f(\vec{x}, \vec{\beta})$  є лінійною чи квадратичною функцією, поліномом відомого степеня, рядом Фур'є та ін. Якщо функція  $f(\vec{x}, \vec{\beta})$  у якийсь спосіб знайдена, то модель об'єкта вважається побудованою і для кожного

спостереження можна, обчислити значення вихідної змінної

$$\hat{y}_i = f(\vec{x}_i, \vec{\beta}), \quad (1.3)$$

тобто одержати вектор  $\vec{\hat{Y}}$  і порівняти його з експериментальним вектором  $\vec{Y}$ . Модель узгоджується з даними експерименту  $X, \vec{Y}$  тим краще чим менша різниця  $|\vec{\hat{Y}} - \vec{Y}|$ . Унаслідок цього задачу параметричної ідентифікації формулюють так [12]: “за даними експерименту  $X, \vec{Y}$ , знаючи структуру (1.2) функції  $f(\vec{x}, \vec{\beta})$ , оцінити її параметри  $\vec{\beta}$  за умовою

$$\Psi(\vec{Y} - \vec{\hat{Y}}) \xrightarrow{\vec{\beta}} \min, \quad (1.4)$$

де  $\Psi$  – деякий функціонал, що характеризує узгодження розрахункових та фактичних значень виходу.

Задача ідентифікації тісно пов’язана із задачею планування експерименту [16, 17, 33, 29, 73, 112, 157, 158]. Для забезпечення найбільшої точності оцінок  $\vec{b}$  параметрів  $\vec{\beta}$  при заданій кількості спостережень  $N$  необхідно певним чином сформувати та реалізувати в процесі експерименту матрицю  $X$  значень вхідних змінних. Процедури формування цієї матриці на основі критеріїв, що забезпечують високу точність моделі або її параметрів розглядаються в рамках теорії планування оптимального експерименту [73, 157]. Як правило, до проведення експерименту, матрицю  $X$  плану, що забезпечує певну точність оцінок параметрів, вдається знайти лише у випадку лінійно-параметричної функції виду (1.2). Таким чином задача планування оптимального експерименту формулюється так [157]: “дано структуру лінійно-параметричної функції  $f(\vec{x}, \vec{\beta})$ , область  $\chi$  можливої зміни вхідних змінних  $\vec{x}$ , кількість спостережень  $N$ , необхідно знайти матрицю плану експерименту  $X(\vec{x}_i \in \chi)$  таку, щоб забезпечити найбільшу точність прогнозування моделі або точність оцінок  $\vec{b}$  її параметрів  $\vec{\beta}$ ”.

Під прогнозуванням моделі в даному випадку розуміємо розрахунок значень виходу  $\hat{y}$  згідно формул (1.2) та (1.3) за фіксованими векторами  $\vec{x} \in \chi$

поза експериментальними точками, але в межах області експерименту.

У ряді випадків дослідник має достатньо точну, але складну для використання модель об'єкта, зображену у вигляді аналітично заданого виразу  $y(\vec{x}, \vec{a})$ , таблиці  $X, \vec{Y}$  чи програмно. Остання ситуація виникає при імітаційному моделюванні складних об'єктів на ЕОМ, коли можна достатньо точно, але в межах похибок заокруглень обчислити відгук  $y_i$  на довільну комбінацію входів  $\vec{x}_i$ , тобто одержати таблицю  $X, \vec{Y}$ . Такий спосіб моделювання об'єкта часто є єдиною можливим, хоча й не завжди зручним для аналізу. За цих умов виникає задача наближення складної моделі об'єкта, заданої таблицею, більш простішою математичною моделлю у вигляді функції  $f(\vec{x}, \vec{\beta})$  [3, 10, 81, 82]. Зауважимо, що дана задача є подібною до задачі ідентифікації структури моделі. При цьому якість наближення як і в задачі ідентифікації можна задати функціоналом (1.4). Спосіб задання умов наближення полягає у забезпеченні функцією  $f(\vec{x}, \vec{\beta})$  певного значення точності  $E_i$  для всіх табличних значень  $\vec{x}_i$ . В цьому випадку задача наближення розв'язується за умов:

$$|y_i - f(\vec{x}_i, \vec{\beta})| \leq \varepsilon_i, \forall x_i.$$

Очевидно, що така постановка задачі є реальною за умов одержання таблиці даних  $X, \vec{Y}$  в результаті імітаційного моделювання на ЕОМ з відомими граничними похибками заокруглень  $\varepsilon_i$ .

Для розв'язування розглянутих задач ідентифікації, планування експерименту та наближення складних моделей простішими, часто використовується метод найменших квадратів (МНК) [1, 37, 113, 116]. В МНК за критерій узгодження експериментальних і розрахункових даних прийнята сума квадратів відхилень:

$$\Psi = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

За допомогою МНК при розв'язуванні задачі ідентифікації моделі у вигляді (1.2) оцінку  $\vec{b}$  вектора невідомих параметрів  $\vec{\beta}$  отримуємо за

формулою:

$$\vec{b} = (F^T F)^{-1} F^T \vec{Y}, \quad (1.5)$$

де

$$F = \begin{pmatrix} \varphi_1(\vec{x}_1) \dots \varphi_m(\vec{x}_1) \\ \vdots \\ \varphi_1(\vec{x}_N) \dots \varphi_m(\vec{x}_N) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

є матрицею значень базисних функцій моделі (1.2), розрахованих в точках експерименту, тобто на основі матриці  $X$ .

Дослідження МНК-оцінок  $\vec{b}$ , або оцінок отриманих будь-яким іншим способом, описаним у працях [1, 12, 20, 37], проводиться на основі гіпотез про імовірнісну природу похибок в експериментальних даних, зокрема, методом регресійного аналізу. При проведенні регресійного аналізу розглядають певну модель невизначеності у вигляді похибки в даних. Найбільш вивченим є випадок адитивної випадкової похибки спостережень, такого вигляду [12]:

$$y(\vec{x}) = y_o(\vec{x}) + e = f(\vec{x}, \vec{\beta}) + e, \quad (1.7)$$

де  $y_o(\vec{x})$  – істинне значення “виходу” об’єкта, задане лінійно-параметричною функцією (1.2);

$y(\vec{x})$  – значення виходу, що спостерігається, “змішане” з похибкою  $e$ .

В класичному лінійному регресійному аналізі [12, 29] вважають, що похибка  $e$  в усіх дослідах експерименту має нормальний розподіл з нульовим середнім і незалежним значеннями в серіях дослідів, тобто

$$M(e_i) = 0, M(e_i^2) = \sigma^2, M(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j. \quad (1.8)$$

У формулі (1.8)  $M(\cdot)$  – означає математичне сподівання, а  $\sigma^2$  – дисперсію.

В літературі описані і менш жорсткі обмеження стосовно властивостей випадкової похибки  $e$  [37, 69].

В праці [ 37 ] показано, якщо похибка задовольняє умови (1.7) та (1.8), то МНК-оцінка  $\vec{b}$  є ефективною і незміщеною оцінкою вектора  $\vec{\beta}$  і має нормальний розподіл з параметрами

$$M(\vec{b}) = \vec{\beta}, \quad \text{cov}\{\vec{b}\} = \sigma^2 (F^T F)^{-1},$$

де  $\text{cov}\{\vec{b}\}$  – симетрична, розмірності  $(m \times m)$  коваріаційна матриця оцінок  $\vec{b}$ , діагональні елементи якої визначають їхні дисперсії.

Коваріаційна матриця залежить від матриці значень базових функцій  $F$  і, відповідно, від матриці експерименту  $X$ . Це дозволяє вводити критерії планування оптимального експерименту за умовою мінімізації різних характеристик матриці  $(F^T F)^{-1}$ . Найбільш вживаними є критерії, пов'язані з визначником, слідом і максимальним числом цієї матриці, відповідно, наведеними у такому вигляді [16, 17, 157]:

$$D = \det(F^T F)^{-1}, A = Sp(F^T F)^{-1}, E = \max \lambda_i (F^T F)^{-1} \quad (1.9)$$

Розглянуті критерії забезпечують характеристики точності оцінок параметрів моделі (1.2). Інші критерії планування експерименту безпосередньо стосуються точності прогнозування регресійної моделі і забезпечують мінімум середнього або максимального значення дисперсії прогнозування на області експерименту. Найбільш поширеними серед них є  $Q$ - та  $G$ -критерії оптимальності [17, 157].

На сьогоднішній день задачі планування оптимальних регресійних експериментів є достатньо розробленими. Складено каталоги  $D$ -,  $A$ -,  $E$ -,  $Q$ -,  $G$ -оптимальних планів для випадку, коли функція  $f(\vec{x}, \vec{\beta})$  є поліном першого та другого степеня [17].

Найбільш значних результатів досягнуто при плануванні насичених ( $N=m$ ) регресійних експериментів, як найчастіше практично застосовуваних і найменш затратних.

Незважаючи на практичну привабливість і наявність відповідного

алгоритмічного і програмного забезпечення для реалізації стохастичних методів експериментальної ідентифікації моделей “вхід-вихід” статичних систем, побудованих на гіпотезах про імовірнісну природу похибок, достатньо часто [29] їх застосування пов’язане з такими проблемами. По-перше для розрахунку достовірних оцінок статистичних характеристик об’єкта необхідні достатньо великі вибірки експериментальних даних, які не завжди можна отримати. По-друге існує клас об’єктів, коли припущення про імовірнісну природу, адитивність похибок в експериментальних даних не відповідає реальним властивостям об’єкта. В останньому випадку побудова працездатної математичної моделі на основі стохастичних методів взагалі не можлива.

Достатньо повний аналіз причин обмежень при застосуванні традиційної статистики наведено у працях Орлова О.І. [136-139, 258, 259].

Про те, що природа не підлягає правилам традиційної імовірності висловлювався відомий вчений в теорії систем і управління Калман Р. [85]. Подібним чином висловлювались Куржанський Ф.Б. [106, 107], Кунцевич В.М. [104, 98-105], Грановський В.Г. [34]. У випадку імітаційного моделювання, чи отримання даних в процесі опитування експертів, наприклад, при побудові моделей нових систем, модель з випадковою похибкою не відповідає дійсності [29, 138]. Дані імітаційного моделювання спотворені не випадковими похибками заокруглень, а дані опитування експертів задають інтервали можливих значень показників. Під час повторних опитувань експертів отримуємо однакові, але неточні результати [138]. Аналогічно, при повторному імітаційному моделюванні, при незмінному наборі вхідних даних результат обчислень буде таким самим, хоча й неточним за рахунок похибок заокруглень. Подібна ситуація також виникає при моделюванні за результатами вимірювань з обмеженими по амплітуді похибками, хоча повторне вимірювання за певних умов дозволяє уточнювати результат [22-29, 99-106, 117-122].

Як видно, спільним у розглянутих випадках є те, що одержані дані містять обмежені похибки (переважно невідомої природи) і називаються інтервальними, оскільки задають інтервали можливих значень виходу, або

інших характеристик об'єкта.

При побудові математичних моделей типу “вхід-вихід” технологічних процесів (ТП) виникає задача забезпечення допустимих значень параметрів для заданих допустимих значень виходів ТП (задача синтезу допусків), а також зворотна задача аналізу допусків [94, 130,131]. Виходи ТП в даному випадку є випадковими, а особливістю їхнього задання для розв'язування задач синтезу допусків є встановлення певних меж допустимих значень у вигляді числових інтервалів. Отже і в цих випадках природній вигляд вихідних даних є інтервальним.

Розглянуті випадки вимагають застосування інших, відмінних від традиційно-імовірнісних методів моделювання об'єктів, побудованих на інтервальних даних. Подібні методи, розвиваються у межах інтервального аналізу або теоретико множинного підходу [4-8, 15, 22-30, 77-79, 87, 88, 38-52, 54-67, 70-72, 74, 75, 78, 79, 87,88, 98-110, 117-125, 128, 154, 155, 160, 161, 164, 165, 167-178, 180, 181, 183-206, 208-257, 260-291].

У математичній енциклопедії [126, 127] інтервальний аналіз розглядається, як наукова дисципліна, що застосовується для врахування похибок заокруглень при розрахунках на ЕОМ. У довідковій літературі [18] по математичних методах, поняття інтервального аналізу часто хибно трактується як “арифметика інтервалів”. Однак розвиток методів інтервального аналізу призвів до певної еволюції його наукової термінології та самого трактування. Наприклад, у низці робіт [99-105, 117-122] інтервальний аналіз розглядається у більш ширшому трактуванні, – як теоретико-множинний підхід. На наш погляд, найбільш точніше визначення інтервального аналізу на сьогоднішній день наведене у праці [173], – як наукової дисципліни на стику інформатики та математики, предметом, якої є розв'язування задач з інтервальними невизначеностями в даних на вході, виході чи на проміжних етапах.

При розв'язуванні задач експериментального моделювання об'єктів на основі даних з інтервальною невизначеністю, оцінки параметрів моделей часто задаються множинами (областями) різної конфігурації. Так у працях [4-8, 22-28,

164-165] для оцінювання параметрів моделей використовуються еліпсоїдальні множини, а в працях [102-105, 17-20] – многогранні області. Тим часом як в інтервальному аналізі традиційно застосовують “інтервальні методи оцінювання”, коли область параметрів задається прямокутним гіперпаралелепіпедом [169-177, 240, 279]. З іншого боку, запозичення методів та термінів з математичної статистики, зокрема, з регресійного аналізу, зроблені авторами праць [15, 29, 136, 206, 258], що стосуються інтервального аналізу, призвело до застосування та утвердження терміну “аналіз інтервальних даних”. Тому у межах інтервального аналізу зручно виділити методи аналізу інтервальних даних, під якими будемо розуміти, методи напрямлені на розв’язування задач моделювання з інтервальними невизначеностями в експериментальних даних, дослідження механізмів впливу невизначеностей на їх формування, отримання та дослідження математичних моделей об’єктів з множинними оцінками параметрів.

Методи інтервального аналізу та їхній розвиток створили передумови розвитку трьох напрямків, наукової та практичної діяльності, пов’язаної з математичним моделюванням об’єктів на основі інтервальних даних. Це [180]:

- математичний, в межах якого проводяться дослідження математичних проблем інтервальних обчислень;
- комп’ютерний, в межах якого досліджуються питання створення та використання інтервальних обчислень;
- прикладний, пов’язаний з використанням методів інтервального аналізу і відповідних комп’ютерних засобів для побудови та дослідження математичних моделей широкого класу об’єктів.

На сьогоднішній день опубліковано десятки тисяч праць, присвячених математичному моделюванню об’єктів на основі методів інтервального аналізу. В інституті прикладної математики Фрейбургського університету створена і постійно поповнюється “інтервальна бібліотека”. У періодичному виданні *Freiburger Intervall-Berichte* в міру накопичення матеріалу публікуються бібліографічні списки. Найбільше робіт опубліковано в сфері автоматичної та



управління [160-161, 205, 208, 288-290, 230, 232, 240] електротехніки та електроніки [38, 47, 95, 123, 124, 133, 220, 245], екології та охорони здоров'я [52, 148, 187, 206], технологічних дисциплін [13, 14, 54, 63, 140], економіки [9, 220, 221, 272, 287].

Розглянемо основні засади інтервального аналізу, а також можливості методів моделювання систем, побудовані на інтервальному, або теоретико-множинному підході.

## 1.2. Основи інтервального аналізу та його застосування для моделювання систем

Розглянуті задачі, пов'язані із моделюванням об'єктів за умов інтервальних даних, можуть бути розв'язані за допомогою інтервального підходу, теоретичною основою якого є інтервальні обчислення. Своєю чергою інтервальні обчислення побудовані на базі методів інтервального аналізу.

Основи інтервального аналізу були розроблені на вимогу часу – як засіб урахування похибок при розрахунках на ЕОМ і описані у монографії Р. Мура (R. Moore) за назвою “Interval analysis” у 1966 р. [242]. Перша праця серед вітчизняних вчених по даному напрямку була опублікована Канторовичем Л.В. у “Сибірському математичному журналі” у 1962 р. [89]. Основна ідея інтервальних обчислень полягає у наведені дійсного числа не одним машинним числом, а двома, які задають його гарантовані межі.

Для ілюстрації правил виконання операцій класичної інтервальної арифметики [268, 87, 88, 178, 194], розглянемо такі інтервальні числа:  $[a]=[a^-;a^+]$ ,  $[b]=[b^-;b^+]$ ,  $[c]=[c^-;c^+]$ . Позначимо за  $a$ ,  $b$ ,  $c$  дійсні числа, які належать до вказаних інтервалів, відповідно. Тоді правило виконання операцій класичної інтервальної арифметики таке: “якщо  $[c^-;c^+]=[a^-;a^+] \circ [b^-;b^+]$ ,  $a \in [a^-;a^+]$ ,  $b \in [b^-;b^+]$ , то  $a \circ b \in [c^-;c^+]$ , де символ  $\circ$  – означає арифметичну операцію із набору  $\{+, -, *, /\}$ . Результати операцій додавання, віднімання,

ділення та множення над інтервалами можна записати явно за допомогою таких формул:

$$[a]+[b]=[a^-+b^-;a^++b^+], [a]-[b]=[a^- - b^+;a^+ - b^-], [a]/[b]=[a] \cdot [1/b^+;1/b^-]$$

$$[a] \cdot [b]=[ \min\{a^- \cdot b^-, a^- \cdot b^+, a^+ \cdot b^-, a^+ b^+\}; \max\{a^- \cdot b^-, a^- \cdot b^+, a^+ \cdot b^-, a^+ b^+\} ].$$

Методи інтервального аналізу дозволяють враховувати похибки наведення вхідних даних, які у даному випадку набувають вигляду скінчених інтервалів, а також похибки заокруглень на ЕОМ. При цьому результат розрахунків наводиться також у інтервальному вигляді.

Усі задачі, які розв'язуються із застосуванням інтервальних обчислень можна розділити на дві групи [2, 87]: задачі із неточними – інтервальними даними та задачі із точними даними. Перші, пов'язані із обчисленням множини розв'язків, а другі із її поступовим уточненням. Прикладом задачі, яка відноситься до першої групи є система лінійних рівнянь з інтервальними коефіцієнтами. Для задач з точними даними інтервальний аналіз використовуються в методах, які породжують послідовність меж, що збігаються до розв'язку.

При реалізації інтервальних обчислень виникають значні проблеми, коли традиційні чисельні методи безпосередньо переносяться на інтервальні числа. В результаті такого перенесення відбувається значне розширення результуючого інтервалу. Інші проблеми, які стосуються інтервальних обчислень, пов'язані із виконанням операції ділення на інтервали, які включають нуль. Внаслідок розширення інтервалів при реалізації обчислень, такі ситуації виникають достатньо часто.

Проблеми, пов'язані із застосуванням класичної інтервальної арифметики часто вдається подолати застосуванням розширених інтервальних арифметик [181, 193, 211, 236, 224, 233].

Ширина результуючого інтервалу в інтервальних обчисленнях залежить від порядку виконання операцій. Наприклад, у інтервальній арифметиці відомою є властивість субдистрибутивності [2]:

$$[a^-; a^+] \cdot ([b^-; b^+] + [c^-; c^+]) \subseteq [a^-; a^+] \cdot [b^-; b^+] + [a^-; a^+] \cdot [c^-; c^+]. \quad (1.10)$$

Розглянуто особливості інтервальних методів, для їх успішного застосування вимагають перегляду практично усіх розроблених на даний момент чисельних методів [2, 128, 173, 178].

Основою усіх чисельних методів, реалізованих у інтервальній арифметиці, є властивість, яка називається “монотонністю включення”. Розглянемо суть цієї властивості [87].

Нехай маємо інтервали  $[a^-; a^+]$ ,  $[b^-; b^+]$ ,  $[c^-; c^+]$ ,  $[d^-; d^+]$ . Тоді справедлива така властивість монотонності включення:

$$\begin{aligned} [a^-; a^+] \subseteq [c^-; c^+], [b^-; b^+] \subseteq [d^-; d^+] &\Rightarrow \\ [a^-; a^+] \cap [b^-; b^+] &\subseteq [c^-; c^+] \cap [d^-; d^+] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Саме ця властивість дозволяє побудувати ітераційні процедури наближення множин розв’язків для задач із інтервальними (неточними) даними. При цьому розміри множини визначаються шириною інтервалів вхідних даних та можливостями ітераційної процедури.

Достатньо простий спосіб представлення результатів у випадку застосування інтервального підходу, а також властивість (1.11), притаманна усім чисельним процедурам інтервального аналізу, спричинюють розвиток його методів, а також широке застосування для розв’язування багатьох задач, пов’язаних із моделюванням систем.

Питання дослідження та побудови основ інтервального аналізу, інтервальної арифметики та інтервальних обчислень розглянуті у працях [2, 87, 88, 178, 180, 181, 183, 189, 193, 236, 241-244, 291] та ін.

Дослідженню задач інтервального оцінювання множин значень функцій присвячені розділи праць [180, 291], третій розділ праці [2], праці [210, 213, 217, 226, 227, 262-264].

У працях [154, 155] розглядаються деякі нові застосування інтервального аналізу при розв’язуванні задач геометричного проектування.

Застосування інтервальної математики в задачах побудови моделей статичних лінійних систем за умов інтервального представлення даних, зводяться до розв'язування інтервальних систем лінійних алгебраїчних рівнянь у такому вигляді:

$$[A] \cdot \vec{b} = [\vec{c}], \quad (1.12)$$

де  $[A]$  – відома матриця, розмірності  $m \times m$  у загальному випадку з інтервальними елементами  $[a_{ij}^-; a_{ij}^+]$ ;

$\vec{b}$  – невідомий вектор;

$[\vec{c}]$  – відомий інтервальний вектор правих частин інтервальної системи рівнянь із елементами  $[c_i^-; c_i^+]$ .

Методи розв'язування інтервальних систем алгебраїчних рівнянь розглянуті у працях [78, 79, 87, 110, 167, 169-178, 186, 188, 191, 209, 214-216, 218, 222, 228, 229, 231, 233, 235, 237-239, 246-257, 260, 265, 268-270, 273-277, 281-286].

Залежно від цілей моделювання та невизначеності у вхідних і вихідних змінних моделі статичної системи, у інтервальному аналізі розглядають  $AE$ -узагальнені множини розв'язків інтервальної алгебраїчної системи рівнянь (1.12) [110, 171, 175]. Серед них на практиці найбільш частіше зустрічаються задачі знаходження:

– об'єднаної множини розв'язків [2, 223, 242, 243, 248, 257]:

$$\Omega_{об} = \{\vec{b} \in R^m \mid \exists A \in [A], \exists \vec{c} \in [\vec{c}], A \cdot \vec{b} = \vec{c}\}; \quad (1.13)$$

– допустимої множини розв'язків [177, 247, 251, 257, 286]:

$$\Omega_{дон} = \{\vec{b} \in R^m \mid \forall A \in [A], \exists \vec{c} \in [\vec{c}], A \cdot \vec{b} = \vec{c}\}; \quad (1.14)$$

– алгебраїчного інтервального розв'язку [2, 87, 178]:  $[A] \cdot [\vec{b}] = [\vec{c}]$ ,

де  $[\vec{b}]$  – інтервальний вектор з елементами  $[b_j^-; b_j^+]$ .

Об'єднану множину розв'язків переважно використовують у випадку розв'язування задач параметричної ідентифікації та наближення складних моделей статичних систем простішими. Допустиму множину  $\Omega_{\text{доп}}$  шукають при розв'язуванні задач синтезу та аналізу допусків.

У працях [161] та [282] вперше була розглянута “керована” множина розв'язків системи (1.12), яка разом із допустимим та об'єднаним розв'язками задає межові множини розв'язків системи (1.12).

У загальному випадку, для задач високої розмірності інтервальної системи алгебраїчних рівнянь (1.12) чисельно визначити узагальнені множини її розв'язків неможливо. Тому в інтервальному аналізі застосовують ітераційні процедури зовнішнього чи внутрішнього наближення, які називаються інтервальною локалізацією [2, 291] чи допустимим оцінюванням.

У випадку локалізації множини розв'язків системи (1.12), наближення проводиться описаним прямокутним паралелепіпедом  $P^+$  (“брусом”) [110, 170, 212, 249]. У результаті отримують інтервальний вектор  $[\vec{b}]$ , який включає, наприклад, множину  $\Omega_{\text{об}}$ .

При допустимому оцінюванні знаходять вписаний прямокутний паралелепіпед максимального об'єму  $P^-$  (внутрішнє оцінювання) [167, 168, 177, 280]. У результаті отриманий інтервальний вектор  $[\vec{b}]$  належить, наприклад, множині  $\Omega_{\text{доп}}$ . Зауважимо, що у випадку допустимого інтервального оцінювання множини  $\Omega_{\text{доп}}$  задачу оцінювання називають “задачею про допуски” [247, 251, 286].

З метою забезпечення оптимальності локалізаційних розв'язків  $[\vec{b}]$ , у випадку наближення паралелепіпедом  $P^+$  (“описаним брусом”) мінімізують його об'єм, а у випадку допустимого оцінювання за допомогою  $P^-$  (“вписаним брусом”) знаходять максимум його об'єму.

Дослідження властивостей узагальнених множин розв'язків системи (1.12) дозволило авторам праць [2, 173, 247] побудувати достатньо ефективні алгоритми інтервальної локалізації та оцінювання.

В інтервальному аналізі значна частина ітераційних алгоритмів локалізації розв'язків системи (1.12) побудована на властивості системи (1.12), встановленій Nickel К. [253], що точні значення (оптимальні)  $b_j^-; b_j^+$  досягаються на межових значеннях матриці  $[A]$  та вектора  $[\bar{c}]$ . При розв'язуванні задач параметричної ідентифікації та наближення, система (1.12) переважно є перенасиченою, тобто матриця  $[A]$  є прямокутною, розмірності  $N \times m$ ,  $N > m$ . У цьому випадку вказана властивість системи (1.12) втрачається і, відповідно, для її розв'язування не можуть бути використані ітераційні методи побудовані на властивості Нікеля.

У загальному випадку множина  $\Omega_{ob}$  у просторі розв'язків є не опуклою. У праці [256] показано, що при знаходженні об'єднаного розв'язку системи (1.12), задаючи додаткові обмеження на знаки компонент вектора  $\bar{b}$ , її можна розділити на  $p=2^m$  систем лінійних алгебраїчних нерівностей (кількість можливих комбінацій знаків компонент вектора  $\bar{b}$ )

$$\begin{cases} A_p' \cdot \bar{b} \leq \bar{c}^+ \\ A_p'' \cdot \bar{b} \geq \bar{c}^- \end{cases}$$

де  $A_p'$ ,  $A_p''$  – дійсні матриці, складені із межових значень матриці  $[A]$ ;

$\bar{c}^-$ ,  $\bar{c}^+$  – вектори, складені із нижніх та верхніх меж інтервалів  $[c_i^-; c_i^+]$ , відповідно. Наприклад, якщо задати  $b_j > 0 \quad \forall j=1, \dots, m$ , то матриця  $A_p'$ , буде складена із компонент  $a_{ij}^-$ , а матриця  $A_p''$  – із  $a_{ij}^+$ . Локалізацію розв'язків таких систем можна здійснити методами лінійного програмування [11]. При цьому об'єднаний розв'язок системи (1.12) є об'єднанням розв'язків  $2^m$  систем лінійних алгебраїчних нерівностей. Очевидно, що запропонований авторами праць [101, 122, 256] підхід є ефективним тільки у випадку, коли із практичних міркувань (технічних чи технологічних) знаки компонент вектора  $\bar{b}$  є відомі.

Для інтервальної локалізації об'єднаної множини розв'язків  $\Omega_{ob}$  достатньо ефективні методи наведені у працях [2, 247].

Найбільш раціональними з обчислювальної точки зору є методи та побудовані на них алгоритми “поділу області параметрів” *PPS* та методи “поділу області розв’язків” *PSS* в основу яких покладено відомий метод “віток та меж”, подібно як це реалізовано в праці [264] для оптимізаційної задачі.

Найбільш вагомими результатами стосовно розробки методів зовнішнього (локалізації) та внутрішнього (допустимого) інтервального оцінювання розв’язку системи інтервальних рівнянь (1.12) наведені у праці [173]. Там же наведена достатньо повна бібліографія, яка стосується цих методів.

Незважаючи на достатньо високу ефективність розроблених в межах інтервального аналізу ітераційних алгоритмів інтервальної локалізації та допустимого інтервального оцінювання, можливість розв’язування на їхній основі задач моделювання високої розмірності, з точки зору експериментального моделювання статичних систем вони мають загальний недолік: передбачається, що система інтервальних рівнянь (1.12) сформована за результатами пасивного експерименту і не аналізується природа інтервальної невизначеності в елементах  $[a_{ij}^-; a_{ij}^+]$  матриці  $[A]$  та вектора  $[\vec{c}]$ . У межах чисто формального підходу до розв’язування системи (1.12), побудованого на властивостях інтервальної арифметики, не враховується факт накопичення інформації про об’єкт дослідження, можлива додаткова інформація про його статистичні властивості (закони розподілу на заданих числових інтервалах).

Вказаний недолік не дозволяє організувати активний експеримент та підвищити точність інтервальних оцінок параметрів моделі, які одержуються внаслідок оцінювання розв’язків інтервальної системи алгебраїчних рівнянь (1.12).

Підвищення точності методів гарантованого та інтервального оцінювання вимагає аналізу джерел походження інтервальних даних, дослідження та класифікації інтервальних похибок у випадку проведення спостережень за виходом об’єкта.

### 1.3. Способи зображення вихідних змінних моделей статичних систем у інтервальному вигляді

Методи інтервального аналізу та методи моделювання, побудовані на інтервальному підході переважно не розглядають можливу додаткову інформацію про властивості обмежених похибок. Наприклад, для випадкових похибок цією інформацією можуть бути закони розподілу на обмежених інтервалах. Однак наявність додаткової інформації про природу похибок дозволяє підвищити точність моделі об'єкта, або принаймні оцінити потенційні межі її досягнення.

Розглянемо різні схеми зображення вихідних змінних моделей статичних систем при експериментуванні, які хоча і засновані на різних механізмах дії факторів невизначеності, але у підсумку можуть бути описані однією і тією ж інтервальною моделлю даних [71, 192].

Як відомо, результати імітаційного моделювання на ЕОМ неминуче включають похибки заокруглення, з яким би числом розрядів не проводились обчислення. При цьому похибки заокруглення не є випадковими, оскільки при розрахунках за однією і тією самою формулою (алгоритмом), для одних і тих самих вхідних даних  $\vec{x}$  завжди буде одержано один і той самий результат  $y(\vec{x})$ . Цей факт виключає можливість дублювання обчислень з метою підвищення точності. Стійкість кінцевого результату не означає його високої точності, оскільки сумарна похибка результату, що виникає при складних розрахунках через похибки заокруглення, може сягати значних величин.

Як було показано в попередньому параграфі, методи інтервальної арифметики, дозволяють оцінити можливі межі істинної величини (яка була б одержана при розрахунках за відсутності похибок заокруглень)  $y_0(\vec{x}_i)$  за наявності розрахованого значення вихідної змінної  $y(\vec{x}_i)$ :

$$y_i^- = y_0(\vec{x}_i) - \Delta_i, y_i^+ = y_0(\vec{x}_i) + \Delta_i, \quad (1.15)$$

де  $y_i^-, y_i^+$  – відповідно, нижня і верхня межі інтервалу вихідної змінної;



$\Delta_i$  – гранична похибка заокруглень, залежна від вхідних даних  $\vec{x}_i$ .

Якщо гранична похибка  $\Delta_i$  визначена правильно, то справедливою є умова

$$y^-(\vec{x}_i) \leq y_0(\vec{x}_i) \leq y_i^+(\vec{x}_i), \quad (1.16)$$

яка означає, що невідоме значення виходу належить відомому інтервалу.

У підсумку при обчисленні функції  $f(\vec{x}_i)$ , заданої алгоритмічно, різним значенням аргументу  $\vec{x}_i$  відповідатимуть різні інтервали  $[y_i^-, y_i^+]$  ( $i = 1, \dots, N$ ).

Розглянемо інтервальну модель зображення даних при експертному опитуванні [138].

При проектуванні нових систем, коли відсутній як математичний опис, так і можливість провести експеримент на деякому модельному стенді, дані опитування експертів часто є єдиною інформацією для прийняття рішень [192].

На цьому етапі, який можна назвати перед проектним, завданням експерта є передбачення можливих значень вихідних характеристик системи залежно від значення її входів  $\vec{x}$ . Природно, що точне передбачення в даній ситуації неможливе, і найбільш ймовірною буде відповідь експерта у вигляді вказівки можливих меж вихідної змінної  $y$ . Отже, як і у випадку похибок заокруглення, приходять до способу зображення даних моделлю (1.16).

Але, якщо при розрахунках на ЕОМ заздалегідь відомо, що при одному і тому ж аргументі  $\vec{x}$  завжди буде одержано одне й те ж (хоча і неточне) значення  $y$ , то відносно експертних даних таке припущення справджується не завжди. Це пов'язується із складністю опису реакції експерта на багаторазово поставлене запитання анкети: “Яким буде вихідний показник системи при заданих входах  $x_1, \dots, x_n$  ?”. Очевидно, що результати залежатимуть від того, з яким часовим інтервалом ставляться запитання, чи показують експертові його попередню відповідь і т.д. Природно вважати, що очікуване значення вихідного показника  $y_0(\vec{x}_i)$  знаходиться у інтервалі, вказаному експертом, і не приписувати похибці імовірнісної природи.

Розглянемо способи інтервального задання вихідних змінних моделей статичних систем при вимірюваннях.

Даний спосіб є найбільш природним, коли похибка результату в основному пов'язана з неточністю вимірювальних пристроїв. У цьому випадку метрологи переважно вживають поняття граничної абсолютної  $\Delta$  або відносної  $\delta$  похибок вимірювання, вважаючи, що виконуються такі умови:

$$|y(\bar{x}_i) - y_0(\bar{x}_i)| \leq \Delta, \text{ або } |y(\bar{x}_i) - y_0(\bar{x}_i)| \leq \delta \cdot |y(\bar{x}_i)|,$$

де  $y(\bar{x}_i), y_0(\bar{x}_i)$  – визначають, відповідно, істинне і виміряне за даних умов (при заданих значеннях вхідних змінних  $\bar{x}$ ) значення вихідної змінної.

Враховуючи, що модель відносної похибки зводиться до моделі абсолютної похибки простим перетворенням, надалі розглядатимемо тільки модель абсолютної похибки, вважаючи, що абсолютна похибка  $\Delta$  у загальному випадку може залежати від значень вхідних змінних  $\bar{x}$ .

Порівнюючи спосіб інтервального зображення вихідної змінної у випадку похибок заокруглень і спосіб у випадку похибки вимірювань, помітною є значна подібність між ними: обидва способи відповідають моделі адитивної обмеженої похибки, тобто

$$y(\bar{x}_i) = y_0(\bar{x}_i) + e_i, \quad (1.17)$$

де  $e_i$  – невідоме значення обмеженої похибки заокруглення чи вимірювання, що не перевищує відомої граничної величини:  $|e_i| \leq \Delta_i$ . В обох випадках виконується умова (1.16), яка гарантує, що невідомий істинний результат належить відомому інтервалу.

Разом з тим, між способами існує принципова відмінність, яка особливо наочно проявляється у випадках багаторазового обчислення чи вимірювання  $y(\bar{x}_i)$  при одних і тих же значеннях вхідних змінних  $\bar{x}$ .

У випадку похибки заокруглень однозначно:  $y(\bar{x}_i)$  і інтервал (1.16) залишатиметься без змін.

У випадку похибок вимірювань можливі дві ситуації:

а) вимірне значення не змінюється.

б) вимірне значення  $y(\vec{x}_i)$  та інтервал (1.16) змінюються випадковим чином.

Очевидно, що перший випадок повністю аналогічний попередньому, коли повторення (дублювання) дослідів не несе ніякої додаткової інформації і не дозволяє звужити результуючий інтервал, що включає істинне значення.

Спосіб інтервального зображення вихідної змінної у випадку б) принципово відрізняється від способу випадку а). У майбутньому, модель (1.17) для ситуації б) будемо називати моделлю випадкової інтервальної похибки [71]. Переважно така модель розглядається при застосуванні методів еліпсоїдального оцінювання [22-28], а також застосовувалась у працях [100-107, 117-122].

Властивості випадкової інтервальної похибки розглянуті у працях [59, 71]. Зупинимося детальніше на них.

Нехай, похибка вимірювань  $e$  в моделі (1.17) для фіксованого аргументу  $\vec{x}$  має відомий симетричний розподіл, заданий щільністю розподілу імовірностей  $W(e)$  на інтервалі  $[-\Delta; \Delta]$ , тобто:

$$W(e) = \begin{cases} \neq 0, & \text{якщо } e \in [-\Delta, \Delta] \\ = 0, & \text{якщо } e \notin [-\Delta, \Delta] \end{cases}, \quad W(-e) = W(e).$$

Очевидно, що математичне сподівання похибки у цьому випадку дорівнює нулю.

Нехай проведено  $N$  повторних вимірювань вихідної змінної  $y$  при фіксованих значеннях вхідних змінних  $\vec{x}$ . У результаті одержимо вибірку з  $N$  значень, що не збігаються в загальному випадку:  $y_1, \dots, y_j, \dots, y_N$ , яка породжує вибірку випадкових інтервалів:

$$d_j = [y_j - \Delta; y_j + \Delta], \quad j=1, \dots, N. \quad (1.18)$$

Отже у даному випадку ми маємо справу зі статистикою інтервалів, або статистикою об'єктів нечислової природи [192, 258].

Виходячи із адитивності та обмеженості похибки, що породжує вибірку

випадкових інтервалів, кожен із інтервалів включає істинне значення вихідної величини. Позначимо через  $S_N$  інтервал

$$S_N = \bigcap_{j=1}^N d_j = \left[ S_N^- = \max_j (y_j - \Delta); S_N^+ = \min_j (y_j + \Delta) \right], \quad (1.19)$$

одержаний внаслідок перерізу інтервалів (1.18).

В праці [71] показано, що значення величини  $y_0$  належить перерізу інтервалів (1.18), а отже і результуючому інтервалу  $[z_{-}^{\Delta}; z_{+}^{\Delta}]$  заданому (1.19). На прикладі рівномірного закону розподілу, в праці [71] встановлено, що при збільшенні довжини  $N$  вибірки результуючий інтервал  $S_N$  стискається в точку, що збігається з істинним значенням  $y_0$ .

Слід зазначити, що в схемі перетину інтервалів можливі неінформативні спостереження, коли одержаний на  $N+1$  кроці випадковий інтервал  $d_{N+1}$  в цілому “накриває” інтервал  $S_N$ , одержаний як перетин попередніх інтервалів. Тоді  $N+1$  спостереження не несе ніякої інформації, що зменшує інтервал локалізації шуканого значення  $y_0$ .

На практиці можливі ситуації, коли при описі системи вихідні данні (показники, характеристики), задані інтервалами можливих значень які обумовлені дією факторів з різною природою невизначеності. Так, частина факторів може змінюватися випадковим чином, а решту можна описати лише інтервалом можливих значень.

За цих умов використати мішану модель адитивної інтервальної похибки, яка включає обидві складові [71]:

$$y_i = y_{0i} + e_{1i} + e_{2i}, \quad (1.20)$$

де,  $e_{1i}$  – невідповідна обмежена похибка з відомим діапазоном можливих значень  $-\Delta_{1i} \leq e_{1i} \leq \Delta_{1i}$ ;

$e_{2i}$  – випадкова похибка, що має симетричний (у загальному випадку невідомий) розподіл на відомому інтервалі  $[-\Delta_{2i}; \Delta_{2i}]$ .

Як і раніше, для істинного значення  $y_{0i}$  виконується умова включення його в інтервал (1.16) але на відміну від попередніх випадків, межове значення похибки обчислюється так:  $\Delta_i = \Delta_{1i} + \Delta_{2i}$ .

Наявність у мішаній моделі невизначеної неусувної похибки  $e_1$  приводить до того, що дублювання дослідів у мішаній моделі дозволяє зменшити лише випадкову складову похибки  $e_{2i}$ .

При дублюванні дослідів, як і раніше, істинне значення  $y_{0i}$  належить перерізу випадкових вибірових інтервалів (1.19).

Позначимо ширину інтервалу  $S_{N_i}$  у  $i$ -тій точці спостережень за  $\Delta_{N_i} = s_{N_i}^+ - s_{N_i}^-$ . За відомостями [71] справедливим є вираз

$$\lim_{N_i \rightarrow \infty} M(\Delta_{N_i}) = 2 \cdot \Delta_{1i}, \quad (1.21)$$

де  $M(\Delta_{N_i})$  – математичне сподівання ширини інтервалу у  $i$ -тій точці.

Отже перерізом інтервалів у мішаній моделі при довільному об'ємі вибірки  $N$  завжди є скінчений інтервал з шириною, більшою від  $2 \cdot \Delta_{1i}$ , який хоча і включає істинне значення  $y_{i0}$ , але не вироджується в точку.

Мішана модель (1.20) породжує відповідні часткові моделі при обнулінні відповідних складових [71].

**Модель не випадкової неусувної інтервальної похибки** ( $\Delta_{1i} \neq 0, \Delta_{2i} = 0$ ). Усі повторні досліді неінформативні, оскільки не змінюють ширину інтервалу локалізації істинного значення  $y_{0i}$ . Ширина результуючого інтервалу  $s_{N_i}$  для  $y_{0i}$  дорівнює  $2 \cdot \Delta_{1i}$ .

**Модель випадкової інтервальної похибки** ( $\Delta_{1i} = 0, \Delta_{2i} \neq 0$ ). Дублювання звужує результуючий інтервал  $S_{N_i}$  ( $\lim_{N_i \rightarrow \infty} S_{N_i} = y_{0i}$ ), хоча можливі неінформативні спостереження.

**Мішана модель інтервальної похибки** ( $\Delta_{1i} \neq 0, \Delta_{2i} \neq 0$ ). Дублювання частково звужує інтервал невизначеності  $S_{N_i}$ .

Модель мішаної похибки розглянута також у працях [136-138], присвячених реалістичній статистиці, тобто при традиційно - стохастичній схемі опрацювання даних. При цьому показано, що із збільшенням потужності вибірки сподіване значення випадкової величини через метрологічні похибки наближається до деякого інтервалу локалізації істинного невідомого значення вихідної змінної  $y_0$ , ширина якого називається “нотною”.

В монографії [97] розглянуто інтервально-статистичні способи зображення середніх значень ознак, імовірностей, розподілів. Інтервальный спосіб зображення середніх передбачає задання нижньої та верхньої меж середніх статистичних. Для цього способу розглянуто випадки перерізу та об'єднання. У першому випадку відмічена властивість звуження моделей середніх, подібно як у випадку перерізу інтервалів. У випадку об'єднання моделей, автором праці [97] проілюстровано зростання невизначеності. Очевидно, що об'єднання інтервальних моделей невизначеності [97]. має подібні властивості як у інтервальних моделях випадкових похибок, одержаних при аналізі інтервальних даних. Це, зокрема, зменшення невизначеності (ширини результуючого інтервалу) при дублюванні, коли істинне значення належить кожному із інтервалів перерізу.

Однак, способи інтервального зображення змінних, досліджені у працях [97, 136-138], виходять за межі гарантованих підходів, чим принципово відрізняються від розглянутої моделі випадкової інтервальної похибки [71]. Тому при їх застосуванні, наприклад, в задачах параметричної ідентифікації статичних систем не вдається отримати гарантовані оцінки параметрів моделей.

Незважаючи на те, що розглянуті моделі інтервальних похибок мають різні походження, їх об'єднує спільна властивість, вони є обмеженими. Застосування розглянутих додаткових властивостей цих похибок, дозволить розширити клас задач, які розв'язуються на основі інтервального підходу, обґрунтувати кількість спостережень у експерименті, побудувати не традиційні методи аналізу інтервальних даних і застосувати їх для більш ефективного розв'язування задач побудови моделей “вхід-вихід” статичних систем.

#### 1.4. Математичні та обчислювальні аспекти методів аналізу інтервальних даних

Розглянемо основні припущення, на яких базуються методи аналізу інтервальних даних у випадку побудови моделей “вхід-вихід” статичних систем.

У вітчизняній літературі (скоріше всього) ці гіпотези вперше були сформульовані в рамках теоретико-множинного підходу до задач параметричної ідентифікації у праці [101], та дещо у більш розширеному вигляді (без умови адитивності обмеженої похибки) у праці [15]:

H1. Статична система (об’єкт) описується лінійно-параметричним рівнянням

$$y_o = \beta_1 \cdot \varphi_1(\bar{x}) + \dots + \beta_m \cdot \varphi_m(\bar{x}), \quad (1.22)$$

де  $y_o$  – істинне невідоме значення виходу системи;

$\bar{x} \in R^n$  – вектор вхідних змінних;

$\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$  – вектор невідомих параметрів;

$\vec{\varphi}^T(\bar{x}) = (\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_m(\bar{x}))^T$  – вектор відомих базисних функцій.

H2. Результати експерименту представлені у вигляді матриці  $X$  значень вхідних змінних і відповідних інтервальних значень вихідної змінної  $y$ :

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \dots x_{1n} \\ \vdots \\ x_{i1} \dots x_{in} \\ \vdots \\ x_{N1} \dots x_{Nn} \end{pmatrix}; [\bar{Y}] = \begin{pmatrix} [y_1^-; y_1^+] \\ \vdots \\ [y_i^-; y_i^+] \\ \vdots \\ [y_N^-; y_N^+] \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Припускають, що в довільному  $i$ -у спостереженні істинне значення виходу  $y_{oi} = \vec{\varphi}^T(\bar{x}_i) \cdot \vec{\beta}$  належить інтервалу  $[y_i^-, y_i^+]$ , тобто  $y_i^- \leq y_{oi} \leq y_i^+$ .

Інтервальні значення виходу  $[y_i^-, y_i^+]$  можуть бути одержані на основі моделей інтервальних похибок, розглянутих у попередньому підрозділі.

Завданням аналізу інтервальних даних є оцінювання невідомого вектора  $\vec{\beta}$  так, щоб значення функції  $y = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{\beta}$  в точках експерименту належали відповідним інтервалам виходу. Якщо оцінка  $\vec{b}$  вектора  $\vec{\beta}$  існує, то одержану функцію  $\hat{y}(\vec{x}) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b}$  називатимемо моделлю статичної системи.

Згідно сформульованих гіпотез, шуканий вектор  $\vec{b}$  повинен задовольняти таку систему  $N$  нерівностей з  $m$  невідомими [15, 29]:

$$\begin{cases} y_1^- \leq b_1 \varphi_1(\vec{x}_1) + \dots + b_m \varphi_m(\vec{x}_1) \leq y_1^+; \\ \vdots \\ y_i^- \leq b_1 \varphi_1(\vec{x}_i) + \dots + b_m \varphi_m(\vec{x}_i) \leq y_i^+; \\ \vdots \\ y_N^- \leq b_1 \varphi_1(\vec{x}_N) + \dots + b_m \varphi_m(\vec{x}_N) \leq y_N^+; \end{cases} \quad (1.24)$$

Оскільки кожна  $i$ -та нерівність у системі (1.24) забезпечує належність значення функції  $\hat{y}(\vec{x})$  в  $i$ -тій точці експерименту, відповідному  $i$ -тому інтервалу виходу, то одночасне виконання умов, заданих нерівностями системи, означає існування розв'язку задачі, тобто “проходження” функції  $\hat{y}(\vec{x})$  через усі інтервали.

1.4.1. Властивості лінійної системи інтервальних рівнянь та інтервальних моделей, побудованих на її розв'язках. Розглянемо деякі важливі властивості системи (1.24) та її розв'язків, наведені у працях [15, 29, 40, 60, 192].

Система (1.24) є системою  $N$  лінійних нерівностей відносно  $m$  невідомих  $b_1, \dots, b_m$ .

Нелінійність функцій  $\varphi_j(\vec{x}_i)$  в (1.24) не суперечить попередньому твердженню, тому, що при відомому аргументі  $\vec{x}_i$  вони стають відомими коефіцієнтами.



Якщо згадані коефіцієнти позначити через  $\phi_{ij} = \phi_j(\bar{x}_i)$ , то систему (1.24) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{cases} y_1^- \leq \phi_{11}b_1 + \dots + \phi_{1m}b_m \leq y_1^+ \\ \vdots \\ y_N^- \leq \phi_{N1}b_1 + \dots + \phi_{Nm}b_m \leq y_N^+, \end{cases}$$

звідки очевидна її лінійність. В майбутньому нам зручно буде розглядати систему (1.24) в матричному вигляді

$$\bar{Y}^- \leq F \cdot \bar{b} \leq \bar{Y}^+, \quad (1.25)$$

де  $\bar{Y}^- = \{y_i^-, i=1, \dots, N\}$ ,  $\bar{Y}^+ = \{y_i^+, i=1, \dots, N\}$  – вектори, складені із верхніх та нижніх меж інтервалів  $[y_i^-, y_i^+]$ , відповідно;

$F = \{\phi_{ij}, i=1, \dots, N, j=1, \dots, m\}$  – відома матриця значень базисних функцій.

Система (1.25) може не мати жодного розв'язку, тобто бути несумісною або мати багато розв'язків [29, 182].

Стосовно задач аналізу інтервальних даних, несумісність системи (1.25) означає, що не виконуються припущення методу, тобто або невірно задано вигляд функції (1.22), або невірно визначені інтервали  $[y_i^-, y_i^+]$ . Обидва порушення гіпотез не забезпечують належність значень функції  $\hat{y}(\bar{x})$  в точках експерименту до відповідних інтервалів виходу.

Нехай система (1.25) є сумісною. Позначимо через  $\Omega$  множину її розв'язків, тобто

$$\Omega = \{\bar{b} \in R^m \mid \bar{Y}^- \leq F \cdot \bar{b} \leq \bar{Y}^+\} \quad (1.26)$$

Властивості цієї множини, розглядалися у багатьох працях, зокрема, [60, 192]. Наведемо основні із них, важливі для моделювання статичних систем.

1. У просторі параметрів  $\beta_1, \dots, \beta_m$  множина  $\Omega$  є опуклий многогранник. Це означає, що довільна точка множини  $\Omega$  є розв'язком системи (1.25).

2. Довільний розв'язок  $\vec{b} \in \Omega$  системи породжує модель  $\hat{y}(\vec{x}) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b}$ , що “проходить” через усі інтервали  $[y_i^-, y_i^+]$ , яку надалі називатимемо інтервальною моделлю [29] (статичної системи).

3. Множина розв'язків  $\Omega$  породжує множину рівнозначних (з точки зору наявної інтервальної невизначеності) інтервальних моделей, кожна з яких задовольняє умовам задачі. При цьому, всі інтервальні моделі знаходяться у коридорі:

$$[\hat{y}(x)] = [\hat{y}^-(x); \hat{y}^+(x)], \quad (1.27)$$

де  $\hat{y}^-(\vec{x}) = \min_{\vec{b} \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b})$  та  $\hat{y}^+(\vec{x}) = \max_{\vec{b} \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b})$  – нижня та верхня межі функціонального коридору.

4. Істинний невідомий вектор  $\vec{\beta}$  є одним із розв'язків системи (1.25), тобто  $\vec{\beta} \in \Omega$ . Тому можна стверджувати, що довільна точка множини  $\Omega$  може бути істинним вектором параметрів. Ця властивість множини розв'язків  $\Omega$  дозволяє трактувати її як множину можливих значень невідомих параметрів  $\beta_1, \dots, \beta_m$ .

Звідси випливає, що чим “ширша” множина  $\Omega$ , тим більша невизначеність відносно істинних параметрів статичної системи.

Розмір множини  $\Omega$  характеризується діаметром  $d$ , який визначається як відстань між двома найбільш віддаленими точками множини:

$$d = \max_{\vec{b}_p, \vec{b}_s} \|\vec{b}_p - \vec{b}_s\|, \quad (1.28)$$

де  $\vec{b}_p, \vec{b}_s$  – відповідні вершини області  $\Omega$ .

Діаметр множини  $\Omega$  тісно пов'язаний з матрицею  $F$  системи (1.25). Зокрема, якщо кількість різних точок  $\vec{x}_i$  спостережень у матриці  $F$  буде менша від кількості невідомих параметрів  $m$ , то множина  $\Omega$  буде “розірвана”. Тобто, якщо  $\text{rang}(F) < m$ , то  $d \rightarrow \infty$ . З іншого боку, якщо  $\text{rang}(F) = m$ , то діаметр  $d$  обмежений.

Наведені математичні властивості множини  $\Omega$  дозволяють перейти до

більш детального розгляду методу, який варто розпочати із найпростішого випадку, що дозволяє графічну ілюстрацію [60, 192].

Нехай кількість невідомих коефіцієнтів у рівнянні (1.22) дорівнює 2. У цьому випадку система (1.24) спрощується і набуває такого вигляду:

$$y_i^- \leq \phi_{i1}b_1 + \dots + \phi_{i2}b_2 \leq y_i^+, i=1, \dots, N \quad (1.29)$$

Кожна нерівність системи на площині  $b_1, b_2$  задає “смугу”, обмежену двома прямими, що відповідають межах інтервалів (рисунок 1.1).

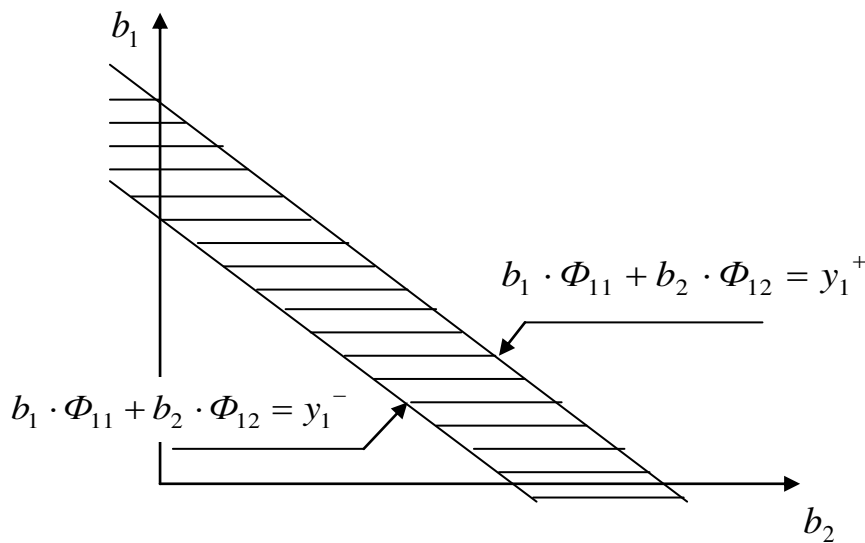


Рис.1.1. Зображення розв'язків рівняння інтервальної системи у просторі параметрів.

Сукупність  $N$  нерівностей, тобто перетин усіх “смуг”, утворює шукану множину  $\Omega$  розв'язків системи (1.29), зображену на рис.1.2 для  $N=3$ . Координати вершин  $\Omega$  можуть бути визначені графічно або аналітично, шляхом розв'язування системи лінійних рівнянь. Наприклад, координати вершини  $\vec{b}_4$  можна знайти як розв'язок системи двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \phi_{11}b_1 + \phi_{12}b_2 = y_1^+; \\ \phi_{21}b_1 + \phi_{22}b_2 = y_2^-, \end{cases}$$

Порівняно простий випадок  $m=2$  добре ілюструє загальні властивості множини  $\Omega$  можливих значень істинних параметрів  $\beta_1, \beta_2$ .

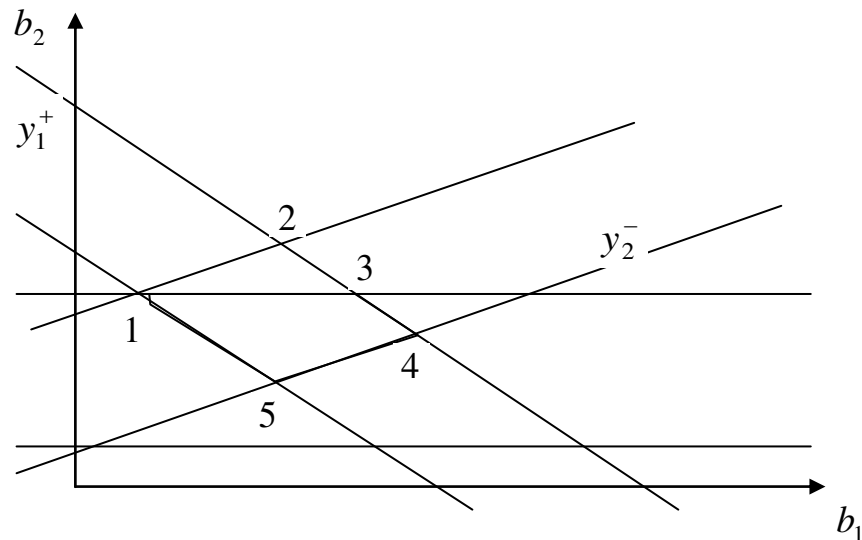


Рис.1.2. Область розв'язків системи (1.25) для  $N=3$ .

На рисунку 1.1 зображена множина  $\Omega$ , діаметр якої дорівнює нескінченості, а рисунок 1.2 ілюструє опуклість множини  $\Omega$ , структуру і характер впливу на діаметр множини додаткових спостережень. Внутрішню точку  $\vec{b}$  множини  $\Omega$  можна знайти як центр діагоналі, що з'єднує відповідні вершини, тобто:  $\vec{b} = 0,5 \cdot (\vec{b}_p + \vec{b}_s)$ .

В працях [31, 60, 100] розглядається випадок, коли  $N=m$ , оскільки він, з одного боку, досить простий для аналізу, а з другого, - дозволяє зрозуміти ряд важливих властивостей множини  $\Omega$  у багатовимірному випадку і використати їх для розв'язування задач активної ідентифікації.

Зупинимось на аналізі цього випадку експерименту, який називається насиченим [31].

В насиченому експерименті, тобто у випадку співпадіння кількості спостережень  $N$  в експерименті з кількістю невідомих параметрів  $m$ , матриця  $F$  системи (1.25) буде квадратною ( $m \times N$ ). Якщо визначник матриці відмінний від нуля, то можна отримати матрицю  $F^{-1}$  [32], обернену до  $F$  і, відповідно, розв'язок такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь [31, 60, 192]:

$$F \cdot \vec{b}_s = \vec{Y}_s, \quad (1.30)$$

де  $\vec{Y}_s$  – вектор, складений з межових значень інтервалів  $[y_i^-, y_i^+]$ , наприклад, він може мати такий вигляд  $\vec{Y}_s = (y_1^+, y_2^-, y_3^+, \dots, y_N^-)$

Запишемо розв’язок цієї системи у такому вигляді:

$$\vec{b}_s = F^{-1} \cdot \vec{Y}_s. \quad (1.31)$$

Вектор  $\vec{b}_s$  є однією із вершин многогранника  $\Omega$ , утвореною перетином відповідних площин, заданих нерівностями (інтервальними рівняннями) системи (1.25).

Аналіз можливих комбінацій межових значень інтервалів виходу об’єкта, дозволив побудувати таблицю 1.1, з якої видно, що загальна кількість розв’язків  $\vec{b}_s$  складає  $R = 2^m$  [60, 192].

Таблиця 1.1

## Комбінації межових значень інтервалів

$\vec{Y}_1$	$\vec{Y}_2$	...	$\vec{Y}_{m+1}$	$\vec{Y}_{m+2}$	...	$\vec{Y}_{2m+1}$	...	$\vec{Y}_s$	...	$\vec{Y}_R$
$y_1^+$	$y_1^-$	...	$y_1^+$	$y_1^-$	...	$y_1^+$	...	$y_1^+$	...	$y_1^-$
$y_2^+$	$y_2^+$	...	$y_2^+$	$y_2^-$	...	$y_2^+$	...	$y_2^-$	...	$y_2^-$
$y_3^+$	$y_3^+$	...	$y_3^+$	$y_3^+$	...	$y_3^+$	...	$y_3^-$	...	$y_3^-$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_{m-1}^+$	$y_{m-1}^+$	...	$y_{m-1}^+$	$y_{m-1}^+$	...	$y_{m-1}^-$	...	$y_{m-1}^-$	...	$y_{m-1}^-$
$y_m^+$	$y_m^+$	...	$y_m^-$	$y_m^-$	...	$y_m^-$	...	$y_m^-$	...	$y_m^-$

Для даного випадку важливим є твердження, сформульоване у праці [192]: “При  $m = N$  множина  $\Omega$  є симетричним опуклим многогранником з  $2^m$  кількістю вершин, які визначаються за формулою (1.31)”. На рис.1.3 зображений многогранник  $\Omega$  для  $m = 2$  і  $m = 3$ .

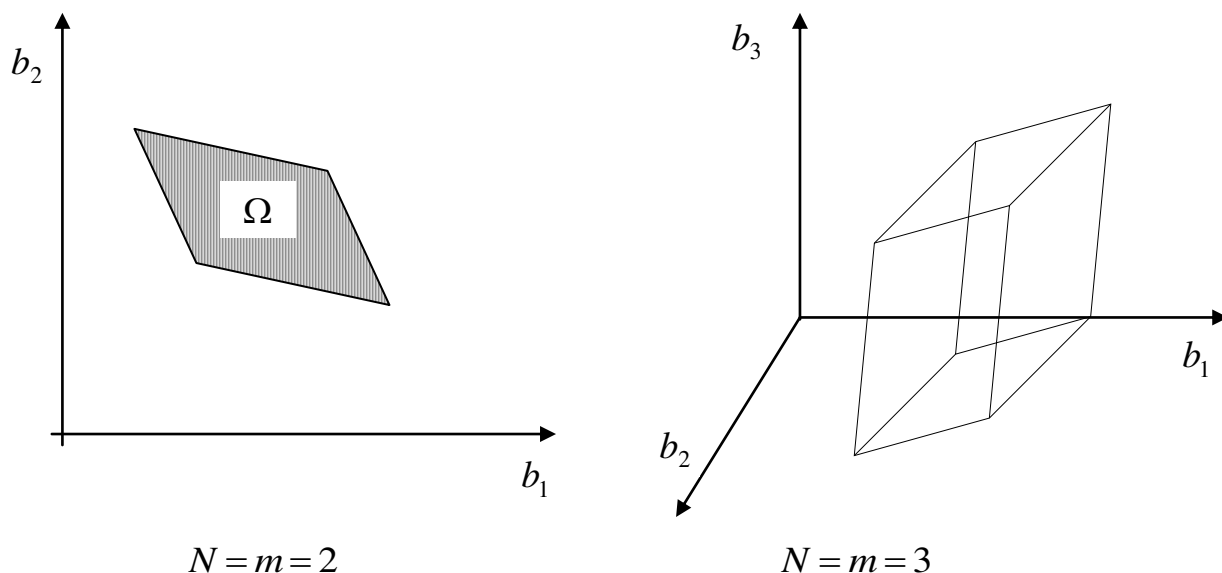


Рис.1.3. Многогранник  $\Omega$  для  $N=m=2$  і  $N=m=3$ .

Відомо, що довільний відрізок, який з'єднує вершини  $\vec{b}_p$  і  $\vec{b}_s$  многогранника, називається його діагоналлю.

При  $m=N$  перетин головних діагоналей многогранника  $\Omega$  збігається з його центром ваги  $\vec{\bar{b}}$ , який визначається за формулою [60]

$$\vec{\bar{b}} = \frac{1}{2^m} \sum_{s=1}^{2^m} \vec{b}_s = F^{-1} \cdot \vec{\bar{Y}}, \quad (1.32)$$

де  $\vec{\bar{Y}}$  – вектор є середнім арифметичним усіх векторів складених з межових значень, а його компоненти – середні інтервальні значення  $\bar{y}_i = (y_i^+ + y_i^-)/2$ ,  $i=1, \dots, m$ , тобто

$$\vec{\bar{Y}} = \frac{1}{2^m} \cdot \left( \sum_{s=1}^{2^m} \vec{Y}_s \right) = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)^T.$$

Центр ваги множини  $\Omega$  є одночасно МНК-оцінкою, обчисленою за середньо - інтервальними значеннями  $\bar{y}_i$ . Це безпосередньо впливає з формули (1.5), із урахуванням, що при  $m=N$  справедливе співвідношення  $(F^T F)^{-1} F^T = F^{-1}$ , із заміною вектора  $\vec{Y}$  на  $\vec{\bar{Y}}$ .

Кожна вершина многогранника  $\vec{b}_s \in \Omega$  породжує інтервальну модель

$\hat{y} = \bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b}_s$ , яка проходить через межові точки інтервальних спостережень, як це зображено на рисунку 1.4 для лінійної моделі при  $m = N = 2$ .

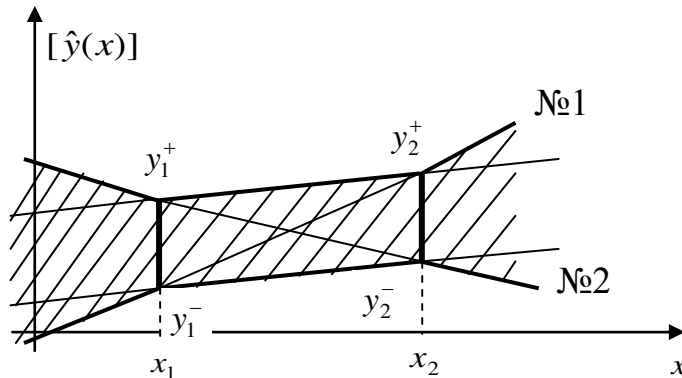


Рис.1.4. Відображення вершин многогранника параметрів у просторі інтервальних спостережень.

Зображені прямі відповідають ситуаціям, коли, пряма №1 проходить через точки  $(x_1, y_1^-)$ ,  $(x_2, y_2^+)$ , а пряма №2 - через точки  $(x_1, y_1^+)$ ,  $(x_2, y_2^-)$  і т.д. Заштрихований коридор описує всю множину прямих, які можуть бути проведені в межах двох інтервалів.

Зазначимо, що вершини  $\bar{b}_s$  многогранника  $\Omega$ , та його центр ваги  $\bar{\bar{b}}$  знаходять шляхом розв'язування квадратної системи лінійних рівнянь з однією і тією самою не виродженою матрицею  $F$  і різними векторами вільних членів. З цією метою можуть бути використані відомі методи та алгоритми лінійної алгебри [11].

Властивості множини  $\Omega$  розв'язків лінійної системи інтервальних рівнянь безпосередньо визначають властивості інтервальних моделей статичних систем та меж функціонального коридору, побудованих на основі цих розв'язків [40].

Точність інтервальної моделі є її основною характеристикою. Оцінювання точності вимагає певних обчислювальних витрат. Розглянемо точність прогнозування моделі в точці, тобто при фіксованому наборі входів  $\bar{x}$  [40].

Під прогнозуванням інтервальної моделі, будемо розуміти розрахунок виходу системи  $\hat{y}(\bar{x})$  при заданому наборі входів  $\bar{x}$ , поза експериментальними

точками на основі яких будувалась модель, але в межах області експерименту  $\chi$ . Основною характеристикою точності інтервальної моделі є похибка прогнозування, яка задається різницею меж коридору (1.27) [40]:

$$\Delta_{y(\bar{x})} = \max_{\vec{b} \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \vec{b}) - \min_{\vec{b} \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \vec{b})$$

Як впливає із наведеної формули, для визначення похибки прогнозування  $\Delta_{y(\bar{x})}$  у фіксованій точці  $\bar{x}$  необхідно розв'язати дві задачі лінійного програмування

$$\vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \vec{b} \xrightarrow{\vec{b} \in \Omega} \min, \vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \vec{b} \xrightarrow{\vec{b} \in \Omega} \max,$$

розв'язки яких знаходяться у вершинах многогранника  $\Omega$ . Із урахуванням викладеного, вираз для знаходження похибки прогнозування  $\Delta_{y(\bar{x})}$  у фіксованій точці  $\bar{x}$  набуває такого вигляду:

$$\Delta_{y(\bar{x})} = \max_{\vec{b}_p, \vec{b}_s \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot (\vec{b}_p - \vec{b}_s)), \bar{x} \in \chi \quad (1.33)$$

де  $\vec{b}_p, \vec{b}_s$  – вершини опуклого многогранника (множини)  $\Omega$ .

Із виразу (1.33) видно, що значення похибки прогнозування залежить від розмірів множини  $\Omega$ . Зокрема, значення  $\Delta_{y(\bar{x})}$  в заданій точці  $\bar{x}$  тим менше, чим менша відстань між вершинами множини  $\Omega$ . Якщо  $\vec{b}_p = \vec{b}_s$  для всіх  $p \neq s$ , тобто множина  $\Omega$  стискається до точки, то значення похибки  $\Delta_{y(\bar{x})}$  для всіх точок  $\bar{x}$  дорівнює нулю.

Зменшення розмірів множини  $\Omega$ , а відповідно, і зменшення похибки прогнозування моделі можливо досягнути шляхом оптимального вибору точок експерименту та зменшенням інтервальних похибок спостережень у вибраних точках.

У праці [40], для загального випадку показано, що функція (1.33) є кусково-неперервною. Це зумовлено тим, що для різних фіксованих значень  $\bar{x}$  похибка прогнозування у формулі (1.33) може визначатись різними векторами



$\vec{b}_p - \vec{b}_s$ , тобто різними парами вершин многогранника  $\Omega$ .

Важливі властивості лінійної по вхідних змінних інтервальної моделі  $y_0(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot \vec{\beta}$ , узагальнені в праці [40]. Формула (1.33) у цьому випадку набуває такого вигляду:

$$\Delta_{y(\vec{x})} = \min_{\vec{b}_p, \vec{b}_s \in \Omega} (\vec{x}^T \cdot (\vec{b}_p - \vec{b}_s)), \vec{x} \in \chi \quad (1.34)$$

Показано, що у випадку нормування незалежних змінних у такий спосіб, щоб центр експерименту  $\chi$  співпадав з нульовою точкою  $\vec{x}_0 = (0, \dots, 0)^T$ , функція  $\Delta_{y(\vec{x})}$  буде симетричною відносно центру  $\vec{x}_0$ , а її максимальне значення досягається на межі області  $\chi$ . Якщо область експерименту  $\chi$  задати як  $n$ -вимірну кулю, радіусом  $\rho$  і з центром в точці  $\vec{x}_0 = (0, \dots, 0)^T$

$$\vec{x}^T \cdot \vec{x} \leq \rho^2, \quad (1.35)$$

то максимальна на області  $\chi$  похибка прогнозування лінійної інтервальної моделі обчислюватиметься за формулою [40]:

$$\max_{\vec{x} \in \chi} (\Delta_{y(\vec{x})}) = \rho \cdot \|\vec{b}_p^o - \vec{b}_s^o\|, \quad (1.36)$$

де  $\|\vec{b}_p^o - \vec{b}_s^o\| = \|\vec{b}_p - \vec{b}_s\| \xrightarrow{\vec{b}_p, \vec{b}_s \in \Omega} \max$  - визначає в просторі параметрів довжину максимальної діагоналі многогранника  $\Omega$ .

Із формули (1.36) випливає, що для області планування експерименту, заданої у вигляді кулі радіусом  $\rho$  максимальне значення похибки прогнозування лінійної моделі дорівнює довжині максимальної діагоналі (діаметру  $\Omega$ ), збільшеній у  $\rho$  раз.

Проведений аналіз дозволяє зробити висновок, що функція похибки прогнозування інтервальних моделей, побудованих на основі множини розв'язків системи інтервальних рівнянь (1.24), в загальному випадку є кусковою, що суттєво збільшує обчислювальні витрати на визначення коридору прогнозування. Своєю чергою це спонукає до розробки та застосування методів

локалізації розв'язків системи (1.24), що забезпечують аналітичність задання функціональних меж коридору інтервальних моделей.

1.4.2. Обчислювальні аспекти методів оцінювання множини параметрів інтервальної моделі статичної системи. Припустимо, що кількість дослідів  $N$  більша від кількості невідомих параметрів і матриця  $F$  системи (1.25) має повний ранг, тобто  $\text{rang}F = m$ . Знайти розв'язки системи інтервальних рівнянь означає розрахувати координати усіх вершин області  $\Omega$ .

На перший погляд задача знаходження розв'язків системи (1.25) є простою. Однак практика показала, що існуючі методи її розв'язування вимагають значних обчислювальних ресурсів, особливо при великій розмірності вектора  $\vec{b}$ , коли  $m > 10$  та  $N > 100$ .

В праці [182] був запропонований метод побудови рекурентних алгоритмів розв'язування системи (1.25). Однак ці алгоритми дозволяють знаходити тільки один із множини розв'язків.

Найпростіший метод знаходження усіх вершин множини параметрів моделі, описаний у праці [199], а його більш раціональна (з обчислювальної точки зору) модифікація, наведена у праці [195].

Спочатку система (1.25) перетворюється до еквівалентної системи квадратних блоків, в кожному із яких  $m$  рівнянь

$$\vec{Y}_u^- \leq F_u \cdot \vec{b} \leq \vec{Y}_u^+, u = 1, \dots, U,$$

де  $F_u = \{\vec{\varphi}^T(\vec{x}_{ui}), i = 1, \dots, m\}$  – матриця значень базових функцій для насиченого блоку;

$u$  – номер сформованого блоку.

Кожен блок будується комбінуванням  $m$  рівнянь із загальної кількості  $N$  рівнянь системи. Отже загальна кількість сформованих блоків визначається за відомою комбінаторною формулою [18]

$$U = C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!}.$$

Потім знаходять розв'язки  $\vec{b}_u^j$  для кожного  $u$ -того блоку рівнянь за формулою (1.31). Тобто з врахуванням введених позначень

$$\vec{b}_u^j = F_u^{-1} \cdot \vec{Y}_u^j, \quad j=1, \dots, 2^m, u=1, \dots, U.$$

Тоді, із отриманих розв'язків вибираються ті, що задовольняють систему (1.25). Саме вони і є вершинами області  $\Omega$ .

Отже, для знаходження усіх вершин многогранника  $\Omega$  необхідно розв'язати  $2^m \cdot C_N^m$   $m$ -вимірних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

З обчислювальної точки зору реалізація даного методу є достатньо витратною, а при зростанні кількості параметрів  $m$  та рівнянь  $N$  стає практично не можливою. Наприклад, якщо  $m=10$  та  $N=20$ , то для знаходження області розв'язків системи інтервальних рівнянь необхідно розв'язати 189190144 систем, кожна з яких включає 10 лінійних алгебраїчних рівнянь.

Авторами праць [102-105] розроблені більш раціональні методи розв'язування системи (1.25). Їхньою особливістю є послідовне уточнення області параметрів. На кожному  $k$ -тому кроці послідовності, апостеріорна оцінка області параметрів  $\Omega(k)$  знаходиться так:

$$\Omega(k) = \Omega(k-1) \cap \check{\Omega}(k), \quad (1.37)$$

де  $\check{\Omega}(k)$  – “гіперсмуга”, яка визначається  $k$ -тим рівнянням системи (1.25), використаним для уточнення апостеріорної оцінки, отриманої на  $k-1$  кроці.

Оцінка області на  $k=1$  кроці може бути отримана із розв'язку  $m$  рівнянь системи. Така область в просторі параметрів є гіперпаралелепіпедом з  $2^m$  вершинами, які розраховуються за формулою (1.31).

Реалізація цього методу вимагає значних об'ємів оперативної пам'яті обчислювального пристрою, оскільки на кожному кроці “відсічення”

апостеріорної оцінки згідно формули (1.37) призводить до збільшення кількості її вершин. Як витікає із графіка, наведеного у праці [102], це особливо відчутно при збільшені кількості рівнянь  $N$ . При цьому початкова кількість вершин складає щонайменше  $2^m$  (кількість вершин гіперпаралелепіпеда). До того ж обчислювальні похибки заокруглень, вплив яких збільшується із зростанням  $m$ , призводять до закругління оцінок і навіть до втрати їхньої властивості “гарантованості”. Ці факти змусили авторів модифікувати розроблені алгоритми шляхом відсіювання неінформативних та не суттєво інформативних рівнянь, тобто таких, які не впливають, чи не суттєво впливають на розміри області  $\Omega$  [117]. Своєю чергою проведена модифікація алгоритмів призвела до методичного закругління оцінок області параметрів, хоча тепер цей процес контролюється користувачем.

В цілому, у даному випадку очевидною є відмова від спроби знайти точний з методичної точки зору розв’язок, але закруглений через похибки заокруглень.

Користуючись термінологією, прийнятою у інтервальної математиці [2, 291], як і раніше (див підрозділ 1.2), методи знаходження деякого грубого розв’язку – апроксимації області параметрів, будемо називати локалізаційними.

В інтервальному аналізі локалізацію розв’язків системи (1.25) отримують у вигляді прямокутного паралелепіпеда, грані якого паралельні осям координат. У цьому випадку одержані оцінки записуються так:  $[b_j^-, b_j^+]$ ,  $j=1, \dots, m$ , де  $b_j^-, b_j^+$  – нижня та верхня гарантовані межі можливих значень параметрів. Аналіз обчислювальних витрат методів інтервальної локалізації параметрів для випадку інтервальної матриці системи інтервальних алгебраїчних рівнянь (1.12), проведений у працях [169-176]. Особливістю цих методів є значна економія обчислювальних ресурсів, так як для наведення області локалізації достатньо зберігати  $2 \cdot m$  межових значень інтервалів. Для випадку системи інтервальних рівнянь (нерівностей) (1.25), тобто, коли матриця  $F$  складається з “точних” елементів, для розв’язування задачі локалізації можна використати

відомі методи, розроблені на основі методів лінійного програмування [11]. В цьому випадку задача локалізації формулюється у такий спосіб [29]:

$$b_j^- = \min_{\bar{b} \in \Omega} b_j, b_j^+ = \max_{\bar{b} \in \Omega} b_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.38)$$

Як видно, задача (1.38) складається із  $2 \cdot m$  задач лінійного програмування. Розв'язок задачі має просте геометричне тлумачення, наведене на рис. 1.5. Для двомірного випадку показано многогранник  $\Omega$ , який одночасно є множиною допустимих розв'язків, а також відображені лінії рівного рівня для критерію  $b_1$ . При  $j=1$  розв'язком задачі (1.38) є дві екстремальні вершини многогранника  $\Omega$ , компонента  $j=1$  яких приймає, відповідно, мінімальне  $\min b_1$  та максимальне значення  $\max b_1$ .

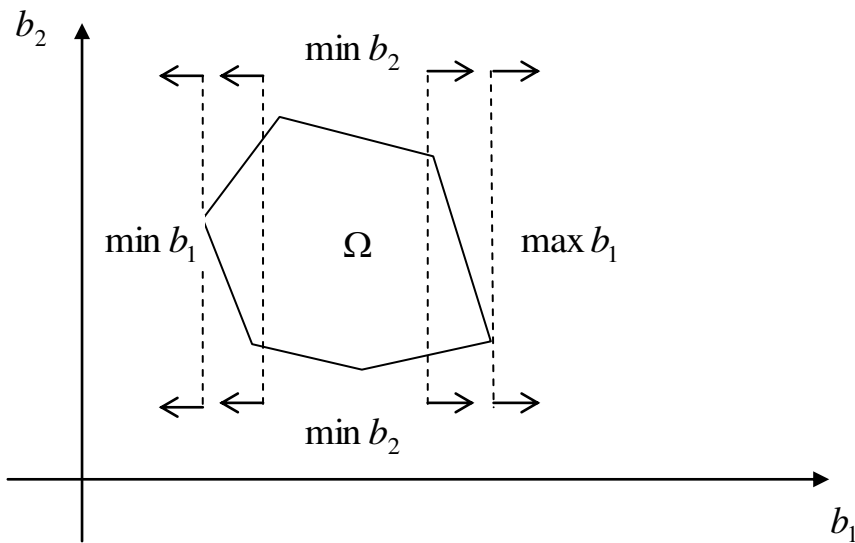


Рис.1.5. Ілюстрація до алгоритму інтервальної локалізації.

Якщо за критерій мінімізації (максимізації) вибрати компоненту  $b_2$ , аналогічно можна отримати  $\min b_2, \max b_2$ . Якщо  $2 \cdot m$  разів розв'язати задачу (1.38) для всіх компонент  $(b_1, \dots, b_m)$ , то будуть знайдені  $2 \cdot m$  вершин многогранника  $\Omega$ . Можна також знайти внутрішню точку  $\bar{\bar{b}}$  як центр ваги розрахованих вершин

$$\bar{b} = \frac{1}{2 \cdot m} \sum_{s=1}^{2m} \bar{b}_s.$$

Алгоритм та додаток у вигляді дискети із програмною реалізацією даного методу наведені у монографії О.П. Вошиніна та Г.Р. Сотірова [29]. Слід відмітити важливу особливість цього методу інтервальної локалізації – можливість розв’язування на його основі задач моделювання високої розмірності, що створює певні перспективи для розвитку розглянутого методу.

Найбільш ефективні, з обчислювальної точки зору, методи інтервальної локалізації інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь у випадку задання інтервальної матриці вхідних змінних у експерименті, наведені у праці [173]. Це методи “поділу області параметрів” *PPS* та методи “поділу області розв’язків” *PSS*, а також їхні модифікації.

Незважаючи на обчислювальні переваги методів інтервальної локалізації, і їх широке застосування при експериментальному моделюванні статичних систем в минулому, на сьогоднішній день інтерес серед практиків до цих методів зменшився, внаслідок таких причин. По-перше, отримані інтервальні оцінки є надзвичайно грубими, особливо у випадку витягнутої множини  $\Omega$  у напрямку, що не співпадає з напрямком ні однієї із осей координат простору параметрів. По-друге, така форма задання множини параметрів не придатна для розв’язування задач активної ідентифікації, тобто коли необхідно визначити точки проведення експерименту з метою апріорного забезпечення мінімальних розмірів множини локалізації. По-третє, отримані інтервальні оцінки не завжди придатні для побудови коридору інтервальних моделей, із заданими властивостями його функціональних меж.

Для розв’язування задач допустимого оцінювання параметрів моделей систем, переважно застосовують інтервальні методи. Зокрема, для задач аналізу та синтезу допусків, у електротехніці та радіоелектроніці [94, 95, 130, 131]. Однак при застосуванні гарантованого підходу для оцінки параметрів радіоелектронних схем отримують достатньо жорсткі допуски, оскільки не враховують імовірнісної природи технологічних процесів їхнього

виготовлення. До того ж задача знаходження допустимої множини розв'язку системи (1.25) у вигляді прямокутного гіперпаралелепіеда за критерієм максимального об'єму є достатньо складною задачею нелінійного програмування. Стосовно задачі оцінки імовірності працездатності статичної системи, яка розв'язується шляхом аналізу та співставлення допустимої області параметрів (аналізу допусків) з технологічною областю їх розсіювання, то вона при інтервальному допустимому оцінюванні взагалі втрачає зміст.

Найбільш поширеними методами локалізації розв'язків системи (1.25) є методи еліпсоїдів [4-8, 22-28, 106-109, 164, 165, 232, 240, 290]. Основна ідея цих методів полягає у побудові послідовності багатовимірних еліпсоїдів, які гарантовано включають множину  $\Omega$ .

У праці [164] розглядаються задачі допустимого еліпсоїдального оцінювання, коли в множину  $\Omega$  вписують багатомірний еліпсоїд максимального об'єму. Перевагою цих методів є можливість забезпечення більших розмірів допустимої множини ніж при інтервальному підході. Внаслідок цього, можна забезпечити менш жорсткі допуски параметрів системи.

У випадку реалізації процедури локалізації (гарантованого оцінювання), на кожному  $k$ -тому кроці розв'язується задача отримання апостеріорної еліпсоїдальної оцінки  $Q(k)$  результату перерізу апостеріорної оцінки  $k-1$ -го кроку та "гіперсмуги"  $\check{\Omega}(k)$ . При цьому виконується включення

$$Q(k) \supseteq Q(k-1) \cap \check{\Omega}(k), \quad (1.39)$$

та умова

$$V(Q(k)) \leq V(Q(k-1)), \quad (1.40)$$

де  $V(\cdot)$  – задає розміри еліпсоїда (об'єм, суму квадратів довжин осей і т.д.). Умова (1.40) забезпечує збіжність алгоритму. У працях [22, 23, 24] умова збіжності замінюється більш складнішою, яка забезпечує знаходження локалізаційної еліпсоїдальної оцінки мінімальних розмірів (об'єму). Основні

розрахункові формули, наведені у цих працях, дозволяють оцінити обчислювальну складність алгоритмів реалізації методу. Розглянемо їх детальніше.

Отже, область локалізації на  $k$ -тому кроці шукається у формі еліпсоїда

$$Q(k) = \{\vec{b} \in R^m \mid (\vec{b} - \vec{\bar{b}}_k)^T \cdot H_k \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}}_k) \leq 1\} \quad (1.41)$$

де  $\vec{\bar{b}}_k$  – центр еліпсоїда

$$\vec{\bar{b}}_k = \vec{\bar{b}}_{k-1} + \frac{\eta_{k-1}}{1 + \eta_{k-1} \cdot \vec{x}_k^T \cdot H_{k-1} \cdot \vec{x}_k} \cdot (y - \vec{x}_k^T \cdot \vec{\bar{b}}_{k-1}) \cdot H_{k-1} \cdot \vec{x}_k;$$

$H_k$  – симетрична, додатно-означена матриця, яка задає його конфігурацію і обчислюється за такою формулою:

$$H_k = \chi(\eta_k) \cdot [H_{k-1} + \frac{\eta_{k-1}}{1 + \eta_{k-1} \cdot \vec{x}_k^T \cdot H_{k-1} \cdot \vec{x}_k} \cdot H_{k-1} \cdot \vec{x}_k \cdot \vec{x}_k^T \cdot H_{k-1}]; \quad (1.42)$$

$$\chi(\eta_k) = 1 + \eta_k \cdot (\Delta^2 - \frac{y_k - \vec{x}_k^T \cdot \vec{\bar{b}}_{k-1}}{1 + \eta_{k-1} \cdot \vec{x}_k^T \cdot H_{k-1} \cdot \vec{x}_k} \cdot H_{k-1} \cdot \vec{x}_k \cdot \vec{x}_k^T \cdot H_{k-1});$$

$\Delta = 0.5 \cdot (y_i^+ - y_i^-)$  – інтервальна похибка, однакова для всіх спостережень;

$\eta_k$  – параметр алгоритму.

Для забезпечення мінімального об'єму локалізаційного еліпсоїда, параметр  $\eta_k$  вибирається як додатній корінь такого квадратного рівняння [23]:

$$(m-1) \cdot \Delta^2 \cdot \eta_{k-1}^2 \cdot \vec{x}_k^T \cdot H_{k-1} \cdot \vec{x}_k + [(2 \cdot m - 1) \cdot \Delta^2 \cdot \vec{x}_k^T \cdot H_{k-1} \cdot \vec{x}_k - (\vec{x}_k^T \cdot H_{k-1} \cdot \vec{x}_k - (y_k - \vec{x}_k^T \cdot \vec{\bar{b}}_{k-1}) \cdot \vec{x}_k^T \cdot H_{k-1} \cdot \vec{x}_k)] \cdot \eta_k + m \cdot (\Delta^2 - y_k + \vec{x}_k^T \cdot \vec{\bar{b}}_{k-1}) - \vec{x}_k^T \cdot H_{k-1} \cdot \vec{x}_k = 0$$

Суттєвою перевагою даних методів є економічне використання оперативної пам'яті, оскільки для поточного еліпсоїда необхідно зберігати його центр (вектор із  $m$  компонент) і симетричну матрицю  $H_k$ , розмірністю  $m \times m$ , що також не являє проблеми.

У працях [4-8, 108, 109] розглядаються також методи нечіткого еліпсоїдального оцінювання. Алгоритми побудови нечітких еліпсоїдальних



множин, подібні до алгоритмів побудови гарантованих еліпсоїдальних множин, однак їх застосування в процесі ідентифікації систем дозволяє подолати протиріччя поточної і накопиченої в процесі ідентифікації інформації, що надає їм властивості робастності.

Як видно із наведених розрахункових формул, найбільш трудомісткими, з обчислювальної точки зору, є операції багаторазового (при реалізації ітерацій) множення матриць та векторів, що не створює особливих проблем. Однак при моделюванні систем з багатовимірним виходом, на кожній ітерації методу виникає необхідність виконання операції знаходження оберненої матриці розмірністю  $m \times m$ , що є достатньо трудомісткою операцією. Разом з тим, методи еліпсоїдального оцінювання мають і інші недоліки.

Застосування рекурентних формул, особливо у випадку багатомірного виходу об'єкта, часто призводить до втрати властивості "гарантованості". При цьому контроль та забезпечення цієї властивості вимагає додаткових обчислювальних витрат. Наприклад, у праці [22], гарантованість включення вектора істинних параметрів у еліпсоїд на кожній ітерації забезпечується шляхом збільшення його радіуса на деяку фіксовану величину. Очевидно, що при цьому зростає кількість ітерацій і відповідно обчислювальні витрати.

Третім суттєвим недоліком, який витікає із аналізу наведених формул еліпсоїдальної локалізації, є надзвичайна складність побудови оптимальної процедури послідовного планування експерименту і практична неможливість організації апріорного оптимального експерименту при  $N > m$ , навіть у випадку відомих додаткових імовірнісних властивостей обмежених похибок.

Зауважимо, що кінцевою метою будь-якого із розглянутих методів локалізації є побудова інтервальної моделі. Тому при обґрунтуванні вибору того чи іншого методу локалізації слід звертати увагу на властивості інтервальних моделей, яких вони набудуть в результаті його застосування. Які властивості інтервальних моделей можуть бути покладені в основу критеріїв вибору методу локалізації? Очевидно, що в першу чергу це обчислювальні витрати при розрахунку прогнозних значень моделі, гладкість та аналітичність

наведення коридору моделей, обчислювальна складність визначення точності прогнозування чи напрямків зростання та спадання похибки прогнозування.

Проведені дослідження математичних та обчислювальних аспектів методів аналізу інтервальних даних, дозволяють виділити основні проблеми застосування цих методів при побудові інтервальних моделей статичних систем, а також визначити можливі напрямки їх розв'язування.

1. Достатньо жорстке припущення про відому структуру моделі статичної системи (гіпотеза 1) вимагає “пом'якшення” шляхом розробки процедури підбору структури, хоча б у визначеному класі функцій, наприклад, поліноміальних.

2. В існуючих працях стосовно методів аналізу інтервальних даних, основна увага приділяється обчислювальним аспектам оцінювання множини параметрів і практично відсутній систематизований підхід до аналізу властивостей інтервальних моделей систем, залежно від застосування того чи іншого методу локалізації.

3. Методи інтервальної локалізації множини розв'язків системи інтервальних рівнянь (1.25), побудовані на розв'язуванні  $2 \cdot m$  задач лінійного програмування (1.38), серед усіх існуючих методів локалізації найменш чутливі до зростання розмірності системи, і тому представляють інтерес для подальшого дослідження та розвитку.

4. Незважаючи на розроблену класифікацію і достатньо вивчені властивості моделей інтервальних похибок, в існуючих публікаціях практично відсутні підходи до їх застосування при моделюванні статичних систем на основі інтервальних даних.

5. Виходячи з проведеного аналізу методів знаходження та локалізації множини розв'язків системи нерівностей (1.25), виникає необхідність розробки нових методів локалізації, побудованих на таких принципах:

- контроль точності, властивостей гарантованості оцінок та відсіювання неінформативних спостережень;
- можливість застосування у задачах активної ідентифікації та планування

експерименту;

- можливість представлення множини локалізації у вигляді многогранників з фіксованою кількістю вершин – при незначних розмірностях вектора параметрів та перехід до еліпсоїдального вигляду множини параметрів моделі – при зростанні розмірності задачі без суттєвої зміни обчислювальної схеми методу;

- забезпечення аналітичності задання функціональних меж коридору інтервальних моделей і зменшення обчислювальних витрат на його побудову.

6. Розробку нових методів локалізації можна здійснити з врахуванням особливостей аналізу інтервальних даних при насиченому експерименті, а саме, що у цьому випадку ( $m = N$ ) множина  $\Omega$  є симетричним опуклим многогранником з вершинами, які обчислюються в аналітичному вигляді.

### 1.5. Планування насичених експериментів у випадку інтервального представлення вихідних змінних моделей статичних систем

При розгляді основних положень методів аналізу інтервальних даних висувалося припущення, що у розпорядженні дослідника є такі експериментальні дані, які забезпечують повний ранг ( $\text{rang}F = m$ ) матриці  $F$  розміром ( $N \times m$ ), зокрема, кількість спостережень  $N$  у експерименті не менше від кількості невідомих параметрів  $m$ . При цьому не досліджувалося питання про те, яким чином одержані ці дані. Застосування методів оптимального планування експерименту в задачах ідентифікації дозволяє підвищити точність математичної моделі. Зауважимо, що в цьому випадку задачі називаються активною ідентифікацією.

Переважно розрізняють планування апріорного експерименту і планування послідовного (динамічного) експерименту [157]. У першому випадку план усього експерименту складається до його проведення, у другому – програма реалізації експерименту послідовно уточнюється в міру одержання і залежно від результатів опрацювання результатів попередніх спостережень.

Розглянемо можливості планування оптимального апріорного експерименту з метою побудови моделі статичної системи в умовах інтервальних похибок. При цьому припустимо:

– модель статичної системи задана лінійно-параметричним рівнянням відомої структури (1.22) і є можливість змінювати вхідні змінні  $x_1, \dots, x_n$  в деякій обмеженій області  $\chi$ , тобто  $\bar{x} \in \chi$ ;

– шуканий план експерименту включає  $N = m$  дослідів, тобто є насиченим

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

– для довільного  $\bar{x} \in \chi$  задано інформацію про абсолютну інтервальну похибку  $\Delta(\bar{x}) = 0,5 \cdot (y^+(\bar{x}) - y^-(\bar{x}))$ . При цьому може бути задана або функція  $\Delta(\bar{x})$  на  $\chi$ , або відомо, що інтервальна похибка є постійною, тобто  $\Delta(\bar{x}) = \Delta, \forall \bar{x}$ .

Задача полягає у знаходженні апріорного, насиченого плану  $X$ , який забезпечує мінімально можливі розміри многогранника  $\Omega$ , що є областю можливих значень параметрів  $\beta_1, \dots, \beta_m$  [31].

Враховуючи, що кожній матриці плану експерименту  $X$  відповідає квадратна не вироджена матриця базисних функцій  $F$  із системи (1.25), задачу планування зручно трактувати як задачу знаходження матриці  $F$ .

Очевидно, що апріорний план експерименту неможливо побудувати, поки не визначено, який зміст вкладається в поняття оптимальності. Тому, розглянемо питання вибору критеріїв оптимальності планів експерименту.

З постановки задачі випливає, що оптимальний експеримент на відміну від неоптимального, повинен забезпечити більшу точність оцінок параметрів  $b_1, \dots, b_m$ , тобто менший розмір многогранника  $\Omega$ .

В підрозділі 1.4 було показано, що при довільному експерименті з кількістю дослідів  $N = m$  область  $\Omega$  є симетричний многогранник – гіперпаралелепіпед з вершинами  $\vec{b}_s$ , які обчислюються за формулою (1.31).

Очевидно, що до проведення експерименту не можна обчислити вершини  $\vec{b}_s$ , оскільки вектори  $\vec{Y}^-, \vec{Y}^+$  інтервальних спостережень виходу є невідомими, і отже, не можливо визначити вектор  $\vec{Y}_s$ . Проте, ця обставина не заважає апіорі визначити розміри многогранника  $\Omega$  при деякому фіксованому плані  $i$ , зокрема, довжину його діагоналей.

У праці [31] показано, що квадрат довжини  $l_{ps}^2$  довільної діагоналі, проведеної між парами вершин  $\vec{b}_p, \vec{b}_s$  многогранника  $\Omega$  обчислюють за такою формулою:

$$l_{ps}^2 = \|\vec{b}_p - \vec{b}_s\|^2 = (\vec{b}_p - \vec{b}_s)^T \cdot (\vec{b}_p - \vec{b}_s) = (\vec{Y}_p - \vec{Y}_s)^T \cdot (F^{-1})^T \cdot F^{-1} \cdot (\vec{Y}_p - \vec{Y}_s).$$

Приймаючи до уваги, що вектори  $\vec{Y}_p, \vec{Y}_s$  утворюються як можливі комбінації меж інтервальних даних  $y_i^-, y_i^+, i=1, \dots, m$  (див. табл. 1.3), то компоненти різниці  $\vec{Y}_p - \vec{Y}_s$  можуть набувати одного з двох значень  $2\Delta_i$  чи  $-2\Delta_i$  – якщо вершини  $\vec{b}_p, \vec{b}_s$  утворюють головну діагональ (що не належить ні одній із граней) многогранника  $\Omega$ . Кількість головних діагоналей дорівнює  $2^{m-1}$ .

Використовуючи вираз для довжини  $l$  довільної діагоналі, можна отримати простий вираз для квадрату довжини  $p$ -ї головної діагоналі

$$l_p^2 = 4 \cdot \vec{\Delta}_p^T \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot \vec{\Delta}_p, p=1, \dots, 2^{m-1},$$

де  $F \cdot F^T$  – матриця, яку надалі називатимемо інформаційною;

$\vec{\Delta}_p^T = (\pm\Delta_1^p, \dots, \pm\Delta_i^p, \dots, \pm\Delta_m^p)$  – вектор, компонентами якого є відповідні інтервальні похибки  $\Delta_i$ , із додатними або від’ємними знаками.

Користуючись аналогією між плануванням регресійних та інтервальних експериментів у праці [31] введені кількісні критерії, що характеризують розміри многогранника  $\Omega$ , такі як квадрат об’єму  $V$ , суму квадратів довжин

його діагоналей, квадрат довжини максимальної діагоналі і які визначаються формулами, відповідно

$$I_D = V^2(\Omega); \quad I_A = \sum_{p=1}^{2^{m-1}} l_p^2; \quad I_E = \max_p l_p^2.$$

При цьому у праці [31] наведені вирази, що зв'язують вказані критерії з інформаційною матрицею

$$I_D = 4^m \cdot \det(E \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot E) = 4^m \cdot \left( \prod_{i=1}^m \Delta_i^2 \right) \cdot \det(F \cdot F^T)^{-1}, \quad (1.43)$$

$$I_A = 2^{m+1} \cdot Sp(E \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot E), \quad (1.44)$$

$$I_E = \max_p 4 \cdot \bar{\Delta}_p^T \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot \bar{\Delta}_p, \quad (1.45)$$

де  $E = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_m)$  – діагональна матриця інтервальних похибок;

$Sp(\cdot)$  – означає слід матриці, який дорівнює сумі її діагональних елементів.

Умови  $I_D$ -,  $I_A$ -,  $I_E$ -оптимальності планів інтервального експерименту записуються так [31]:

$$\det(E \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot E^T) \xrightarrow{F} \min, \bar{x}_i \in \chi; \quad Sp(E \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot E^T) \xrightarrow{F} \min, \bar{x}_i \in \chi; \quad (1.46)$$

$$\max_p \bar{\Delta}_p^T \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot \bar{\Delta}_p \xrightarrow{F} \min. \quad (1.47)$$

Зазначимо, що у розглянутих формулах виключені постійні множники, які не впливають на шуканий оптимальний план.

Наведені критерії дозволили, з одного боку, визначити поняття оптимального плану при аналізі інтервальних даних, а з другого, – отримати співвідношення між інтервальними і регресійними оптимальними планами [31, 192].

Розглянемо ці співвідношення детальніше.

Коли інтервальна похибка експерименту є постійною, тобто  $\Delta(\bar{x}) = \Delta \forall \bar{x} \in \chi$ , тоді матриця  $E$  у формулах (1.46) стає скалярною ( $E = \Delta \cdot I$ ) і перестає впливати на результати мінімізації.

Порівнюючи формули (1.46) для цього випадку з формулами (1.9), відповідно, для  $D$ - і  $A$ -критеріїв регресійного експерименту, виявляється їх збіг. Це означає, що  $I_D$ - і  $I_A$ -оптимальні плани насиченого інтервального експерименту еквівалентні  $D$ - і  $A$ -оптимальним регресійним планам, побудованим для відповідної моделі (1.22).

Показана еквівалентність планів [31] дозволяє застосовувати результати, отримані для  $D$ - і  $A$ -оптимальних регресійних планів при побудові  $I_D$ - і  $I_A$ -оптимальних планів інтервального експерименту. Зокрема, можуть бути використані наявні каталоги насичених  $D$ - і  $A$ -оптимальних планів для поліноміальних моделей першого та другого порядку [17].

Між  $I_E$ -оптимальністю та  $E$ -оптимальністю регресійних експериментів подібної еквівалентності не встановлено, хоча вони і є близькими за фізичним змістом, а саме:  $E$ -оптимальний план мінімізує максимальну вісь довірчого еліпсоїда оцінок параметрів регресійної моделі і  $I_E$ -оптимальний план мінімізує максимальну діагональ многогранника  $\Omega$ .

Не менш важливими є плани, які дозволяють зменшити коридор інтервальних моделей, заданий формулою (1.27). Ширину функціонального коридору  $\Delta_{y(\bar{x})}$ , якою визначається точність інтервальної моделі можна обчислити як різницю його границь

$$\Delta_{y(\bar{x})} = \bar{y}^+(\bar{x}) - \bar{y}^-(\bar{x}). \quad (1.48)$$

Це в свою чергу дозволило ввести критерії  $I_Q$ - та  $I_G$ -оптимальності планів [31]:

$$I_Q = \int_{\mathcal{X}} \Delta_{y(\bar{x})} d(\bar{x}), \quad I_G = \max_{\bar{x} \in \mathcal{X}} \Delta_{y(\bar{x})} \quad (1.49)$$

Як видно із формул (1.49),  $I_Q$ -критерій при фіксованому плані визначає середню, а  $I_G$ -критерій максимальну ширину коридору (1.27) і є аналогами, відповідно,  $Q$ - та  $G$ -критеріїв оптимальності регресійного експерименту [73].

Задача знаходження  $I_Q$ - та  $I_G$ -оптимальних планів є надзвичайно

складною, через кусочність меж функціонального коридору  $i$ , відповідно, функції  $\Delta_{y(\bar{x})}$ . Наближені до  $I_Q$ - та  $I_G$ -оптимальних планів можна знайти, використовуючи лему, сформульовану у праці [31]: “Навколо області  $\Omega$  можна описати еліпсоїд, який пройде через усі її вершини, заданий рівнянням:

$$Q_m = \{\bar{b} \in R^m \mid (\bar{b} - \bar{b})^T \cdot F^T \cdot E^{-2} \cdot F \cdot (\bar{b} - \bar{b}) = m\}. \quad (1.50)$$

Із леми витікає, що верхню оцінку  $\Delta_{y(\bar{x})} \big|_{\bar{b} \in Q_m}$  функції  $\Delta_{y(\bar{x})}$  похибки прогнозування інтервальної моделі можна обчислити за такою формулою [31]:

$$\Delta_{y(\bar{x})} \big|_{\bar{b} \in Q_m} = 2 \cdot \sqrt{\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot (F^T \cdot E^{-2} \cdot F)^{-1} \cdot \bar{\varphi}(\bar{x}) \cdot m} \quad (1.51)$$

Отже, задачі знаходження наближених до  $I_Q$ - та  $I_G$ -оптимальних планів записують, відповідно, так [31]:

$$\int_{\chi} \Delta_{y(\bar{x})} \big|_{\bar{b} \in Q_m} d(\bar{x}) \xrightarrow{F} \min ; \max_{\bar{x} \in \chi} \Delta_{y(\bar{x})} \big|_{\bar{b} \in Q_m} \xrightarrow{F} \min .$$

Дані задачі розв’язуються методами математичного програмування і частково спрощуються, коли область експерименту  $\chi$  є кубом чи сферою.

Розглянуті критерії можна використовувати виключно для планування оптимальних насичених експериментів ( $N = m$ ). На практиці кількість дослідів може перевищувати кількість невідомих параметрів. В цих умовах побудова апріорних оптимальних планів без врахування додаткових властивостей інтервальних похибок не можлива. Тим часом залишається можливість побудови процедур послідовного планування. При послідовному плануванні експерименту на  $k$ -тому кроці процедури шукається не вся матриця  $F$ , а тільки її одна стрічка (інші  $N \geq m$  стрічок матриці є відомими), тобто оптимальний за визначеним критерієм набір значень входів  $\bar{x}_k$  [157].

Задачі активної ідентифікації з використанням процедури послідовно - оптимального планування за критерієм мінімізації довжини максимальної діагоналі області  $\Omega$ , розглянуті у праці [105]. Однак ці процедури розраховані



на задачі невеликої розмірності  $m < 10$ , оскільки вимагають знаходження усіх вершин області  $\Omega$ .

У праці [100] розглянуті задачі послідовного планування експерименту у випадку локалізації області розв'язків  $\Omega$  багатомірним еліпсоїдом. За критерії оптимальності використано геометричні розміри області локалізації. Як відомо, розміри еліпсоїда визначаються його матрицею конфігурації  $H_k$  (див. формулу (1.41)). Зокрема, його об'єм пропорційний  $\det[H_k]$ . З огляду на складність залежності (1.42) між матрицею  $H_k$  та вектором входів  $\bar{x}_k$ , який розраховується на  $k$ -тому кроці послідовної процедури оптимального планування, можна заключити про надзвичайну обчислювальну складність побудови та реалізації такої процедури.

Задача планування експерименту у випадку проблемно-орієнтованої ідентифікації на основі інтервальних даних, розглядалася також у праці [100]. Авторами праці отримано апіорний оптимальний план, однак тільки для випадку насиченого експерименту.

У регресійних задачах значні результати досягнуті при синтезі так званих неперервних планів, які переважно задаються спектром і частотами, що характеризують частку загального числа спостережень у відповідних точках спектра [157]. Цей підхід при інтервальному аналізі може бути використаний при випадковій інтервальній похибці експерименту.

Отже, аналіз існуючих праць стосовно методів активної ідентифікації дозволяє зробити висновок про актуальність розвитку теорії планування експерименту при аналізі інтервальних даних, зокрема, у таких напрямках:

- синтезу апіорних оптимальних планів експерименту, що мінімізують похибку прогнозування інтервальних моделей;
- розробки методів послідовного планування експерименту в задачах активної ідентифікації моделей статичних систем;
- розробки апіорних та послідовних методів для задач локалізації області  $\Omega$  із застосуванням, розглянутих у підрозділі 1.3, моделей інтервальних похибок.

Проведений аналіз методів активної ідентифікації при аналізі інтервальних даних та результати досліджень математичних особливостей і обчислювальних можливостей методів аналізу інтервальних даних, наведені у підрозділах 1.2-1.4, показали відсутність теоретичних засад, що дозволяють в повній мірі розв'язувати комплекс задач ідентифікації (локалізації та допустимого оцінювання) параметрів моделі, планування оптимального експерименту, ідентифікації структури моделі та наближення складної моделі простішою, пов'язаних з побудовою моделей “вхід-вихід” статичних систем у випадку представлення вихідних змінних в інтервальному вигляді.

## ВИСНОВКИ

1. Аналіз задач побудови математичних моделей “вхід-вихід” статичних систем на основі експериментальних даних, пов’язаних із ідентифікацією параметрів моделі, плануванням експерименту, ідентифікацією структури моделі та наближенням складної моделі простішою, показав неможливість розв’язування цих задач на основі стохастичних підходів, коли припущення про імовірнісну природу, адитивність похибок в експериментальних даних не відповідають реальним властивостям системи, чи статистичні характеристики системи невідомі. Для побудови моделей таких систем необхідно застосовувати інтервальний аналіз.

2. У результаті огляду методів інтервального аналізу встановлено, що задачі побудови моделей “вхід-вихід” статичних систем при застосуванні цих методів, зводяться до задач розв’язування інтервальних систем лінійних алгебраїчних рівнянь і є задачами множинного оцінювання параметрів моделей, серед яких виділено два класи: допустимого та гарантованого оцінювання (локалізації). Задачі допустимого оцінювання розв’язують у випадку аналізу та синтезу допусків, а задачі локалізації – при управлінні системою на основі інтервальних моделей. При цьому в обох випадках для їх розв’язування застосовується формальний підхід, побудований на інтервальній арифметиці, що не дозволяє враховувати додаткову інформацію про статистичні властивості статичної системи.

3. При аналізі існуючих методів інтервального та еліпсоїдального множинного оцінювання (локалізації та допустимого оцінювання) параметрів на основі інтервальних даних, встановлено, що ці методи не відповідають вимогам побудови моделей “вхід-вихід” статичних систем через відсутність теоретичних засад, що дозволяють: проводити порівняльний аналіз властивостей інтервальних моделей з врахуванням обчислювальних витрат на їх отримання; побудувати методи ідентифікації структури інтервальних моделей; організувати активну ідентифікацію параметрів моделей. Незважаючи на достатньо вивчені

властивості моделей інтервальних похибок, які призводять до різних способів зображення вихідної змінної в інтервальному вигляді, при застосуванні існуючих методів локалізації та допустимого оцінювання практично відсутня можливість їх врахування при моделюванні статичних систем.

4. Проведений аналіз математичних та обчислювальних особливостей методів аналізу інтервальних даних при побудові інтервальних моделей статичних систем дозволив встановити потреби у розробці теоретичних засад створення та розвитку нових методів ідентифікації структури інтервальних моделей, апріорного та послідовного планування оптимального експерименту, локалізації параметрів та допустимого оцінювання, які можуть застосовуватися в комплексі, вимагають менших обчислювальних витрат при реалізації ніж існуючі методи, і при цьому забезпечують задані властивості інтервальних моделей чи множини їх параметрів, контроль точності та відсіювання неінформативних спостережень. Для порівняльної оцінки можливостей різних методів локалізації параметрів при забезпеченні заданих властивостей інтервальних моделей статичних систем, запропоновано побудувати критерії, засновані на аналізі точності інтервальних моделей, яка забезпечується методом, аналітичності представлення коридору моделей, обчислювальних витратах на визначення точності прогнозування, чи напрямків зростання та спадання похибки прогнозування.

## РОЗДІЛ 2

ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНО-ПАРАМЕТРИЧНИХ ІНТЕРВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ  
СТАТИЧНИХ СИСТЕМ

Властивості моделей “вхід-вихід” статичних систем, побудованих із застосуванням методів аналізу інтервальних даних, визначаються трьома чинниками: структурою моделі (базовими функціями та кількістю параметрів); результатами експерименту, на основі яких вони будуються; способом оцінювання параметрів моделі.

Як було відмічено у попередньому підрозділі, інтервальне представлення вихідних змінних у результатах експерименту (1.23) призводить до необхідності застосування множинних методів оцінювання параметрів моделі статичної системи. У випадку заданої структури моделі “вхід-вихід” статичної системи, властивості множини оцінок параметрів  $\Omega$ , отриманої із розв’язку інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.25), визначаються виключно результатами інтервального експерименту (1.23). За цих же умов відомої структури моделі, заданих результатів інтервального експерименту і застосування для оцінки параметрів інтервальної моделі методів локалізації, властивості множини оцінок параметрів визначатимуться виключно особливостями застосованого методу локалізації (допустимого оцінювання). Своєю чергою останній визначатиме властивості інтервальних моделей статичної системи.

З іншого боку, у випадку відомих результатів інтервального експерименту (1.23) та заданого методу локалізації, властивості інтервальних моделей визначатиме структура функції  $y(\bar{x})$ , яка зв’язує вихід статичної системи із її входами і фактично наближає дані експерименту.

Отже для забезпечення заданих властивостей інтервальних моделей при відомих даних експерименту (1.23) актуальним є розгляд двох класів задач: задач синтезу структури моделі “вхід-вихід” статичної системи при аналізі інтервальних даних і наближення функцій із заданою точністю; задач

порівняльного аналізу властивостей інтервальних моделей статичних систем у випадку застосування різних методів локалізації параметрів.

Методи розв'язування вказаних задач та приклади їх застосування, розглядаються в даному розділі.

Аналіз властивостей інтервальних моделей статичних систем, з одного боку дозволить обґрунтовувати вибір того чи іншого методу локалізації множини параметрів моделі, а з іншого дослідити основну характеристику інтервальної моделі – точність прогнозування.

Для проведення аналізу можливостей методів локалізації параметрів з точки зору забезпечення заданих властивостей інтервальних моделей, виникає необхідність розробки системи критеріїв оцінки цих методів. У підрозділі 1.4 для цих цілей запропоновано побудувати критерії, засновані на аналізі точності інтервальної моделі, яку забезпечує метод, аналітичності представлення функціональних меж коридору моделей, а також на аналізі обчислювальних витрат для визначення точності прогнозування чи напрямків зростання та спадання похибки прогнозування.

За узагальнені критерії оцінки точності можуть слугувати  $I_Q$ - та  $I_G$ -критерії оптимальності планів інтервального експерименту, які задають, відповідно, середню та максимальну похибку прогнозування інтервальної моделі на області експерименту. Однак, застосування цих критеріїв на етапі обґрунтування вибору методу локалізації є неможливим, оскільки вимагає побудови коридору інтервальних моделей. До того ж, як відмічено у підрозділі 1.5, розрахунок середньої та максимальної похибки прогнозування інтервальної моделі є надзвичайно витратною обчислювальною процедурою.

Оскільки між прогнозним значенням виходу  $\hat{y}$  та параметрами  $\bar{b}$  в інтервальних моделях статичних систем існує лінійна залежність, задана рівнянням (1.22), то в умовах надзвичайної складності та високих обчислювальних витрат для розрахунку середньої та максимальної похибки прогнозування інтервальної моделі, найбільш раціональним є підхід, побудований на аналізі системи інтервальних рівнянь, внаслідок якого можна

зробити висновки про розміри та конфігурацію локалізаційної множини параметрів і отримати наближену оцінку точності моделі. Відповідно, для порівняння методів локалізації за критерієм забезпечення максимальної точності інтервальних моделей, замість встановлення співвідношень між похибками прогнозування, які вони забезпечують, використовуватимемо співвідношення між оцінками розмірів множин локалізації.

## 2.1. Синтез структури моделі статичної системи при аналізі інтервальних даних та наближення складних моделей простішими

При розв'язуванні задачі наближення складних моделей статичних систем простішими у вигляді функції  $y(\bar{x})$ , як правило, висувають дві умови: з одного боку, необхідно, щоб шукана функція мала певні математичні властивості (аналітичне задання, диференційованість, опуклість і т.д.), була як найпростішою, а з іншого боку, щоб її відхилення від заданих табличних даних не перевищувало заданого значення [153].

Сформулюємо цю задачу математично.

Нехай існує деяка функція векторного аргументу  $\bar{x}$ , задана у табличному вигляді:

$$X = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^T \\ \vdots \\ \bar{x}_N^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \dots x_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_{N1} \dots x_{Nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ \vdots \\ \bar{f}_N \end{pmatrix}$$

При цьому матриця  $X$  включає скінчене число вузлів  $\bar{x}_i, i=1, \dots, N$ , у кожному з яких визначено точне значення функції  $f_i, i=1, \dots, N$ . Необхідно підібрати функцію  $y(\bar{x})$  так, щоб її відхилення від функції  $f(\bar{x})$  у вузлах  $\bar{x}_i$  не перевищувало заданої величини, тобто [192]:

$$|y(\bar{x}_i) - f_i| \leq \varepsilon_i, \quad \forall x_i, \quad i=1, \dots, N. \quad (2.1)$$

У загальному випадку, якщо не висувати ніяких припущень стосовно класу

функцій до якого вона належить (поліноми, тригонометричні функції та ін.), підібрати функцію  $y(\bar{x})$  досить важко. Переважно клас функцій визначається фізичними властивостями системи.

Щоб зберегти єдиний підхід, надалі вважатимемо, що функція  $y(\bar{x})$  є заданого класу

$$y(\bar{x}) = b_1 \cdot \varphi_1(\bar{x}) + \dots + b_m \cdot \varphi_m(\bar{x}) \quad (2.2)$$

Використовуючи формулу (2.2), перепишемо нерівності (2.1) у еквівалентному вигляді

$$y_i^- \leq b_1 \cdot \varphi_1(\bar{x}_i) + \dots + b_m \cdot \varphi_m(\bar{x}_i) \leq y_i^+, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

де  $y_i^- = f_i - \varepsilon_i$ ,  $y_i^+ = f_i + \varepsilon_i$ .

Порівнюючи систему нерівностей (2.3) з системою інтервальних рівнянь (1.24), приходимо до їхньої ідентичності. Своєю чергою це означає еквівалентність задачі наближення та задачі побудови інтервальної моделі статичної системи, розглянутої у підрозділі 1.4, але в даному випадку при невідомій структурі лінійно-параметричної функції (1.22). Тобто можна стверджувати, що задача наближення складної моделі системи, заданої таблично, еквівалентна задачі синтезу структури інтервальної моделі та оцінювання її параметрів.

Синтезу задовільної структури моделей статичних систем у регресійному аналізі присвячені чисельні публікації [3, 207]. Розроблені різні методи стосовно класу поліноміальних моделей, серед яких слід виділити метод повного перебору усіх можливих структур поліноміальних моделей відомого степеня, методи послідовного виключення параметрів з поліноміальної моделі, послідовного “нарощування” структури поліноміальної моделі (метод включення) і т.д. [29].

В межах прийнятої в регресійному аналізі моделі випадкової, нормально розподіленої похибки, ці методи базуються на статистичних критеріях Стюдента, Пірсона, чи Фішера [111]. Порушення гіпотези про “нормальність”



автоматично руйнує теоретичні обґрунтування використання вказаних критеріїв. Більш ефективними у цьому плані є алгоритми методу групового урахування аргументів [80-83, 150-153]. Однак, для оцінки “якості” побудованої моделі, в цих методах також використовуються статистичні оцінки [153].

Крім того, у регресійному аналізі важлива властивість незміщеності оцінок параметрів регресійної моделі може бути досліджена, як правило, тільки в межах відомої структури функції. Це протиріччя зберігається і при перевірці гіпотез відносно “істинного” значення параметрів регресійної моделі [29].

Більш гнучкі і реалістичні моделі інтервальних похибок не викликають подібних протиріч, оскільки породжують прості процедури перевірки гіпотез стосовно властивостей статичної системи.

При синтезі структури поліноміальної інтервальної моделі статичної системи, яка визначатиме її властивості, важливим питанням є вибір критеріїв оптимальності структури. Розглянемо це питання детальніше.

Із цією метою повернемося до системи нерівностей (2.3) і вважатимемо, що функція  $y(\bar{x})$ , яка наближає табличні дані з потрібною точністю  $\varepsilon_i$ , шукається у класі поліномів. Відомо, що на скінченному наборі вузлів  $\bar{x}_i (i=1, \dots, N)$ , нарощуючи степінь полінома, завжди можна знайти таку поліноміальну модель, яка задовольняє заданим інтервальним даним [29].

Нехай знайдена поліноміальна модель  $y(\bar{x}, \bar{b})$  залежить від  $n$  змінних  $x_1, \dots, x_n$ , степені  $p$  і включає  $m$  параметрів  $b_1, \dots, b_m$ . Однак вона може виявитися надто складною для аналізу і прогнозування. Внаслідок цього виникає необхідність знаходження поліноміальної моделі максимально простої структури. У випадку наявності групи моделей із структурою однакової складності, перевагу надаватимемо тій моделі, яка забезпечує найменшу похибку прогнозування  $\Delta_{y(\bar{x})}$ , задану, наприклад,  $I_Q$ - та  $I_G$ -критеріями оптимальності планів інтервального експерименту (див. формули (1.49)). Залежно від особливостей використання моделі, в поняття “простоти”

(складності) структури моделі може вкладатися різний зміст. Найбільш типовими ситуаціями у даному випадку є виконання однієї із таких вимог: мінімізація степені полінома  $p \rightarrow \min$ ; мінімізація кількості вхідних змінних моделі  $n \rightarrow \min$ ; мінімізація кількості параметрів поліноміальної моделі  $m \rightarrow \min$ , за умови забезпечення сумісності інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.3)

Отже, для задач синтезу оптимальної структури, залежно від призначення та особливостей застосування інтервальної моделі статичної системи, заданої поліномом, необхідно використовувати одну чи декілька пар критеріїв: мінімізації степені полінома і похибки прогнозування; мінімізації кількості вхідних змінних моделі і похибки прогнозування; мінімізації кількості параметрів поліноміальної моделі і похибки прогнозування. При цьому необхідним є забезпечення сумісності системи (2.3).

У випадку поетапного зважування структур інтервальних моделей по критеріях вибраної пари, очевидно, пріоритетнішими будуть критерії, що мінімізують складність структури, оскільки критерій мінімуму похибки прогнозування інтервальної моделі вимагає значних обчислювальних витрат і на першому етапі, пов'язаному з оцінюванням великої кількості претендентів, його застосування є недоцільним.

Як і у регресійному аналізі, для знаходження оптимальної структури моделі можуть бути використані методи повного перебору можливих структур, послідовного включення і виключення параметрів поліноміальної моделі. Однак, у даному випадку вони будуються на аналізі властивостей системи інтервальних рівнянь (нерівностей) (2.3).

Суть методу повного перебору в нашому випадку полягає в тому, що складаються всі можливі поліноми, обмежені заданим числом  $n$  вхідних змінних і степенню  $p$  [192]. Наприклад, при  $n=1, p=2$  таких поліномів буде сім:

$$y_1 = b_1 + b_2x + b_3x^2, \quad y_2 = b_1 + b_2x, \quad y_3 = b_2x + b_3x^2, \quad y_4 = b_2x + b_3x^2,$$

$$y_5 = b_1, \quad y_6 = b_2x, \quad y_7 = b_3x^2.$$

Кожний із можливих поліномів підставляємо в систему (2.3). Виділяємо ті поліноми, які задовольняють усі нерівності системи і, отже, задані умови точності. Серед них формуємо групу поліномів найпростішої, у розумінні вибраного критерію, складності структури. На другому етапі, серед поліноміальних моделей найпростішої структури вибираємо модель з найменшою похибкою прогнозування.

Очевидно, що із зростанням  $p$  і  $n$ , на етапі вибору поліномів найпростішої структури, кількість можливих комбінацій суттєво зростає. Наприклад, при  $p=2, n=2$  необхідно проаналізувати більше 50 поліномів. Внаслідок цього, реалізацію методу повного перебору на практиці можна застосовувати тільки у окремих простих випадках, наприклад, коли вхідні змінні мають фізичний зміст і їхня кількість є достатньо малою.

Зауважимо, якщо вдалося знайти поліном, що наближує дані з необхідною точністю, то додавання до нього довільних членів втрачає зміст, оскільки в інтервальному аналізі найкращою є модель, що на множині усіх адекватних моделей є найпростішою [29]. Внаслідок цього, економнішими виявляються методи, побудовані на послідовному включенні або виключенні параметрів поліноміальних моделей.

У методі послідовного виключення вважаємо, що вихідна поліноміальна модель  $y(\vec{x}, \vec{b})$ , яка задовольняє інтервальним даним, є задана. Структуру вихідної моделі можна встановити на основі попереднього аналізу даних чи виходячи із фізичних міркувань. Потім досліджуємо можливості спрощення цієї моделі, тобто виключення з неї окремих параметрів, спираючись на обраний критерій складності структури. Для виключення “сліпого” перебору необхідна цілеспрямована перевірка гіпотез відносно групи або окремих параметрів.

При спрощенні початкової структури моделі  $y(\vec{x}, \vec{b})$  досліджуємо можливість обнуління її окремих параметрів. Це пов'язано з перевіркою гіпотез

інтервального аналізу у такому вигляді [192]:

$$H_0 : b_j = 0; H_0 : \bar{b}_i = 0 \quad (2.4)$$

де  $\bar{b}_i$  – заданий підвектор вектора  $\bar{b}$ .

В межах інтервального підходу перевірка гіпотез (2.4) спрощується, а саме: гіпотеза  $H_0$  приймається, якщо при обнулінні відповідних параметрів моделі, система інтервальних рівнянь (2.3) залишається сумісною. Наприклад, якщо маємо початкову модель

$$y(\bar{x}_i, \bar{b}) = b_1 \cdot \varphi_1(\bar{x}_i) + b_2 \cdot \varphi_2(\bar{x}_i) + b_3 \cdot \varphi_3(\bar{x}_i) + b_4 \cdot \varphi_4(\bar{x}_i),$$

яка включає чотири параметри і система інтервальних рівнянь

$$y_i^- \leq b_1 \cdot \varphi_1(\bar{x}_i) + 0 \cdot \varphi_2(\bar{x}_i) + 0 \cdot \varphi_3(\bar{x}_i) + b_4 \cdot \varphi_4(\bar{x}_i) \leq y_i^+, i = 1, \dots, N$$

сумісна для усіх точок спостережень  $x_i$ , то параметри  $b_2$  і  $b_3$  у заданій моделі можна обнулити, тобто одержати простішу структуру

$$y(\bar{x}, \bar{b}) = b_1 \varphi_1(\bar{x}) + b_4 \varphi_4(\bar{x}).$$

Пояснимо головну ідею відбору претендентів на обнуління, на прикладі моделі, яка містить два параметри  $b_1, b_2$ :  $y(\bar{x}, \bar{b}) = b_1 \varphi_1(\bar{x}) + b_2 \varphi_2(\bar{x})$ .

На рис. 2.1 наведено можливі варіанти розміщення множини розв'язків  $\Omega$  системи (2.3) при її сумісності у площині  $(b_1; b_2)$ .

Аналізуючи рисунки, не важко виявити, що у випадку *a*) знаки параметрів є додатними  $b_1 > 0, b_2 > 0$ , а у випадку *б*) вони від'ємні, тобто  $b_1 < 0, b_2 < 0$ . Це означає, що гіпотеза рівності нулю принаймні одного параметра, виключається.

В інших випадках можливе прийняття нульових гіпотез:  $b_2 = 0$  - випадок *в*);  $b_1 = 0$  - випадок *г*);  $b_1 = 0$  або  $b_2 = 0$  - випадок *д*);  $b_1 = 0$  і  $b_2 = 0$  - випадок *е*).

Розглянутий приклад дозволяє сформулювати два правила, які є справедливими для спільного  $m$  - вимірного випадку [192]:

– якщо множина  $\Omega$  не перетинає межі октантів простору  $b_1, \dots, b_m$ , то жоден

параметр  $b_j$  не може бути обнулений;

– якщо множина  $\Omega$  включає нульову точку (випадок  $e$ ), то приймається гіпотеза  $H_0: \vec{b} = 0$ , тобто всі параметри можуть бути замінені на нулі.

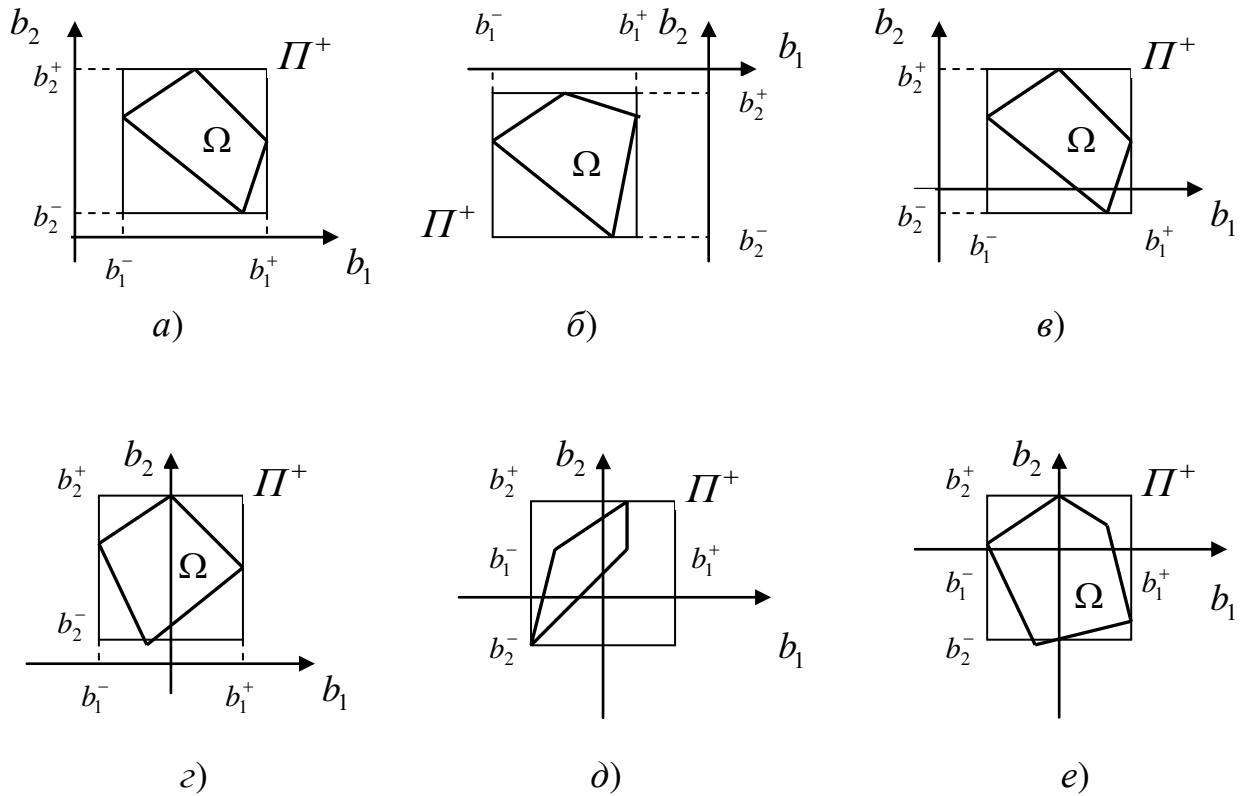


Рис.2.1. Варіанти розміщення множини розв'язків  $\Omega$ .

У багатовимірному випадку таке наочне зображення, як на рис. 2.1, множини  $\Omega$  є неможливим, що вимагає заміни її локалізаційною множиною. Найбільш придатною в даному випадку є інтервальна локалізація множини розв'язків  $\Omega$ , тобто описаним  $m$ -вимірним прямокутним паралелепіпедом  $\Pi^+$ . У багатовимірному випадку прямокутний паралелепіпед  $\Pi^+$  можна задати через межі окремих параметрів  $b_j$ , тобто інтервальним вектором  $[\vec{b}]$  з елементами  $[b_j^-, b_j^+]$ . Значення  $b_j^-, b_j^+$  знаходять із розв'язку задач лінійного програмування (1.38).

Знання меж параметрів  $b_j$  дозволяє зобразити модель  $y(\vec{x}, \vec{b})$  у такому вигляді:

$$y(\bar{x}, \bar{b}) = \varphi_1(\bar{x}) \cdot [b_1^-; b_2^+] + \dots + \varphi_m(\bar{x}) \cdot [b_m^-; b_m^+].$$

Із вище сформульованих правил витікає, що інтервальну модель статичної системи  $y(\bar{x}, \bar{b})$  не можна спростити, якщо межі усіх параметрів мають однакові знаки, а параметр  $b_j$  можна обнулити, якщо його межі  $b_j^-, b_j^+$  мають різні знаки [192].

На основі цього правила можливе застосування методу послідовного виключення, коли відповідно до обраного критерію спрощення структури: мінімізації степені, кількості вхідних змінних чи кількості параметрів поліноміальної моделі, з початкової моделі виключаються параметри, межі яких мають різні знаки. При цьому, якщо відразу декілька параметрів є претендентами на обнуління, недоцільно прирівнювати їх до нуля одночасно, оскільки можлива ситуація несумісності системи інтервальних рівнянь, а після обнуління параметра необхідно заново провести аналіз інтервальних даних і встановити межі решти параметрів.

У методі послідовного включення нарощуємо поліноміальну модель, послідовно переходячи від найпростіших до складніших структур. При додаванні нових параметрів моделі, як і у методі послідовного виключення, користуємося обраним критерієм спрощення структури. Процес зупиняємо як тільки побудована модель задовольняє системі інтервальних рівнянь (2.3) і при цьому усі її параметри є значимими.

Для зменшення кількості ітерацій процесу, найпростішу структуру слід вибирати виходячи із особливостей статичної системи, для якої будується інтервальна модель.

Слід відмітити важливу особливість запропонованих методів послідовного включення та виключення параметрів при синтезі найпростішої структури інтервальної моделі, а саме: найпростіша структура моделі не залежить від обраного методу локалізації і може бути встановлена на основі застосування найпростішого і найменш витратного з обчислювальної точки зору методу інтервальної локалізації параметрів моделі.

Використання вказаної особливості доцільно на другому етапі вибору оптимальної структури інтервальних моделей. Оскільки похибка прогнозування інтервальної моделі визначається розмірами множини локалізації параметрів, то серед сформованої на першому етапі групи поліноміальних моделей найпростішої структури вибираємо інтервальні моделі, отримані на основі локалізаційної множини у вигляді  $m$ - вимірного прямокутного паралелепіпеда  $\Pi^+$  з мінімальним об'ємом  $V(\Pi^+)$  [49]. Такий підхід дозволить уникнути складних процедур розрахунку значень  $I_Q$ - та  $I_G$ -критеріїв, що задають оцінки похибки прогнозування інтервальної моделі на області експерименту.

Проілюструємо розглянутий метод послідовного виключення параметрів для наближення функцій характеристик електротехнічного обладнання із заданою точністю [192].

При розробці електричних пристроїв, в управлінні технологічним і електротехнічним обладнанням в умовах виробництва широко практикується підхід, заснований на використанні діаграм і кривих експлуатаційних характеристик [135, 166]. Як правило, діаграми являють графіки ліній рівнів функції  $f(\bar{x})$  яка пов'язує необхідні вхідні змінні з головними характеристиками обладнання [135].

Кожна точка графіка є результатом складних розрахунків за системою рівнянь, що описують функціонування пристрою. Зауважимо, що для обладнання старого зразка діаграми є єдиним описом доступним для користувача. Перевагою такого наведення характеристик є, що в умовах виробництва діаграми дозволяють достатньо швидко і просто знайти необхідну величину вихідної характеристики для заданих аргументів  $\bar{x}$ . Однак ці характеристики неможливо використати при комп'ютерних розрахунках через їх неаналітичне представлення. Отже виникає задача переходу від графіка  $f(\bar{x})$  до функції  $y(\bar{x})$ , заданої аналітично, яка є математичною моделлю, що описує пристрій.

Щоб розв'язати цю задачу, спочатку задамо графік таблицею, а потім

апроксимуємо дані з потрібною точністю функцією  $y(\bar{x})$  найпростішої структури.

Розглянемо цю задачу на прикладі опису характеристик кола високовольтного комутатора, які широко використовуються в системах захисту і управління енергоблоків.

В літературі [166], яка стосується розробки та опису експлуатації такого обладнання, наведені універсальні криві робочих характеристик, придатних для турбогенераторів малої потужності та гідрогенераторів потужністю 500 МВт.

Графіки для гармонічної компоненти струму перехідного процесу в момент розімкнення контактів наведені на рис.2.2.

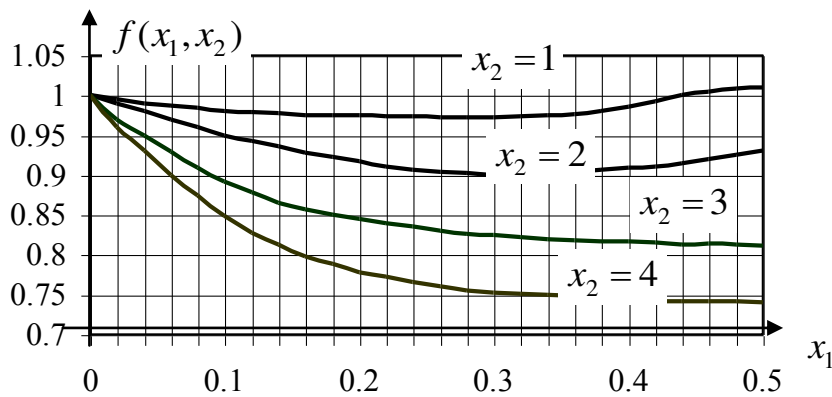


Рис. 2.2. Графік функцій струму перехідного процесу.

На рисунку використані такі позначення:  $f$  – середньо-квадратична величина періодичної компоненти струму перехідного процесу віднесена до величини струму в момент  $t=0$  (початкова величина струму відома для всіх типів генераторів);  $x_1$  – проміжок часу після розмикання контактів;  $x_2$  – відносна величина, яка характеризує віддаленість генератора від точки короткого замикання.

На основі кривих, наведених на рисунку, була підготовлена таблиця 2.1. Для верхньої кривої в силу її особливостей абсолютна похибка апроксимації  $\Delta$  була вибрана  $\pm 0,015$  ( $\approx 1,5\%$ ), а для решти кривих  $\pm 0,03$ .

У таблиці зберігаються прийняті нами раніше позначення:  $y_i^- = f_i - \Delta_i$ ,



$$y_i^+ = f_i + \Delta_i.$$

Таблиця 2.1

Табличні значення функцій струму перехідного процесу

$i$	$x_{1i}$ (с)	$x_{2i}$	$f_i$	$\Delta_i$	$y_i^-$	$y_i^+$
1	0,1	1	0,985	0,015	0,970	1,000
2	0,2	1	0,975	0,015	0,960	0,990
3	0,4	1	0,985	0,015	0,970	1,000
4	0,5	1	1,010	0,015	0,995	1,025
5	0,1	2	0,950	0,030	0,920	0,980
6	0,2	2	0,920	0,030	0,890	0,950
7	0,3	2	0,900	0,030	0,870	0,930
8	0,4	2	0,910	0,030	0,880	0,940
9	0,5	2	0,920	0,030	0,890	0,950
10	0,1	3	0,890	0,030	0,860	0,920
11	0,3	3	0,830	0,030	0,800	0,860
12	0,5	3	0,810	0,030	0,780	0,840
13	0,1	4	0,850	0,030	0,820	0,880
14	0,3	4	0,760	0,030	0,730	0,790
15	0,5	4	0,740	0,030	0,710	0,770

Враховуючи плавний характер кривих, можемо наблизити таблично задану характеристику поліноміальною моделлю третього степеня з найменшим числом параметрів.

Для початку вибираємо такий поліном:

$$y(\vec{x}) = b_1 + b_2 x_1 + b_3 x_1 x_2 + b_4 x_1^2 + b_5 x_1^2 x_2 + b_6 x_1 x_2^2 + b_7 x_1^3.$$

З діаграми випливає, що при  $x_1 = 0$  вихідний показник (відносно значення струму у колі) для будь-якого значення  $x_2$  дорівнює  $y(0, x_2) = 1$ . Це дозволяє відразу визначити параметр  $b_1 = 1$  і записати систему нерівностей, яка задає

множину можливих значень параметрів поліноміальної моделі у такому вигляді:

$$y_i^- \leq 1 + \sum_{j=2}^7 b_j \varphi_j(\bar{x}_i) \leq y_i^+$$

Розрахунок прямокутного багатовимірного паралелепіпеда  $\Pi^+$ , описаного навколо множини розв'язків  $\Omega$ , дозволив визначити такі межі параметрів:

$$\begin{aligned} b_2^- &= -0,1572; & b_2^+ &= 0,9223; \\ b_3^- &= -0,7075; & b_3^+ &= -0,1525; \\ b_4^- &= -1,1111; & b_4^+ &= 0,66471; \\ b_5^- &= 0,2250; & b_5^+ &= 2,7621; \\ b_6^- &= -0,0350; & b_6^+ &= 0,0490; \\ b_7^- &= -0,0896; & b_7^+ &= 0,04672. \end{aligned}$$

Як бачимо, межі інтервалів можливих значень параметрів  $b_2, b_4, b_6, b_7$  поліноміальної моделі мають різні знаки і, відповідно, можна прийняти припущення

$$H_0 : b_j = 0 \quad j = 2, 4, 6, 7.$$

Враховуючи, що на другому кроці значна кількість параметрів претендує на обнуління, з метою зменшення обчислювальних витрат виключаємо відразу два параметри  $b_6, b_7$ . Після перерахунку отримаємо такі інтервальні значення параметрів:

$$\begin{aligned} b_2^- &= -0,1122; & b_2^+ &= 0,5236; \\ b_3^- &= -0,4952; & b_3^+ &= -0,3225; \\ b_4^- &= -0,6972; & b_4^+ &= 0,6444; \\ b_5^- &= 0,2250; & b_5^+ &= 0,6805; \end{aligned}$$

Як видно із отриманих результатів, після другого кроку можемо прийняти такі гіпотези:

$$H_0 : b_j = 0 \quad j = 2, 4.$$

Виключаємо параметр  $b_4$ . У результаті перерахунку отримаємо

$$\begin{aligned} b_2^- &= 0,1450; & b_2^+ &= 0,2466; \\ b_3^- &= -0,4318; & b_3^+ &= -0,3816; \\ b_5^- &= 0,3875; & b_5^+ &= 0,5312. \end{aligned}$$

Надалі спрощувати модель неможливо, оскільки межі усіх параметрів мають однакові знаки.

Отже, після трьох кроків отримаємо поліноміальну модель найпростішої структури

$$y(\vec{x}) = 1 + 0,173 \cdot x_1 - 0,396 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0,453 \cdot x_1^2 \cdot x_2,$$

яка описує графіки, наведені на рис.2.2 із заданою точністю. Параметри моделі розраховані як центри ваги десяти вершин області  $\Omega$ , координати яких знайдені розв'язуванням задач лінійного програмування (1.38).

Отже, задачі синтезу оптимальної структури моделі при аналізі інтервальних даних та наближення складних моделей простішими із заданою точністю розв'язуються на основі єдиного інтервального локалізаційного підходу, який базується на задачах лінійного програмування у вигляді (1.38).

Слід відмітити, що застосування методу інтервальної локалізації множини параметрів, переважно, не забезпечує задовільних прогностичних властивостей інтервальної моделі, однак є необхідним на етапі синтезу її оптимальної структури. Після отримання оптимальної структури моделі, з метою підвищення її точності прогнозування, доцільним є застосування інших методів локалізації параметрів.

## 2.2. Аналіз властивостей інтервальних моделей статичних систем у випадку застосування насиченого експерименту

Властивості інтервальних моделей, побудованих на основі множини розв'язків інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.25) в певній мірі розглядалися у пункті 1.4.1. Однак, у випадку застосування насиченого експерименту вони потребують додаткового розгляду. Основні результати аналізу властивостей інтервальних моделей для даного випадку отримані у праці [39].

Нехай проведено насичений експеримент із  $N = m$  спостереженнями з відомою інтервальною похибкою  $\Delta(\vec{x}) = 0,5 \cdot (y^+(\vec{x}) - y^-(\vec{x}))$  спостережень за вихідною змінною і побудова множини параметрів  $\Omega$  інтервальних моделей, структура яких задана лінійно-параметричною функцією (1.22).

Наведений у пункті 1.4.1 вираз (1.33)

$$\Delta_{y(\vec{x})} = \max_{\vec{b}_p, \vec{b}_s \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot (\vec{b}_p - \vec{b}_s)), \vec{x} \in \chi$$

при відомій множині параметрів дозволяє розрахувати значення похибки прогнозування інтервальної моделі у будь-якій точці області експерименту.

Підставимо у вираз (1.33) замість вершин  $\vec{b}_p, \vec{b}_s$  області  $\Omega$  їхні значення, обчислені для насиченого експерименту ( $N = m$ ) у відповідності з формулою (1.31), отримаємо [39]

$$\Delta_{y(\vec{x})} = \max_{\vec{Y}_p, \vec{Y}_s \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot F^{-1} \cdot (\vec{Y}_p - \vec{Y}_s)), \vec{x} \in \chi. \quad (2.5)$$

Введемо вектор  $\vec{\alpha}$ , який знаходиться із розв'язку такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\vec{\alpha}^T = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot F^{-1}. \quad (2.6)$$

Перепишемо формулу (2.5) в еквівалентному вигляді з врахуванням введеного позначення, а також з врахуванням, що компоненти векторів  $\vec{Y}_p, \vec{Y}_s$

утворені як можливі комбінації меж інтервальних даних  $y_i^-, y_i^+, i = 1, \dots, m$  (див. табл. 1.1)

$$\Delta_{y(\vec{x})} = 2 \cdot \sum_{i=1}^m |\alpha_i \cdot \Delta_i|, \vec{x} \in \chi, \quad (2.7)$$

де  $\alpha_i$ , –  $i$ -та компонента вектора  $\vec{\alpha}$ ;

$\Delta_i = 0,5 \cdot (y_i^+ - y_i^-)$  – інтервальні похибки в точках  $\vec{x}_i$  спостережень.

Як видно, функція похибки прогнозування інтервальної моделі для насиченого експерименту залишається кусковою, але обчислення її значення в будь-якій точці на області  $\chi$  експерименту за допомогою формули (2.7) суттєво спрощується і не вимагає розв'язування задач лінійного програмування

$$\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b} \xrightarrow{\vec{b} \in \Omega} \min, \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b} \xrightarrow{\vec{b} \in \Omega} \max,$$

як це необхідно за формулою (1.33) для загального випадку експерименту з кількістю точок спостережень  $N > m$ .

Ураховуючи симетричність множини  $\Omega$  відносно центру  $\vec{b}$ , який задається формулою (1.32), коридор прогнозування інтервальних моделей для насиченого експерименту обчислюємо так [39]:

$$[\hat{y}^-(\vec{x}); \hat{y}^+(\vec{x})] = [\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b} - \sum_{i=1}^m |\alpha_i \cdot \Delta_i|; \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b} + \sum_{i=1}^m |\alpha_i \cdot \Delta_i|]. \quad (2.8)$$

Аналіз отриманої формули для побудови коридору прогнозування інтервальних моделей та формули (2.7) для побудови їх функції похибки прогнозування показує, що обчислювальні витрати в даних випадках визначаються операцією знаходження оберненої матриці значень базових функцій  $F$ . При сучасних можливостях обчислювальних засобів для моделей з кількістю параметрів  $m \leq 100$ , що цілком є достатньою для досягнення цілей моделювання систем, реалізація цієї операції не вимагає значних обчислювальних витрат.

Практика експериментального моделювання часто вимагає знання максимальної та мінімальної похибок прогнозування на заданій області експерименту. Наприклад, мінімізація максимальної похибки прогнозування

інтервальної моделі є одним із критеріїв при побудові оптимального плану експерименту та при виборі оптимального методу локалізації параметрів. Тому актуальною є задача дослідження можливостей оцінки цих похибок інтервальної моделі у випадку застосування насиченого експерименту.

Надалі будемо вважати, що інтервальна модель, побудована за результатами насиченого експерименту з інтервальними похибками  $\Delta_i, i=1, \dots, m$  спостережень і містить постійну складову, тобто  $\varphi_1(\vec{x}) = 1$ .

Спочатку оцінимо мінімальну похибку прогнозування інтервальної моделі. З цією метою сформулюємо допоміжне твердження.

Л е м а 2.1. Нехай задані множини чисел

$$t_i, i=1, \dots, m, \sum_{i=1}^m t_i = 1 \text{ та } u_i \geq 0, i=1, \dots, m,$$

тоді справедливою є нерівність

$$\sum_{i=1}^m |t_i \cdot u_i| \geq \min_{i=1, \dots, m} u_i.$$

Як видно із (2.8), для фіксованих  $\Delta_i, i=1, \dots, m$ , значення похибки прогнозування змінюється в залежності від значень  $\alpha_i$ , які своєю чергою визначаються значеннями компонент вектора  $\vec{x}$  (див. формулу (2.6)). За наявності постійної складової в інтервальній моделі, розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.6) відносно невідомих  $\alpha_i (i=1, \dots, m)$  існує тільки за умови

$$\sum_{i=1}^m \varphi_1(\vec{x}_i) \cdot \alpha_i = \varphi_1(\vec{x}) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1.$$

Отже, з леми 2.1 очевидно стає така нерівність:

$$\sum_{i=1}^m |\alpha_i \cdot \Delta_i| \geq \min_{i=1, \dots, m} \Delta_i. \quad (2.9)$$

Оскільки в точках  $\vec{x}_i \in \chi$  насиченого експерименту похибки прогнозування дорівнюють подвоєним значенням відповідних похибок спостережень  $\Delta_i$  [39], тобто  $\Delta_{y(\vec{x}_i)} = 2 \cdot \Delta_i$ , то з врахуванням (2.7) та (2.9)

приходимо до формули

$$\min_{\bar{x} \in \chi} \Delta_{y(\bar{x})} = 2 \cdot \min_{i=1, \dots, m} \Delta_i. \quad (2.10)$$

Усе сказане вище дозволяє сформулювати таку властивість інтервальних моделей.

**В л а с т и в і с т ь 2.1.** Для насиченого експерименту з похибками спостережень  $\Delta_i, i=1, \dots, m$  мінімальна похибка прогнозування інтервальної моделі досягається в точці плану з мінімальною похибкою спостережень і визначається за формулою (2.10).

При аналізі мінімальної похибки прогнозування на області експерименту ми не висували ніяких обмежень стосовно області експерименту  $\chi$ . Слід зауважити, що в задачах ідентифікації переважно використовують опуклі множини допустимих значень вхідних змінних, що загалом не змінює отриману властивість.

Перейдемо тепер до аналізу максимальної похибки прогнозування на області  $\chi$ . В загальному випадку ця задача ускладнюється через наявність не лінійних по відношенню до вхідних змінних компонент у векторі базових функцій  $\vec{\varphi}(\bar{x})$ .

Припустимо, що будь-яка точка  $\bar{x}$  області  $\chi$  експерименту може бути задана на опуклій множині лінійною комбінацією точок  $\bar{x}_i \in \chi$ , тобто

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \bar{x}_i, \quad \lambda_i \geq 0 \forall i, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1. \quad (2.11)$$

Враховуючи, що в точках спостережень  $\bar{x}_i$  похибка прогнозування дорівнює  $2 \cdot \Delta_i$  і підставляючи значення  $\vec{\alpha}$ , які задовольняють нерівність (2.9) і знайдені для фіксованих  $\bar{x} \in \chi$ , у формулу (2.7), завжди знайдемо такі, що задовольняють нерівність

$$\max_{\bar{x} \in \chi} \Delta_{y(\bar{x})} \geq 2 \cdot \max_{i=1, \dots, m} \Delta_i. \quad (2.12)$$

Формула (2.12) дозволяє отримати нижню оцінку максимального значення похибки прогнозування на області експерименту.

Покажемо, що у випадку лінійної інтервальної моделі  $\hat{y}(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot \vec{b}$  (з постійною складовою) на області експерименту (2.11) нерівність (2.12) перетворюється у рівність [39]. Для цього замість  $F = \{\vec{\varphi}^T(\vec{x}_i), i = 1, \dots, m\}$  та  $\vec{\varphi}^T(\vec{x})$  у формулі (2.6) підставимо, відповідно,  $F = \{\vec{x}_i^T, i = 1, \dots, m\}$  та вектор  $\vec{x}^T$  з формули (2.11). Після нескладних перетворень отримаємо:  $\vec{\alpha} = \vec{\lambda}$ . Відповідно, для даної моделі область значень компонент вектора  $\vec{\alpha}$  обмежується такими умовами:

$$\alpha_i \geq 0 \forall i, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1.$$

За цих умов формулу (2.7) перепишемо так:

$$\Delta_{y(\vec{x})} = \Delta_{y(\vec{\alpha} \cdot F)} = 2 \cdot \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \Delta_i, \vec{x} \in \chi, \alpha_i \geq 0 \forall i, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1.$$

З останньої знайдемо максимальне значення похибки прогнозування

$$\max_{\vec{x} \in \chi} \Delta_{y(\vec{x})} = \max_{\vec{\alpha}} \Delta_{y(\vec{\alpha} \cdot F)} = 2 \cdot \max_{\vec{\alpha}} \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \Delta_i, \alpha_i \geq 0 \forall i, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1.$$

Звідси

$$\max_{\vec{x} \in \chi} \Delta_{y(\vec{x})} = 2 \cdot \max_{i=1, \dots, m} \Delta_i. \quad (2.13)$$

Отже, у випадку насиченого експерименту максимальне значення похибки лінійної по входних змінних інтервальної моделі на області (2.11) досягається в точці плану з максимальною похибкою спостережень і визначається за формулою (2.13).

З проведеного аналізу також витікає, що нові методи локалізації можуть бути побудовані на базі насиченого експерименту, оскільки в цьому випадку, порівняно із загальним випадком  $N > m$ , спрощується аналіз похибки прогнозування моделі, зменшуються витрати на її розрахунок і на основі властивості 2.1 є можливість знайти мінімальне значення похибки на області експерименту.



### 2.3. Інтервальні моделі статичних систем, побудовані на основі інтервальних оцінок параметрів

В інтервальній математиці, замість розв'язків інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.24) у вигляді множини  $\Omega$  параметрів моделі, розглядають його локалізацію (наближення) за допомогою інтервального вектора  $[\vec{b}] = ([b_1^-; b_1^+], \dots, [b_m^-; b_m^+])^T$ , який дозволяє знайти об'єднане інтервальне розширення неперервної дійсної функції (1.22) [2]. Очевидно властивості об'єданого інтервального розширення матимуть певні відмінності в порівнянні з коридором інтервальних моделей (1.27), побудованим на основі розв'язків системи (1.24).

Фактично, об'єднане інтервальне розширення, що являє множини інтервальних моделей, задається коридором  $[\hat{y}(\vec{x})]$ , коли у формулі (1.27) взамін  $\vec{b} \in \Omega$  записати  $\vec{b} \in [\vec{b}]$ . Надалі коридор інтервальних моделей при інтервальному заданні їх параметрів (об'єднане інтервальне розширення) будемо позначати так:  $[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in [\vec{b}]}$ .

З іншого боку, замінивши у виразі для множини інтервальних моделей

$$\hat{y}(\vec{x}) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b}, \quad \vec{b} \in \Omega,$$

побудованій на основі множини розв'язків інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.25), вектор оцінок  $\vec{b}$  на інтервальний вектор  $[\vec{b}]$  і виконавши операції інтервальної арифметики, отримаємо оцінку  $[\hat{y}(\vec{x}, [\vec{b}])]$  прогнозованого значення  $\hat{y}(\vec{x})$  в інтервальній арифметиці.

В праці [2] для загального випадку доведено таке включення:

$$[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in [\vec{b}]} \subseteq [\hat{y}(\vec{x}, [\vec{b}])], \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{X}. \quad (2.15)$$

Процедури знаходження оцінок  $[\hat{y}(\vec{x}, [\vec{b}])]$ , у яких застосовується інтервальна арифметика є достатньо надлишковими, а знайдені оцінки часто

неточні. Крім того, при побудові інтервальних моделей статичних систем, не залежно від методу локалізації множини параметрів, важливим є не тільки можливість знаходження прогнозованого значення інтервалу виходу з мінімальними обчислювальними витратами, що в даному випадку забезпечується оцінками  $[\hat{y}(\vec{x}, [\vec{b}] )]$ , але і забезпечення аналітичності задання функціональних меж коридору моделей на усій області експерименту. Остання вимога зумовлює необхідність розгляду властивостей меж функціонального коридору  $[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in [\vec{b}]}$  лінійно-параметричних функцій, заданих виразом (1.22) [42].

Відмітимо, що для лінійно-параметричних функцій (1.22) в силу властивості субдистрибутивності інтервальної арифметики (1.11), включення (2.15) перетворюється у рівність, тобто оцінки  $[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in [\vec{b}]}$  та  $[\hat{y}(\vec{x}, [\vec{b}])]$  співпадають для усіх значень  $\vec{x}$ .

Коридор інтервальних моделей (1.27) у випадку локалізації області  $\Omega$  оцінок параметрів інтервальним вектором  $[\vec{b}]$ , що в просторі параметрів є прямокутним паралелепіпедом

$$\Pi^+ = \{\vec{b} \mid b_j^- \leq b_j \leq b_j^+, j = 1, \dots, m\},$$

запишемо так [42]:

$$[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in [\vec{b}]} = [\min_{\vec{b} \in \Pi^+} \sum_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j; \max_{\vec{b} \in \Pi^+} \sum_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j]. \quad (2.16)$$

Зауважимо, що залежність між прогнозованим значенням виходу  $\hat{y}$  та оцінками вектора параметрів  $\vec{b}$  є лінійною. Тому при фіксованому векторі входів  $\vec{x}$  розв'язками задач

$$\min_{\vec{b} \in \Pi^+} \sum_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j, \quad \max_{\vec{b} \in \Pi^+} \sum_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j$$

є вершини паралелепіпеда  $\Pi^+$ . Отже межі коридору інтервальних моделей (2.16), як і у випадку застосування множини параметрів  $\Omega$ , будуються на основі координат вершин області локалізації  $\Pi^+$ .

Введемо такі позначення:

$$b_j^{\min} = \begin{cases} b_j^-, & \text{якщо } \varphi_j(\bar{x}_i) \geq 0 \\ b_j^+, & \text{якщо } \varphi_j(\bar{x}_i) < 0 \end{cases}, \quad b_j^{\max} = \begin{cases} b_j^+, & \text{якщо } \varphi_j(\bar{x}_i) \geq 0 \\ b_j^-, & \text{якщо } \varphi_j(\bar{x}_i) < 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

і з урахуванням вище зробленого зауваження перепишемо вираз (2.16) так:

$$[\hat{y}(\bar{x})]_{\bar{b} \in [\bar{b}]} = \left[ \sum_{j=1}^m \varphi_j(\bar{x}) \cdot b_j^{\min}; \sum_{j=1}^m \varphi_j(\bar{x}) \cdot b_j^{\max} \right]. \quad (2.18)$$

Перейдемо до аналізу виразу (2.18).

Як видно, для обчислення інтервалу прогнозування  $[\hat{y}(\bar{x})]_{\bar{b} \in [\bar{b}]}$  у фіксованій точці  $\bar{x}_i$  необхідно визначити знаки значень усіх базових функцій  $\varphi_j(\bar{x}_i), (j=1, \dots, m)$ . Оскільки значення базових функцій в загальному випадку залежать від значень компонент вектора входів  $\bar{x}$ , то справедлива така властивість інтервальних моделей у випадку інтервальних оцінок їх параметрів [42].

**В л а с т и в і с т ь 2.2.** У загальному випадку межі коридору (2.18) інтервальних моделей є кусковими функціями.

Дану властивість можна проілюструвати прикладом.

Нехай маємо інтервальну модель  $\hat{y}(x) = b_0 + b_1 \cdot x$ , де  $b_0 \in [2,4], b_1 \in [1,3], x \in [-2,2], \varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x$ .

Коридор інтервальних моделей (2.18) для даного випадку буде таким:

$$[\hat{y}(\bar{x})]_{\bar{b} \in [\bar{b}]} = [2,4] + [1,3] \cdot x.$$

Графічна ілюстрація коридору наведена на рис. 2.3.

Як видно, на інтервалі  $[-2,0]$  значення базисної функції від'ємне, тобто  $\varphi_2(x) < 0$ , а на інтервалі  $[0,2]$   $\varphi_2(x) > 0$ , що є причиною кусковості меж функціонального коридору.

**В л а с т и в і с т ь 2.3.** Нехай на області експерименту  $\chi$  усі базові функції  $\varphi_j(\bar{x}), (j=1, \dots, m)$  у лінійно-параметричному рівнянні (1.22) є неперервними та не кусковими і жодна з них не змінює свій знак на

протилежний, тоді функціональні межі коридору інтервальних моделей статичної системи (2.18) на області  $\chi$  є неперервними та не кусковими функціями.

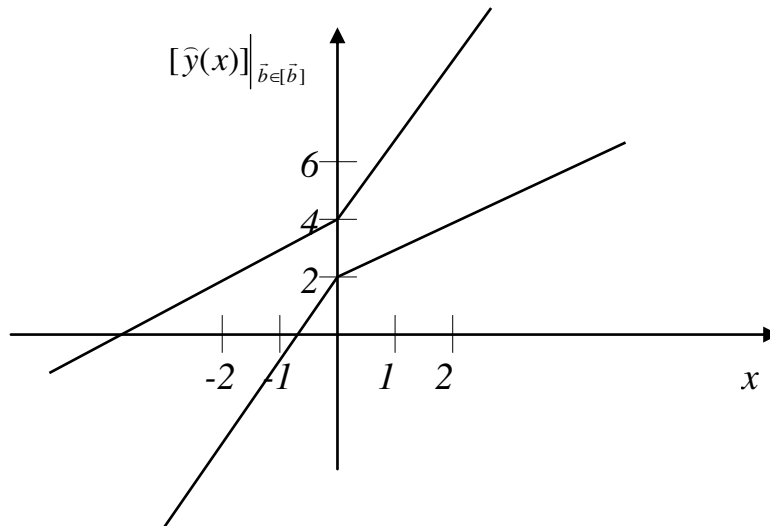


Рис 2.3. Кусковість меж функціонального коридору.

Справедливість властивості 2.3 витікає з формул (2.17), та (2.18), оскільки за умов постійності знаків значень базових функцій  $\varphi_j(\vec{x}), (j=1, \dots, m)$  на області експерименту  $\chi$ , вибір значень  $b_j^{\min}, b_j^{\max}$  не залежить від зміни значень вектора входів  $\vec{x} \in \chi$ .

Для поліноміальних моделей зміна знаків значень базових функцій пов'язана з їх "проходженням" через нульову точку  $\vec{x}_0 = (0, \dots, 0)^T$ . Шляхом нормування змінних  $\vec{x}$  центр  $\vec{x}_0$  області експерименту  $\chi$  можна вибрати так, щоб на області експерименту задовольнити умови справедливості властивості 2.3. У цьому випадку межі коридору інтервальних моделей (2.18) будуть неперервними та не кусковими функціями.

Однак таке нормування не завжди є зручним при розв'язуванні задач активної ідентифікації інтервальних моделей. Переважно для цих задач нормування проводять у такий спосіб, щоб центр  $\vec{x}_0$  області експерименту саме

співпадав з нульовою точкою  $\vec{x}_0 = (0, \dots, 0)^T$  [48].

Похибка прогнозування інтервальної моделі при інтервальних параметрах визначається шириною коридору (2.18):

$$\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in [\vec{b}]} = \sum_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j^{\max} - \sum_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j^{\min}. \quad (2.19)$$

З урахуванням позначень (2.17), формулу (2.19) для визначення похибки прогнозування перепишемо так:

$$\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in [\vec{b}]} = \left| \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \right| \cdot (\vec{b}^+ - \vec{b}^-), \quad (2.20)$$

де  $\left| \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \right|$  – означає вектор абсолютних значень базових функцій у фіксованій точці  $\vec{x}$ ;

$\vec{b}^+$ ,  $\vec{b}^-$  – вектори, компонентами яких є  $b_j^+$  та  $b_j^-$ , відповідно.

Як видно з (2.20), при збільшенні розмірів області  $\Pi^+$  локалізації  $\Omega$  значення похибки прогнозування збільшується.

Врахуємо, що область  $\Pi^+$  є симетричною відносно центру

$$\vec{b} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{b}^+ + \vec{b}^-).$$

Тоді формула (2.18) для визначення коридору інтервальних моделей набуде такого вигляду

$$[\hat{y}(\vec{x})] \Big|_{\vec{b} \in [\vec{b}]} = \left[ \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in [\vec{b}]}; \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b} + \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in [\vec{b}]} \right].$$

Розглянемо тепер співвідношення між похибкою прогнозування (2.20) та похибкою прогнозування  $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}$  інтервальної моделі при  $\vec{b} \in \Omega$ , тобто коли вона обчислюється як різниця меж коридору (1.27) [40].

У силу виконання (2.15) – як рівності для лінійно-параметричних функцій у вигляді (1.22), а також монотонності включення інтервальних обчислень, справедлива така нерівність:

$$\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \leq \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in [\vec{b}]} \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{X}. \quad (2.21)$$

Дійсно, оскільки  $\vec{b} \in \Omega$ , а  $\Omega \subseteq \Pi^+$ , то оцінка  $[\hat{y}(\vec{x}, [\vec{b}] )]$  виходу  $\hat{y}$  у інтервальній арифметиці (в силу монотонності включення інтервальних обчислень) включає коридор  $[\hat{y}(\vec{x})]$ . Виконання рівності (2.15) у цьому випадку забезпечує справедливість включення:

$$[\hat{y}(\vec{x})] \subseteq [\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in [\vec{b}]}$$

Звідси витікає справедливість нерівності (2.21).

Отже, нерівність (2.21) показує, що значення похибки прогнозування інтервальної моделі з параметрами, що належать множині розв'язків системи (1.24) ( $\vec{b} \in \Omega$ ), у будь-якій точці області  $\chi$  експерименту менше або дорівнює значенню похибки прогнозування інтервальної моделі при інтервальній локалізації вектора  $\vec{b}$  її параметрів.

У пункті 1.4.1 показано, що для лінійної інтервальної моделі  $(\vec{\varphi}^T(\vec{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T)$  значення похибки  $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}$  пропорційне відстані від центру області експерименту  $\chi$ , а її максимальне значення досягається на межі області  $\chi$ . Із формули (2.20) витікає, що дана властивість справедлива для інтервальних моделей з інтервальними параметрами  $\vec{b} \in [\vec{b}]$ , у яких усі базисні функції  $\varphi_j(\vec{x})$  ( $j = 1, \dots, m$ ) є монотонно зростаючими по модулю, коли відстань від центру  $\vec{x}_0$  експерименту збільшувати у будь-якому напрямку. Якщо пронормувати незалежні змінні  $x_1, \dots, x_n$  так, щоб центр експерименту збігався з нульовою точкою  $\vec{x}_0 = (0, \dots, 0)^T$ , то розглянута властивість стає справедливою для поліноміальних моделей.

Для інтервальних моделей з інтервальними оцінками параметрів, заданих лінійно-параметричними функціями (1.22), у яких базові функції не відповідають розглянутій властивості, картина зміни похибки прогнозування на області експерименту як і у випадку інтервальних моделей при  $\vec{b} \in \Omega$ , може бути достатньо складною. Для підтвердження цього факту розглянемо графік залежності похибки прогнозування від вхідних змінних для інтервальних

моделей з коридору

$$[\hat{y}(x_1, x_2)] = [4;3] \cdot x_1 + [1;3,5] \cdot \sin(x_2) + [1;2] \cdot x_2^2 + [-2;3] \cdot \cos(x_2).$$

На рис. 2.4 наведена функція похибки прогнозування, отримана для інтервальних моделей розглянутого коридору.

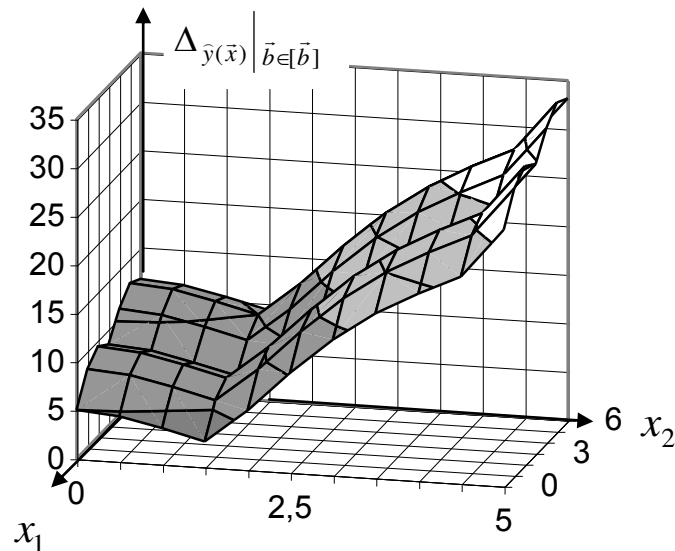


Рис.2.4.

Отже, проведений порівняльний аналіз дозволяє зробити висновок, що за умови локалізації параметрів  $\vec{b}$  інтервальної моделі (1.22) у вигляді інтервального вектора  $[\vec{b}]$ , у загальному випадку значення похибки прогнозування отриманих інтервальних моделей збільшується, а межі функціонального коридору прогнозування (2.18) в просторі експерименту залишаються кусковими функціями. Виграш при цьому в порівнянні із інтервальними моделями (2.14), полягає у суттєвому зменшенні обчислювальних витрат в зв'язку із спрощенням алгоритму розрахунку інтервальних значень виходу  $\hat{y}$  у фіксованих точках, а для інтервальних моделей, які задовольняють умовам справедливості властивості 2.3 – у гладкості границь функціонального коридору.

#### 2.4. Властивості інтервальних моделей статичних систем у випадку локалізації області параметрів еліпсоїдом

Розглянемо випадок, коли навколо множини параметрів  $\Omega$  інтервальних моделей, заданої системою (1.24), отримана його оптимальна еліпсоїдальна оцінка  $Q_m$  [49]. Під оптимальною в даному випадку будемо розуміти оцінку

$$Q_m = \{\vec{b} \in R^m \mid (\vec{b} - \bar{\vec{b}})^T \cdot H \cdot (\vec{b} - \bar{\vec{b}}) = \gamma\}, \quad (2.22)$$

яка в просторі параметрів  $\vec{b}$  моделі є  $m$ -вимірним еліпсоїдом мінімального об'єму і при цьому справедливе таке включення:

$$\Omega \subseteq Q_m. \quad (2.23)$$

Як і у випадку інтервальної локалізації параметрів, для побудови моделей статичних систем із застосуванням методів локалізації множини параметрів еліпсоїдальними множинами, важливим є вивчення та застосування властивостей отриманого при цьому коридору моделей [49].

Коридор інтервальних моделей  $[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in Q_m}$ , у випадку локалізації множини  $\Omega$  багатомірним еліпсоїдом (2.22), будемо називати наближенням коридору (1.27). Властивості цього наближення розглянуті у праці [49].

Враховуючи симетричність еліпсоїда (2.22), цей коридор матиме такий вигляд:

$$[\hat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in Q_m} = [\bar{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \bar{\vec{b}} - \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_m}; \bar{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \bar{\vec{b}} + \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_m}], \quad (2.24)$$

де  $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_m}$  – похибка прогнозування.

Користуючись формулою (1.51), із урахуванням заміни  $F^T \cdot E^{-2} \cdot F = H$  та  $m = \gamma$ , для похибки прогнозування отримаємо

$$\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \Big|_{\vec{b} \in Q_m} = 2 \cdot \sqrt{\bar{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot H^{-1} \cdot \bar{\varphi}(\vec{x}) \cdot \gamma} \quad (2.25)$$



Як видно з виразів (2.24) та (2.25), функції похибки прогнозування та меж коридору інтервальних моделей для даного випадку є неперервними та не кусковими, що забезпечує аналітичність розрахунку інтервалу прогнозування у заданій точці області експерименту. Ця властивість є достатньо ваговою на користь застосування еліпсоїдальних методів локалізації.

Як і у випадку інтервальної локалізації множини параметрів, похибка прогнозування при локалізації еліпсоїдом  $\Delta_{\bar{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m}$  не менша (переважно більша) від похибки прогнозування  $\Delta_{\bar{y}(\bar{x})}$  на усій області експерименту, тобто

$$\Delta_{\bar{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} \geq \Delta_{\bar{y}(\bar{x})}, \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{X}.$$

Цей факт витікає із включення (2.23) та лінійності за параметрами інтервальної моделі (2.14).

Для вибору кращого, з точки зору точності, методу (інтервальної чи еліпсоїдальної) локалізації множини  $\Omega$ , важливим є встановлення співвідношень між похибками прогнозування інтервальних моделей, які забезпечують відповідні методи локалізації.

У випадку лінійно - параметричної інтервальної моделі ці співвідношення будуть визначатися співвідношеннями між розмірами багатомірного локалізаційного еліпсоїда  $Q_m$  та локалізаційного прямокутного гіперпаралелепіеда  $P^+$ . Зокрема, для включення  $P^+ \subseteq Q_m$  справедливою є така нерівність:

$$\Delta_{\bar{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} \leq \Delta_{\bar{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in [b]} \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{X}.$$

Навпаки, із включення  $P^+ \supseteq Q_m$  витікає нерівність

$$\Delta_{\bar{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} \geq \Delta_{\bar{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in [b]} \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{X}.$$

Однак на практиці апіорі не відомо яке включення буде отримано в результаті локалізації. Одночасне застосування інтервальної та еліпсоїдальної локалізацій множини  $\Omega$  з метою визначення кращого способу є не

раціональним з обчислювальної точки зору. Розглянемо підходи, які з мінімальними обчислювальними витратами дозволяють вибрати кращі з існуючих методів локалізації, за критерієм мінімізації похибки прогнозування моделі.

Як відомо, інтервальну локалізацію на відміну від еліпсоїдальної не раціонально застосовувати, коли множина  $\Omega$  виявляється витягнутою, у напрямку, що не співпадає з напрямком жодної з осей координат, тобто, коли довжина її однієї діагоналі значно перевищує довжини інших. Оскільки для насиченого експерименту  $N=m$  при постійній чи відомій інтервальній похибці спостережень  $\Delta(\bar{x})$  довжини усіх діагоналей гіперпаралелепіпеда  $\Omega$  однозначно задаються системою інтервальних рівнянь (1.25) і, зокрема, матрицею плану експерименту  $F$ , то у цьому випадку проблема вибору кращого методу локалізації розв'язується шляхом оцінки відношення довжин максимальної (див. формулу (1.45) для  $I_E$ -критерію) та мінімальної діагоналі.

Подібний підхід можна застосувати при постійній інтервальній похибці  $\Delta(\bar{x})=\text{const}$  для загального випадку, коли  $N>m$ . Спочатку із системи рівнянь (1.25), необхідно вибрати насичений блок із  $m$  рівнянь, який задається матрицею  $F_m$  ( $m \times m$ ). При цьому матрицю  $F_m$  слід вибирати із умови мінімізації довжини максимальної діагоналі гіперпаралелепіпеда  $\Omega_m$ , побудованого на основі відповідного насиченого блоку. З цією метою слід розв'язати задачу (1.47) на множині  $N$  інтервальних даних. Якщо довжина найдовшої діагоналі гіперпаралелепіпеда  $\Omega_m$  у декілька разів перевищує довжину найкоротшої діагоналі, то скоріше всього множина  $\Omega$  виявиться сильно витягнутою. У цьому випадку слід застосовувати метод еліпсоїдальної локалізації, який буде забезпечувати меншу похибку прогнозування інтервальної моделі. Коли ж виявиться, що відношення довжин діагоналей близьке до 1, то пріоритетність методу локалізації встановити не можливо, оскільки при “відсіченні” множини  $\Omega_m$  інтервальними рівняннями, які залишились у системі після вибору насиченого блоку, результуюча множина  $\Omega$

може стати витягнутою.

Для практичної ілюстрації співвідношень між похибками прогнозування  $\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in [\bar{b}]}$  та  $\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m}$ , отриманими у випадках інтервальної та еліпсоїдальної локалізацій, відповідно, скористаємося даними таблиці 2.1 і розглянемо локалізацію області параметрів  $b_1, b_2, b_3$  такої залежності [192]:

$$y(\bar{x}) = 1 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_1 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_1^2 x_2.$$

Локалізаційний прямокутний паралелепіпед  $\Pi^+$  розраховували за допомогою програми INTERDAT [29], а оптимальний локалізаційний еліпсоїд засобами ППП MATLAB [143, 144], згідно алгоритму наведеного у праці [23].

У результаті застосування цих програм при даних таблиці 2.1 отримали, відповідно:

$$\Pi^+ = \{ \vec{b} \in R^3 \mid 0,145 \leq b_1 \leq 0,247, -0,431 \leq b_2 \leq -0,382, 0,387 \leq b_3 \leq 0,531 \}$$

$$Q_{m=3} = \{ \vec{b} \in R^3 \mid (\vec{b} - \vec{\bar{b}})^T \cdot H \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}}) = 1 \},$$

де  $\vec{\bar{b}} = (0,194; -0,406; 0,451)^T$ ;

$$H = \begin{pmatrix} 1183,13 & 2232,51 & 1042,18 \\ 2232,51 & 6430,04 & 2918,72 \\ 1042,18 & 2918,72 & 1370,47 \end{pmatrix}.$$

Розраховані локалізаційний прямокутний паралелепіпед  $\Pi^+$  та еліпсоїд  $Q_m$  наведені на рис. 2.5. Як видно, розміри еліпсоїда суттєво менші від розмірів прямокутного паралелепіпеда. Їхні об'єми, відповідно, дорівнюють:  $0,39 \cdot 10^{-3}$  та  $0,72 \cdot 10^{-3}$ .

Коридор прогнозування для заданої залежності у випадку інтервальної локалізації її параметрів матиме вигляд

$$[\hat{y}(\bar{x})] \Big|_{\bar{b} \in [\bar{b}]} = 1 + [0,145; 0,247] \cdot x_1 + [-0,431; -0,382] \cdot x_1 \cdot x_2 + [0,387; 0,531] \cdot x_1^2 x_2,$$

а у випадку еліпсоїдальної локалізації

$$[\hat{y}(\bar{x})]_{\bar{b} \in Q_{m=3}} = [1 + 0,194 \cdot x_1 - 0,406 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0,451 \cdot x_1^2 x_2 \pm 0,5 \cdot \Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_{m=3}}],$$

$$\text{де } \Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_{m=3}} = 2 \cdot \sqrt{(x_1, x_1 \cdot x_2, x_1^2 \cdot x_2)^T \cdot H^{-1} \cdot (x_1, x_1 \cdot x_2, x_1^2 \cdot x_2)}.$$

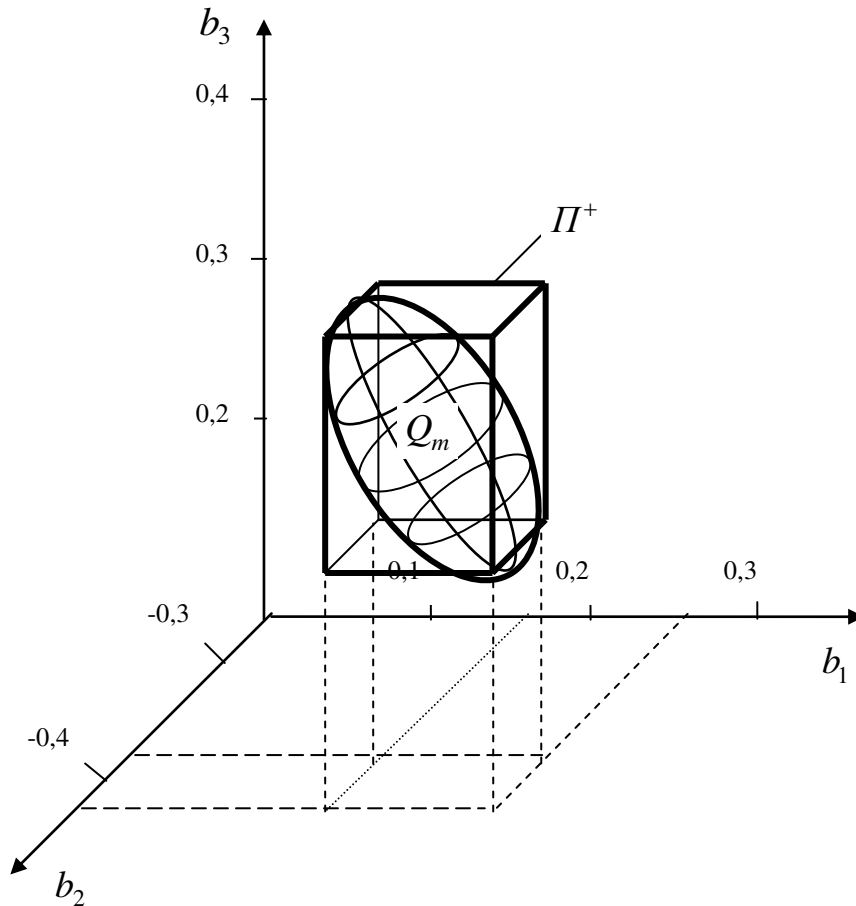


Рис. 2.5. Локалізаційний прямокутний паралелепіпед  $\Pi^+$  та еліпсоїд  $Q_{m=3}$ .

На рис. 2.6 а), б) наведені відповідні функції похибок прогнозування  $\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in [\bar{b}]}$  та  $\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m}$ .

Порівнюючи ці рисунки, бачимо, що майже на усій області точок експерименту (таблиці 2.1) справедливою є нерівність

$$\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_{m=3}} < \Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in [\bar{b}]},$$

що засвідчує перевагу застосування для даного прикладу методу еліпсоїдальної локалізації.

Зауважимо, що цю перевагу можна встановити за співвідношенням довжин

найдовшої та найкоротшої діагоналей області  $\Omega_{m=3}$  (паралелепіпеда), побудованої на основі інтервальних даних трьох точок ( $m=3$ ), вибраних із таблиці 2.1 у такий спосіб, щоб мінімізувати довжину її найдовшої діагоналі.

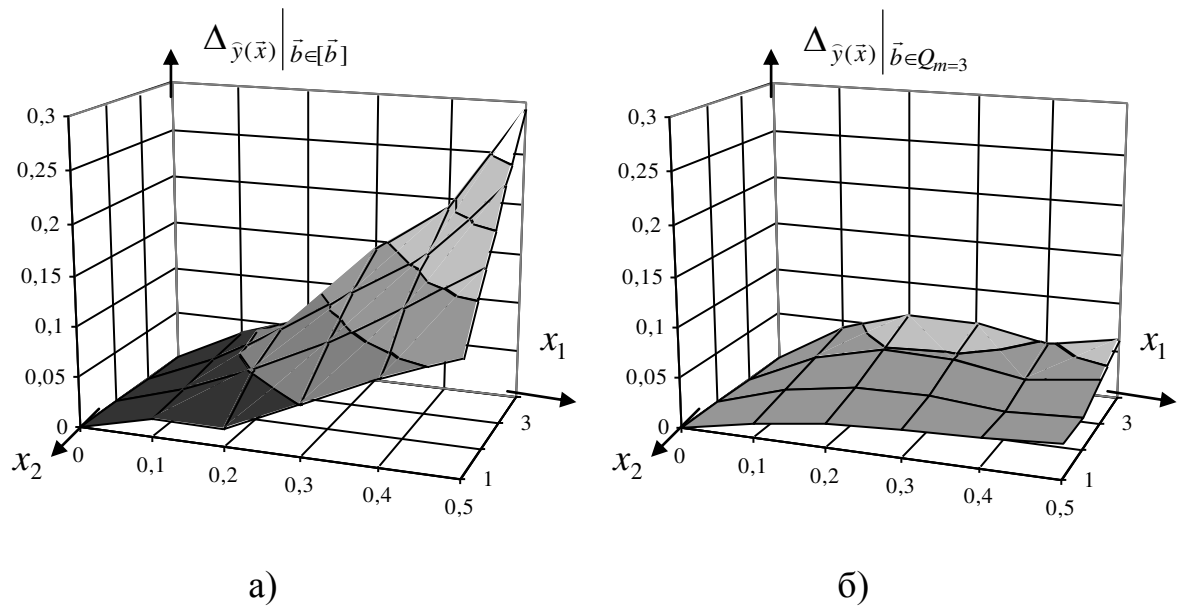


Рис. 2.6. Функції похибок прогнозування  $\Delta_{\hat{y}(\bar{x}) | \bar{b} \in [\bar{b}]}$  та  $\Delta_{\hat{y}(\bar{x}) | \bar{b} \in Q_m}$ .

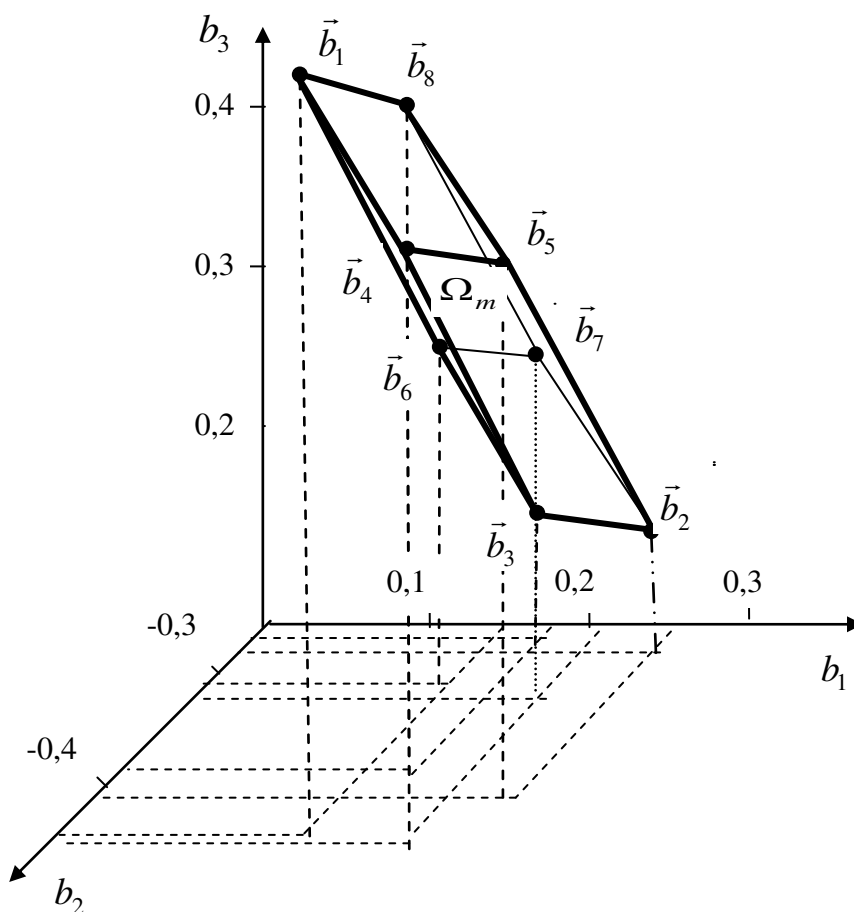


Рис. 2.7. Множина коефіцієнтів  $\Omega_{m=3}$ , знайдена для трьох точок.

Знайдена вище описаним способом множина  $\Omega_{m=3}$ , зображена на рис 2.7.

Для її побудови були використані інтервальні дані таблиці 2.1 у точках №4, №14 та №15.

Найбільшу довжину 0,4405 мають діагоналі множини  $\Omega_{m=3}$  між вершинами  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  та  $\vec{b}_3, \vec{b}_8$  (див. рис.2.7). Найкоротша діагональ утворена вершинами  $\vec{b}_4, \vec{b}_7$ . Її довжина дорівнює 0,1284. Довжина діагоналі між вершинами  $\vec{b}_5, \vec{b}_6$  дорівнює 0,1911. Відношення довжини найдовшої до довжини найкоротшої діагоналі дорівнює 3,43. Отже множина  $\Omega_{m=3}$  є сильно витягнутою. Слід також зауважити, що об'єм побудованого паралелепіпеда  $\Omega_{m=3}$  дорівнює  $0,6 \cdot 10^{-3}$ , що у 1,2 разів менше від об'єму прямокутного локалізаційного паралелепіпеда  $\Pi^+$ , побудованого на основі усіх даних таблиці 2.1.

Наведені результати засвідчують перевагу за критерієм точності еліпсоїдальної локалізації, а запропонована (на основі певним чином сформованого насиченого блоку системи інтервальних рівнянь) ознака пріоритету при виборі методу локалізації у даному випадку є ефективною.

Оскільки нами розглядається оптимальна еліпсоїдальна локалізація, то на поверхні еліпсоїда завжди знайдуться точки, які співпадають з вершинами многогранника  $\Omega$ .

За цих умов на області  $\chi$  експерименту можуть знайтися точки  $\vec{x}^o$ , для яких справедливими є рівняння

$$\hat{y}^+(\vec{x}^o) \Big|_{\vec{b} \in Q_m} = \hat{y}^+(\vec{x}^o), \text{ або } \hat{y}^-(\vec{x}^o) \Big|_{\vec{b} \in Q_m} = \hat{y}^-(\vec{x}^o), \quad (2.26)$$

де  $\hat{y}^+(\vec{x}^o) \Big|_{\vec{b} \in Q_m}, \hat{y}^-(\vec{x}^o) \Big|_{\vec{b} \in Q_m}$  – відповідно, верхня та нижня межі прогнозування інтервальних моделей в точках  $\vec{x}^o$  у випадку наближення оптимальним еліпсоїдом;

$\hat{y}^+(\vec{x}^o), \hat{y}^-(\vec{x}^o)$  – відповідно, верхня та нижня межі коридору (1.27) в точках  $\vec{x}^o$ .

Спочатку визначимо умови для знаходження точок  $\bar{x}^o$  у разі насиченого експерименту.

Перепишемо рівняння (2.26) в еквівалентному вигляді із урахуванням збіжності центрів симетрії многогранника  $\Omega$  та еліпсоїда  $Q_m$ , заданого для випадку насиченого експерименту формулою (1.50)

$$\Delta_{y(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} = \Delta_{y(\bar{x})} \quad (2.27)$$

**Т в е р д ж е н н я 2.1.** Рівняння (2.27) має розв'язки  $\bar{x}^o$  якщо існує хоча б один вектор значень базисних функцій:

$$\vec{\varphi}_s(\bar{x}^o) = 2 \cdot c \cdot F^T \cdot \vec{\delta}_s, s = 1, \dots, 2^m, \quad (2.28)$$

де  $\vec{\delta}_s^T$  – вектори, компонентами яких є обернені значення відповідних інтервальних похибок  $\Delta_i$  спостережень із додатними або від'ємними знаками;  $c$  – константа.

Нехай на заданій області експерименту  $\chi$  знайдуться точки  $\bar{x}^o$  у яких завжди можна побудувати хоча б один із таких векторів  $\vec{\varphi}_s(\bar{x}^o), s = 1, \dots, 2^m$ , що задаються рівнянням (2.28). Покажемо, що ці точки задовольняють рівняння (2.27).

З урахуванням симетричності множини  $\Omega$  для насиченого експерименту, ліву частину рівняння (2.27) перепишемо так:

$$\Delta_{y(\bar{x})} = 2 \cdot \max_{\bar{b}_s \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot (\vec{b}_s - \vec{\bar{b}})).$$

Врахуємо, що формула (1.51) для функції  $\Delta_{y(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m}$  отримана з виразу

$$\Delta_{y(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m} = 2 \cdot \max_{\bar{b} \in Q_m} (\vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}})).$$

Тоді рівняння (2.27) матиме такий вигляд:

$$2 \cdot \max_{\bar{b}_s \in \Omega} (\vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot (\vec{b}_s - \vec{\bar{b}})) = 2 \cdot \max_{\bar{b} \in Q_m} (\vec{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}})). \quad (2.29)$$

Підставимо у вираз (2.29) замість  $\vec{b}$  вершини  $\vec{b}_s$  області  $\Omega$ , які згідно [31, лема 1] одночасно належать поверхні еліпсоїда  $Q_m$ . Тоді максимальне значення виразу  $\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot (\vec{b}_s - \vec{b})$  у лівій та правій частині рівняння (2.29), забезпечується вектором  $\vec{\varphi}(\vec{x})$ , який є нормаллю дотичної площини до еліпсоїда у точці  $\vec{b}_s$ . Позначимо за  $\vec{\varphi}_s(\vec{x}^o)$ , цей вектор, побудований для заданої вершини  $\vec{b}_s$ , в точках  $\vec{x}^o$  на області експерименту. Отже, точки  $\vec{x}^o$  є розв'язками рівняння (2.29) для фіксованих  $\vec{b}_s$  якщо

$$\vec{\varphi}_s(\vec{x}^o) = c \cdot \vec{n}_s, s = 1, \dots, 2^m, \quad (2.30)$$

де  $\vec{n}_s, s = 1, \dots, 2^m$  – вектори-нормалі площин дотичних до еліпсоїда у відповідних вершинах  $\vec{b}_s$ .

Тепер покажемо еквівалентність виразів (2.28) та (2.30). З цією метою знайдемо нормалі  $\vec{n}_s, s = 1, \dots, 2^m$ . Користуючись рівнянням еліпсоїда (1.50), отримаємо

$$\vec{n}_s = \left. \frac{\partial((\vec{b} - \vec{b})^T \cdot (F^T \cdot E^{-2} \cdot F) \cdot (\vec{b} - \vec{b}))}{\partial \vec{b}} \right|_{\vec{b}=\vec{b}_s} = 2 \cdot F^T \cdot E^{-2} \cdot F \cdot (\vec{b}_s - \vec{b}), s = 1, \dots, 2^m. \quad (2.31)$$

Замінімо у формулі (2.31)  $\vec{b}_s, \vec{b}$ , відповідно, за формулами (1.31), (1.32) та з врахуванням, що матриця  $E$  є діагональною матрицею інтервальних похибок  $\Delta_i, i = 1, \dots, m$  спостережень, отримаємо

$$\vec{n}_s = 2 \cdot F^T \cdot \vec{\delta}_s, s = 1, \dots, 2^m.$$

Підставляючи отриманий вираз у формулу (2.30), бачимо її еквівалентність формулі (2.28).

Отже, якщо у вибраному базисі  $\vec{\varphi}(\vec{x})$ , на заданій області насиченого експерименту  $\chi$  знайдуться точки  $\vec{x}^o$ , у яких можна побудувати хоча б один вектор  $\vec{\varphi}_s(\vec{x}^o), s = 1, \dots, 2^m$  (2.28), то у цих точках похибки прогнозування



$\Delta_{y(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m}$  і  $\Delta_{y(\bar{x})}$  співпадають.

Очевидно, що твердження 2.1 завжди справджується для лінійних заходами інтервальних моделей ( $\vec{\varphi}(\bar{x}) = \bar{x} = (1, x_1, x_2, \dots, x_{m-1})^T$ ), коли  $\bar{x} \in R^m$ .

По аналогії до вище розглянутого, з врахуванням формули (2.22) для оптимального еліпсоїда, сформуємо умови для визначення точок  $\bar{x}^o$ , що задовольняють рівняння (2.26) у випадку  $N > m$ .

**Т в е р д ж е н н я 2.2.** Рівняння (2.26) мають розв'язки  $\bar{x}^o$ , якщо існують, відповідно, такі вектори значень базових функцій  $\vec{\varphi}_s(\bar{x}^o)$ ,  $s = 1, \dots, S$ :

$$\vec{\varphi}_s(\bar{x}^o) = 2 \cdot c \cdot H \cdot (\vec{b}_s - \vec{\bar{b}}),$$

де  $S$  – загальна кількість вершин многогранника  $\Omega$ , які одночасно належать поверхні еліпсоїда (2.22);

$\vec{\bar{b}}$  – задає центр симетрії еліпсоїда, який в загальному випадку не співпадає з центром ваги многогранника  $\Omega$ .

Із розглянутих тверджень витікає: якщо на області експерименту існують точки  $\bar{x}^o$ , що задовольняють твердженню 2.1 – для випадку насиченого експерименту чи твердженню 2.2 – для загального випадку  $N > m$ , то в цих точках досягається найточніше наближення (2.24) меж коридору інтервальних моделей (1.27).

## ВИСНОВКИ

1. Показана еквівалентність задач наближення даних та побудови інтервальних моделей статичних систем у випадку невідомої структури лінійно-параметричної функції, що дозволило на основі єдиного інтервального підходу розробити метод синтезу оптимальної структури моделі при аналізі інтервальних даних та наближення складних моделей простішими із заданою точністю.

2. Для оцінки переваги того чи іншого методу локалізації параметрів інтервальних моделей статичних систем запропоновано систематизований підхід до аналізу властивостей цих моделей, побудований на таких критеріях: забезпечення методом точності прогнозування інтервальної моделі; обчислювальні витрати на розрахунок прогнозного значення у заданій точці області експерименту; аналітичність задання та гладкість меж функціонального коридору прогнозування.

3. Застосування даного підходу дозволило отримати емпіричну ознаку пріоритету при порівнянні інтервального і еліпсоїдального методів локалізації і встановити такі властивості інтервальних моделей статичних систем:

– за умови локалізації параметрів  $\vec{b}$  інтервальної моделі у вигляді інтервального вектора  $[\vec{b}]$ , в загальному випадку значення похибки прогнозування збільшується, а межі функціонального коридору прогнозування в просторі експерименту залишаються кусковими функціями;

– вигреш при інтервальній локалізації полягає у зменшенні обчислювальних витрат при розрахунках інтервальних значень виходу  $\hat{y}$  у фіксованих точках, а для інтервальних моделей, які задовольняють умовам справедливості властивості 2.3 – у гладкості границь функціонального коридору;

– у випадку еліпсоїдальної локалізації межі коридору інтервальних моделей є неперервними та не кусковими функціями, що забезпечує аналітичність розрахунку інтервалу прогнозування у заданій точці області

експерименту і зменшує обчислювальні витрати, а доведені твердження 2.1 та 2.2 дозволяють знайти точки найточнішого наближення цих меж;

– отримана формула (2.11) показує зменшення обчислювальних витрат для розрахунку похибки прогнозування у випадку насиченого експерименту, на основі властивості 2.1 є можливість знайти її мінімальне значення, а для лінійної інтервальної моделі на многогранній області експерименту – максимальне, що свідчить про необхідність побудови локалізаційного методу на базі насиченого експерименту.

## РОЗДІЛ 3

ЛОКАЛІЗАЦІЯ МНОЖИНИ ПАРАМЕТРІВ ІНТЕРВАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ  
СТАТИЧНИХ СИСТЕМ

Проблеми побудови інтервальних моделей пов'язані із розв'язуванням системи інтервальних рівнянь (1.24). При значній кількості параметрів моделі отримання та наведення точного розв'язку цієї системи у вигляді многогранної області є нереальним з обчислювальної точки зору. Тому взамін знаходження точного розв'язку шукають його деяку оцінку, яка визначає властивості інтервальних моделей. В підрозділах 1.2 та 1.4 проведено аналіз основних підходів гарантованого оцінювання розв'язків системи (1.24) і показана актуальність задач як їхньої модифікації так і розробки нових методів. Користуючись термінологією інтервальної математики методи гарантованого оцінювання будемо називати локалізаційними.

3.1 Інтервальна локалізація параметрів моделі на основі модифікованого симплекс-методу розв'язування задач лінійного програмування

Розглянутий у працях [29, 60] підхід до розв'язування системи (1.24) дозволяє знаходити інтервальну оцінку  $[\vec{b}]$  на основі відомих обчислювальних процедур лінійного програмування. При цьому для знаходження границь  $[b_j^-, b_j^+]$  компонент вектора  $[\vec{b}]$ , необхідно розв'язувати  $2 \cdot m$  задач лінійного програмування (ЛП) (1.38).

Одним із найпоширеніших методів розв'язування задач ЛП є симплекс-метод. Він, зокрема, використаний у відомому пакеті прикладних програм для інтервального моделювання INTERDAT [29].

Згідно симплекс-методу [11], здійснюється послідовний перехід по вершинах опуклого многогранника  $\Omega$ , утвореного системою обмежень, до тих пір поки не буде знайдено деякої "оптимальної" вершини, що забезпечує  $\min$  чи

тах цільової функції. У випадку розв'язування задач (1.38), процедури пошуку оптимальних вершин многогранника  $\Omega$ , тобто таких, що забезпечують  $b_j^- = \min b_j$  чи  $b_j^+ = \max b_j, (j=1, \dots, m)$ , повторюються  $2 \cdot m$  раз. Проте, розраховані координати вершин множини  $\Omega$ , визначеної многогранником, під час пошуку, наприклад  $b_{j-1}^-$ , не враховуються для знаходження  $b_{j-1}^+$  та  $b_j^-, b_j^+$ ,  $j=1, \dots, m$ . Отже, стає очевидною обчислювальна надлишковість методу.

Пропонується модифікувати симплекс-метод для розв'язування задач (1.38) з врахуванням вище зроблених зауважень.

Розглянемо процедуру розв'язування однієї із задач (1.38) на основі симплекс-методу.

Обстеження вершин можна почати лише після визначення якоїсь із них, тобто знайшовши початковий опорний план задачі. Нагадаємо, що опорним планом задачі ЛП називається план, що визначається координатами вершини многогранника, заданого системою (1.24). Опорний план, що перетворює у тах чи  $\min$  цільову функцію називається оптимальним. Весь алгоритм симплекс-методу поділяють на два етапи: перший – знаходження початкового опорного плану задачі і другий – знаходження оптимального плану.

Для розв'язування задач (1.38) за допомогою симплекс-методу, їх необхідно привести до канонічної форми з врахуванням можливих варіантів різних знаків компонент вектора  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$  [11]. З цією метою перетворимо систему з  $N$  нерівностей (1.24) та з  $m$  невідомими до системи з  $2 \cdot N$  рівнянь. Це перетворення здійснюється шляхом введення додаткових невід'ємних змінних  $b_i^*$ , – якщо обмеження-нерівності (1.24) мають вигляд " $\leq$ ", та шляхом віднімання від лівих частин додаткової змінної, якщо обмеження-нерівності мають вигляд " $\geq$ ", а також заміною вектора  $\vec{b}$  на  $\vec{b}' - \vec{b}''$ , де  $b' = (b'_1, \dots, b'_m)^T$ ,  $b'' = (b''_1, \dots, b''_m)^T$ .

Із урахуванням проведених перетворень система (1.24) матиме такий вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^T(x_i) \cdot (\vec{b}' - \vec{b}'') - b_i^* = y_i^-, \quad i=1, \dots, N \\ \varphi^T(x_i) \cdot (\vec{b}' - \vec{b}'') + b_{N+i}^* = y_i^+, \quad i=1, \dots, N \\ b_j' > 0, b_j'' > 0, \quad j=1, \dots, m \\ b_i^* > 0, b_{N+i}^* > 0, \quad i=1, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Знаходження початкового опорного плану кожної із задач (1.38), при обмеженнях, наведених у канонічному вигляді (3.1), здійснюється за допомогою методу штучного базису (штучного опорного плану). З цією метою до однієї із задач (1.38) при обмеженнях (3.1) складемо розширену задачу у такий спосіб:

– формально до лівої частини кожного рівняння (якщо немає своєї базисної невідомої) додаємо по одній невідомій  $U_i (i=1, \dots, N)$ , які називаються штучними базисними і одержуємо розширену систему рівнянь;

– до розширеної системи записуємо ще штучну форму  $f$ , яка дорівнює сумі штучних базисних невідомих.

Проведені перетворення дозволяють задачу знаходження початкового опорного плану для розв'язування усіх задач (1.38) записати так [67]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^T(x_i) \cdot (\vec{b}' - \vec{b}'') - b_i^* + U_i = y_i^-, \quad i=1, \dots, N \\ \varphi^T(x_i) \cdot (\vec{b}' - \vec{b}'') + b_{N+i}^* = y_i^+, \quad i=1, \dots, N \\ b_j' > 0, b_j'' > 0, \quad j=1, \dots, m \\ b_i^* > 0, b_{N+i}^* > 0, \quad i=1, \dots, N \\ f = U_1 + \dots + U_N \rightarrow \min \\ U_i > 0, \quad i=1, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Знайшовши початковий опорний план, шляхом розв'язування (3.2), можемо використати його для розв'язування будь-якої із задач (1.38). Крім того, при розв'язуванні кожної із (1.38) наступної задачі ЛП, як початковий опорний план, можемо вибрати найкращу (з точки зору наближення до розв'язку даної задачі) вершину многогранника обмежень  $\Omega$ , серед знайдених при розв'язуванні попередніх задач.

Із урахуванням вище викладеного, модифікований для побудови

інтервальних моделей алгоритм симплекс-методу складається з такої послідовності кроків [67]:

Крок 1. Приведення системи інтервальних рівнянь (1.24) до канонічного вигляду симплекс-методу (3.1).

Крок 2. Знаходження початкового опорного плану  $\vec{b}^0 = (b_1, \dots, b_j, \dots, b_m)^T$ , та відповідної до нього симплекс-таблиці однієї із задач (1.38) із розв'язку розширеної задачі (3.2).

Крок 3. Покладемо  $j = 1$  – номер невідомого параметра.

Крок 4. Формування масиву  $B = \{\vec{b}^k\}$  знайдених вершин (опорних планів) множини  $\Omega$  та масиву відповідних матриць  $A^k (m \times m)$  симплекс-таблиць  $S = \{A^k\}$ , шляхом додавання нових компонент. Зауважимо, що при  $j = 1$  масиви включають по одній компоненті, якими є початковий опорний план  $\vec{b}^0$  та його таблиця.

Крок 5. Розв'язування задачі  $b_j^- = \min b_j$  з обмеженнями (3.1) та з початковим опорним планом, вибраним із множини  $B$  за умовою:  $\vec{b}^0 = \min_{\vec{b}^k \in B} b_j$ .

Крок 6. Доповнення множин опорних планів  $\vec{b}^k$  та симплекс-таблиць  $A^k$  новими компонентами.

Крок 7. Розв'язування задачі  $b_j^+ = \max b_j$  з обмеженнями (3.1). Початковий опорний план для даної задачі вибирається із множини  $B$  за такою умовою:  $\vec{b}^0 = \max_{\vec{b}^k \in B} b_j$ .

Крок 8. Перевірка умови  $j < m$ . Якщо умова виконується, то покладемо  $j = j + 1$  і перехід на крок 4. У протилежному випадку – формування інтервального вектора  $[\vec{b}]$  і завершення процедури.

Для аналізу ефективності алгоритму розглянемо приклад його реалізації.

Нехай, необхідно побудувати інтервальну модель

$$y(\vec{x}) = b_1 \cdot \varphi_1(\vec{x}) + b_2 \cdot \varphi_2(\vec{x}).$$

При цьому вихідна система інтервальних рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{cases} 12 \leq 2 \cdot b_1 + 4 \cdot b_2 \leq 20 \\ 12 \leq 12 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 \leq 48 \\ 5 \leq 2 \cdot b_1 + b_2 \leq 10 \end{cases}$$

Наведемо ці обмеження у канонічному вигляді (3.1) симплекс-методу (крок 1):

$$\begin{cases} 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + 4 \cdot (b'_2 - b''_2) - b_1^* = 12 \\ 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + 4 \cdot (b'_2 - b''_2) + b_4^* = 20 \\ 12 \cdot (b'_1 - b''_1) + 2 \cdot (b'_2 - b''_2) - b_2^* = 12 \\ 12 \cdot (b'_1 - b''_1) + 2 \cdot (b'_2 - b''_2) + b_5^* = 48 \\ 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + b'_2 - b''_2 - b_3^* = 5 \\ 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + b'_2 - b''_2 + b_6^* = 10 \\ b'_1 > 0, b''_2 > 0, b'_2 > 0, b''_1 > 0 \\ b_i^* > 0, b_{N+i}^* > 0, \quad i = 1, \dots, 3 \end{cases}$$

Складемо розширену задачу (3.2) ввівши штучні змінні і штучну форму (крок 2):

$$\begin{cases} 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + 4 \cdot (b'_2 - b''_2) - b_1^* + U_1 = 12 \\ 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + 4 \cdot (b'_2 - b''_2) + b_4^* = 20 \\ 12 \cdot (b'_1 - b''_1) + 2 \cdot (b'_2 - b''_2) - b_2^* + U_2 = 12 \\ 12 \cdot (b'_1 - b''_1) + 2 \cdot (b'_2 - b''_2) + b_5^* = 48 \\ 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + b'_2 - b''_2 - b_3^* + U_3 = 5 \\ 2 \cdot (b'_1 - b''_1) + b'_2 - b''_2 + b_6^* = 10 \\ b'_1 > 0, b''_2 > 0, b'_2 > 0, b''_1 > 0, \\ b_i^* > 0, b_{N+i}^* > 0, \quad i = 1, \dots, 3 \\ U_i > 0, \quad i = 1, \dots, 3 \\ f = 29 - (16 \cdot (b'_1 - b''_1) + 7 \cdot (b'_2 - b''_2) - b_1^* - b_2^* - b_3^*) \rightarrow \min \end{cases}$$

Розв'яжемо симплекс-методом задачу лінійного програмування  $b_1^- = \min b_1$  з вище наведеними обмеженнями. Отримані симплекс-таблиці розміщені у



таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Симплекс таблиці задачі знаходження  $b_1^-$ 

№	Базис	План	$b'_1$	$b''_1$	$b'_2$	$b''_2$	$b_1^*$	$b_2^*$	$b_3^*$	$b_4^*$	$b_5^*$	$b_6^*$
1	$f$	29	16	-16	7	-7	-1	-1	-1	0	0	0
	$U_1$	12	2	-2	4	-4	-1	0	0	0	0	0
	$b_4^*$	20	2	-2	4	-4	0	0	0	1	0	0
	$U_2$	12	12	-12	2	-2	0	-1	0	0	0	0
	$b_5^*$	48	12	-12	2	-2	0	0	0	0	1	0
	$U_3$	5	2	-2	1	-1	0	0	-1	0	0	0
	$b_6^*$	10	2	-2	1	-1	0	0	0	0	0	1
	$b_1$	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	$f$	13	0	0	13/3	-13/3	-1	1/3	-1	0	0	0
	$U_1$	10	0	0	11/3	-11/3	-1	1/6	0	0	0	0
	$b_4^*$	18	0	0	11/3	-11/3	0	1/6	0	1	0	0
	$b'_1$	1	1	-1	1/6	-1/6	0	-1/12	0	0	0	0
	$b_5^*$	36	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
	$U_3$	3	0	0	2/3	-2/3	0	1/6	-1	0	0	0
	$b_6^*$	8	0	0	2/3	-2/3	0	1/6	0	0	0	1
	$b_1$	1	0	0	1/6	-1/6	0	-1/12	0	0	0	0
3	$f$	13/11	0	0	0	0	2/11	3/22	-1	0	0	0
	$b'_2$	30/11	0	0	1	-1	-3/11	1/22	0	0	0	0
	$b_4^*$	8	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	$b'_1$	6/11	1	-1	0	0	1/22	-1/11	0	0	0	0
	$b_5^*$	36	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
	$U_3$	13/11	0	0	0	0	2/11	3/22	-1	0	0	0
	$b_6^*$	68/11	0	0	0	0	2/11	3/22	0	0	0	1
	$b_1$	6/11	0	0	0	0	1/22	-1/11	0	0	0	0

№	Базис	План	$b'_1$	$b''_1$	$b'_2$	$b''_2$	$b^*_1$	$b^*_2$	$b^*_3$	$b^*_4$	$b^*_5$	$b^*_6$
4	$f$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$b'_2$	9/2	0	0	1	-1	0	1/4	-3/2	0	0	0
	$b^*_4$	3/2	0	0	0	0	0	-3/4	11/2	1	0	0
	$b'_1$	1/4	1	-1	0	0	0	-1/8	1/4	0	0	0
	$b^*_5$	36	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
	$b^*_1$	13/2	0	0	0	0	1	3/4	-11/2	0	0	0
	$b^*_6$	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
	$b_1$	1/4	0	0	0	0	0	-1/8	1/4	0	0	0
5	$b_1$	2/11	0	0	0	0	0	-1/11	0	-1/22	0	0
	$b'_2$	54/11	0	0	1	-1	0	1/22	0	3/11	0	0
	$b^*_3$	3/11	0	0	0	0	0	-3/22	1	2/11	0	0
	$b'_1$	2/11	1	-1	0	0	0	-1/11	0	-1/22	0	0
	$b^*_5$	36	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
	$b^*_1$	8	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	$b^*_6$	52/11	0	0	0	0	0	3/22	0	-2/11	0	1

Як видно із таблиці 3.1 процедура розв'язування даної задачі потребує п'ять симплекс-ітерацій, а отриманий розв'язок:  $b_1^- = b'_1 = 2/11$ .

Користуючись даною таблицею сформуємо множину опорних планів – векторів  $\vec{b}^k$  із компонентами  $b'_1, b''_1, b'_2, b''_2, b^*_1, b^*_2, b^*_3, b^*_4, b^*_5, b^*_6$  (крок 6):  $B = \{\vec{b}^1 = (1/4, 0, 9/2, 0, 13/2, 0, 0, 3/2, 36, 5); \vec{b}^2 = (2/11, 0, 54/11, 0, 8, 0, 3/11, 0, 36, 52/11)\}$ .

Тепер знайдемо оптимальний план для задачі  $b_1^+ = \max b_1$ , яка має розв'язуватися при тих же самих обмеженнях, що і попередня задача ЛП.

Однак для цієї задачі початковий опорний план знайдемо, аналізуючи компоненти множини опорних планів  $B$  (крок 7). В результаті отримаємо:

$$\vec{b}^0 = \max_{\vec{b}^k \in B} b_1 = (1/4, 0, 9/2, 0, 13/2, 0, 0, 3/2, 36, 5).$$

Розв'яжемо дану задачу симплекс-методом з урахуванням знайденого опорного плану. Симплекс-таблиці процедури розв'язування наведені нижче.

Таблиця 3.2

Симплекс-таблиці задачі знаходження  $b_1^+$ 

№	Базис	План	$b'_1$	$b''_1$	$b'_2$	$b''_2$	$b_1^*$	$b_2^*$	$b_3^*$	$b_4^*$	$b_5^*$	$b_6^*$
1	$b_1$	1/4	0	0	0	0	0	-1/8	1/4	0	0	0
	$b'_2$	9/2	0	0	1	-1	0	1/4	-3/2	0	0	0
	$b_4^*$	3/2	0	0	0	0	0	-3/4	11/2	1	0	0
	$b'_1$	1/4	1	-1	0	0	0	-1/8	1/4	0	0	0
	$b_5^*$	36	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
	$b_1^*$	13/2	0	0	0	0	1	3/4	-11/2	0	0	0
	$b_6^*$	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
2	$b_1$	4/3	0	0	0	0	1/6	0	-2/3	0	0	0
	$b'_2$	7/3	0	0	1	-1	-1/3	0	1/3	0	0	0
	$b_4^*$	8	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	$b'_1$	4/3	1	-1	0	0	1/6	0	-2/3	0	0	0
	$b_5^*$	82/3	0	0	0	0	-4/3	0	22/3	0	1	0
	$b_2^*$	26/3	0	0	0	0	4/3	1	-22/3	0	0	0
	$b_6^*$	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
3	$b_1$	42/11	0	0	0	0	1/22	0	0	0	1/11	0
	$b'_2$	12/11	0	0	1	-1	-3/11	0	0	0	-1/22	0
	$b_4^*$	8	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	$b'_1$	42/11	1	-1	0	0	1/22	0	0	0	1/11	0
	$b_3^*$	41/11	0	0	0	0	-2/11	0	1	0	3/22	0
	$b_2^*$	159	0	0	0	0	6	1	0	0	1	0
	$b_6^*$	14/11	0	0	0	0	2/11	0	0	0	3/22	1

Як видно з таблиці 3.2, за умови відомого опорного плану кількість симплекс-ітерацій зменшується, а розв'язок задачі є таким:  $b_1^+ = b_1' = 42/11$ .

Перевіримо умову  $j < m$  ( крок 8). Для даного випадку вона виконується, оскільки  $j = 1$ , а  $m = 2$ . Тоді покладемо  $j = j + 1$  і переходимо на крок 4.

Доповнюємо множину  $B$  опорними планами  $\vec{b}^3 = (4/3, 0, 7/3, 0, 0, 26/3, 0, 8, 82/3, 5)$  та  $\vec{b}^4 = (42/11, 0, 12/11, 0, 0, 159, 41/11, 8, 0, 14/11)$  (крок 4).

Розв'язуємо задачу  $b_2^- = \min b_2$  (крок 5).

Для цього спочатку із множини  $B$  за умовою  $\vec{b}^0 = \min_{\vec{b}^k \in B} b_2$  виберемо найкращий початковий опорний план. Опорним виявився такий план:  $\vec{b}^0 = (42/11, 0, 12/11, 0, 0, 159, 41/11, 8, 0, 14/11)$ . Аналізуючи цей план приходимо, що для даної задачі він є оптимальний. Отже отриманий розв'язок задачі ЛП :  $b_2^- = 12/11$ .

Оскільки при знаходженні  $b_2^-$  додаткових опорних планів не виявлено, то переходимо на крок 8.

Використовуючи множину опорних планів, знайдемо початковий опорний план для задачі  $b_2^+ = \max b_2$ . Найкращим опорним виявився такий план:  $\vec{b}^0 = \max_{\vec{b}^k \in B} b_2 = (2/11, 0, 54/11, 0, 8, 0, 3/11, 0, 36, 52/11)$ . Аналіз цього плану показує, що він є оптимальним, тобто:  $b_2^+ = b_2' = 54/11$ .

Отже в результаті використання алгоритму отримана така інтервальна оцінка  $[\vec{b}]$  вектора  $\vec{b}$  :  $[\vec{b}] = . ([2/11; 42/11], [12/11; 54/11])$ .

Коридор інтервальних моделей з урахуванням інтервального вектора  $[\vec{b}]$  матиме вигляд

$$[\hat{y}(\vec{x})] = [2/11; 42/11] \cdot \varphi_1(\vec{x}) + [12/11; 54/11] \cdot \varphi_2(\vec{x})$$

Наведений приклад ілюструє ефективність розробленого алгоритму. Як видно, із зростанням поточного значення індексу  $j$  кількість симплекс-ітерацій суттєво зменшується.

Для порівняння ефективності, розробленого алгоритму з існуючими, були проведені його тестові випробування [67]. Аналогічні тестові випробування проводились для алгоритму, реалізованого в ПППІ INTERDAT. За результатами цих випробувань сформувавши порівняльну таблицю 3.3.

Як видно з таблиці 3.3, розроблений алгоритм вимагає менше симплекс-ітерацій ніж наведений у праці [29] і реалізований в пакеті INTERDAT. Крім того, ефективність алгоритму зростає при збільшенні кількості  $m$  невідомих  $b_j$ .

Таблиця 3.3.

Порівняльна таблиця ефективності алгоритмів

№ випробування	Кількість рівнянь $N$	Кількість невідомих коефіцієнтів $m$	Кількість симплекс-кроків на основі алгоритму в [29]	Кількість симплекс-кроків розробленого алгоритму
1	2	2	12	6
2	3	2	18	8
3	3	3	36	9
4	4	3	49	11
5	5	3	58	12

Зауважимо, що при зростанні розмірності задачі локалізації кількість опорних планів у множині  $B$  та матриць у множині  $S$  збільшується, що вимагає значних обсягів пам'яті обчислювального пристрою. Для розв'язання цієї проблеми загальну кількість опорних планів у множині  $B$  та матриць у множині  $S$  слід регулювати. Наприклад, слід вилучати ті опорні плани, які виявились оптимальними при розв'язуванні однієї із задач ЛП (1.38).

### 3.2 Метод локалізації розв'язків системи інтервальних рівнянь з виділенням насиченого блоку

Отримані у попередніх розділах результати дозволяють стверджувати, що локалізаційний метод множини параметрів інтервальних моделей статичних систем можна побудувати на основі множини, конфігурацію якої визначають результати організованого оптимальним чином експерименту з інтервальними даними спостережень.

Основні ідеї побудови такого методу локалізації закладені у працях [41, 64], теоретичні основи – у працях [43, 45, 57], обчислювальні модифікації – у працях [56, 61].

Нехай маємо сумісну систему (1.25), яка включає  $N \geq m$  рівнянь, отриманих внаслідок проведення експерименту з  $N \geq m$  спостереженнями. Виберемо з неї  $m$  рівнянь, які утворюють також сумісну систему. Розв'язком цієї системи є множина  $\Omega_m$ , яка в просторі параметрів  $\vec{\beta}$  визначає гіперпаралелепіпед з вершинами  $\vec{b}_s$ , що обчислюються по формулі (1.31). В майбутньому цю формулу будемо розглядати з врахуванням заміни матриці  $F$  на матрицю  $F_m$  для вибраних з системи (1.25)  $m$  рівнянь, тобто у такому вигляді:

$$\vec{b}_s = F_m^{-1} \cdot \vec{Y}_s, \quad s = 1, \dots, 2^m. \quad (3.3)$$

Якщо вказану систему із  $m$  рівнянь сформував у такий спосіб, щоб вигляд гіперпаралелепіпеда  $\Omega_m$  максимально наближався до вигляду многогранника  $\Omega$  – розв'язку усієї системи (1.25), то мінімізуючи розміри отриманого гіперпаралелепіпеда, наприклад, його об'єму  $V_{\Omega_m}$

$$V_{\Omega_m} \longrightarrow \min, \quad (3.4)$$

з урахуванням решти  $N-m$  інтервальних рівнянь (спостережень) системи (1.25) та за умови включення

$$\Omega \subseteq \Omega_m, \quad (3.5)$$

можемо отримати більш точнішу гарантовану оцінку, ніж інтервальна. Цей факт підтверджує приклад, наведений у підрозділі 2.4 (див. рис. 2.7). До того ж, отримавши множину  $\Omega_m$  і користуючись лемою 1 з праці [31], маємо можливість перейти до локалізації розв'язків у вигляді  $m$ -вимірного еліпсоїда (1.50). У цьому випадку забезпечуємо аналітичність розрахунку меж коридору інтервальних моделей.

Однак, реалізація даного підходу є проблематичною, оскільки не знаючи вигляду многогранника неможливо визначити в системі (1.25)  $m$  рівнянь, які при локалізації забезпечать вигляд гіперпаралелепіеда  $\Omega_m$ , найближчий до многогранника  $\Omega$ . Тому, замість знаходження деякого оптимального (найменших розмірів) гіперпаралелепіеда  $\Omega_m$  будемо шукати субоптимальний розв'язок розглянутої задачі локалізації.

Перейдемо до детального опису задачі [43, 45].

З метою вибору  $m$  інтервальних рівнянь із системи (1.25), які будуть базовими при знаходженні субоптимального розв'язку, використаємо відому із методів планування оптимального насиченого ( $N = m$ ) експерименту при інтервальних даних формулу (1.43) для квадрату об'єму гіперпаралелепіеда  $\Omega_m$ . Отже систему із  $m$  інтервальних рівнянь сформуємо так, щоб квадрат об'єму  $V_{\Omega_m}^2$  гіперпаралелепіеда  $\Omega_m$  був мінімальним, тобто

$$4^m \cdot \left( \prod_{i=1}^m \Delta_i^2 \right) \cdot \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \xrightarrow{F_m} \min. \quad (3.6)$$

В майбутньому рівняння, які входять у сформовану систему будемо називати базовими.

Зауважимо, що задача (3.6) еквівалентна задачі планування  $I_D$ -оптимальних насичених експериментів і для її розв'язування можуть бути використані існуючі таблиці оптимальних планів для поліноміальних інтервальних моделей [17].

У випадку відомої системи (1.25) і  $N > m$  дана задача розв'язується на дискретній множині точок  $\vec{x}_i$ .

У відповідності з формулою (3.6) та формулою для визначення інтервальних похибок  $\Delta_i = 0,5 \cdot (y_i^+ - y_i^-)$ , при відомій фіксованій матриці  $F_m$  задача локалізації (3.4), (3.5) стає еквівалентною таким задачам:

$$y_i^+ \longrightarrow \min, \quad y_i^- \longrightarrow \max, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \Omega \subseteq \Omega_m \quad (3.7)$$

Для розв'язування задачі локалізації (3.7), використаємо ітераційний метод. На  $k+1$ -тій ітерації нижнє  $y_i^-(k+1)$  та верхнє  $y_i^+(k+1)$  інтервальні значення правих частин кожного із базових  $m$  рівнянь обчислюються за такими формулами:

$$y_i^-(k+1) = y_i^-(k) + \delta_i^-(k+1), \quad y_i^+(k+1) = y_i^+(k) - \delta_i^+(k+1), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.8)$$

При цьому у формулах (3.8) значення  $\delta_i^-(k+1) \geq 0$  та  $\delta_i^+(k+1) \geq 0$  максимізуються, виходячи із умови включень

$$\Omega \subseteq \{ \Omega_m(k) \cap \check{\Omega}(k+1) \} \subseteq \Omega_m(k+1), \quad (3.9)$$

де  $\Omega_m(k+1)$  –  $m$ -вимірний гіперпаралелепіпед, отриманий на  $k+1$ -тій ітерації;  $\check{\Omega}(k+1)$  – “гіперсмуга”, яка визначається  $k+1$ -тим рівнянням ( $k=1, \dots, N-m$ ) із тих, що залишились у системі (1.25) після вибору  $m$  базових рівнянь.

Нехай значення  $y_i^-(k)$  та  $y_i^+(k)$  на  $k$ -тій ітерації відомі. Користуючись включеннями (3.9) знайдемо аналітичні співвідношення для розрахунку значень  $\delta_i^-(k+1)$  та  $\delta_i^+(k+1)$  для наступної ітерації.

Позначимо за  $\vec{b}_s(k)$  ( $s=1, \dots, 2^m$ ) вершину гіперпаралелепіпеда  $\Omega_m(k)$  і перетворимо формулу (3.3) до вигляду, придатного для обчислення координат вершин на  $k$ -тій ітерації

$$\vec{b}_s(k) = F_m^{-1} \cdot \vec{Y}_s(k), \quad (3.10)$$

де  $\vec{Y}_s(k)$ , – вектор, складений із комбінацій нижніх  $y_i^-(k)$  та верхніх  $y_i^+(k)$



інтервальних значень правих частин кожного із базових  $m$  рівнянь, які обчислюються за рекурентними формулами (3.8).

Важливою властивістю гіперпаралелепіеда  $\Omega_m(k)$  є те, що вершини  $\vec{b}_s(k)$  належать одній грані, якщо у формулі (3.10) відповідні вектори  $\vec{Y}_s(k)$  мають хоча б по одній спільній компоненті. Таким чином, ітераційне “переміщення” меж  $y_i^-(k)$  та  $y_i^+(k)$ , за допомогою формул (3.8), у просторі параметрів еквівалентне переміщенню відповідних граней гіперпаралелепіеда  $\Omega_m(k)$  в сторону зменшення його розмірів.

Введемо для кожної вершини  $\vec{b}_s(k)$  скалярні функції, які характеризують відстань між вершиною і відповідною межею “гіперсмуги”  $\check{\Omega}(k+1)$

$$\begin{aligned} L_s(k) &= y_{k+1}^- - \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{b}_s(k), \\ L'_s(k) &= \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{b}_s(k) - y_{k+1}^+ = -L_s(k) - \Delta_{k+1}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

де  $\vec{x}_{k+1}$  – вектор входів у  $k+1$  спостереженні, який визначає  $k+1$  рівняння у системі (1.25);

$y_{k+1}^-, y_{k+1}^+$  – нижнє та верхнє інтервальні значення виходу у  $k+1$  спостереженні;

$$\Delta_{k+1} = y_{k+1}^+ - y_{k+1}^-.$$

Аналіз значень функцій  $L_s(k)$ ,  $L'_s(k)$  дозволяє виявити розміщення вершин гіперпаралелепіеда відносно “гіперсмуги”, утвореної  $k+1$  рівнянням.

Як показано на рис. 3.1 а) для випадку  $m=2$ , вершини  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  грані з номером  $i=1$  розміщені з одного боку “смуги” і відповідно  $L_s(k) > 0 \quad \forall s=1,2$ ; одна вершина  $\vec{b}_3$  грані з номером  $i'=1$  належить “смузі”, а інша  $\vec{b}_4$  знаходиться на її межі, тому  $L'_3(k) < 0$ , а  $L'_4(k) = 0$ . На рис.3.1 б) показано, що вершини  $\vec{b}_2, \vec{b}_3$  грані з номером  $i'=2$  розміщені по обидва боки “смуги” і, відповідно,  $L_2(k) < 0$ ,  $L_3(k) > 0$ ; обидві вершини  $\vec{b}_3, \vec{b}_4$  грані з номером  $i'=1$  знаходяться вище “смуги” (з одного боку “смуги”), тому  $L'_s(k) > 0 \quad \forall s=3,4$ .

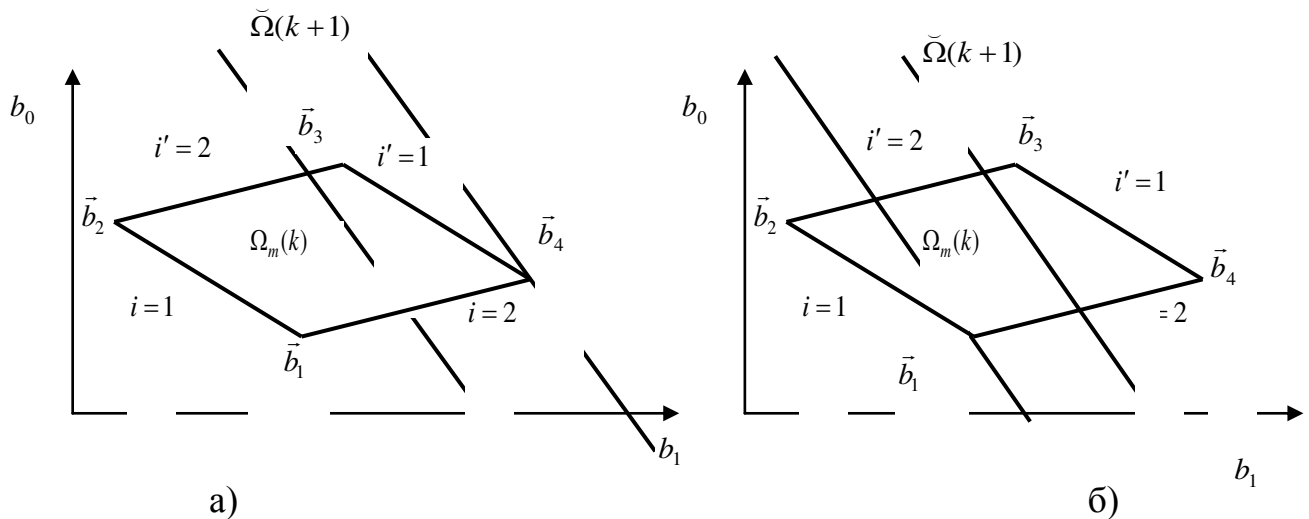


Рис 3.1. Розміщення вершин многи  $\tilde{\Omega}(k+1)$  и локалізації  $\Omega_m(k)$  стосовно “см и”  $\tilde{\Omega}(k+1)$ .

Проведений аналіз, дозволяє сформулювати критерій інформативності  $k+1$ -го спостереження (рівняння): якщо для усіх вершин грані одночасно виконується умова

$$L_s(k) > 0 \quad \forall s = 1, \dots, 2^{m-1}, \quad (3.12)$$

то  $k+1$  спостереження є інформативним і дана грань переміщується (в сторону зменшення розмірів гіперпаралелепіеда) до моменту дотику її найближчої вершини до межі “гіперсмуги”. Звідси на  $k$ -тій ітерації справедливим є такий вираз:

$$\min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{ L_s(k+1) \} = 0. \quad (3.13)$$

Зауважимо, що переміщення  $i$ -ї грані гіперпаралелепіеда у випадку виконання умови (3.12) означає переміщення нижньої межі  $y_i^-(k+1)$  інтервалу  $[y_i^-(k+1), y_i^+(k+1)]$  у просторі вимірювань. Користуючись зробленим зауваженням, знайдемо рекурентну формулу для  $L_s(k+1)$ . Для цього підставимо у формулу (3.10) замість  $i$ -ї компоненти  $y_i^-(k+1)$  вектора  $\vec{Y}_s(k+1)$  її значення  $y_i^-(k) + \delta_i^-(k+1)$  з виразу (3.8), отримаємо таку рекурентну

формулу:

$$\vec{b}_s(k+1) = \vec{b}_s(k) + \vec{f}_i \cdot \delta_i^-(k+1), \quad (3.14)$$

де  $\vec{f}_i$  –  $i$ -тий стовпець матриці  $F_m^{-1}$ .

З урахуванням (3.14) розрахункова формула для значень  $L_s(k+1)$   $k+1$ -ї ітерації матиме такий вигляд:

$$L_s(k+1) = L_s(k) - \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i \cdot \delta_i^-(k+1). \quad (3.15)$$

Із виразу (3.15) витікає, що при додатному значенні  $\delta_i^-(k+1)$ , одночасне виконання умов (3.12) та (3.13) можливе тільки у випадку  $\vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i > 0$ . Підставимо формулу (3.15) з урахуванням умови  $\vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i > 0$  у вираз (3.13) і після нескладних перетворень отримаємо співвідношення для розрахунку значення  $\delta_i^-(k+1)$

$$\delta_i^-(k+1) = \begin{cases} \min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{L_s(k) / |\vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i|\}, & \text{якщо } L_s(k) > 0, \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i \neq 0 \\ 0, & \text{якщо } L_s(k) \leq 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Притримуючись вищезазначених міркувань, із заміною умови (3.12) на умову  $L'_s(k) > 0, \forall s = 1, \dots, 2^{m-1}$ , отримаємо вираз для розрахунку  $\delta_i^+(k+1)$

$$\delta_i^+(k+1) = \begin{cases} \min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{L'_s(k) / |\vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i|\}, & \text{якщо } L'_s(k) > 0, \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i \neq 0 \\ 0, & \text{якщо } L'_s(k) \leq 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Отже для реалізації однієї ітерації, запропонованого локалізаційного методу необхідно виконати таку послідовність обчислень [45, 61]:

1. Розрахувати значення скалярних функцій  $L_s(k)$  та  $L'_s(k)$  для усіх вершин гіперпаралелепіеда.

2. Розрахувати  $\delta_i^-(k+1)$  та  $\delta_i^+(k+1)$ , відповідно, за формулами (3.16) та (3.17).

3. Обчислити межі інтервалу  $[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)]$  за формулою (3.8).

Незважаючи на достатню простоту розглянутої послідовності розрахунків, обчислювальна схема методу вимагає окремого розгляду.

### 3.3 Обчислювальна схема методу локалізації параметрів інтервальних моделей з виділенням насиченого блоку

Розглянемо можливу побудову обчислювальної схеми запропонованого методу [61].

Нехай із системи (1.25) виділено насичений блок, тобто сформована базова система інтервальних рівнянь (що в просторі параметрів задає гіперпаралелепіпед з  $2^m$  вершинами) і знайдена обернена матриця  $F_m^{-1}$ .

Користуючись властивостями локалізаційного гіперпаралелепіпеда сформулюємо таке твердження.

**Т в е р д ж е н н я 3.1** Нехай відомий вектор координат деякої вершини  $\vec{b}_s^*(k)$  гіперпаралелепіпеда  $\Omega_m(k)$ , тоді координати вершин  $\vec{b}_s(k)$ ,  $s = 1, \dots, m$ , які лежать на ребрах, що виходять з даної вершини, розраховуємо за такою формулою

$$\vec{b}_s(k) = \vec{b}_s^*(k) \pm \Delta_i(k) \cdot \vec{f}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.18)$$

де  $\Delta_i(k) = y_i^+(k) - y_i^-(k)$ , а її знак “+” – якщо у формулі (3.10) для розрахунку вершини  $\vec{b}_s^*(k)$   $i$ -та компонента вектора  $\vec{Y}_s^*(k) \in y_i^-(k)$  і знак “-”, якщо цією компонентою є  $y_i^+(k)$ .

Справедливість твердження доводиться із застосуванням таблиці 1.3 при обчисленні різниці координат вершин, що належать одному ребру гіперпаралелепіпеда  $\Omega_m(k)$ .

Підставляючи рекурентні формули (3.18) зі знаком “+” та “-” перед  $\Delta_i(k)$ , у відповідні формули (3.11), які призначені для обчислення  $L_s(k)$  та  $L'_s(k)$ , отримаємо

$$L_s(k) = L_{s^*}(k) - \Delta_i(k) \cdot \xi_i, \quad L'_s(k) = L'_{s^*}(k) - \Delta_i(k) \cdot \xi_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.19)$$

де  $L_{s^*}(k)$ ,  $L'_{s^*}(k)$  – скалярні функції, розраховані для фіксованої вершини  $\vec{b}_{s^*}(k)$ ;

$$\xi_i = \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i.$$

Зауважимо, що значення усіх  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , можуть бути розраховані до початку  $k$ -тої ітерації.

Визначимо оптимальний, тобто без повторень, порядок проведення рекурентних обчислень значень  $L_s(k)$  та  $L'_s(k)$ . Для цього умовно розділимо усі вершини гіперпаралелепіеда  $\Omega_m(k)$  на дві групи по  $2^{m-1}$  вершин, так, щоб для вершин першої групи можна було розрахувати спочатку значення  $L_s(k)$  за допомогою рекурентної формули із (3.19), а потім  $L'_s(k)$  за формулою

$$L'_s(k) = -L_s(k) - \Delta_{k+1}.$$

Для другої групи, – спочатку користуємося рекурентною формулою із (3.19) для розрахунку  $L'_s(k)$ , а потім за формулою

$$L_s(k) = -L'_s(k) - \Delta_{k+1}$$

розраховуємо значення  $L_s(k)$ .

За таких умов проведення розрахунків, серед вершин першої групи має бути вершина  $\vec{b}_s(k)$ , при обчисленні координат якої за формулою (3.10) вектор  $\vec{Y}_s(k)$  складатиметься тільки з компонент  $y_i^-(k)$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ , а для подібної вершини другої групи, вектор  $\vec{Y}'_s(k)$  має складатися тільки з компонент  $y_i^+(k)$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ . Нехай ці вершини у групах мають номер  $s = 1$ . Тоді, користуючись формулами (3.11), із заміною відповідних векторів  $\vec{b}_s(k)$  за формулою (3.10) на  $F_m^{-1} \cdot \vec{Y}_{s=1}(k)$  та  $F_m^{-1} \cdot \vec{Y}'_{s=1}(k)$ , отримаємо співвідношення для розрахунку значень функцій  $L_{s=1}(k)$  та  $L'_{s=1}(k)$  для вершини  $s = 1$  першої та другої групи

$$L_{s=1}(k) = y_{k+1}^- - \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot F_m^{-1} \cdot \vec{Y}_{s=1}(k), \quad (3.20)$$

$$L'_{s=1}(k) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}_{k+1}) \cdot F_m^{-1} \cdot \vec{Y}'_{s=1}(k) - y_{k+1}^+, \quad (3.21)$$

де  $\vec{Y}_{s=1}(k)$  та  $\vec{Y}'_{s=1}(k)$  – вектори, що включають тільки компоненти  $y_i^-(k)$  та  $y_i^+(k) \forall i=1, \dots, m$ , відповідно.

Враховуючи формули (3.20) та (3.21), структурну схему взаємозв'язків між уведеними рекурентними співвідношеннями (3.19) зобразимо за допомогою двох паралельних обчислювальних графів.

На рис 3.2. наведені паралельні обчислювальні графи для випадку  $m=5$ .

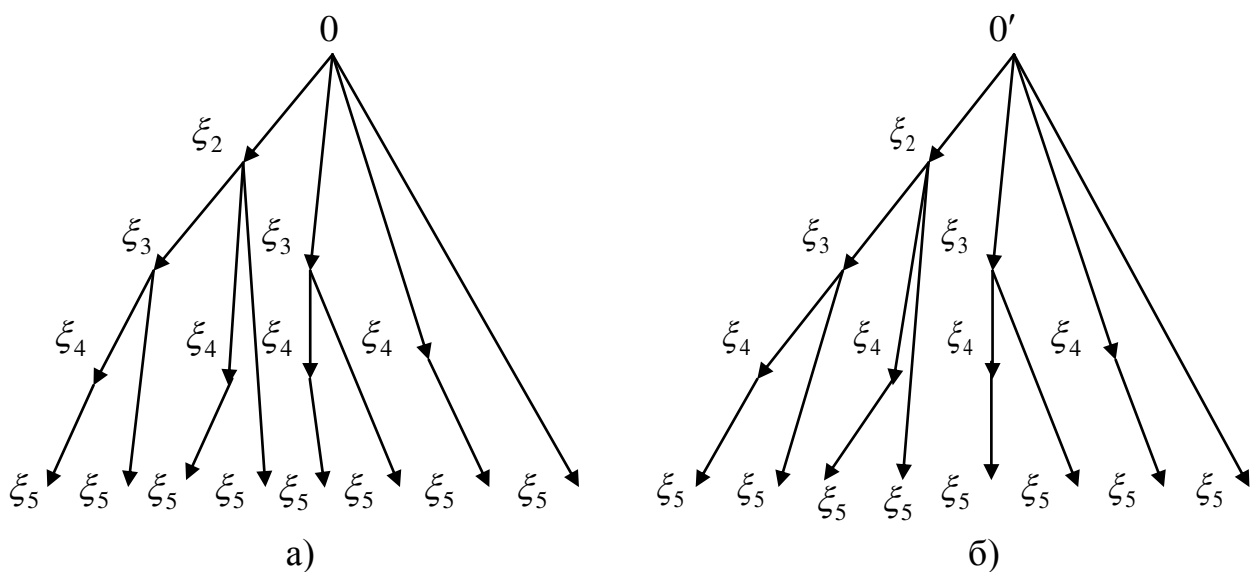


Рис 3.2. Обчислювальні графи  $k$ -тої ітерації локалізаційного методу.

Вершині першого графа (див. рис. 3.2 а), позначеній “0”, відповідає розрахункова формула (3.20), а формула (3.21) відповідає вершині “0'” другого графа (див. рис. 3.2 б). Іншим вершинам обох графів, позначеним символами  $\xi_i$  ( $i=2, \dots, m$ ), відповідають рекурентні формули (3.19). Зафіксуємо будь-яку вершину на першому графові (рис. 3.2 а), якій відповідає відоме значення функції  $L_{s^*}(k)$ . Перемістимося вниз по ребрах графа до суміжних вершин, позначених  $\xi_i$ . Для розрахунку значень  $L_s(k)$  у цих вершинах користуємося формулою із (3.19), у якій значення  $\xi_i$  вибираються на основі позначень отриманих вершин графа.

На другому графові для розрахунку  $L'_s(k)$ , застосовуємо подібні процедури.

Аналіз наведених графів показав, що при послідовності обчислень, реалізованих за принципом “зверху-вниз” та “справа-наліво” загальна кількість проміжних значень  $L_{s^*}(k)$  ( $L'_{s^*}(k)$ ), які необхідно запам'ятовувати для розрахунку значень функцій наступних вершин за рекурентними формулами (3.19), – не більша від  $m-1$ . Введемо масив елементів  $L_j^*(k)$ ,  $j=1, \dots, m-1$ , призначений для зберігання проміжних значень обчислень. Тепер користуючись графом рис.3.2 а) визначимо порядок розрахунку  $L_s(k)$ ,  $L'_s(k)$  ( $s=1, \dots, 2^{m-1}$ ) поточної вершини гіперпаралелепіпеда та значень елементів  $L_j^*(k)$ ,  $j=1, \dots, m-1$ .

Якщо  $s=1$ , то проводимо такі обчислення:

1. Розрахунок значення функції  $L_{s=1}(k)$  (для вершини “0”) за формулою (3.20) та

$$L'_s(k) = -L_s(k) - \Delta_{k+1}.$$

2. Покладемо  $L_j^*(k) = L_{s=1}(k)$ ,  $\forall j=1, \dots, m-1$ .

Якщо число  $s-1$  непарне, то

$$L_s(k) = L_{m-1}^*(k) - \Delta_m(k) \cdot \xi_m, \quad L'_s(k) = -L_s(k) - \Delta_{k+1},$$

а значення  $L_j^*(k)$  залишаються незмінними для усіх  $j=1, \dots, m-1$ .

Якщо  $s-1$  парне, то:

1. Визначення числа  $p$  за умовою ділення без остачі

$$(s-1) / \max_{p=1, \dots, m-2} 2^p.$$

Число  $p$  задає кількість дуг на графові рис. 3.2 а), що виходять із даної вершини. Відповідно, розраховане значення  $L_s(k)$  у даній вершині буде використане для розрахунку  $p$  значень скалярних функцій інших вершин.

2. Розрахунок значень  $L_s(k)$  та  $L'_s(k)$  за формулами відповідно:

$$L_s(k) = L_{m-p}^*(k) - \Delta_{m-p}(k) \cdot \xi_{m-p}, \quad L'_s(k) = -L_s(k) - \Delta_{k+1}$$

3. Покладемо  $L_{m-1}^*(k) = \dots = L_{m-p-1}^*(k) = L_s(k)$ .

Подібний порядок розрахунків необхідно застосовувати для графа рис. 3.2 б), із заміною  $L_s(k)$  на  $L'_s(k)$ , а формули  $L'_s(k) = -L_s(k) - \Delta_{k+1}$  на формулу  $L_s(k) = -L'_s(k) - \Delta_{k+1}$ .

Наведені на рис. 3.2 графи, дозволяють реалізувати рекурентні процедури розрахунку значень скалярних функцій  $L_s(k)$  та  $L'_s(k)$  для усіх вершин гіперпаралелепіеда. Однак повна реалізація обчислювальних графів на поточній ітерації є небажаною через значні обчислювальні та часові витрати. Наприклад, тестові випробування, проведені на комп'ютері з процесором типу CELERON, з тактовою частотою 633 МГц та об'ємом оперативної пам'яті 128 Мб, показали, що при повній реалізації обох графів для розмірності задачі  $m = 30$  ( $2^{30}$  вершин гіперпаралелепіеда) на одній ітерації необхідно  $\approx 3,5$  хвилини машинного часу.

Для зменшення цих витрат, при побудові алгоритму слід врахувати, що будь яка вершина  $m$ -вимірного гіперпаралелепіеда одночасно належить  $m$  граням.

Отже, якщо для вершини  $\vec{b}_s(k)$  не виконується умова  $L_s(k) > 0$ , то це дозволяє покласти  $\delta_i^-(k+1) = 0$  для усіх граней з номером  $i$ , для яких спільною є  $s$ -та вершина і вилучити із списку граней – “претендентів на переміщення” ці грані. Якщо ж  $L_s(k) > 0$ , і одночасно поточне значення  $\delta_i^-(k+1) > L_s(k) / |\xi_i|$ , то згідно формули (3.16) покладемо  $\delta_i^-(k+1) = L_s(k) / |\xi_i|$  для відповідних граней, що дозволяє після завершення  $k$ -ї ітерації отримати  $\delta_i^-(k+1)$  для кожної із цих граней. При цьому індекси  $i$  визначають номер компоненти  $y_i^-(k)$  вектора  $\vec{Y}_s(k)$  у формулі (3.10) для вершини  $\vec{b}_s(k)$  і розраховуються за її номером  $s$ ,



нижче описаним способом.

Спочатку число  $s-1$  перетворюємо до двійкового коду, розряди якого нумеруємо. При цьому наймолодшому розряду двійкового числа присвоюємо номер 1. Тоді  $i$  дорівнює номеру розряду отриманого двійкового числа, якщо значення цього розряду “0” – при обчисленні  $L_s(k)$  на першому графові (рис. 3.2 а) або “1” – для графу рис. 3.2 б).

Аналогічно, якщо  $L'_s(k) \leq 0$ , то  $\delta_i^+(k+1)=0$  для усіх  $i$  даної вершини. Якщо ж  $L'_s(k) > 0$ , і одночасно  $\delta_i^+(k+1) > L'_s(k) / |\xi_i|$ , то покладемо  $\delta_i^+(k+1) = L'_s(k) / |\xi_i|$ . У даному випадку відповідні індекси  $i$  визначають номер компоненти  $\lambda_+^i(k)$  вектора  $\vec{Y}_s(k)$  у формулі (3.10) для вершини  $\vec{b}_s(k)$  і їх розраховуємо вище описаним способом із урахуванням такої відмінності: значення  $i$  дорівнює номеру розряду отриманого двійкового числа, якщо значення цього розряду “1” – при обчисленні  $L'_s(k)$  на першому графові (рис. 3.2 а) або “0” – для графу рис. 3.2 б).

Отже обнуління усіх значень  $\delta_i^-(k+1)$  та  $\delta_i^+(k+1)$  при аналізі поточних  $L_s(k)$  та  $L'_s(k)$  означає дострокове закінчення  $k$ -ї ітерації локалізаційного методу.

Наведені вище міркування, дозволили побудувати раціональну реалізацію обчислень на кожній ітерації методу локалізації у вигляді програмного модуля LOCNAS. Програмний інтерфейс даного модуля дозволяє задавати чи обчислювати конфігурацію локалізаційної множини, вводити структуру інтервальної моделі і результати спостережень в інтервальному вигляді. Блок-схема алгоритму реалізації програмного модуля LOCNAS представлена у додатку А.

Обчислювальна схема, побудована на графах (рис.3.2), дозволяє розпаралелити обчислювальний процес [132, 134]. Тому для її реалізації доцільно застосовувати багатопроцесорні чи багатокомп'ютерні системи.

### 3.4 Активна ідентифікація параметрів інтервальних моделей методом локалізації з виділенням насиченого блоку експерименту

Розглянутий метод локалізації з виділенням насиченого блоку експерименту дозволяє побудувати достатньо прості процедури активної множинної ідентифікації [50, 58, 197].

У випадку активної ідентифікації на основі інтервальних даних, гарантовані оцінки параметрів моделей “вхід-вихід” статичних систем шукаємо шляхом локалізації розв’язку системи інтервальних рівнянь (1.25), яка формується послідовно, застосуванням такої процедури.

Спочатку, розв’язуванням задачі (3.6), формуємо насичений блок із  $m$  інтервальних рівнянь. Потім на кожному кроці процедури ідентифікації проводимо одне інтервальне спостереження і його результатами у вигляді інтервального рівняння доповнюємо систему із  $m$  інтервальних рівнянь. Розв’язок отриманої системи локалізуємо на основі формули (3.8) за умовою включень (3.9).

У послідовній процедурі  $k+1$ -е спостереження вибираємо в одній із точок  $\bar{x}_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) із найбільшою результуючою інтервальною похибкою  $\Delta_i(k) = y_i^+(k) - y_i^-(k)$  [50]. Такий вибір забезпечує зосередження спектру плану експерименту у  $m$  точках, попередньо визначених із розв’язку задачі (3.6). У цьому випадку межі “гіперсмуги”, заданої  $k+1$ -м рівнянням, паралельні, відповідній  $i$ -тій парі граней гіперпаралелепіпеда  $\Omega_m(k)$ . Тому включення (3.9) перетворюється у рівність

$$\Omega = \Omega_m(k+1) = \{ \Omega_m(k) \cap \check{\Omega}(k+1) \},$$

а замість формул (3.8) для розрахунку нижніх та верхніх інтервальних значень  $i$ -того рівняння, що відповідає точці з найбільшою інтервальною похибкою, використовуємо таку формулу:

$$[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)] = [y_i^-(k); y_i^+(k)] \cap [y_{k+1}^-; y_{k+1}^+]. \quad (3.22)$$

Для решти базових рівнянь нижні та верхні інтервальні значення на даній ітерації не змінюються.

Запропонований спосіб вибору точок  $\bar{x}_i$  спостережень у задачах активної ідентифікації, що приводить до формули (3.22), у повній мірі дозволяє розв'язати проблему розмірності, яка є актуальною для задач знаходження розв'язків системи інтервальних рівнянь (1.25) у вигляді многогранної області.

Як відомо, ця проблема пов'язана із суттєвим зростанням кількості вершин многогранника при збільшенні розмірності вектора параметрів моделі та кількості спостережень. Відповідно виникає необхідність збільшення обсягів пам'яті обчислювального засобу для зберігання вершин [102].

У даному ж випадку, на кожній ітерації гіперпаралелепіпед  $\Omega_m(k+1)$  може бути однозначно описаний оптимальним багатовимірним еліпсоїдом у вигляді (1.50).

З урахуванням співвідношення (3.22), вираз для  $m$ -вимірного еліпсоїда на  $k+1$ -й ітерації локалізаційного методу матиме такий вигляд:

$$Q_m(k+1) = \{\bar{b} \in R^m \mid (\bar{b} - \bar{\bar{b}}(k+1))^T \cdot F_m^T \cdot E^{-2}(k+1) \cdot F_m \cdot (\bar{b} - \bar{\bar{b}}(k+1)) = m\}, \quad (3.23)$$

де  $\bar{\bar{b}}(k+1)$  – вектор, який задає центр еліпсоїда і визначається за формулою

$$\bar{\bar{b}}(k+1) = F_m^{-1} \cdot 0,5 \cdot ((y_1^+(k+1) + y_1^-(k+1)), \dots, (y_i^+(k+1) + y_i^-(k+1)), \dots, (y_m^+(k+1) + y_m^-(k+1)))^T;$$

$E(k+1)$  – діагональна матриця результуючих похибок, отриманих на  $k$ -тій ітерації у  $m$  точках спостережень

$$E(k+1) = \text{diag}\{0,5 \cdot ((y_1^+(k+1) - y_1^-(k+1)), \dots, (y_i^+(k+1) - y_i^-(k+1)), \dots, (y_m^+(k+1) - y_m^-(k+1)))\}.$$

Отже на кожній ітерації достатньо зберігати  $m^2 + 4 \cdot m$  компонент, тобто центр еліпсоїда –  $m$  компонент, матрицю його конфігурації –  $m^2 + m$

компонент (матриця  $F_m$ , та діагональна матриця  $E(k+1)$ , розмірностями  $m \times m$ ), а також інтервальні значення виходу  $[y_i^-(k); y_i^+(k)]$  насиченого блоку на  $k$ -й ітерації у  $m$  точках  $\bar{x}_i$  спостережень.

Застосування методу локалізації з виділенням насиченого блоку для задач активної ідентифікації, коли спектр плану експерименту зосереджений у  $m$  точках, відрізняється малими обчислювальними витратами. Як видно вони визначаються обчислювальними реалізаціями виразу (3.22) для  $m$  інтервалів  $[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)]$  та формулами для центру еліпсоїда  $\bar{b}(k+1)$  і діагональної матриці  $E(k+1)$ . При цьому матриця  $F_m$  є постійною і знаходиться із розв'язку задачі (3.6) один раз до початку локалізаційної процедури.

*Приклад.* Порівняння ефективності запропонованого способу вибору точок спостережень при розв'язуванні задачі активної ідентифікації із двома іншими способами: на базі рівномірної сітки та заданням точок спостережень за допомогою генератора випадкових чисел, проводилося за допомогою чисельного моделювання. Задачу ідентифікації параметрів моделі розв'язували методом локалізації з виділенням насиченого блоку експерименту. При цьому, для запропонованого способу активної ідентифікації використовували вирази (3.22) та (3.23), а для двох інших – алгоритм, побудований на базі обчислювальної схеми попереднього підрозділу з наближенням отриманого на кожній ітерації гіперпаралелепіпеда багатовимірним еліпсоїдом (3.23).

Чисельне моделювання проводилося на прикладі ідентифікації параметрів квадратичної моделі  $y_0(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2$  статичної системи з одним входом та одним виходом.

Інтервальні значення виходу отримувались на основі залежності  $y_i(x) = 6 + 8x_i - 3x_i^2 + e_i$ , де  $e_i \in [-2; 2]$  обмежена похибка моделювалась із застосуванням генератора випадкових чисел. Загальна кількість спостережень  $N = 14$ . Область експерименту (спостережень) задавалась інтервалом  $[-1; 1]$ .

За критерій ефективності ідентифікації було вибрано об'єм еліпсоїда (3.23), тобто  $V_{Q_{m=3}(k)} = 4/3 \cdot \pi \cdot \sqrt{m^m / \det(F_m^T \cdot E^{-2}(k) \cdot F_m)}$ , де матриця

$$F_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

була побудована на основі розв'язку задачі (3.6).

Для усіх способів оптимальний насичений блок мав однаковий вигляд (див. спостереження №1, №2, №3 таблиці 3.4).

Результати чисельного моделювання та отримані оцінки ефективності ідентифікації параметрів моделі наведені у таблиці 3.4.

Таблиця 3.4.

Результати чисельного моделювання

№ спостереження		Запропонований спосіб			Рівномірна сітка			Генератор випадкових чисел		
$i$	$k$	$x_i,$ $x_k$	$[y_i^-; y_i^+],$ $[y_k^-; y_k^+]$	$V_Q$	$x_i,$ $x_k$	$[y_i^-; y_i^+],$ $[y_k^-; y_k^+]$	$V_Q$	$x_i,$ $x_k$	$[y_i^-; y_i^+],$ $[y_k^-; y_k^+]$	$V_Q$
1	-	-1	[-8,9;-4,9]	-	-1	[-8,9;-4,9]	-	-1	[-8,9;-4,9]	-
2	-	0	[5,8;9,8]	-	0	[5,8;9,8]	-	0	[5,8;9,8]	-
3	0	1	[7,9;11,9]	87,1	1	[7,9;11,9]	87,1	1	[7,9;11,9]	87,1
-	1	-1	[-6,8;-2,8]	40,0	-1	[-7,2;-4,2]	49,3	0,66	[8,1;12,1]	87,1
-	2	0	[3,9;7,9]	20,6	-0,8	[-4,7;-0,7]	49,3	0,33	[6,7;10,7]	79,5
-	3	1	[8,8;12,8]	15,9	-0,6	[-2,3;1,7]	49,3	-0,25	[0,4;4,4]	34,1
-	4	1	[7,2;11,2]	12,0	-0,4	[2,1;6,1]	49,3	-0,65	[-2,7;1,3]	34,1
-	5	1	[10,5;14,5]	3,61	-0,2	[2,4;6,4]	34,1	0,95	[8,7;12,7]	29,9
-	6	0	[2,8;6,8]	1,72	0	[4,3;8,3]	30,9	-0,93	[-5,1;-1,1]	11,9
-	7	-1	[-6,1;-2,1]	1,05	0,2	[7,4;11,4]	30,9	0,23	[6,3;10,3]	11,9
-	8	-1	[-7,4;-3,4]	1,05	0,4	[9,2;13,2]	28,9	-0,38	[1,3;5,3]	11,9
-	9	-1	[-5,9;-1,9]	0,86	0,6	[6,8;10,8]	28,9	-0,1	[1,6;5,6]	5,7
-	10	0	[2,5;6,5]	0,62	0,8	[7,7;11,7]	28,9	-0,98	[-5,6;1,6]	3,8
-	11	-1	[-8,2;-4,2]	0,62	1	[9,5;13,5]	17,3	0,91	[9,1;13,1]	3,3

Результати оцінки ефективності застосування різних способів вибору точок спостережень при активній ідентифікації зображені на рис. 3.3.

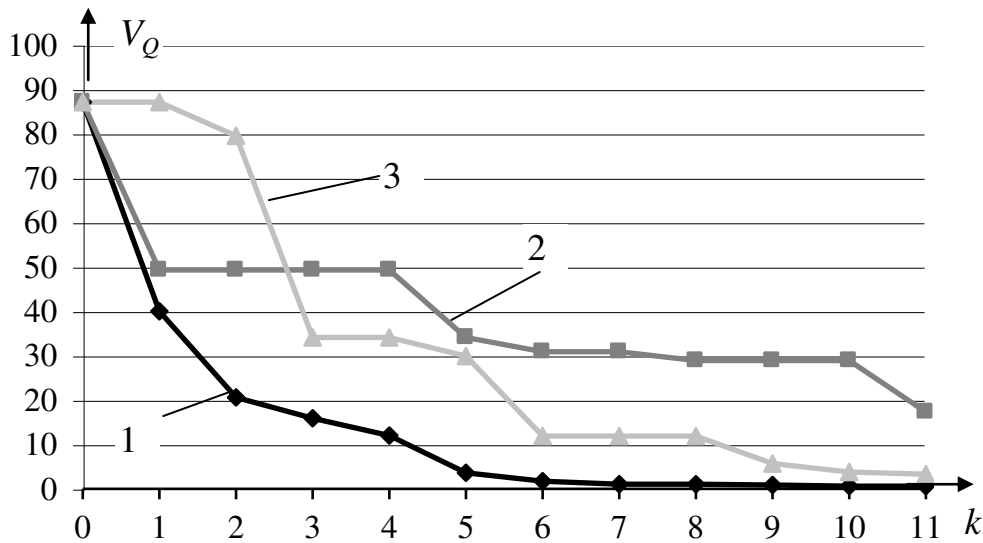


Рис. 3.3. Графіки ефективності активної ідентифікації: 1- запропонованим способом; 2- на рівномірній сітці; 3- випадковим вибором точок спостережень.

Як видно з рисунка, при активній ідентифікації на базі локалізаційного методу з виділенням насиченого блоку експерименту, найбільш ефективним серед розглянутих є запропонований спосіб вибору точок спостережень. Метод випадкового вибору точок спостережень на області експерименту в кінцевому випадку виявився більш ефективним ніж при рівномірній сітці. Це пояснюється тим, що частина, випадковим чином вибраних, точок зосереджена навколо оптимально вибраних  $m$  точок насиченого блоку.

Результати чисельного моделювання підтверджують високу ефективність запропонованого підходу активної ідентифікації в умовах інтервальних даних, а також працездатність запропонованої обчислювальної схеми методу локалізації параметрів інтервальних моделей.

## ВИСНОВКИ

1. Модифіковано метод інтервальної локалізації параметрів моделі на основі симплекс-методу розв'язання задач лінійного програмування. Показано, що побудований на базі методу алгоритм і програмне забезпечення вимагає як мінімум у два рази менше симплекс-ітерацій ніж реалізований в пакеті програм INTERDAT і його ефективність зростає при збільшенні кількості  $m$  невідомих параметрів моделі  $b_j$ .

2. Розроблено ітераційний метод локалізації розв'язків системи інтервальних рівнянь з виділенням насиченого блоку, що забезпечує аналітичність розрахунку меж коридору інтервальних моделей та відсіювання неінформативних спостережень і у якому розв'язана проблема розмірності, актуальна для існуючих методів локалізації у вигляді многогранних областей.

3. Побудована на паралельних обчислювальних графах рекурентна схема методу локалізації параметрів інтервальних моделей з виділенням насиченого блоку дозволила розробити алгоритм та програмний модуль LOCNAS і розв'язати проблему обчислювальних витрат, актуальну для еліпсоїдальних методів множинного оцінювання.

4. Розроблено метод активної ідентифікації параметрів інтервальних моделей методом локалізації з виділенням насиченого блоку експерименту. Порівняльний аналіз ефективності запропонованого способу вибору точок спостережень при розв'язуванні задачі активної ідентифікації із двома іншими способами: на базі рівномірної сітки та заданням точок спостережень за допомогою генератора випадкових чисел, проведений за допомогою чисельного моделювання підтвердив перевагу запропонованого методу.

## РОЗДІЛ 4

ДОПУСТИМЕ ОЦІНЮВАННЯ МНОЖИНИ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ  
ВХІД- ВИХІД СТАТИЧНИХ СИСТЕМ В КЛАСІ ЕЛІПСОЇДІВ

При розв'язуванні задач аналізу та синтезу допусків математичні моделі статичних систем зображають системою інтервальних рівнянь (1.24). В цих випадках інтервали  $[y_i^-, y_i^+]$  задають допустимі значення виходів (вихідних характеристик) систем [94, 95, 130, 131] при фіксованих значеннях вхідних змінних. Тому для оцінювання розв'язків системи (1.24) необхідно застосовувати методи допустимого оцінювання.

Враховуючи недоліки існуючих інтервальних методів оцінювання, показані у підрозділах 1.2, 1.4, актуальним є розвиток еліпсоїдальних методів. Останні є більш придатними в задачах аналізу та синтезу допусків, особливо у випадку сильної “витягнутості” множини розв'язків інтервальної системи, оскільки забезпечують значно більше покриття допустимої області, ніж традиційні методи, побудовані на “вписуванні” у допустиму область прямокутних паралелепіпедів (“брусів”) з гранями, паралельними осям координат [95].

При розробці методів допустимого оцінювання у даному розділі розглянуто два випадки, коли система інтервальних рівнянь (1.24) побудована із застосуванням залежностей між вихідними характеристиками  $y_i$  та параметрами  $\vec{b}$ , заданими для номінальних значень  $\vec{b}_0$  [38, 62, 63], і коли ці залежності отримані у результаті експериментальної ідентифікації на основі інтервальних даних [51].

Окремо розглядається випадок, коли параметри моделі статичної системи мають фізичний зміст і їхні значення є випадковими величинами із нормальним або обмеженим нормальним законом розподілу [47, 66]. Застосування допустимого еліпсоїдального оцінювання для даного випадку дозволяє отримати спрощене співвідношення для оцінки імовірності працездатності



системи [38].

#### 4.1 Побудова допустимих еліпсоїдальних оцінок із заданими номінальними значеннями параметрів моделей

При дослідженні статичних систем часто застосовують моделі у вигляді нелінійних залежностей його характеристик (виходів) від параметрів [94]. У цьому випадку кожна  $i$ -та характеристика  $y_i$ ,  $i=1, \dots, N$  є функцією  $g_i(\vec{b})$  векторного аргументу параметрів  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ . При побудові моделей, для заданих номінальних значень виходів  $y_{0i} = g_i(\vec{b}_0)$  розраховують номінальні значення параметрів  $\vec{b}_0 = (b_{01}, \dots, b_{0m})^T$ . З практичної точки зору, точне забезпечення номінальних значень усіх  $y_{0i}$  є нереальним. В цих умовах задають допустимі, з точки зору функціональної придатності об'єкта, інтервали виходів  $y_{0i} \in [y_i^-, y_i^+]$  і визначають множину допустимих значень вектора параметрів із розв'язку такої системи [94]

$$y_i^- \leq g_i(\vec{b}) \leq y_i^+, \quad i = 1, \dots, N$$

Застосуванням розкладу функцій  $g_i(\vec{b})$  в ряд Тейлора в околі вектора номінальних значень параметрів  $\vec{b}_0$  та з вибором першого члена розкладу приходимо до такої системи

$$y_i^- \leq y_{i0} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i(\vec{b})}{\partial b_j} \Big|_{\vec{b}=\vec{b}_0} \cdot (b_j - b_{0j}) \leq y_i^+, \quad i = 1, \dots, N$$

Введемо позначення:

$$\delta y_i^- = y_i^- - y_{i0}, \quad \delta y_i^+ = y_i^+ - y_{i0}, \quad \delta b_j = b_j - b_{0j}, \quad \phi_{ij} = \frac{\partial g_i(\vec{b})}{\partial b_j} \Big|_{\vec{b}=\vec{b}_0}, \quad i = 1, \dots, N$$

і перепишемо лінеаризовану систему нерівностей у матричному вигляді

$$\delta \vec{Y}^- \leq \tilde{F} \cdot \delta \vec{b} \leq \delta \vec{Y}^+, \quad (4.1)$$

де  $\delta\bar{Y}^- = \{\delta y_i^-, i=1, \dots, N\}$ ,  $\delta\bar{Y}^+ = \{\delta y_i^+, i=1, \dots, N\}$  – вектори, складені із верхніх та нижніх меж інтервалів  $[\delta y_i^-, \delta y_i^+]$  відхилень вихідної характеристики від номінального значення, відповідно;

$\tilde{F} = \{\phi_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, m}\}$  – відома матриця значень похідних функцій  $g_i(\bar{b})$  у точці  $\bar{b}_0$ ;

$\delta\bar{b} = (\delta b_1, \dots, \delta b_m)^T$  – вектор відхилень значень параметрів від номінального.

Зауважимо, що коефіцієнти  $\phi_{ij}$  задають чутливості  $i$ -тої вихідної характеристики до зміни  $j$ -того параметра  $b_j$ .

Як видно, отримана система (4.1) є еквівалентною системі інтервальних рівнянь (1.25). Її розв'язком є множина допустимих відхилень параметрів від номінальних значень. Позначимо цю множину за  $\tilde{\Omega}$ . Очевидно, що її властивості аналогічні властивостям множини  $\Omega$ , отриманої із розв'язку системи інтервальних рівнянь (1.24). Зокрема, у просторі параметрів вона є опуклим многогранником. Будь-які значення параметрів  $\bar{b}$ , вибрані із множини  $\tilde{\Omega}$ , забезпечують допустимі значення усіх виходів  $y_i$ .

Розглянуті у попередньому розділі методи локалізації є непридатними для допустимого оцінювання розв'язку системи (4.1), оскільки вони забезпечують гарантовані, тобто “зовнішні” оцінки параметрів. Однак ідея застосування властивостей насиченого блоку множини розв'язків системи інтервальних рівнянь (1.24) може бути використана при знаходженні допустимої множини [62].

Розглянемо випадок, коли система (4.1) складається із  $N = m$  рівнянь. Таке припущення є цілком реальним, оскільки кількість контрольованих виходів  $y_i$ , переважно, є меншою від кількості параметрів і увівши додаткові обмеження на область зміни значень деяких параметрів  $b_j$  завжди можемо прийти до випадку  $N = m$ .

Як і раніше при розгляді системи інтервальних рівнянь (4.1) для випадку

$N = m$  вважатимемо, що матриця  $\tilde{F}$  є не виродженою, тобто  $\det(\tilde{F}) \neq 0$ ,  $\text{rang}(\tilde{F}) = m$ . Тоді розв'язком системи (4.1) є множина  $\tilde{\Omega}_m$ , яка в просторі параметрів визначає гіперпаралелепіпед із вершинами  $\delta\bar{b}_s$ .

Проведемо заміни у формулі (1.31):  $\bar{b}_s$  на  $\delta\bar{b}_s$ , вектор  $\bar{Y}_s$  на вектор  $\delta\bar{Y}_s$ , складений із комбінацій нижніх та верхніх меж інтервалів  $[\delta y_i^-, \delta y_i^+]$  відхилень вихідної характеристики від номінального значення. В результаті отримаємо формулу для розрахунку вершин  $\delta\bar{b}_s$

$$\delta\bar{b}_s = \tilde{F}^{-1} \cdot \delta\bar{Y}_s, \quad s = 1, \dots, 2^m. \quad (4.2)$$

Будемо шукати допустиму оцінку, отриманої множини  $\tilde{\Omega}_m$ , у класі еліпсоїдальних множин  $Q_m^-$  максимального об'єму із розв'язку такої задачі:

$$V(Q_m^-) \xrightarrow{Q_m^-} \max, \quad Q_m^- \subset \tilde{\Omega}_m, \quad (4.3)$$

де  $V(Q_m^-)$  – об'єм допустимого еліпсоїда.

Очевидно, що завдяки симетрії множини (гіперпаралелепіпеда)  $\tilde{\Omega}_m$ , допустимий (вписаний) еліпсоїд  $Q_m^-$  максимального об'єму повинен дотикатися до усіх його граней.

Задача (4.3) є достатньо складною задачею математичного програмування. Однак, користуючись властивостями множини  $\tilde{\Omega}_m$  загальний розв'язок можна отримати в аналітичному вигляді. Для цього спочатку сформулюємо і доведемо допоміжне твердження [63].

**Л е м а 4. 1.** Для  $N = m$  у многогранник  $\tilde{\Omega}_m$  можна вписати  $m$ -вимірний еліпсоїд

$$Q_m^- = \left\{ \delta\bar{b} \in R^m \mid (\delta\bar{b} - \bar{\delta}\bar{b})^T \cdot \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot \tilde{F} \cdot (\delta\bar{b} - \bar{\delta}\bar{b}) \leq 1 \right\}, \quad (4.4)$$

що дотикається до центрів усіх граней і з центром ваги

$$\bar{\delta}\bar{b} = \tilde{F}^{-1} \cdot \delta\bar{Y}.$$

У виразі (4.4)  $\tilde{E}$  – діагональна матриця допусків  $\tilde{\Delta}_i = 0,5 \cdot (\delta y_i^+ - \delta y_i^-)$ ,  $i = 1, \dots, m$  відхилень вихідних характеристик статичної системи. Вектор  $\delta \bar{Y}$  має такий вигляд:  $\delta \bar{Y} = (\delta \bar{y}_1, \dots, \delta \bar{y}_i, \dots, \delta \bar{y}_m)^T$ ,  $\delta \bar{y}_i = 0,5 \cdot (\delta y_i^+ + \delta y_i^-)$ .

*Доведення* [63]. Як витікає із властивостей многогранника  $\tilde{\Omega}_m$ , досліджених у працях [31, 60], у просторі параметрів він утворений  $N$  парами паралельних граней. Його вершини  $\delta \bar{b}_s$  належать одній грані, якщо у формулі (4.2) відповідні вектори  $\delta \bar{Y}_s$  мають хоча б по одній спільній  $i$ -й компоненті. Нехай вершини,  $\delta \bar{b}_s^i$ ,  $s = 1, \dots, 2^{m-1}$  належать одній грані. Позначимо за  $\delta \bar{Y}_s^i$  відповідні вектори, які застосовуються для їх розрахунку у формулі (4.2). Кожна грань многогранника  $\tilde{\Omega}_m$  є також симетричним  $m-1$ - вимірним многогранником. Центр ваги  $i$ -ї грані обчислюємо за формулою [63]

$$\delta \bar{b}^i = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k=1}^{2^{m-1}} \delta \bar{b}_s^i = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \tilde{F}^{-1} \sum_{k=1}^{2^{m-1}} \delta \bar{Y}_s^i. \quad (4.5)$$

Підставимо у вираз (4.4) (із заміною знака “ $\leq$ ” на знак “ $=$ ”), замість  $\delta \bar{b}$  значення  $\delta \bar{b}^i$ , обчислене згідно із формулою (4.5):

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \tilde{F}^{-1} \cdot \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \delta \bar{Y}_s^i - \tilde{F}^{-1} \cdot \delta \bar{Y} \right)^T \cdot \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot \tilde{F} \cdot \left( \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \tilde{F}^{-1} \cdot \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \delta \bar{Y}_s^i - \tilde{F}^{-1} \cdot \delta \bar{Y} \right) = \\ & \left( \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \delta \bar{Y}_s^i - \delta \bar{Y} \right)^T (\tilde{F}^T)^{-1} \cdot \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot \tilde{F} \cdot \tilde{F}^{-1} \cdot \left( \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \delta \bar{Y}_s^i - \delta \bar{Y} \right) = \\ & (\delta \bar{y}_1 - \delta \bar{y}_1, \dots, \delta \bar{y}_i^\pm - \delta \bar{y}_i, \dots, \delta \bar{y}_m - \delta \bar{y}_m) \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot (\bar{y}_1 - \delta \bar{y}_1, \dots, \delta \bar{y}_i^\pm - \delta \bar{y}_i, \dots, \delta \bar{y}_m - \delta \bar{y}_m)^T = \\ & = (0, \dots, \pm \tilde{\Delta}_i, \dots, 0) \cdot \text{diag}(\tilde{\Delta}_1^{-2}, \dots, \tilde{\Delta}_i^{-2}, \dots, \tilde{\Delta}_m^{-2}) \cdot (0, \dots, \pm \tilde{\Delta}_i, \dots, 0)^T = 1. \end{aligned}$$

Отримана рівність підтверджує справедливість леми. Очевидно, що аналогічні рівності можна отримати, коли підставити у вираз (4.4) центри будь-якої  $i$ -ї пари граней.

Зауважимо, що у випадку симетричності усіх інтервалів  $[y_i^-, y_i^+]$  допустимих значень вихідних характеристик відносно їхніх номінальних значень  $y_{0i}$ ,  $m$ -вимірний еліпсоїд (4.4) матиме такий вигляд:

$$Q_m^- = \left\{ \delta \bar{b} \in R^m \mid (\delta \bar{b})^T \cdot \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot \tilde{F} \cdot (\delta \bar{b}) \leq 1 \right\},$$

тобто його центр співпадатиме з нульовою точкою.

Доведена лема 4.1 дозволяє показати справедливість такого твердження [38].

**Т е о р е м а 4. 1.** Розв'язком задачі (4.3) є еліпсоїд (4.4).

*Доведення.* Позначимо об'єм еліпсоїда (4.4) за  $V_0$ . Припустимо, що існує деякий еліпсоїд

$$Q_m'^- = \left\{ \delta \bar{b} \mid (\delta \bar{b} - \delta \bar{b}^{\bar{\bar{b}}})^T \cdot H \cdot (\delta \bar{b} - \delta \bar{b}^{\bar{\bar{b}}}) \leq 1 \right\}, Q_m'^- \subset \tilde{\Omega}_m, \quad (4.6)$$

із центром симетрії у точці  $\delta \bar{b}^{\bar{\bar{b}}}$ , конфігурація і об'єм  $V'$  якого визначаються додатно-означеною матрицею  $H$ , і при цьому справедливою є нерівність

$$V' > V_0. \quad (4.7)$$

Очевидно, що співпадиння центрів симетрії еліпсоїда  $Q_m'^-$  і многогранника  $\tilde{\Omega}_m$  є необхідним, оскільки в іншому випадку еліпсоїд не дотикатиметься до усіх граней  $\tilde{\Omega}_m$ . Для перевірки нерівності (4.7) необхідно знайти матрицю  $H$ .

В силу симетричності еліпсоїда  $Q_m'^-$ , компоненти матриці конфігурації  $H$  можна визначити із умов дотику еліпсоїда до  $m$  граней многогранника у деяких точках  $\delta \bar{b}^i$ ,  $i=1, \dots, m$ . Не обмежуючи загальності припустимо, що ці точки знаходяться на гранях гіперпаралелепіпеда  $\tilde{\Omega}_m$ , які мають спільну вершину

$$\delta \bar{b}_s = \tilde{F}^{-1} \cdot (\delta y_1^+, \dots, \delta y_i^+, \dots, \delta y_m^+)^T.$$

Тоді умови дотику еліпсоїда до  $m$  граней многогранника матимуть такий вигляд:

$$\bar{n}_i = \frac{\partial((\vec{\delta b} - \vec{\delta \bar{b}})^T \cdot H \cdot (\vec{\delta b} - \vec{\delta \bar{b}}))}{\partial \vec{\delta b}} \Big|_{\vec{\delta b} = \vec{\delta b}^i} = 2 \cdot H \cdot (\vec{\delta b}^i - \vec{\delta \bar{b}}) = 2 \cdot \vec{\varphi}(\bar{x}_i) / \tilde{\Delta}_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.8)$$

де  $\bar{n}_i$  – вектор-нормаль до  $i$ -тої грані многогранника у точці  $\vec{\delta b}^i$ , який співпадає із вектором  $2 \cdot \vec{\varphi}(\bar{x}_i) / \tilde{\Delta}_i$ .

У правильності рівності

$$\bar{n}_i = 2 \cdot \vec{\varphi}(\bar{x}_i) / \tilde{\Delta}_i$$

легко пересвідчитися, коли обчислити вище описаним способом вектор-нормаль для багатовимірного еліпсоїда, заданого виразом (4.4).

Слід зауважити також, що величина  $\tilde{\Delta}_i$  задає відстань від центру  $\vec{\delta \bar{b}}$  до площини, якій належить  $i$ -та грань многогранника  $\tilde{\Omega}_m$ .

Задамо  $\vec{\delta b}^i$  точку грані многогранника  $\tilde{\Omega}_m$  у вигляді лінійної комбінації вершин грані, тобто

$$\vec{\delta b}^i = \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \lambda_s^i \cdot \vec{\delta b}_s^i, \quad \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \lambda_s^i = 1, \quad i = 1, \dots, m$$

і підставимо її значення у систему (4.8), отримаємо

$$H \cdot \left( \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \lambda_s^i \cdot \vec{\delta b}_s^i - \vec{\delta \bar{b}} \right) = \vec{\varphi}(\bar{x}_i) / \tilde{\Delta}_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Зауважимо, що значення  $\lambda_s^i$  для різних граней пов'язані між собою, оскільки еліпсоїд є симетричною фігурою. Тепер підставимо у отриману систему, замість  $\vec{\delta b}_s^i$  їхні значення з виразу (4.2) і одночасно перейдемо до матричного вигляду

$$H \cdot \tilde{F}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_1 & \cdots & \Lambda_{1i} \cdot \tilde{\Delta}_1 & \cdots & \Lambda_{1m} \cdot \tilde{\Delta}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{i1} \cdot \tilde{\Delta}_i & \cdots & \tilde{\Delta}_i & \cdots & \Lambda_{im} \cdot \tilde{\Delta}_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{m1} \cdot \tilde{\Delta}_m & \cdots & \Lambda_{mi} \cdot \tilde{\Delta}_m & \cdots & \tilde{\Delta}_m \end{pmatrix} = \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-1},$$

$$\text{де } \Lambda_{ji} = \sum_{s=1}^{2^{m-1}} \lambda_s^i \cdot \frac{\Delta_j^s}{\tilde{\Delta}_j}, \Delta_j^s \in \{-\tilde{\Delta}_j, \tilde{\Delta}_j\}, j=1, \dots, m.$$

Позначимо

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \Lambda_{1i} & \dots & \Lambda_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{i1} & \dots & 1 & \dots & \Lambda_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{m1} & \dots & \Lambda_{mi} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

З урахуванням вище виконаних перетворень та уведеного позначення система (4.8) остаточно матиме такий вигляд:

$$H \cdot \tilde{F}^{-1} \cdot \tilde{E} \cdot \Lambda = \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-1}. \quad (4.9)$$

Розв'язуючи систему (4.9) відносно матриці конфігурації  $H$  при фіксованій матриці  $\Lambda$ , отримаємо

$$H = \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-1} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \tilde{E}^{-1} \cdot \tilde{F}. \quad (4.10)$$

Оскільки матриця  $H$  додатно означена [32], а  $\text{rang}(\tilde{F}) = m$ , то з формули (4.10) витікає, що матриця  $\Lambda$  також є додатно означеною.

Тепер порівняємо об'єми еліпсоїда, заданого (4.4) та еліпсоїда  $Q_m'$  з урахуванням того, що значення цих об'ємів обернено пропорційні визначникам матриць конфігурацій відповідних еліпсоїдів:

$$\frac{V_0}{V'} = \frac{\sqrt{1/\det(\tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot \tilde{F})}}{\sqrt{1/\det(\tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-1} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \tilde{E}^{-1} \cdot \tilde{F})}} = \sqrt{\frac{1}{\det(\Lambda)}}. \quad (4.11)$$

Користуючись нерівністю Адамара для додатно-означених матриць [157, теорема 1.1.11]

$$\det(\Lambda) \leq \prod_{i=1}^m \Lambda_{ii},$$

приходимо до такої нерівності:  $\det(\Lambda) \leq 1$ . Підставимо отриману нерівність у

вираз (4.11), отримаємо  $V' \leq V_0$ , що суперечить зробленому припущенню (4.7) ( $V' > V_0$ ) і підтверджує істинність теореми 4.1.

Отримана при доведенні теореми 4.1 формула (4.10), фактично задає матриці конфігурації множини можливих  $m$ -вимірних еліпсоїдів (4.6), вписаних у допустиму область  $\tilde{\Omega}_m$ . Для визначення конкретного еліпсоїда із множини необхідно задати матрицю  $\Lambda$ . Розглянемо деякі важливі властивості елементів множини еліпсоїдів, які пов'язані із властивостями додатно-означеної матриці  $\Lambda$  [38].

1. Якщо усі діагональні елементи матриці  $\Lambda$  дорівнюють 1, тобто  $\Lambda_{ii}=1$ ,  $\forall i=1, \dots, m$ , то еліпсоїд (4.6) дотикається до усіх граней допустимої області  $\tilde{\Omega}_m$ .

Справедливість властивості витікає безпосередньо із умов (4.8), на основі яких була отримана матриця  $\Lambda$ .

2. Якщо  $\Lambda_{ii} < 1$ , то еліпсоїд (4.6) не дотикається до відповідної  $i$ -тої пари граней.

Оскільки центри симетрії еліпсоїда (4.6) і допустимої області співпадають, то достатньо показати справедливість цієї властивості у випадку  $i$ -тої грані.

Покладемо у матриці  $\Lambda$ :  $\Lambda_{ii} = \lambda < 1$ , де  $\lambda$  деяке додатне число (в силу додатної означеності матриці  $\Lambda$ ). Тоді у системі (4.8)  $i$ -те рівняння матиме такий вигляд:

$$H \cdot (\vec{\delta b}^i - \vec{\delta \bar{b}}) = \bar{\varphi}(\bar{x}_i) / \lambda \cdot \tilde{\Delta}_i,$$

тобто задаватиме умову дотику еліпсоїда (4.6) до площини, віддаленої від його центру  $\vec{\bar{b}}$  на відстань  $\lambda \cdot \tilde{\Delta}_i$  і паралельної  $i$ -тій грані  $\tilde{\Omega}_m$ . Оскільки площина, якій належить  $i$ -та грань області  $\tilde{\Omega}_m$ , віддалена від центру  $\vec{\bar{b}}$  еліпсоїда на відстань  $\tilde{\Delta}_i$ , що при  $\lambda < 1$  є більшою від  $\lambda \cdot \tilde{\Delta}_i$ , то дана площина і, відповідно,  $i$ -та грань не мають спільних точок із еліпсоїдом (4.6).

Властивість 3. Якщо  $\exists i$ , що  $\Lambda_{ii} > 1$ , то еліпсоїд (4.6) виходить за межі допустимої області.



Доведення даної властивості аналогічне доведенню властивості 2 з урахуванням, що еліпсоїд виходить за межі допустимої області тільки тоді, коли він перетинає хоча б одну  $i$ -ту грань області  $\tilde{\Omega}_m$ .

Розглянуті властивості мають велике практичне значення, оскільки за допомогою матриці  $\Lambda$  дозволяють підібрати багатовимірну еліпсоїдальну оцінку допустимої множини у такий спосіб, щоб максимально наблизити її до вигляду множини розсіювання параметрів і таким чином максимізувати допуски.

З іншого боку, для забезпечення максимальних допусків параметрів, необхідно забезпечити результати технологічного процесу такими, щоб технологічна множина значень розсіювання параметрів синтезованого об'єкта співпадала із отриманою оптимальною оцінкою допустимої області у вигляді еліпсоїда (4.4).

Зауважимо, що при лінеаризації характеристик статичної системи часто застосовують логарифмічні значення параметрів. У цьому випадку система інтервальних рівнянь матиме такий вигляд:

$$y_i^- \leq y_{i0} + \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial g_i(\vec{b})}{\partial \ln b_j} \right|_{\vec{b}=\vec{b}_{0j}} \cdot \delta b_j \leq y_i^+, \quad i=1, \dots, N, \quad (4.12)$$

де  $\delta b_j = \ln(b_j) - \ln(b_{0j})$ .

Особливістю розкладу по логарифмічних змінних є те, що при малому значенні  $\delta b_j$  воно наближається до значення відносного відхилення параметра  $b_j$  від номінального  $b_{0j}$ , тобто

$$\delta b_j \approx |b_j - b_{0j}| / b_{0j}.$$

## 4.2. Побудова допустимих еліпсоїдальних оцінок множини параметрів інтервальних моделей статичних систем

4.2.1. Допустима еліпсоїдальна оцінка у випадку локалізації параметрів моделі.

Нехай у результаті експериментальної ідентифікації отримані інтервальні моделі статичної системи у вигляді лінійно-параметричних функцій  $\hat{y}_i(\bar{x}) = \bar{\varphi}_i^T(\bar{x}) \cdot \bar{b}$ ,  $\bar{b} \in \Omega$ ,  $i=1, \dots, N$ . Позначимо вектор значень базових функцій  $\bar{\varphi}_i^T(\bar{x})$  рівняння  $i$ -тої вихідної характеристики  $y_i$  системи для фіксованого вектора входів  $\bar{x}_i$ , за  $\bar{\varphi}_i^T = (\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{ij}, \dots, \varphi_{im})$ . У загальному випадку значення векторів  $\bar{x}_i$  для різних виходів можуть відрізнятися між собою. У відповідності з припущеннями, на які спирається метод аналізу інтервальних даних (див. підрозділ 1.4), значення кожної  $i$ -тої вихідної характеристики для фіксованого вектора входів  $\bar{x}_i$  гарантовано належить відповідним інтервалам прогнозування  $[\hat{y}_i] = [\hat{y}_i^-; \hat{y}_i^+]$ , де межі інтервалів визначаються за такими формулами:

$$\hat{y}_i^- = \min_{\bar{b}} \sum_{j=1}^m \varphi_{ij} \cdot b_j, \bar{b} \in \Omega, \quad \hat{y}_i^+ = \max_{\bar{b}} \sum_{j=1}^m \varphi_{ij} \cdot b_j, \bar{b} \in \Omega, \quad i=1, \dots, N. \quad (4.13)$$

Розглянемо задачу знаходження допустимої області параметрів для отриманих інтервальних моделей із інтервалами прогнозування (4.13) [51]. Очевидно, що у даному випадку задача допустимого оцінювання суттєво відрізняється від розглянутої у підрозділі 4.1. Задаючи інтервали допустимих значень виходів  $[y_i^-, y_i^+]$ , для фіксованого вектора входів  $\bar{x}_i$  та із урахуванням уведених позначень приходимо до системи (4.1). Проте у даному випадку вектори  $\delta\bar{Y}^-, \delta\bar{Y}^+$  складені із верхніх та нижніх меж інтервалів  $[\delta y_i^-, \delta y_i^+]$  відхилень вихідної характеристики не від номінального значення, а від межових значень інтервалу прогнозування  $[\hat{y}_i] = [\hat{y}_i^-; \hat{y}_i^+]$ , тобто вони

визначаються так [51]:

$$\delta y_i^- = y_i^- - \hat{y}_i^-, \quad \delta y_i^+ = y_i^+ - \hat{y}_i^+, \quad i=1, \dots, N. \quad (4.14)$$

Відповідно, компоненти вектора  $\vec{\delta b} = (\delta b_1, \dots, \delta b_m)^T$ , отриманого із розв'язку системи (4.1), будуть задавати відхилення значень параметрів від граничних точок області  $\Omega$ .

Особливістю отриманої системи (4.1) для даного випадку є те, що існування її розв'язків залежить від ширини інтервалів прогнозування  $[\hat{y}_i] = [\hat{y}_i^-; \hat{y}_i^+]$ . Зокрема, по цій причині система (4.1) може не мати розв'язків. Тоді це означає, що області допусків  $\tilde{\Omega}$  не існує. Сформулюємо необхідні умови існування області  $\tilde{\Omega}$  у вигляді твердження [51].

**Т е о р е м а 4.2.** Для існування області допусків параметрів інтервальної моделі необхідне виконання включень

$$[\hat{y}_i^-; \hat{y}_i^+] \subseteq [y_i^-, y_i^+], \quad \forall i=1, \dots, N \quad (4.15)$$

*Доведення.* Нехай включення (4.15) не виконується хоча б для одного  $i$ . Тоді з формули (4.14) витікає:  $\delta y_i^- > \delta y_i^+$ , що суперечить прийнятому означенню інтервалу, і відповідно підтверджує правильність теореми.

Як витікає з теореми 4.2, для існування області допусків  $\tilde{\Omega}$  необхідно забезпечити певну точність прогнозування інтервальних моделей у точках  $\vec{x}_i$ . Звідси стає очевидним, що для отримання області допусків, наприклад, заданого об'єму, раціональним буде суміщення процедур ідентифікації параметрів моделі (локалізації) і допустимого оцінювання.

Застосуємо для цих цілей метод локалізації параметрів моделей з виділенням насиченого блоку експерименту, але дещо модифікований по відношенню до розглянутого у розділі 3.

Як і у попередньому підрозділі будемо розглядати випадок, коли система (4.1) складається із  $N = m$  рівнянь, а допустиму оцінку розв'язку цієї системи шукатимемо у класі багатовимірних еліпсоїдів  $Q_m^-$ , які мають максимальний об'єм, із розв'язку задачі (4.3) [51].

Спочатку задамо локалізаційну область на  $k=0$ -й ітерації. Для цього покладемо у формулі (4.14)  $\hat{y}_i^- = 0$ ,  $\hat{y}_i^+ = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$  і підставимо отримані значення  $\delta y_i^-$ ,  $\delta y_i^+$ , відповідно, у вектори  $\delta \vec{Y}^-$ ,  $\delta \vec{Y}^+$  системи рівнянь (4.1). Розв'язком цієї системи є деяка допустима область  $\tilde{\Omega}_m$ , яка буде використана у локалізаційному методі взамін області  $\Omega_m$ , отримуваної із розв'язку задачі (3.6). Проведемо ще одну заміну, а саме, замість рекурентних формул (3.8) використаємо такі:

$$\hat{y}_i^-(k+1) = \hat{y}_i^-(k) + \delta_i^-(k+1), \quad \hat{y}_i^+(k+1) = \hat{y}_i^+(k) - \delta_i^+(k+1), \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.16)$$

Далі схема локалізаційного методу залишається незмінною, тобто шляхом проведення  $k$ -того спостереження у точках  $\bar{x}_i$  на кожній ітерації поступово уточнюємо інтервальні моделі, тобто зменшуємо ширину інтервалів прогнозування  $[\hat{y}_i^-; \hat{y}_i^+]$ .

Проведені модифікації локалізаційного методу дозволяють сумістити процедури ідентифікації параметрів моделі (локалізації) і допустимого оцінювання. При цьому, на кожній ітерації формули (4.14) набувають рекурентного вигляду [51]

$$\delta y_i^-(k) = y_i^- - \hat{y}_i^-(k), \quad \delta y_i^+(k) = y_i^+ - \hat{y}_i^+(k), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.17)$$

Підставляючи значення  $\delta y_i^-(k)$ ,  $\delta y_i^+(k)$  із формули (4.17) замість компонент векторів  $\delta \vec{Y}^-$ ,  $\delta \vec{Y}^+$ , а останні у формулу (4.1) та з врахуванням теореми 4.1,

отримаємо рекурентну формулу допустимої області у вигляді еліпсоїда:

$$Q_m^-(k+1) = \left\{ \vec{\delta b} \in R^m \mid (\vec{\delta b} - \vec{\delta \bar{b}}(k+1))^T \cdot \tilde{F}^T \cdot \tilde{E}^{-2}(k+1) \cdot \tilde{F} \cdot (\vec{\delta b} - \vec{\delta \bar{b}}(k+1)) \leq 1 \right\}, \quad (4.18)$$

де  $\vec{\delta \bar{b}}(k+1)$  – вектор, який задає центр ваги допустимого еліпсоїда на  $k$ -тій ітерації і визначається за формулою

$$\vec{\delta \bar{b}}(k+1) = \tilde{F}^{-1} \cdot 0,5 \cdot ((\delta y_1^+(k+1) + \delta y_1^-(k+1)), \dots, (\delta y_i^+(k+1) + \delta y_i^-(k+1)), \dots, (\delta y_m^+(k+1) + \delta y_m^-(k+1)))^T;$$

$\tilde{E}(k+1)$  – діагональна матриця допусків відхилень вихідних характеристик, отриманих на  $k$ -тій ітерації

$$\tilde{E}(k+1) = \text{diag}\{0,5 \cdot (\delta y_1^+(k+1) - \delta y_1^-(k+1)), \dots, (\delta y_i^+(k+1) - \delta y_i^-(k+1)), \dots, (\delta y_m^+(k+1) - \delta y_m^-(k+1))\}^T.$$

Зауважимо, що кожне інформативне спостереження, проведене у точці  $\vec{x}_i$  може одночасно звужити частину, або усі інтервали  $[\hat{y}_i^-; \hat{y}_i^+]$ ,  $i=1, \dots, m$ . У просторі параметрів це означає переміщення декількох не паралельних граней області локалізації в сторону зменшення її розмірів. Такий випадок зображено у просторі параметрів на рис. 4.1 для  $m=2$ .

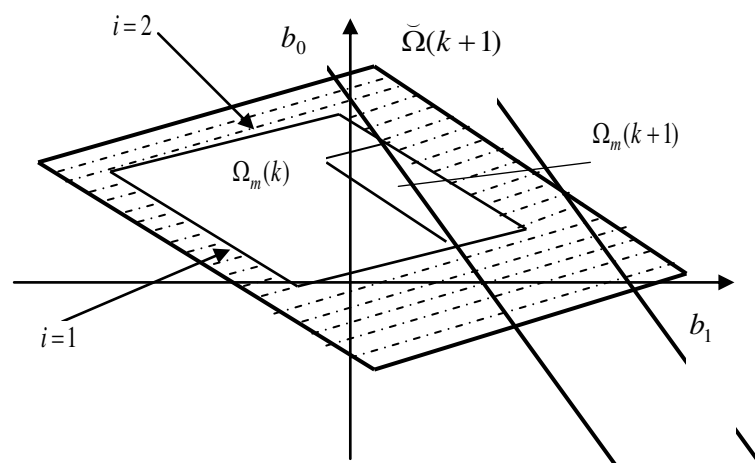


Рис. 4.1. Ілюстрація суміщення процедур локалізації та допустимого оцінювання.

Штрих-пунктирними лініями виділена область, з якої побудована допустима область  $\tilde{\Omega}_m$ , що отримана на  $k$ -тій ітерації локалізаційного методу. На рис 4.2 зображена область  $\tilde{\Omega}_m$  та її допустима еліпсоїдальна оцінка, знайдена за теоремою 4.1.

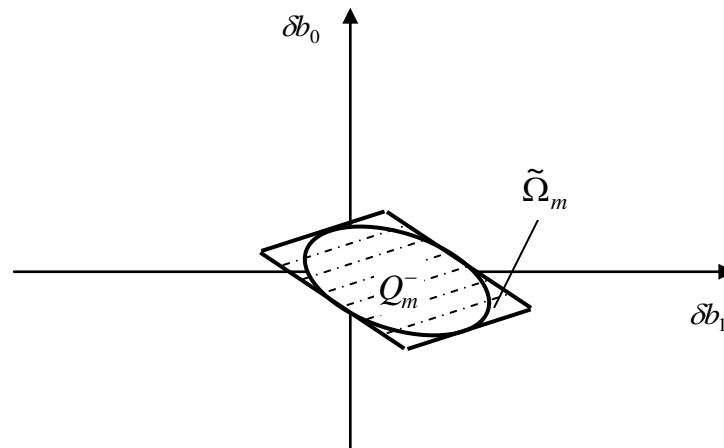


Рис. 4.2. Допустима область параметрів на на  $k$ -тій ітерації локалізаційного методу.

Як видно з рис. 4.1 та рис. 4.2, розміри допустимої області тим більші чим менші розміри області локалізації, тобто чим точніші інтервальні моделі. Очевидно, що найбільших допусків можна отримати, коли відомі номінальні (“точні”) значення  $\vec{b}_0 = (b_{01}, \dots, b_{0m})^T$  параметрів моделі.

Результати чисельних експериментів, проведені із застосуванням локалізаційного методу, показали, що із збільшенням кількості спостережень розміри локалізаційної області зменшуються, але одночасно зростає частка неінформативних спостережень (див. рис. 3.3). Оскільки запропонований підхід допустимого оцінювання базується на локалізаційному методі, то для його практичної реалізації з метою зменшення обчислювальних витрат слід задати умову зупинки обчислювальної процедури при досягненні допустимої області задовільних розмірів. Наприклад, ця умова може бути задана так:  $V_{\tilde{\Omega}_m}^0 \geq V_{\tilde{\Omega}_m}(k+1)$ , де  $V_{\tilde{\Omega}_m}^0$  – заданий об’єм допустимої області;  $V_{\tilde{\Omega}_m}(k+1)$  –

розрахований на  $k+1$ -й ітерації за допомогою формули

$$V_{\tilde{\Omega}_m}(k+1) = \sqrt{\prod_{i=1}^m (\delta y_i^+(k+1) - \delta y_i^-(k+1))^2 \cdot \det(\tilde{F} \cdot \tilde{F}^T)^{-1}}.$$

4.2.2. Допустиме оцінювання параметрів лінеаризованої інтервальної моделі в умовах ідентифікації базових функцій.

Розглянемо випадок, коли залежності виходів  $y_i$  системи від її входів  $\vec{x}$  та параметрів  $\vec{b}$  є нелінійними [51]

$$y_i(\vec{x}, \vec{b}) = g_i \left( \sum_{j=1}^m \varphi_{ij}(\vec{x}, \vec{a}_j) \cdot \vec{b} \right), \quad i=1, \dots, N \quad (4.19)$$

де  $\varphi_{ij}(\vec{x}, \vec{a}_j)$  ( $j=1, \dots, m$ ) – базові функції заданої структури із невідомими векторами  $\vec{a}_j$  параметрів, які надалі називатимемо коефіцієнтами.

Припустимо, що ідентифікація невідомих векторів  $\vec{a}_j$  коефіцієнтів здійснюється у результаті незалежних серій спостережень в точках  $\vec{x}_k$  ( $k=1, \dots, K$ ), коли результати спостережень задаються в інтервальному вигляді, тобто

$$\vec{x}_k, [\varphi_{ij}^-(\vec{x}_k, \vec{a}_j); \varphi_{ij}^+(\vec{x}_k, \vec{a}_j)], \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, m, \quad k=1, \dots, K,$$

де  $[\varphi_{ij}^-(\vec{x}_k, \vec{a}_j); \varphi_{ij}^+(\vec{x}_k, \vec{a}_j)]$  – інтервали можливих значень функцій  $\varphi_{ij}(\vec{x}, \vec{a}_j)$  ( $j=1, \dots, m$ ) у точках  $\vec{x}_k$ .

У результаті застосування методу аналізу інтервальних даних отримаємо області можливих значень компонент векторів  $\vec{a}_j$ , і відповідні функціональні коридори значень базових функцій, залежно від вхідних змінних [51]

$$[\hat{\varphi}_{ij}(\vec{x})] = [\hat{\varphi}_{ij}^-(\vec{x}); \hat{\varphi}_{ij}^+(\vec{x})], \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, m.$$

З урахуванням цих функціональних коридорів, оцінки нелінійних залежностей (4.19) матимуть інтервальний вигляд

$$[\hat{y}_i(\bar{x}, \bar{b})] = g_i \left( \sum_{j=1}^m [\hat{\phi}_{ij}(\bar{x})] \cdot \bar{b}_j \right), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.20)$$

Нехай на основі фізичних міркувань знайдено деякий номінальний вектор параметрів  $\bar{b}_0 = (b_{01}, \dots, b_{0m})^T$ , що при фіксованому наборі входів  $\bar{x}_k$  забезпечує номінальні інтервали виходів  $[\hat{y}_{0i}] = [\hat{y}_i(\bar{x}_k, \bar{b}_0)]$ . Лінеаризуємо залежності (4.20) застосуванням розкладу в ряд Тейлора в околі вектора номінальних значень параметрів  $\bar{b}_0$

$$[\hat{y}_i(\bar{x}_k, \bar{b})] = [\hat{y}_{0i}] + \sum_{j=1}^m [\hat{\phi}_{ij}^k] \cdot \delta b_j, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.21)$$

$$\text{де } [\hat{\phi}_{ij}^k] = \left. \frac{\partial g_i \left( \sum_{j=1}^m [\hat{\phi}_{ij}(\bar{x}_k)] \cdot b_j \right)}{\partial b_j} \right|_{\bar{b}=\bar{b}_0} \cdot (i = 1, \dots, N).$$

Тепер задамо допустимі, з точки зору функціональної придатності статичної системи, інтервали вихідних характеристик  $[y_i^-, y_i^+]$ . Спираючись на теорему 4.2, отримаємо умови забезпечення функціональної придатності системи [51]

$$[\hat{y}_i(\bar{x}_k, \bar{b})] \subseteq [y_i^-, y_i^+], \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Перепишемо ці умови із урахуванням заміни інтервалів  $[\hat{y}_i(\bar{x}_k, \bar{b})]$  ( $i = 1, \dots, N$ ), на інтервали, обчислені із виразів (4.21), і застосовуючи властивості інтервальних включень [4]:

$$\min_{\hat{\phi}_{ij}^k \in [\hat{\phi}_{ij}^k]} \sum_{j=1}^m \hat{\phi}_{ij}^k \cdot \delta b_j \geq \delta \tilde{y}_i^-; \quad \max_{\hat{\phi}_{ij}^k \in [\hat{\phi}_{ij}^k]} \sum_{j=1}^m \hat{\phi}_{ij}^k \cdot \delta b_j \leq \delta \tilde{y}_i^+, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.22)$$

$$\text{де } \delta \tilde{y}_i^- = y_i^- - \hat{y}_{0i}^-; \quad \delta \tilde{y}_i^+ = y_i^+ - \hat{y}_{0i}^+.$$

Як і раніше, припускаємо, що  $N = m$ . У загальному випадку розв'язком системи нерівностей (4.22) при  $N = m$  є об'єднана множина  $\tilde{\Omega}_{0m}$  допустимих відхилень параметрів  $\delta b_j$  від номінальних значень. У просторі параметрів отриманий розв'язок є не опуклий многогранник, що суттєво ускладнює



знаходження його допустимої оцінки багатовимірним еліпсоїдом. Як видно із системи (4.22), при звуженні інтервалів  $[\hat{\phi}_{ij}^k]$  ( $i=1, \dots, m, j=1, \dots, m$ ) до точкових значень вона стає еквівалентною системі (4.1), для розв'язку якої у попередньому підрозділі отримана оптимальна допустима еліпсоїдальна оцінка. Отже, чим менша ширина інтервалів  $[\hat{\phi}_{ij}^k]$  ( $i=1, \dots, m, j=1, \dots, m$ ), тим більш точніше наближення до оптимальної допустимої еліпсоїдальної оцінки розв'язку системи (4.22) можна отримати.

Наявність інтервалів  $[\hat{\phi}_{ij}^k]$  ( $i=1, \dots, m, j=1, \dots, m$ ) у системі (4.22) призводить до існування множини можливих  $m$ -вимірних еліпсоїдів, вписаних у допустиму область  $\tilde{\Omega}_{0m}$ . Для опису цієї множини складемо таку систему нерівностей:

$$\sum_{j=1}^m \hat{\phi}_{ij}^k \cdot \delta b_j \geq \delta \hat{y}_i^-; \quad \sum_{j=1}^m \hat{\phi}_{ij}^k \cdot \delta b_j \leq \delta \hat{y}_i^+, \quad i=1, \dots, N=m,$$

де  $\hat{\phi}_{ij}^k$  – будь-які значення, вибрані із відповідних інтервалів  $[\hat{\phi}_{ij}^k]$  ( $i=1, \dots, m, j=1, \dots, m$ ).

Позначимо за  $\tilde{F}_k = \{ \hat{\phi}_{ij}^k, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, m \}$  – матрицю розмірності  $(m \times m)$ ,  $[\tilde{F}_k] = \{ [\hat{\phi}_{ij}^k], \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, m \}$  – матрицю розмірності  $(m \times m)$  із інтервальними компонентами, а за  $\hat{\delta Y}^- = \{ \delta \hat{y}_i^-, i=1, \dots, m \}$ ,  $\hat{\delta Y}^+ = \{ \delta \hat{y}_i^+, i=1, \dots, m \}$  – вектори, складені із верхніх та нижніх меж інтервалів  $[\delta \hat{y}_i^-, \delta \hat{y}_i^+]$ . Із урахуванням уведених позначень отриману систему можна переписати в матричному вигляді

$$\hat{\delta Y}^- \leq \tilde{F}_k \cdot \delta \vec{b} \leq \hat{\delta Y}^+. \quad (4.23)$$

Нехай  $\tilde{\Omega}_m(\tilde{F}_k)$  – розв'язок системи (4.23) для фіксованого набору  $\hat{\phi}_{ij}^k$  ( $i=1, \dots, m, j=1, \dots, m$ ). Тоді в силу лінійності систем (4.22), (4.23), справедливим є включення

$$\tilde{\Omega}_m(\tilde{F}_k) \subseteq \tilde{\Omega}_{0m}, \quad \forall \tilde{F}_k \in [\tilde{F}_k],$$

із якого витікає, що розв'язок системи (4.23) є допустимою оцінкою розв'язку системи (4.22).

Зауважимо, що включення  $\tilde{F}_k \in [\tilde{F}_k]$  означає, що кожна компонента матриці  $\tilde{F}_k$  належить відповідному інтервалу-компоненті інтервальної матриці  $[\tilde{F}_k]$ .

Користуючись виразом для оптимальної еліпсоїдальної оцінки (4.4) множину допустимих еліпсоїдальних оцінок запишемо у такому вигляді [51]:

$$Q_m^-(\tilde{F}_k) = \left\{ \delta \vec{b} \in R^m \mid (\delta \vec{b} - \delta \vec{b}^-)^T \cdot \tilde{F}_k^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot \tilde{F}_k \cdot (\delta \vec{b} - \delta \vec{b}^-) \leq 1 \right\}, \tilde{F}_k \in [\tilde{F}_k], \quad (4.24)$$

де  $\delta \vec{b}^- = \tilde{F}_k^{-1} \cdot \delta \hat{Y}$ ;

$\tilde{E}$  – діагональна матриця допусків  $0,5 \cdot (\delta \hat{y}_i^+ - \delta \hat{y}_i^-)$ ,  $i=1, \dots, m$  відхилень вихідних характеристик статичної системи;

$\delta \hat{Y} = (\delta \hat{y}_1, \dots, \delta \hat{y}_i, \dots, \delta \hat{y}_m)^T$  – вектор із компонентами  $\delta \hat{y}_i = 0,5 \cdot (\delta \hat{y}_i^+ + \delta \hat{y}_i^-)$ ;

На рис 4.3 для випадку  $m=2$  схематично зображені: область  $\tilde{\Omega}_{0m}$ ; її допустима оцінка  $\tilde{\Omega}_m(\tilde{F}_k)$ , обчислена для матриці  $\tilde{F}_k$ , компонентами якої є середини інтервалів  $[\hat{\phi}_{ij}^k]$  ( $i=1, \dots, 2, j=1, \dots, 2$ ); допустима оцінка еліпсом.

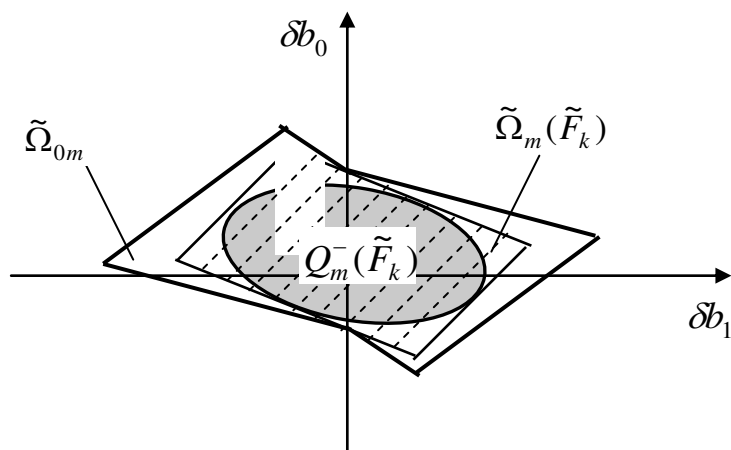


Рис. 4.3.

Як видно із рисунка, отримані допустимі оцінки у вигляді паралелограма  $\tilde{\Omega}_{m=2}(\tilde{F}_k)$  і еліпса  $Q_{m=2}^-(\tilde{F}_k)$ , є неоптимальними, оскільки не забезпечують

максимального “покриття” області  $\tilde{\Omega}_{0m}$ . Очевидним також є те, що оптимальна допустима оцінка еліпсом даної області існує і залежить від вибору матриці  $\tilde{F}_k \in [\tilde{F}_k]$ , а знаходження цієї оцінки може бути формалізовано у вигляді такої задачі математичного програмування з нелінійною цільовою функцією і лінійними обмеженнями [51]:

$$V(Q_m^-(\tilde{F}_k)) \xrightarrow{\tilde{F}_k} \max, \tilde{F}_k \in [\tilde{F}_k], \quad (4.25)$$

де  $V(Q_m^-(\tilde{F}_k))$  – об’єм допустимого багатовимірного еліпсоїда.

У загальному випадку процедури знаходження розв’язку задачі (4.25) є достатньо складними. У силу нелінійності цільової функції, при побудові алгоритму розв’язування (4.25) проблематичним є також застосування принципів побудови відомих в інтервальному аналізі алгоритмів “поділу області параметрів” *PPS* та “поділу області розв’язків” *PSS* [173]. Тому у даних умовах найбільш обґрунтованим буде підхід, коли конфігурацію допустимого багатовимірного еліпсоїда визначати не із розв’язку задачі (4.25), а задавати виходячи із умови його максимальної подібності до еліпсоїда розсіювання випадкових значень параметрів, заданого із фізичних міркувань. Очевидно, що саме за такого підходу є можливість забезпечити максимальну імовірність працездатності системи. Якщо ж область розсіювання параметрів – невідома, то у випадку незначної розмірності задачі (4.25), за допустиму еліпсоїдальну оцінку можна вибрати найкращу (найбільшого об’єму) серед отриманих для матриць  $\tilde{F}_k$ , компонентами яких є комбінації меж інтервалів  $[\hat{\phi}_{ij}^k]$  ( $i=1, \dots, m$ ,  $j=1, \dots, m$ ). Коли ж значення  $m$  є достатньо велике і застосування методів повного перебору стає неможливим, то допустиму оцінку слід будувати на основі матриці  $\tilde{F}_k$ , компонентами якої є середини інтервалів  $[\hat{\phi}_{ij}^k]$  ( $i=1, \dots, 2$ ,  $j=1, \dots, 2$ ), як це показано на рис. 4.3.

#### 4.3. Оцінка імовірності працездатності статичної системи на основі аналізу допустимої множини параметрів її моделі

У попередніх підрозділах для оцінювання допустимої множини  $\tilde{\Omega}_m$  параметрів моделей застосовувався багатомірний еліпсоїд. Тим часом як традиційні підходи передбачають застосування для цих цілей інтервальні методи оцінювання.

Очевидно, що еліпсоїдальні методи забезпечують менш жорсткі допуски на параметри у порівнянні з інтервальними методами допустимого оцінювання і це особливо відчутно, коли множина параметрів моделі є сильно витягнутою. Однак це не єдина перевага еліпсоїдальних методів.

У даному підрозділі розглядається аналіз точності систем, при моделюванні яких параметри мають фізичний зміст а їхні значення чи логарифми їхніх значень розподілені згідно нормального закону. При цьому задача аналізу точності зводиться до оцінки імовірності працездатності  $P_d$  системи [47].

У випадку групового процесу формування значень параметрів, що призводить до їхньої корельованості, значення параметрів (у випадку нормального закону розподілу) утворюють довірчу область у вигляді  $m$ -вимірною еліпсоїда. Порівняння довірчої області розсіювання значень параметрів та допустимої області (обидві є еліпсоїдами однакової розмірності) дозволяє суттєво спростити процедуру оцінювання  $P_d$ .

Не порушуючи загальності, розглянемо задачу оцінювання імовірності працездатності  $P_d$  статичної системи на прикладі забезпечення допустимих статичних режимів роботи радіоелектронних кіл (РЕК).

Як відомо [94], точність радіоелектронної апаратури визначається точністю параметрів компонент, з яких вона складається. Характеристиками (РЕК) можуть бути коефіцієнти підсилення та затухання, струми та напруги на ділянках кола, тощо. Кожна  $i$ -та статична характеристика  $y_i$  РЕК є функцією

параметрів радіоелементів, що задає модель РЕК. Параметри радіоелементів утворюють вектор  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_j, \dots, b_m)^T$  і мають фізичний зміст. При проектуванні РЕК знаходять вектор номінальних значень параметрів радіоелементів  $\vec{b}_0$ , який забезпечує номінальні значення вихідних характеристик  $g_i(\vec{b}_0)$ . В процесі виробництва та експлуатації апаратури реальні значення цих характеристик відрізняються від номінальних. При цьому, чим більші відхилення реальних значень від номінальних, тим менша точність радіоелектронної апаратури. Вимоги до точності характеристик об'єкта запишемо у вигляді системи (4.12), попередньо застосувавши до нелінійних у загальному випадку характеристик РЕК  $g_i(\vec{b}_0)$  лінеаризацію по логарифмічних значеннях параметрів у околі точки  $(\ln(b_{o1}), \dots, \ln(b_{om}))$ . Перейдемо у системі (4.12) до допусків для  $i$ -тої характеристики РЕК  $\delta y_i^- = y_i^- - y_{i0}$ ,  $\delta y_i^+ = y_i^+ - y_{i0}$ . Тоді отримана система матиме такий вигляд [47]:

$$\delta y_i^- \leq \sum_{j=1}^m S_{ij} \cdot \delta b_j \leq \delta y_i^+, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.26)$$

де  $S_{ij} = b_j \cdot \left. \frac{\partial y_i(\vec{b})}{\partial (b_j)} \right|_{\vec{b}_0}$  – чутливість  $i$ -тої характеристики РЕК до зміни значення  $j$ -того параметра радіоелементів;

$$\delta b_j = \ln(b_j) - \ln(b_{oj}).$$

Перевагою розкладу по логарифмічних змінних є те, що при малих значеннях  $\delta b_j$ , воно наближається до значення відносного відхилення параметра  $b_j$  від номінального і розподілене згідно нормального закону.

Отримана система є системою інтервальних рівнянь, з властивостями аналогічними властивостям системи (1.24). Розв'язком системи (4.26) в просторі параметрів  $\vec{b} \in R^m$  радіоелементів є область працездатності РЕК, яка одночасно є допустимою областю  $\tilde{\Omega}$ . Тому надалі область працездатності будемо позначати за  $\tilde{\Omega}$ .

Розглянемо властивості області працездатності РЕК, користуючись властивостями розв'язків системи (1.24) [47].

1. У  $m$ -вимірному просторі параметрів  $b_1, \dots, b_m$  область  $\tilde{\Omega}$  є опуклий многогранник. Це означає, що будь-яка точка області працездатності є розв'язком системи (4.26).

2. Область працездатності є областю допустимих відхилень  $\delta b_j$  параметрів радіоелементів від номінальних значень. Будь-який вектор відхилень  $\vec{\delta b}$ , що належить області  $\tilde{\Omega}$  забезпечує повну працездатність РЕК з імовірністю  $P_d = 1$ .

3. Чим більші розміри області  $\tilde{\Omega}$ , тим ширші інтервали  $[\delta b_j^-; \delta b_j^+]$  допусків параметрів.

4. Розмір області  $\tilde{\Omega}$  зручно характеризувати діаметром  $d$ , який визначається як відстань між двома найбільш віддаленими точками області. Діаметр області визначається шириною інтервалів  $[\delta y_i^-, \delta y_i^+]$  допустимих значень характеристик РЕК та матрицею чутливості  $S = \{S_{ij}, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, m\}$ . Зокрема, якщо матриця  $S$  погано обумовлена, то  $d \rightarrow \infty$ .

За даних умов метою аналізу точності є оцінка імовірності працездатності  $P_d$  – як імовірності попадання випадкового вектора  $\vec{\delta b} = (\delta b_1, \dots, \delta b_m)^T$  в область працездатності  $\tilde{\Omega}$ . При виробництві, імовірність працездатності характеризує відсоток виходу придатних РЕК. Для її розрахунку використовують таку формулу [94]:

$$P_d = \int \dots \int_{\tilde{\Omega}} W_{\delta}(y_1, \dots, y_N) dy_1 \dots dy_N,$$

де  $W_{\delta}(y_1, \dots, y_N)$  – густина імовірності випадкових відхилень  $\delta y_i(\vec{b})$  характеристик РЕК.

Як бачимо, дана задача достатньо складна, оскільки величини  $\delta y_i(\vec{b})$  є корельовані. Переважно для її розв'язування використовують наближені

методи, зокрема, метод Монте-Карло [94]. При цьому кількість випробовувань, залежно від заданої точності розрахунку, може сягати декількох тисяч, що є основним недоліком такого підходу. До того ж, в методі Монте-Карло задані закони розподілу випадкових значень параметрів радіоелементів змінюються за рахунок похибок заокруглень на ЕОМ, що приводить до втрати точності.

Розглянемо випадок, коли кількість характеристик РЕК та параметрів радіоелементів співпадає, тобто  $N = m$ . Тоді матриця чутливостей  $S$  у системі (4.26) є квадратною ( $m \times m$ ), а область працездатності у просторі параметрів є гіперпаралелепіпедом  $\tilde{\Omega}_m$ . Припустимо, що  $\text{rang}(S) = m$ . В цьому випадку область працездатності можна оцінити допустимим еліпсоїдом (4.4). З урахуванням заміни матриці  $\tilde{F} = \{\phi_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, m}\}$  на матрицю чутливості  $S$  рівняння еліпсоїда матиме такий вигляд:

$$Q_m^- = \left\{ \vec{\delta b} \in R^m \mid (\vec{\delta b} - \vec{\delta b}^-)^T \cdot S^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot S \cdot (\vec{\delta b} - \vec{\delta b}^-) \leq 1 \right\} \quad (4.27)$$

У випадку  $N < m$ , виходячи із фізичних міркувань, можемо до визначити систему (4.26) нерівностями  $\delta b_j^- \leq \delta b_j \leq \delta b_j^+$ , що задають допуски на відхилення параметрів. При цьому утворена система  $N = m$  нерівностей (4.26) залишатиметься лінійною.

Коли  $N > m$ , то система (4.26) переозначена. Для приведення її до випадку  $N = m$  нерівностей, необхідно відкинути неінформативні нерівності, які не впливають або не суттєво впливають на розміри області працездатності. Цю процедуру можна виконати, наприклад, застосуванням методу локалізації з виділенням насиченого блоку.

При дискретній технології виробництва РЕК випадкова величина  $\delta b_j$  розподілена по нормальному або обмеженому нормальному закону [94, 130]. В цьому випадку допустимі значення для відхилень  $\delta b_j$  значень параметрів радіоелементів задаються довірчими інтервалами

$$-\vec{\sigma} \cdot u(\alpha) \leq \vec{\delta b} \leq \vec{\sigma} \cdot u(\alpha), \quad (4.28)$$

де  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)^T$  – вектор відомих стандартних відхилень параметрів радіоелементів;

$u(\alpha)$  – табличне значення (квантиль) нормованого нормального закону розподілу;

$\alpha$  – довірча імовірність.

Знайдемо нижню оцінку  $P_d^- < P_d$  імовірності працездатності РЕК на границі області (4.27) за умов (4.28). З цією метою підставимо у формулу (4.27) замість  $\vec{\delta b}$ , вектор довірчих інтервалів  $[-\vec{\sigma} \cdot u(\alpha); \vec{\sigma} \cdot u(\alpha)]$ , отримаємо

$$u^2(\alpha) \cdot [\vec{\sigma}^T] \cdot S^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot S \cdot [\vec{\sigma}] - 2 \cdot u(\alpha) \cdot \vec{\delta b}^T \cdot S^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot S \cdot [\vec{\sigma}] - \vec{\delta b}^T \cdot S^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot S \cdot \vec{\delta b} = 1. \quad (4.29)$$

Рівняння (4.29) відносно змінної  $u(\alpha)$  є інтервальним квадратним рівнянням. В загальному випадку розв'язками цього рівняння є два інтервали  $[u_1^-(\alpha); u_1^+(\alpha)]$  та  $[u_2^-(\alpha); u_2^+(\alpha)]$ , яким відповідають знайдені у таблиці розподілу [18] інтервали довірчих імовірностей  $[\alpha_1^-; \alpha_1^+]$  та  $[\alpha_2^-; \alpha_2^+]$ . Звідси, оцінка  $P_d^-$  імовірності працездатності РЕК визначається за формулою

$$P_d^- = 1 - \max\{\alpha_1^-; \alpha_1^+; \alpha_2^-; \alpha_2^+\}. \quad (4.30)$$

Слід зауважити, якщо центр  $\vec{\delta b}$  еліпсоїда (4.27) дорівнює нульовому вектору  $\vec{\delta b} = (0, \dots, 0)^T$ , то рівняння (4.29) суттєво спрощується і набуває такого вигляду

$$u^2(\alpha) \cdot \vec{\sigma}^T \cdot S^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot S \cdot \vec{\sigma} = 1. \quad (4.31)$$

З урахуванням симетричності нормального закону розподілу з формули (4.31) отримаємо

$$u(\alpha) = 1 / (\vec{\sigma}^T \cdot S^T \cdot \tilde{E}^{-2} \cdot S \cdot \vec{\sigma})^{\frac{1}{2}}.$$



Відповідно:

$$P_d^- = 1 - \alpha. \quad (4.32)$$

У випадку мікроелектронної технології виробництва (груповий процес) кількість  $N$  контрольованих характеристик РЕК зменшується, випадкові величини  $\delta b_j$  відхилень параметрів радіоелементів корельовані між собою, а вектор  $\vec{\delta b}$  розподілений по багатомірному нормальному закону [94]. Довірчий еліпсоїд розсіювання для вектора  $\vec{\delta b}$  матиме такий вигляд:

$$Q(\alpha, m) = \{ \vec{\delta b} \in R^m \mid \vec{\delta b}^T \cdot D(\vec{\delta b}) \cdot \vec{\delta b} \leq \chi^2(\alpha, m) \}, \quad (4.33)$$

де  $D^{-1}(\vec{\delta b})$  – задана коваріаційна матриця відхилень параметрів радіоелементів від номінальних;  $\chi^2(\alpha, m)$  – квантиль  $\chi^2$  – розподілу. В цьому випадку для оцінки імовірності працездатності використовуємо формулу (4.32), де довірча імовірність  $\alpha$  знаходиться із розв’язку задачі

$$\chi^2(\alpha, m) \longrightarrow \max, \quad Q(\alpha, m) \subseteq \tilde{\Omega}_m. \quad (4.34)$$

Як видно, дана задача є задачею математичного програмування. З геометричної точки зору, задача (4.34) означає вписування  $m$ -вимірної еліпсоїда розсіювання  $Q(\alpha, m)$  максимального об’єму у допустиму область  $\tilde{\Omega}_m$ . У випадку симетричності усіх інтервалів  $[y_i^-, y_i^+]$  допустимих значень вихідних характеристик відносно їхніх номінальних значень  $y_{0i}$  (що є бажаним на практиці), центр ваги допустимої області співпадає з точкою  $\vec{\delta b} = (0, \dots, 0)^T$ . Тоді для розв’язування задачі (4.34) можемо використати співвідношення, отримані при доведенні теореми 4.1. Зокрема, формулу (4.10), яка задає матриці конфігурації множини можливих еліпсоїдів, вписаних у допустиму область  $\tilde{\Omega}_m$ . Замінімо у цій формулі матрицю  $\tilde{F}$  на матрицю  $S$ , а матрицю  $H$  на матрицю  $D(\vec{\delta b}) / \chi^2(\alpha, m)$  конфігурації еліпсоїда (4.33), приведенного до одиничного радіусу, отримаємо

$$D(\vec{\delta b}) / \chi^2(\alpha, m) = S^T \cdot \tilde{E}^{-1} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \tilde{E}^{-1} \cdot S.$$

Розв'яжемо отриману систему відносно матриці  $\Lambda' = \Lambda / \chi^2(\alpha, m)$ :

$$\Lambda' = \tilde{E}^{-1} \cdot S \cdot D^{-1}(\vec{\delta b}) \cdot S^T \cdot \tilde{E}^{-1} \quad (4.35)$$

Згідно розглянутих у підрозділі 4.1 властивостей 1, 2 еліпсоїдів, вписаних у допустиму область, для діагональних елементів  $\Lambda_{ii}$  матриці  $\Lambda$  виконується така умова  $\Lambda_{ii} \leq 1, \forall i = 1, \dots, m$ , при цьому  $\Lambda_{ii} = 1$ , якщо еліпсоїд дотикається до відповідної  $i$ -тої пари граней. Тоді для діагональних елементів розв'язку системи (4.35) виконуватимуться такі умови  $\Lambda'_{ii} \leq 1 / \chi^2(\alpha, m), \forall i = 1, \dots, m$  і при цьому еліпсоїд розсіювання параметрів дотикатиметься до  $i$ -тої пари граней, коли  $\Lambda'_{ii} = 1 / \chi^2(\alpha, m)$ .

Із вище викладеного для даного випадку витікає такий алгоритм оцінки імовірності працездатності РЕК [38]:

Крок 1. Обчислення діагональних елементів  $\Lambda'_{ii}$  матриці  $\Lambda'$  за формулою (4.35).

Крок 2. Розрахунок квантиля  $\chi^2$  - розподілу за формулою

$$\chi^2(\alpha, m) = 1 / \max\{\Lambda'_{ii}\}, i = 1, \dots, m. \quad (4.36)$$

Крок 3. Знаходження у таблицях  $\chi^2$  розподілу довірчої імовірності  $\alpha$  для значення  $\chi^2(\alpha, m)$ .

Крок 4. Розрахунок оцінки імовірності працездатності за формулою (4.32).

Очевидно, що отримана вище описаним способом нижня межа  $P_d^-$  імовірності працездатності, тим ближче до значення  $P_d$ , чим більше допустима область співпадає з довірчим еліпсоїдом (4.33) відхилень параметрів від номінального значення.

*Приклад* [38]. Нехай необхідно оцінити імовірність працездатності  $P_d$  подільника напруги, зображеного на рис.4.4, для заданих:

– номінальних значень параметрів  $R_{01} = 1$  кОм,  $R_{02} = 2$  кОм;

– вхідної напруги  $U_{\text{вх}} = 9$  В;

– допусків на вихідну напругу  $[\delta U_{\text{вих1}}^-; \delta U_{\text{вих1}}^+] = [-0,1; 0,1]$ ,  $[\delta U_{\text{вих2}}^-; \delta U_{\text{вих2}}^+] = [-0,3; 0,3]$  та струм  $[\delta I_{\text{вх}}^-; \delta I_{\text{вх}}^+] = [-0,2; 0,2]$ ;

– технологічного розкиду відносних відхилень  $\delta R_1 = |R_1 - R_{01}| / R_{01}$ ,  $\delta R_2 = |R_2 - R_{02}| / R_{02}$  параметрів радіоелементів, заданого еліпсом розсіювання

$$Q(\alpha, m) = \{ \delta R_1, \delta R_2 \mid (\delta R_1, \delta R_2) \cdot \begin{pmatrix} 7300 & -3310 \\ -3310 & 3200 \end{pmatrix} \cdot (\delta R_1, \delta R_2)^T \leq \chi^2(\alpha, m) \}.$$

Згідно закону Ома, рівняння, що задають зв'язок між вихідними характеристиками подільника рис. 4.4 та параметрами радіоелементів, матимуть такий вигляд:

$$U_{\text{вих1}} = U_{\text{вх}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad U_{\text{вих2}} = U_{\text{вх}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad I_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{вх}}}{R_1 + R_2}.$$

Складемо систему інтервальних рівнянь (4.26)

$$\begin{cases} \delta U_{\text{вих1}}^- \leq S_{11} \cdot \delta R_1 + S_{12} \cdot \delta R_2 \leq \delta U_{\text{вих1}}^+ \\ \delta U_{\text{вих2}}^- \leq S_{21} \cdot \delta R_1 + S_{22} \cdot \delta R_2 \leq \delta U_{\text{вих2}}^+ \\ \delta I_{\text{вх}}^- \leq S_{31} \cdot \delta R_1 + S_{32} \cdot \delta R_2 \leq \delta I_{\text{вх}}^+ \end{cases},$$

де  $S_{11} = S_{22} = U_{\text{вх}} \cdot \frac{R_{01} \cdot R_{02}}{(R_{01} + R_{02})^2}$ ;  $S_{12} = S_{21} = -U_{\text{вх}} \cdot \frac{R_{01} \cdot R_{02}}{(R_{01} + R_{02})^2}$ ;

$$S_{31} = -\frac{R_{01} \cdot U_{\text{вх}}}{(R_{01} + R_{02})^2}; \quad S_{32} = -\frac{R_{02} \cdot U_{\text{вх}}}{(R_{01} + R_{02})^2}.$$

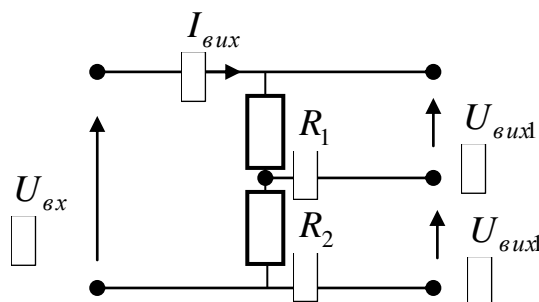


Рис. 4.4.

В отриману систему підставимо вихідні дані:

$$\begin{cases} -0,1 \leq 2 \cdot \delta R_1 - 2 \cdot \delta R_2 \leq 0,1 \\ -0,3 \leq -2 \cdot \delta R_1 + 2 \cdot \delta R_2 \leq 0,3 \\ -0,2 \leq \delta R_1 + 2 \cdot \delta R_2 \leq 0,2 \end{cases}$$

Як бачимо, друге рівняння системи неінформативне, тому допустиму область відхилень параметрів радіоелементів

$$\delta R_1 = \ln(R_1) - \ln(R_{01}) \approx |R_1 - R_{01}| / R_{01}, \quad \delta R_2 = \ln(R_2) - \ln(R_{02}) \approx |R_2 - R_{02}| / R_{02}$$

розраховуватимемо із такої системи

$$\begin{cases} -0,1 \leq 2 \cdot \delta R_1 - 2 \cdot \delta R_2 \leq 0,1 \\ -0,2 \leq \delta R_1 + 2 \cdot \delta R_2 \leq 0,2 \end{cases}.$$

Розв'язок  $\tilde{\Omega}_{m=2}$  отриманої системи зображено на рис.4.5. На цьому ж рисунку зображена область розсіювання  $Q(\alpha, m=2)$  для довірчої імовірності  $\alpha = 0,02$

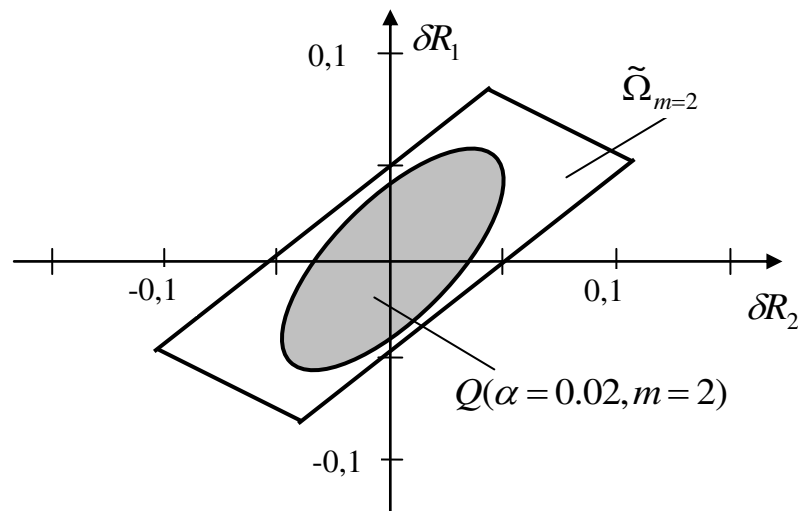


Рис. 4.5.

Тепер оцінимо імовірність працездатності подільника напруги при заданому технологічному розкиді параметрів. З цією метою співставимо допустиму  $\tilde{\Omega}_{m=2}$  та технологічну  $Q(\alpha, m=2)$  область розсіювання. Враховуючи, що центри симетрії цих областей співпадають, для розв'язування даної задачі використаємо розроблений алгоритм.

Розв'яжемо систему рівнянь (4.35) (крок 1). У нашому випадку:

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D(\delta R_1, \delta R_2) = \begin{pmatrix} 7300 & -3310 \\ -3310 & 3200 \end{pmatrix}.$$

Тоді розв'язок (4.35) матиме вигляд

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7300 & -3310 \\ -3310 & 3200 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1251 & -0,065 \\ -0,065 & 0,092 \end{pmatrix}.$$

Далі за формулою (4.36) розраховуємо  $\chi^2(\alpha, m=2) = 1/0,1251 = 7,99$  (крок 2).

Користуючись таблицями  $\chi^2$ -розподілу [18], знайдемо значення довірчої імовірності  $\alpha > 0,005$  (крок 3) – і підставимо його у формулу для розрахунку нижньої межі  $P_d^-$  імовірності працездатності (4.32) (крок 4). В результаті отримаємо:  $P_d > 0,995$ .

Для загального випадку і при значній розмірності еліпсоїда розсіювання, знаходження імовірності працездатності ускладнюється через необхідність застосування чисельних процедур до розв'язування задачі (4.34).

Тим часом відомо, що мікроелектронна технологія виготовлення РЕК є груповим процесом, при якому відхилення параметрів  $\delta b_j$  визначаються сумою індивідуальних та загальних відхилень [94]. При цьому останні є визначальними. Своєю чергою, загальні відхилення параметрів радіоелементів визначаються параметрами технологічного процесу, кількість яких суттєво менша, ніж кількість параметрів радіоелементів. Наприклад, на стадії герметизації мікросхем термореактивною пластмасою цими параметрами є температура герметизації, тичність пластмаси та тривалість її желатинізації [76].

Цю особливість мікроелектронної технології виробництва РЕК – як групового процесу, можна використати для спрощення розрахунків імовірності працездатності. Для цього взамін функцій  $\delta y_i(\vec{b})$  відхилень характеристик РЕК у системі нерівностей (4.26) будемо розглядати функції від вектора параметрів

$\bar{\tau}$  технологічного процесу, тобто  $\delta y_i(\bar{\tau})$ , а елементи  $S_{ij}$  матриці чутливості – як чутливості  $i$ -тих характеристик РЕК до зміни значень  $j$ -тих параметрів технологічного процесу. В цьому випадку розмірності допустимого  $Q_m^-$  та довірчого  $Q(\alpha, m)$  еліпсоїдів суттєво зменшуються.

Отже, якщо параметри технологічного процесу не залежні між собою, то для оцінки імовірності працездатності об'єкту використовуємо формули (4.29), (4.30) та (4.32) із заміною, відповідно: вектора  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)^T$  на вектор стандартних відхилень параметрів технологічного процесу; вектора  $\vec{\delta b}$  на вектор  $\vec{\delta \tau}$ . Якщо ж випадкові величини  $\delta \tau_j$  відхилень параметрів технологічного процесу корельовані, а вектор  $\vec{\delta \tau}$  розподілений по багатомірному нормальному закону, то в цьому випадку розв'язуємо задачу (4.34) із заміною у формулі (4.33), відповідно: матриці  $D^{-1}(\vec{\delta b})$  на  $D^{-1}(\vec{\delta \tau})$  – коваріаційну матрицю відхилень параметрів; вектора  $\vec{\delta b}$  на вектор  $\vec{\delta \tau}$ . Тоді імовірність працездатності оцінюємо за формулою (4.32).

## ВИСНОВКИ

1. Отримано допустиму еліпсоїдальну оцінку області параметрів лінеаризованої моделі статичної системи, що дозволяє збільшити допуски на параметри системи. Доведено оптимальність отриманої еліпсоїдальної оцінки для випадку, коли кількість вихідних характеристик системи співпадає з кількістю параметрів. Для цього ж випадку виведена формула, що задає множину допустимих областей параметрів у вигляді  $m$ - вимірних еліпсоїдів, проведено аналіз властивостей отриманої множини які дозволяють підібрати еліпсоїдальну оцінку допустимої області у такий спосіб, щоб максимально наблизити її до вигляду технологічної області розсіювання параметрів.

2. Показано умови існування області допусків, коли статична система описується інтервальною моделлю і розроблено ітераційний алгоритм, який дозволяє сумістити процедури локалізації області параметрів моделі і допустимого еліпсоїдального оцінювання і тим самим оптимізувати витрати на проведення експерименту для досягнення заданої допустимої області параметрів.

3. Формалізовано і проведено аналіз задачі допустимого оцінювання параметрів лінеаризованої інтервальної моделі в умовах ідентифікації базових функцій, який дозволив виробити підходи до вибору конфігурації допустимої еліпсоїдальної оцінки.

4. На основі аналізу властивостей допустимої області параметрів статичної системи розроблено спрощений метод та алгоритми оцінювання імовірності її працездатності для випадку, коли значення параметрів моделі або логарифми їхніх значень мають нормальний закон розподілу. Ефективність методу проілюстрована на прикладі оцінювання імовірності працездатності радіоелектронного кола.

## РОЗДІЛ 5

ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ ПРИ ПОБУДОВІ ІНТЕРВАЛЬНИХ  
МОДЕЛЕЙ СТАТИЧНИХ СИСТЕМ

Існуючі підходи до задач планування експерименту при інтервальних даних, розглянуті у підрозділі 1.5, зорієнтовані на побудову насичених планів, коли кількість дослідів  $N$  співпадає з кількістю  $m$  невідомих параметрів. Як показано у підрозділі 1.5, критерії оптимальності насичених інтервальних експериментів, переважно, задають розміри многогранника  $\Omega$ , чи розміри його еліпсоїдальної оцінки. Саме на основі цих критеріїв побудована більшість підходів до планування інтервального експерименту. Тим часом в задачах ідентифікації інтервальних моделей більш важливим завданням є забезпечення їхньої гарантованої точності прогнозування на всій області експерименту  $\chi$ . В цих випадках більш обґрунтовано використати,  $I_G$ -критерій, який задає максимальну на області  $\chi$  похибку прогнозування  $\Delta_{y(\bar{x})}$ . Однак результати, наведені у підрозділах 1.4 та 1.5, засвідчують, що планування  $I_G$ -оптимальних експериментів ускладнюється кусковістю функції похибки прогнозування  $\Delta_{y(\bar{x})}$  та вимогами забезпечення гарантованої точності прогнозування моделі, яка досягається тільки за умови  $N > m$ . З метою розвитку теорії планування оптимального інтервального експерименту, зокрема, побудови  $I_G$ -оптимальних планів для лінійних (за входами та параметрами) моделей у даному розділі розв'язуються такі задачі [39, 48]:

- знаходження умов еквівалентності між  $I_G$ -оптимальними планами та планами, що мінімізують розміри множини  $\Omega$  [48];
- планування  $I_G$ -оптимальних насичених експериментів [48];
- побудови процедури послідовно-оптимального планування експериментів [39].

З іншого боку, застосування локалізаційних методів при побудові інтервальних моделей, вимагає зосередження процедур планування



експерименту на забезпеченні певних властивостей локалізаційної області та інтервальних моделей, побудованих на її основі. Для випадку локалізації з виділенням насиченого блоку у даному розділі наведений метод побудови апріорних планів інтервального експерименту [72].

### 5.1. Планування апріорних $I_G$ - та $I_E$ -оптимальних експериментів

Нехай відомі результати інтервального експерименту (1.23) із  $N \geq m$  спостереженнями, коли область експерименту  $\chi$  задана  $n$ -вимірною кулею із центром у нульовій точці та з радіусом  $\rho$

$$\chi = \left\{ \vec{x} \in R^n \mid \vec{x}^T \cdot \vec{x} \leq \rho^2 \right\}, \quad (5.1)$$

і отримано розв'язок задачі ідентифікації у вигляді множини лінійних інтервальних моделей

$$\hat{y}(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot \vec{b}, \quad \vec{b} \in \Omega. \quad (5.2)$$

У цьому випадку максимальне значення похибки прогнозування лінійної інтервальної моделі (5.2) досягається на поверхні кулі (5.1) і обчислюється за формулою (1.36)  $\max_{\vec{x} \in \chi} \Delta_{y(\vec{x})} = I_G = \rho \cdot \max_{\vec{b}_p, \vec{b}_s \in \Omega} \|\vec{b}_p - \vec{b}_s\|$ , наведеною у пункті 1.4.1. Як видно з цієї формули, максимальна похибка прогнозування залежить від розмірів множини  $\Omega$ , зокрема, від її діаметру, квадрат якого задається  $I_E$ -критерієм і для загального випадку  $N \geq m$  визначається за такою формулою:

$$I_E = \left( \max_{\vec{b}_p, \vec{b}_s \in \Omega} \|\vec{b}_p - \vec{b}_s\| \right)^2. \quad (5.3)$$

**Т е о р е м а 5.1.** Для лінійної інтервальної моделі (5.2) статичної системи на заданій кулею (5.1) області експерименту з  $N \geq m$ ,  $I_G$ - та  $I_E$ -оптимальні плани є еквівалентними.

*Доведення.* Порівнюючи формули (1.36) та (5.3) приходимо до рівності

$$I_G = \rho \cdot \sqrt{I_E}, \quad (5.4)$$

яка підтверджує справедливість теореми.

Отже, при виконанні умов теореми 5.1, плани, які мінімізують діаметр області параметрів моделі, одночасно забезпечують мінімум максимальної похибки прогнозування.

Перейдемо тепер до задачі знаходження  $I_G$ - та  $I_E$ -оптимальних насичених планів.

Нехай, інтервальна похибка  $\Delta(\bar{x})$  спостережень є постійною в усіх точках області експерименту (5.1), тобто  $\Delta(\bar{x}) = \Delta, \forall \bar{x} \in \mathcal{X}$ . Оскільки для побудови лінійної (за вхідними змінними) інтервальної моделі статичної системи (5.2) матриця плану експерименту  $X$  співпадає з матрицею значень базових функцій  $F$ , то задачу знаходження  $I_G$ -оптимальних планів (“ $I_E$ -оптимальних” опускаємо в силу теореми 5.1) розглядаємо як задачу знаходження такої матриці  $F$ , яка забезпечує мінімальне значення  $I_G$ -критерію.

Вираз для  $I_G$ -критерію у випадку насиченого експерименту ( $N=m$ ) отримаємо із формули (1.36), підставляючи замість векторів  $\vec{b}_p, \vec{b}_s$  їхні значення  $\vec{b}_p = F^{-1} \cdot \vec{Y}_p, \vec{b}_s = F^{-1} \cdot \vec{Y}_s$ , обчислені за формулою (1.31)

$$I_G = \rho \cdot \max_{p,s=1,\dots,2^m} \left\| F^{-1} \cdot (\vec{Y}_p - \vec{Y}_s) \right\|.$$

Враховуючи, що вектори  $\vec{Y}_p, \vec{Y}_s$  утворені як можливі комбінації меж інтервальних даних  $y_i^-, y_i^+, i=1, \dots, m$ , наприклад:  $\vec{Y}_p = (y_1^-, y_2^+, y_3^-, \dots, y_m^+)^T$ ,  $\vec{Y}_s = (y_1^+, y_2^-, y_3^-, \dots, y_m^-)^T$ , а інтервальна похибка є постійною, тобто  $\Delta(\bar{x}_i) = 0,5 \cdot (y_i^+ - y_i^-) = \Delta, \forall i=1, \dots, m$ , отримана формула для  $I_G$ -критерію набуде такого вигляду:

$$I_G = 2 \cdot \Delta \cdot \rho \cdot \max_{p=1,\dots,2^{m-1}} \left\| F^{-1} \cdot \vec{e}_p \right\|, \quad (5.5)$$

де  $\vec{e}_p$  – вектор, складений із компонент  $\pm 1$ .

Оскільки область експерименту задана  $n$ -вимірною кулею (5.1), а в лінійній моделі (5.2) відсутня постійна складова  $b_0$ , то будь-яку точку плану  $\bar{x}_i$  для побудови цієї моделі можна задати напрямком  $\bar{z}_i$ ,  $\|\bar{z}_i\|=1$  та відстанню  $r_i$ ,  $0 \leq r_i \leq \rho$  від центру кулі, тобто  $\bar{x}_i = r_i \cdot \bar{z}_i$ . Визначимо матрицю плану експерименту  $F$  за допомогою уведеного позначення:

$$F = (r_1 \cdot \bar{z}_1, \dots, r_m \cdot \bar{z}_m)^T. \quad (5.6)$$

Тепер використовуючи вираз (5.5) з урахуванням (5.6), задачу знаходження  $I_G$ -оптимальних насичених планів формалізуємо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \Delta \cdot \rho \cdot \max_{p=1, \dots, 2^{m-1}} \left\| \left( (r_1 \cdot \bar{z}_1, \dots, r_m \cdot \bar{z}_m)^T \right)^{-1} \cdot \bar{e}_p \right\| \xrightarrow{Z, r_i} \min, \\ 0 \leq r_i \leq \rho, \|\bar{z}_i\|=1, i=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.7)$$

де  $Z = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)^T$ .

**Т е о р е м а 5.2.** Розв'язком задачі (5.7) є план

$$F^* = \rho \cdot Z^*, \quad (5.8)$$

де  $Z^* = (\bar{z}_1^*, \dots, \bar{z}_m^*)^T$  – будь-яка ортогональна матриця.

*Доведення.* Покажемо справедливість теореми.

Нехай матриця  $Z$  у виразі (5.7) є фіксованою, не виродженою та  $\|\bar{z}_i\|=1, i=1, \dots, m$ . Тоді з урахуванням перетворення

$$\left\| \left( (r_1 \cdot \bar{z}_1, \dots, r_m \cdot \bar{z}_m)^T \right)^{-1} \cdot \bar{e}_p \right\| = \left\| \left( \frac{1}{r_1} \cdot \bar{z}_1, \dots, \frac{1}{r_m} \cdot \bar{z}_m \right)^T \cdot \bar{e}_p \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{1}{r_i^2} \cdot (\bar{z}_i^T \cdot \bar{e}_p)^2},$$

де  $(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_m)^T = Z^{-1}$ , задача (5.7) набуде вигляду

$$2 \cdot \Delta \cdot \rho \cdot \max_{p=1, \dots, 2^{m-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{1}{r_i^2} \cdot \tilde{z}_i^T \cdot \bar{e}_p} \xrightarrow{r_i} \min, \quad 0 \leq r_i \leq \rho, \quad i=1, \dots, m. \quad (5.9)$$

Очевидно, що розв'язком цієї задачі є  $r_i = \rho, \forall i=1, \dots, m$ . Як наслідок, з урахуванням позначення (5.6) витікає, що розв'язком задачі (5.7) є матриця  $F^* = \rho \cdot Z$ . Тепер покажемо, що при цьому матриця  $Z = Z^*$  є ортогональною.

Для цього перетворимо вираз (5.7) використовуючи розв'язок задачі (5.9):

$$2 \cdot \Delta \cdot \max_{\rho=1, \dots, 2^{m-1}} \sqrt{\vec{e}_p^T \cdot (Z \cdot Z^T)^{-1} \cdot \vec{e}_p} \xrightarrow{Z} \min, \|\vec{z}_i\| = 1, i = 1, \dots, m. \quad (5.10)$$

Нехай розв'язком (5.10) є ортогональна матриця  $Z^*$ . Тоді згідно формули (5.5) для  $I_G$ -критерію, з урахуванням позначення (5.6) отримаємо

$$I_G = 2 \cdot \Delta \cdot \rho \max_{\rho=1, \dots, 2^{m-1}} \|(\rho \cdot Z^*)^{-1} \cdot \vec{e}_p\| = 2 \cdot \Delta \cdot \sqrt{m}$$

і, відповідно, згідно формули (5.4) для  $I_E$ -критерію, будемо мати

$$I_E = \frac{4 \cdot \Delta^2 \cdot m}{\rho^2}. \quad (5.11)$$

Припустимо, що на множині не вироджених матриць  $Z$ ,  $\|\vec{z}_i\| = 1, i = 1, \dots, m$ , існує така матриця  $Z$ , яка забезпечує значення  $I_E$ -критерію менше, ніж отримане за формулою (5.11). Тоді, використовуючи формулу (1.44) для  $I_A$ -критерію (задає суму квадратів довжин  $2^{m-1}$  діагоналей многогранника  $\Omega$ ), з урахуванням заміни  $F = \rho \cdot Z$  отримаємо таку нерівність:

$$I_A = \frac{2^{m+1} \cdot \Delta^2}{\rho^2} \cdot \text{Sp}(Z \cdot Z^T)^{-1} < 2^{m-1} \cdot I_E = 2^{m-1} \cdot \frac{4 \cdot \Delta^2 \cdot m}{\rho^2}, \quad (5.12)$$

де  $\text{Sp}(\cdot)$  – означає слід матриці.

Враховуючи, що матриця  $(Z \cdot Z^T)^{-1}$  є додатно означена, то із праці [157, теорема 1.1.15] витікає:

$$\text{Sp}(Z \cdot Z^T)^{-1} \geq m \cdot (\det(Z \cdot Z^T)^{-1})^{\frac{1}{m}} = m \cdot \left( \frac{1}{\det(Z \cdot Z^T)} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (5.13)$$

З іншого боку, у відповідності з нерівністю Адамара для додатно означених матриць [157, теорема 1.1.11] та з урахуванням, що  $\|\vec{z}_i\| = 1, i = 1, \dots, m$ , отримаємо

$$\det(Z \cdot Z^T) \leq 1. \quad (5.14)$$

Підставляючи нерівність (5.14) у (5.13), а результат  $(\text{Sp}(Z \cdot Z^T)^{-1} \geq m)$  у

формулу (5.12), отримаємо

$$I_A \geq \frac{2^{m+1} \cdot \Delta^2 \cdot m}{\rho^2}. \quad (5.15)$$

Очевидно, що нерівність (5.15) протирічить нерівності (5.12) і прийнятим вище припущенням. Отже мінімальні значення  $I_G$ -,  $I_E$ -критеріїв досягаються, коли розв'язком задачі (5.10) є ортогональна матриця  $Z^*$ , що підтверджує справедливість теореми 5.2.

Із теореми 5.2 витікає два важливих наслідки.

**Н а с л і д о к 1.** У випадку реалізації  $I_G$ - та  $I_E$ -оптимальних насичених планів з постійною інтервальною похибкою  $\Delta(\vec{x}) = \Delta$  спостережень на області (5.1), максимальне значення похибки прогнозування лінійних інтервальних моделей (5.2) дорівнює  $2 \cdot \Delta \cdot \sqrt{m}$ .

**Н а с л і д о к 2.** Для лінійної інтервальної моделі статичної системи (5.2) на області експерименту, заданої  $n$ -вимірною кулею (5.1)  $I_G$ - та  $I_E$ -оптимальні насичені плани, є ортогональними.

На рис. 5.1 схематично зображені  $I_G$ - та  $I_E$ -оптимальні насичені плани для випадків  $m=2$  та  $m=3$ .

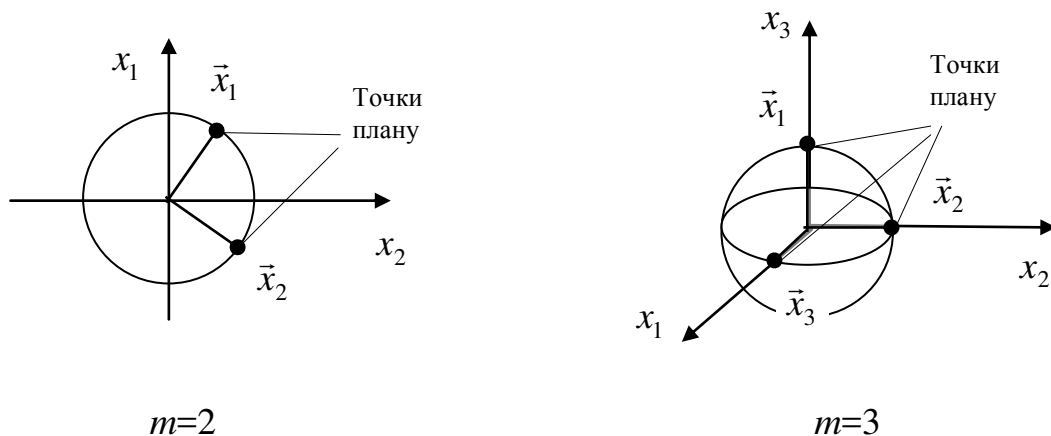


Рис. 5.1.

**Т е о р е м а 5.3.** Для лінійної інтервальної моделі статичної системи (5.2) на області експерименту, заданої  $n$ -вимірною кулею (5.1)  $I_G$ -,  $I_E$ -,  $I_D$ -,  $I_A$ -оптимальні насичені плани еквівалентні між собою і ортогональні.

*Доведення.* Спочатку покажемо еквівалентність для даного випадку між ортогональними  $I_G$ -,  $I_E$ -оптимальними насиченими планами та  $I_A$ -оптимальним насиченим планом. Для цього підставимо матрицю (5.8), яка для моделі (5.2) на області експерименту (5.1) задає ортогональні  $I_G$ -,  $I_E$ -оптимальні насичені плани, у вираз (1.44) для  $I_A$ -критерія, отримаємо

$$I_A = \frac{2^{m+1} \cdot \Delta^2 \cdot m}{\rho^2}.$$

Враховуючи справедливість нерівності (5.15) для будь-якого плану, побудованого на багатовимірній кулі (5.1) для моделі (5.2), приходимо до еквівалентності між планом (5.8) та  $I_A$ -оптимальним планом.

Тепер для умов теореми 5.3 покажемо еквівалентність між ортогональним планом (5.8) та  $I_D$ -оптимальним планом. Підставимо матрицю (5.8) у вираз (1.43) для  $I_D$ -критерія, отримаємо

$$I_D = \frac{4^m \cdot \Delta^{2 \cdot m}}{\rho^{2 \cdot m}}.$$

З іншого боку, підставляючи будь-яку матрицю плану  $F = \rho \cdot Z$ ,  $\|\bar{z}_i\| = 1, i = 1, \dots, m$ , заданого на області експерименту (5.1) у вираз (1.43) для  $I_D$ -критерія, отримаємо

$$I_D = \frac{4^m \cdot \Delta^{2 \cdot m}}{\rho^{2 \cdot m}} \cdot \det(Z \cdot Z^T)^{-1}.$$

Звідси згідно нерівності (5.14) для будь-якої матриці плану  $F = \rho \cdot Z$  приходимо до нерівності

$$I_D \geq \frac{4^m \cdot \Delta^{2 \cdot m}}{\rho^{2 \cdot m}}.$$

Отже мінімальне значення  $I_D$ -критерію досягається на області експерименту (5.1) для ортогонального насиченого плану (5.8), що засвідчує еквівалентність між цим планом та  $I_D$ -оптимальним насиченим планом і в цілому між  $I_G$ -,  $I_E$ -,  $I_D$ -,  $I_A$ -оптимальними насиченими планами.

## 5.2. Послідовно $I_G$ -оптимальне планування експериментів

Використання насичених планів в задачах ідентифікації не завжди дозволяє забезпечити гарантовану точність прогнозування інтервальних моделей. За даних умов актуальними стають задачі побудови послідовно-оптимальних планів, для яких взамін забезпечення мінімального значення критерію оптимальності при заданій кількості дослідів  $N$  забезпечують мінімум критерію оптимальності покроково.

Для побудови послідовних  $I_G$ -оптимальних планів можна скористатися таким алгоритмом [39, 48].

Крок 1. Планування  $I_G$ -оптимального насиченого експерименту ( $N = m$ ).

Крок  $k$ . Планування одного спостереження за критерієм мінімізації максимальної похибки прогнозування інтервальної моделі, отриманої після проведення спланованого на попередньому кроці насиченого експерименту (після першого кроку) чи спостереження (після  $k-1$  кроку).

В загальному випадку реалізація  $k$ -го кроку даного алгоритму є достатньо складною через необхідність обчислення максимальної похибки прогнозування інтервальної моделі  $I_G = \max_{\bar{x} \in \mathcal{X}} \Delta_{y(\bar{x})}$ , отриманої після попереднього кроку. Для випадку лінійної інтервальної моделі (5.2), коли область експерименту задана  $n$ -вимірною кулею (5.1), із застосуванням формули (5.4) обчислення  $\max_{\bar{x} \in \mathcal{X}} \Delta_{y(\bar{x})}$  дещо спрощується. Однак при великій розмірності вектора оцінок параметрів моделі  $\vec{b}$  кількість вершин області  $\Omega$  зростає і знаходження значення  $I_E$ -критерію і відповідно  $I_G$ -критерію стає нереальним. З іншого боку, для синтезу  $I_G$ -оптимальних планів можуть бути використані властивості лінійних інтервальних моделей у разі насиченого експерименту, отримані у підрозділі 2.2.

Нехай необхідно побудувати множину лінійних інтервальних моделей (5.2) із похибкою прогнозування не більшою від заданої  $\max_{\bar{x} \in \mathcal{X}} \Delta_{y(\bar{x})}$  на області

експерименту  $\chi$  у вигляді многогранника

$$\chi = \{ \vec{x} \in R^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \vec{x}_i, \lambda_i \geq 0 \forall i, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \} \quad (5.16)$$

із вершинами  $\vec{x}_i$ . Припустимо, що лінійні інтервальні моделі (5.2) включають постійну складову  $b_0$ , яку також необхідно визначати в процесі ідентифікації, тобто  $m=n+1$ . За даних умов, якщо  $m$  спостережень розмістити у вершинах області (5.16), то згідно (2.13) максимальне значення похибки прогнозування інтервальної моделі (5.2) досягатиметься в точці плану  $\vec{x}_i$  з максимальною похибкою спостережень.

Припустимо, що інтервальна похибка  $\Delta(\vec{x})$  спостережень є постійною в усіх точках області експерименту (5.16). Знайдемо  $I_G$ -оптимальний насичений план на цій області (крок 1).

Замінімо у формулі для розрахунку похибки прогнозування лінійної інтервальної моделі (1.34) вектор  $\vec{b}_p - \vec{b}_s$  на еквівалентний вектор для насиченого експерименту  $2 \cdot \Delta \cdot F^{-1} \cdot \vec{e}_p$ . Після проведення нескладних перетворень, задачу знаходження  $I_G$ -оптимального насиченого плану на першому кроці алгоритму запишемо у такому вигляді:

$$I_G = 2 \cdot \Delta \cdot \max_{\vec{x}} \sum_{i=1}^m |\vec{x}^T \cdot \vec{f}_i| \xrightarrow{F} \min, \vec{x} \in \chi,$$

де  $f_i$  –  $i$ -тий стовпець матриці  $F^{-1}$ .

Із урахуванням (2.13), отриманий вираз матиме такий вигляд:

$$I_G = 2 \cdot \Delta \cdot (|\vec{x}_1 \cdot \vec{f}_1| + \dots + |\vec{x}_i \cdot \vec{f}_i| + \dots + |\vec{x}_m \cdot \vec{f}_m|) \xrightarrow{F} \min, \vec{x} \in \chi, \quad (5.17)$$

де  $\vec{x}_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) – будь-яка вершина області (5.16) (в силу рівності інтервальних похибок. Оскільки  $F^{-1} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m)$ , то із розв'язку задачі (5.17) витікає, що мінімальне значення  $I_G$ -критерію дорівнює  $2 \cdot \Delta$  і досягається при  $F = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)^T$ , тобто, коли точки плану розміщені у вершинах області (5.16).



На  $k$ -тому кроці алгоритму спостереження проводяться у точці плану насиченого експерименту, знайденого на першому кроці, у якій похибка прогнозування є максимальною. При цьому максимальна похибка прогнозування  $\max_{\bar{x} \in \chi} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})} = \max_{\bar{x}_i, i=1, \dots, m} \Delta_{\hat{y}(\bar{x}_i)}$  визначається із виразу

$$\max_{\bar{x}_i, i=1, \dots, m} \Delta_{\hat{y}(\bar{x}_i)} = \min\{\hat{y}_i^+, y_i^+\} - \max\{\hat{y}_i^-, y_i^-\},$$

де  $\hat{y}_i^+, \hat{y}_i^-, y_i^+, y_i^-$  – верхня та нижня межі інтервалу прогнозування моделі та вимірюваного інтервалу виходу на  $k$ -тому кроці, відповідно.

Такий вибір точки спостереження (для моделі випадкової обмеженої похибки в даних [71]) дозволяє на області експерименту (5.16) покроково мінімізувати максимальну похибку прогнозування.

На практиці область  $\chi$  експерименту, переважно, задається  $n$ -вимірною кулею, чи кубом. Позначимо цю область  $\chi^-$  і будемо вимагати щоб  $\chi^- \subset \chi$ , тобто вершини  $\bar{x}_i$  опуклого многогранника, заданого (5.16), виберемо так, щоб він включав область  $\chi^-$  ( $n$ -вимірну кулю, чи куб). Тоді за допомогою вище розглянутого алгоритму знайдемо послідовний план, який при реалізації гарантовано забезпечить на усій області  $\chi^-$  похибку прогнозування  $\Delta_{y(\bar{x})}$ , меншу від заданої  $\max_{\bar{x}_i, i=1, \dots, m} \Delta_{\hat{y}(\bar{x}_i)}$ .

Для практичної реалізації запропонованого підходу вершини  $\bar{x}_i$  многогранної області (5.16) необхідно розміщувати так, щоб при її заданих розмірах (об'єму чи периметрі), розмір вписаної області  $\chi^-$  був би максимальним. Враховуючи, що область (5.16) в  $n$ -вимірному просторі “входів” являє многогранник з  $n+1$  вершинами, то оптимальний варіант розміщення вершин  $\bar{x}_i$  ( $i=1, \dots, n+1$ ) забезпечуємо за умови рівності довжин усіх її ребер, тобто коли вона є тетраедр (для випадку  $n=2$ -рівносторонній трикутник).

Уведені умови дозволяють переписати вираз (5.16) так:

$$\chi = \{ \bar{x} \in R^n \mid \bar{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \bar{x}_i, \lambda_i \geq 0 \forall i, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1,$$

$$\| \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \| = \dots = \| \bar{x}_i - \bar{x}_j \| = \dots = \| \bar{x}_{m-1} - \bar{x}_m \| \neq 0, i, j = 1, \dots, m, i \neq j \} \quad (5.18)$$

На рис. 5.2 наведена область експерименту (5.18) із вписаною у неї кулею  $\chi^-$ .

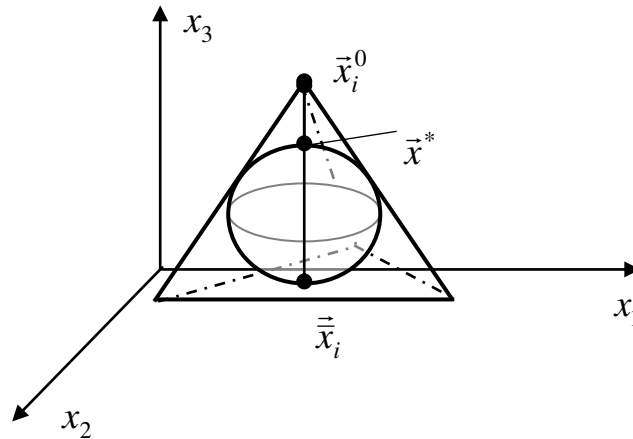


Рис. 5.2.

Знайдемо вираз для обчислення максимальної похибки  $\max_{\bar{x} \in \chi^-} \Delta_{y(\bar{x})}$  на  $n$ -вимірній кулі  $\chi^-$ , радіусом  $\rho$ , якщо максимальне значення похибки прогнозування інтервальної моделі  $\max_{\bar{x}_i, i=1, \dots, m} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$  на області (5.17) на  $k$ -тому кроці алгоритму досягається у точці  $\bar{x}_i^0$ .

Спочатку, користуючись рис. 5.2, знайдемо координати точки  $\bar{x}^*$  на кулі у якій досягається максимальне значення похибки. Як видно із рис. 5.2 ця точка кулі знаходиться найближче до точки  $\bar{x}_i^0$ . Отже вона належить відрізку  $\bar{x}_i, \bar{x}_i^0$ . У силу властивостей тетраедра, координати точки  $\bar{x}_i$  обчислюємо як центр ваги грані, якій належить дана точка

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \bar{x}_i - \bar{x}_i^0}{n},$$

Тоді похибку прогнозування розрахуємо як лінійну комбінацію похибок у

точках грані

$$\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \Delta_{y(\bar{x}_i)} - \max_{\bar{x}_i, i=1, \dots, m} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}}{n}.$$

Звідси отримаємо координати шуканої точки на кулі

$$\bar{x}^* = \bar{x}_i + 2 \cdot \rho \cdot \frac{\bar{x}_i^0 - \bar{x}}{\|\bar{x}_i^0 - \bar{x}\|},$$

і відповідне значення похибки прогнозування у ній, тобто максимальне значення на кулі

$$\max_{\bar{x} \in \chi^-} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})} = \max_{\bar{x}_i, i=1, \dots, m} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \cdot \left( 1 - \frac{\|\bar{x}_i^0 - \bar{x}^*\|}{\|\bar{x}_i^0 - \bar{x}\|} \right) + \Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \cdot \frac{\|\bar{x}_i^0 - \bar{x}^*\|}{\|\bar{x}_i^0 - \bar{x}\|}. \quad (5.19)$$

При застосуванні алгоритму синтезу послідовно-оптимальних планів за критерієм  $I_G = \max_{\bar{x} \in \chi^-} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$  на вписаній у область (5.18)  $n$ -вимірній кулі, необхідно, щоб радіус  $\rho$  цієї кулі був максимальним. Оскільки центри кулі і області (5.18) співпадають, а куля максимального радіусу дотикається до граней у точках, що є центрами ваг, відповідних граней, то

$$\rho = \left\| \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \bar{x}_i}{n+1} - \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i}{n} \right\|, \quad (5.20)$$

де  $\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \bar{x}_i}{n+1}$  – вираз, що задає центр кулі;

$\frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i}{n}$  – центр ваги грані області (5.18).

*Приклад.* Нехай необхідно організувати послідовно  $I_G$ -оптимальний експеримент із інтервальними даними на області (5.18) для побудови

інтервальної моделі статичної системи із двома входами і одним виходом у вигляді лінійної функції у вигляді  $y_0(\vec{x}) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2$ . При цьому необхідно, щоб на крузі  $\chi^-$ , із радіусом  $\rho=1$  і з центром у нульовій точці  $(0, \dots, 0)$ , інтервальна модель забезпечувала похибку прогнозування не більшу від заданого значення  $\max_{\vec{x} \in \chi^-} \Delta \hat{y}(\vec{x})$ .

Оскільки шукана інтервальна модель є лінійною, то для побудови послідовного  $I_G$ -оптимального експерименту можна застосувати вище описаний алгоритм.

Спочатку, необхідно знайти вершини  $\vec{x}_i$  ( $i=1, \dots, 3$ ) області експерименту (5.18). Враховуючи, що центри круга і рівностороннього трикутника (5.18) у нашому випадку співпадають з нульовою точкою, а також користуючись формулою (5.20) отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \|\vec{x}_1 + \vec{x}_2\| = 2 \\ \|\vec{x}_1 + \vec{x}_3\| = 2 \\ \|\vec{x}_2 + \vec{x}_3\| = 2 \\ \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 = (0, \dots, 0)^T \end{cases} .$$

Зафіксуємо координати вершини  $\vec{x}_1 = (0, x_{12})$  і підставимо у отриману систему.

Розв'язком системи є такі вершини трикутника (5.18):

$$\vec{x}_1 = (0, 2)^T; \quad \vec{x}_2 = (\sqrt{3}, -1)^T; \quad \vec{x}_3 = (-\sqrt{3}, -1)^T .$$

Чисельний експеримент проводився за умов, коли інтервальні значення виходу  $[y^-(\vec{x}_i); y^+(\vec{x}_i)]$  отримувались відповідно із виразів

$$y^-(\vec{x}_i) = y(\vec{x}_i) - 3, \quad y^+(\vec{x}_i) = y(\vec{x}_i) + 3,$$

де  $y(\vec{x}_i) = 7 + 2 \cdot x_{1i} + 4 \cdot x_{2i} + e_i$ ,

$e_i \in [-3; 3]$  – обмежена похибка моделювалась із застосуванням генератора випадкових чисел.

Задане максимально допустиме значення похибки прогнозування  $\max_{\vec{x} \in \chi^-} \Delta \hat{y}(\vec{x})$

інтервальної моделі на крузі не більше від 1. Максимальна похибка прогнозування  $\max_{\bar{x} \in \mathcal{X}^-} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$  на крузі розраховувалась за формулою (5.19).

Результати чисельного моделювання та розрахункові значення похибок прогнозування наведені у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1

## Результати чисельного експерименту

№ спостереж.	№ кроку	$\bar{x}_i^T$	$[y_i^-; y_i^+]$	$\Delta_{\hat{y}(\bar{x}_i)}$	$\max_{\bar{x}_i, i=1, \dots, 3} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$	$\max_{\bar{x} \in \mathcal{X}^-} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$
1	2	3	4	5	6	7
1	1	(0,2)	[13,19;19,19]	6	6	6
2		$(\sqrt{3}, -1)$	[-3,03;2,97]	6		
3		$(-\sqrt{3}, -1)$	[1,04;7,04]	6		
4	2	(0,2)	[9,13;15,13]	1,94	6	6
5	3	$(\sqrt{3}, -1)$	[-3,00;3,00]	5,97	6	6
6	4	$(-\sqrt{3}, -1)$	[3,49;9,49]	3,55	5,97	4,895
7	5	$(\sqrt{3}, -1)$	[-4,78;1,22]	4,22	4,22	3,728
8	6	$(\sqrt{3}, -1)$	[-2,70;3,30]	3,92	3,92	3,528
9	7	$(\sqrt{3}, -1)$	[-0,86;5,14]	2,08	3,55	3,037
10	8	$(-\sqrt{3}, -1)$	[4,48;10,48]	2,56	2,56	2,377
11	9	$(-\sqrt{3}, -1)$	[5,79;11,79]	1,25	2,08	1,918
12	10	$(\sqrt{3}, -1)$	[-5,16;0,84]	1,7	1,94	1,785
13	11	(0,2)	[11,66;17,66]	1,94	1,94	1,785
14	12	(0,2)	[9,31;15,31]	1,94	1,94	1,785
15	13	(0,2)	[11,90;17,90]	1,94	1,94	1,785

1	2	3	4	5	6	7
16	14	(0,2)	[9,33;15,33]	1,94	1,94	1,785
17	15	(0,2)	[14,24;20,24]	0,89	1,7	1,49
18	16	$(\sqrt{3},-1)$	[-4,96;1,04]	1,7	1,7	1,49
19	17	$(\sqrt{3},-1)$	[-3,07;2,93]	1,7	1,7	1,49
20	18	$(\sqrt{3},-1)$	[-6,00;0,00]	0,86	1,25	1,125
21	19	$(-\sqrt{3},-1)$	[2,24;8,24]	1,25	1,25	1,125
22	20	$(-\sqrt{3},-1)$	[3,37;9,37]	1,25	1,25	1,125
23	21	$(-\sqrt{3},-1)$	[3,70;9,70]	1,25	1,25	1,125
24	22	$(-\sqrt{3},-1)$	[4,06;10,06]	1,25	1,25	1,125
25	23	$(-\sqrt{3},-1)$	[2,54;8,54]	1,25	1,25	1,125
26	24	$(-\sqrt{3},-1)$	[2,90;8,90]	1,25	1,25	1,125
27	25	$(-\sqrt{3},-1)$	[5,64;11,64]	1,25	1,25	1,125
28	26	$(-\sqrt{3},-1)$	[0,85;6,85]	1,06	1,06	0,998

Графіки залежності максимальних похибок прогнозування від кількості спостережень на областях, заданих, відповідно, рівностороннім трикутником (5.18) та кругом, наведені на рис. 5.3.

Як видно із рисунка, для усіх спостережень виконується умова

$$\max_{\bar{x}_i, i=1, \dots, 3} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \geq \max_{\bar{x} \in \mathcal{X}^-} \Delta_{\hat{y}(\bar{x})}$$

і при цьому значення максимальної похибки прогнозування на області експерименту монотонно зменшується. Її задане максимальне значення на крузі досягається після проведення 26 кроків алгоритму, тобто 28 спостережень. Тим часом, як для забезпечення цього ж значення похибки на області (5.18) не достатньо 28 спостережень (див. табл. 5.1).

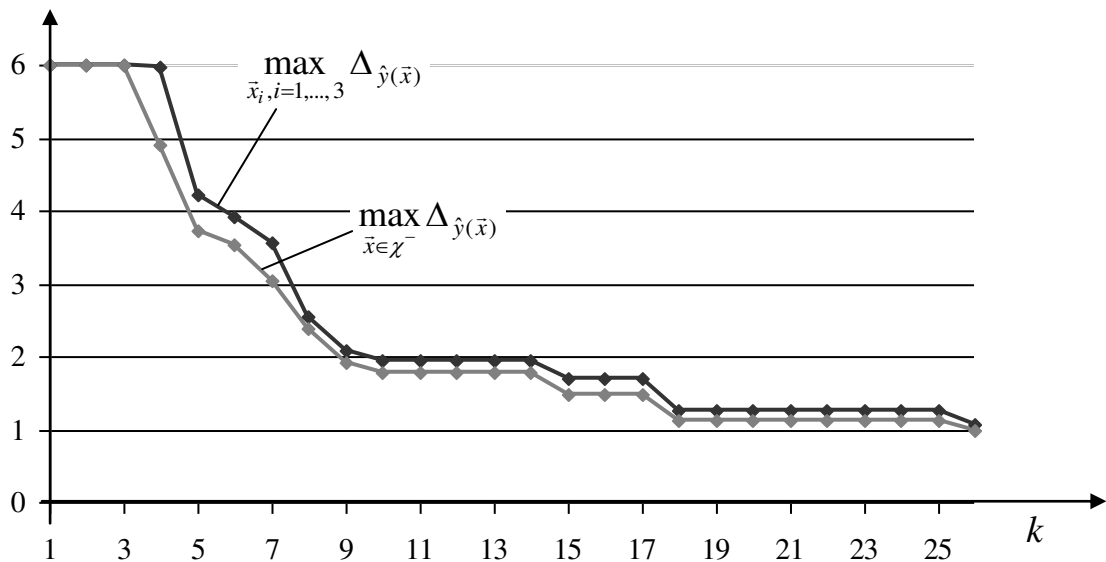


Рис. 5.3

Наведені на рис. 5.3 графіки також ілюструють неінформативні спостереження, внаслідок проведення яких максимальна похибка прогнозування не змінюється. Зауважимо, що проведенні спостереження на перших трьох кроках є інформативними, оскільки забезпечують зменшення похибки прогнозування у цих точках (див. табл.5.1).

Результати чисельного експерименту дозволяють зробити заключення про те, що найбільш ефективно зменшення похибки прогнозування досягається на початку експерименту, тобто коли її значення є достатньо великим. Так з рис. 5.3 видно, що похибка прогнозування зменшилась у три рази з 1 по 9 кроки, тим часом як за решту 17-ть кроків, на яких 13 спостережень є не інформативними, вона зменшилась всього у два рази.

Отже отримані результати підтверджують правильний вибір критерію планування точки спостереження на  $k$ -тому кроці, – де похибка прогнозування максимальна, і працездатність розробленого алгоритму послідовно  $I_G$ -оптимального планування.

### 5.3. Оптимальне планування експерименту у випадку локалізації параметрів інтервальної моделі з виділенням насиченого блоку

Застосування локалізаційних методів для експериментальної ідентифікації інтервальних моделей вимагає розробки процедур планування експерименту, що забезпечують певні властивості локалізаційної області. Відповідно, критерії оптимальності таких експериментів повинні задавати розміри локалізаційної області.

У даному підрозділі розглядаються задачі синтезу критеріїв оптимальності планів експерименту з  $N > m$  спостереженнями у випадку застосування методу локалізації із виділенням насиченого блоку експерименту [72]. На основі розроблених критеріїв та проведених досліджень властивостей інтервальних похибок розглядаються методи синтезу апріорних оптимальних планів та приклади їх застосування [72].

5.3.1. К р и т е р і ї о п т и м а л ь н о с т і “ л о к а л і з а ц і й н о г о ” е к с п е р и м е н т у з в и п а д к о в и м и і н т е р в а л ь н и м и п о х и б к а м и.

Нехай задана деяка область зміни значень входів  $x_1, \dots, x_n$  статичної системи, тобто область експерименту  $\chi$ , структура лінійно-параметричної функції (1.21) і необхідно побудувати апріорний план експерименту з інтервальними спостереженнями виходів  $[y_i^-, y_i^+]$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $N > m$  у такий спосіб, щоб у результаті його реалізації забезпечити мінімальні розміри області локалізації  $\Omega_m$  розв'язку  $\Omega$  системи інтервальних рівнянь (1.25). Для цього у розглянутому методі локалізації з виділенням насиченого блоку (див. підрозділ 3.2) необхідно щоб вигляд області  $\Omega_m$  був максимально подібним до вигляду області  $\Omega$ . Враховуючи, що конфігурації областей  $\Omega_m$  і  $\Omega$  визначаються, відповідно, матрицями планів  $F_m$  та  $F$  системи інтервальних рівнянь (1.25), найбільшої подібності між ними можна досягнути за умови  $F = F_m$  ( $\det(F) \neq 0$ ). Своєю чергою, у випадку  $N > m$ , розглянута умова виконується тільки тоді, коли



система інтервальних рівнянь (1.25) побудована на базі спостережень в  $m$  різних точках  $\bar{x}_i$ , тобто коли частина спостережень  $N-m$ , дублюється. Тоді основна рекурентна формула (3.8) методу локалізації з виділенням насиченого блоку  $y_i^-(k+1) = y_i^-(k) + \delta_i^-(k+1)$ ,  $y_i^+(k+1) = y_i^+(k) - \delta_i^+(k+1)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , приймає вигляд формули (3.22)  $[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)] = [y_i^-(k); y_i^+(k)] \cap [y_{k+1}^-; y_{k+1}^+]$ , у якій  $k$  – означає номер повторного спостереження у точці  $\bar{x}_i$ .

У випадку відомих імовірнісних властивостей похибок спостережень, запропонований спосіб вибору матриці плану  $F$  дозволяє побудувати оптимальний “локалізаційний” експеримент.

Припустимо, що похибки  $e_i$  повторних спостережень у точках  $\bar{x}_i$  є незалежними, випадковими та адитивними. Остання умова вимагає виконання такого співвідношення:  $y_i(k) = y_{0i} + e_i(k)$ . Нехай також відома функція щільності розподілу імовірностей  $W(e_i)$  похибок на інтервалі  $[-\Delta_i; \Delta_i]$ .

Зауважимо, що друге припущення стосовно відомої функції  $W(e_i)$  для синтезу оптимальних апріорних планів у певних випадках не потрібне.

Розглянуті припущення відповідають моделі випадкової інтервальної похибки спостережень, властивості якої наведені у підрозділі 1.3.

Уведемо позначення  $\Delta_{N_i}$  для ширини результуючого інтервалу  $[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)]$ , отриманого у точці  $\bar{x}_i$  після  $N_i = k+1$  повторних спостережень. Для заданої кількості спостережень її значення визначається розмахом  $R_i$  випадкової похибки  $e_i$ :

$$\Delta_{N_i} = y_i^+(k+1) - y_i^-(k+1) = 2 \cdot \Delta_i - R_i. \quad (5.21)$$

Як відомо [36], розмах випадкової величини є випадковим. Тому ширина  $\Delta_{N_i}$  також є випадковою.

Користуючись формулою для визначення інтегральної функції  $w(R_i)$  розподілу розмаху випадкової величини  $e_i$ , наведеної у праці [36]

$$w(R_i) = N_i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} w(e_i) \cdot (W(e_i + R_i) - W(e_i))^{N_i-1} de_i,$$

із урахуванням обмеженості похибки  $e_i$ , отримаємо формулу для функції  $w(\Delta_{N_i})$ , що задає розподіл випадкової ширини  $\Delta_{N_i}$  результуючого інтервалу  $[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)]$

$$w(\Delta_{N_i}) = 1 - N_i \cdot \int_{-\Delta_i}^{\Delta_i} w(e_i) \cdot (W(e_i + 2 \cdot \Delta_i - R_i) - W(e_i))^{N_i-1} de_i. \quad (5.22)$$

Із останньої обчислимо математичне сподівання  $M(\Delta_{N_i})$  та дисперсію  $D(\Delta_{N_i})$  ширини цього інтервалу, відповідно:

$$M(\Delta_{N_i}) = \int_0^{2 \cdot \Delta_i} \Delta_{N_i} \cdot d(w(\Delta_{N_i})), \quad (5.23)$$

$$D(\Delta_{N_i}) = \int_0^{2 \cdot \Delta_i} (M(\Delta_{N_i}) - \Delta_{N_i})^2 \cdot d(w(\Delta_{N_i})). \quad (5.24)$$

Враховуючи прийняту модель випадкової інтервальної похибки та формули (1.43), (1.44) та (1.45), відповідно, для  $I_D$ -,  $I_A$ - та  $I_E$ -критеріїв оптимальності насичених планів, побудуємо такі критерії оптимальності “локалізаційних” планів:

$$M(I_D) = M\left[\prod_{i=1}^m \Delta_{N_i}^2 \cdot \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1}\right], \quad (5.25)$$

$$M(I_A) = 2^{m-1} \cdot M[Sp((F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \text{diag}(\Delta_{N_1}^2, \dots, \Delta_{N_i}^2, \dots, \Delta_{N_m}^2))], \quad (5.26)$$

$$M(I_E) = M\left[\max_{p=1, \dots, 2^{m-1}} \{\bar{\Delta}_p^T(N) \cdot (F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \bar{\Delta}_p(N)\}\right], \quad (5.27)$$

де  $\bar{\Delta}_p^T(N) = (\pm \Delta_{N_1}, \dots, \pm \Delta_{N_i}, \dots, \pm \Delta_{N_m})$  – вектори, компонентами яких є ширина результуючих інтервалів із від’ємними або додатними знаками в залежності від значення індексу  $p$ .

Як видно, ці критерії задають математичні сподівання, відповідно: квадрату об’єму, суми квадратів довжин діагоналей та квадрату довжини

максимальної діагоналі області локалізації.

Виразимо уведені критерії через характеристики випадкової ширини  $\Delta_{N_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$  у точках спостережень  $\bar{x}_i$ .

Спочатку проведемо перетворення у формулі (5.25). Для цього винесемо не випадкову величину за знак математичного сподівання. У результаті отримаємо:

$$M(I_D) = \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot M[\prod_{i=1}^m \Delta_{N_i}^2]. \quad (5.28)$$

Оскільки випадкові величини  $\Delta_{N_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$  є незалежними, то справедливим є такий вираз:

$$M[\prod_{i=1}^m \Delta_{N_i}^2] = \prod_{i=1}^m (M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})). \quad (5.29)$$

Підставимо отриману формулу у вираз (5.28), отримаємо

$$M(I_D) = \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^m (M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})). \quad (5.30)$$

Тепер проведемо подібні перетворення над формулами для  $M(I_A)$ - та  $M(I_E)$ -критеріїв. У результаті отримаємо:

$$M(I_A) = 2^{m-1} \cdot Sp[(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \text{diag}(M^2(\Delta_{N_1}) + D(\Delta_{N_1}), \dots, M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i}), \dots, M^2(\Delta_{N_m}) + D(\Delta_{N_m}))], \quad (5.31)$$

$$M(I_E) = \max_{p=1, \dots, 2^{m-1}} \{ \tilde{\Delta}_p^T(N) \cdot (F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \tilde{\Delta}_p(N) \} + Sp[(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \text{diag}(D(\Delta_{N_1}), \dots, D(\Delta_{N_i}), \dots, D(\Delta_{N_m}))], \quad (5.32)$$

де  $\tilde{\Delta}_p^T(N) = (\pm M(\Delta_{N_1}), \dots, \pm M(\Delta_{N_i}), \dots, \pm M(\Delta_{N_m}))$  – вектори, компонентами яких є математичні сподівання ширини результуючих інтервалів із додатними або від'ємними знаками.

Отже задача планування “локалізаційного” експерименту на заданій області  $\chi$  за умов випадкової інтервальної похибки і заданій загальній кількості спостережень  $N$  полягає у знаходженні спектру оптимального плану ( $m$  оптимальних точок спостережень, що з урахуванням структури інтервальної моделі задають матрицю  $F_m$ ) і частот  $N_i, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m N_i = N$ , виходячи із умови мінімізації відповідного критерію, заданого формулою (5.30), (5.31) чи (5.32), тобто

$$M(I_D) \xrightarrow{F_m, N_i} \min, \bar{x}_i \in \chi, \sum_{i=1}^m N_i = N, N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}, i = 1, \dots, m, \quad (5.33)$$

$$M(I_A) \xrightarrow{F_m, N_i} \min, \bar{x}_i \in \chi, \sum_{i=1}^m N_i = N, N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}, i = 1, \dots, m, \quad (5.34)$$

$$M(I_E) \xrightarrow{F_m, N_i} \min, \bar{x}_i \in \chi, \sum_{i=1}^m N_i = N, N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}, i = 1, \dots, m. \quad (5.35)$$

### 5.3.2. Синтез $M(I_D)$ -оптимальних планів.

Для синтезу оптимальних локалізаційних експериментів необхідно розв’язати одну із задач математичного програмування (5.33)-(5.35). На практиці, при значній розмірності матриці плану  $F_m$  ( $m > 10$ ) кількість невідомих, що необхідно знайти із розв’язку цих задач суттєво зростає і досягає декількох сотень. Очевидно, що при таких умовах синтез оптимальних планів є практично неможливим. З іншого боку, застосування властивостей інтервальних похибок дозволяє спростити побудову  $M(I_D)$ -оптимальних планів.

Уведемо таке позначення:

$$f(N_i) = \frac{M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})}{\Delta_i^2}. \quad (5.36)$$

Розглянемо деякі загальні властивості функції  $f(N_i)$ , які залежать від властивостей обмеженої похибки спостережень  $e_i$ .

Не обмежуючи загальності, припустимо, що похибка  $e_i$  має рівномірний закон розподілу, тобто

$$w(e_i) = \begin{cases} 0, & e_i < -\Delta_i \\ \frac{e_i + \Delta_i}{2 \cdot \Delta_i}, & e_i \in [-\Delta_i; \Delta_i] \\ 1, & e_i > \Delta_i \end{cases}$$

Знайдемо вираз для функції щільності розподілу ширини  $\Delta_{N_i}$  результуючого інтервалу за формулою (5.22), і підставимо його у формулу (5.23), отримаємо [71]:

$$M(\Delta_{N_i}) = \int_0^{2 \cdot \Delta_i} N_i \cdot (N_i - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot \Delta_i}\right)^{N_i} \cdot (\Delta_{N_i})^2 \cdot (\Delta_{N_i} - 2 \cdot \Delta_i)^{N_i-2} \cdot d\Delta_{N_i} = \frac{4 \cdot \Delta_i}{N_i + 1}.$$

Аналогічно, застосовуючи формули (5.22), (5.24), отримаємо вираз для дисперсії

$$D(\Delta_{N_i}) = \int_0^{2 \cdot \Delta_i} \left(\frac{4 \cdot \Delta_i}{N_i + 1} - \Delta_{N_i}\right)^2 \cdot N_i \cdot (N_i - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot \Delta_i}\right)^{N_i} \cdot \Delta_{N_i} \cdot (\Delta_{N_i} - 2 \cdot \Delta_i)^{N_i-2} \cdot d\Delta_{N_i} = \frac{8 \cdot \Delta_i^2 \cdot (N_i - 1)}{(N_i + 2) \cdot (N_i + 1)^2}.$$

Перепишемо вираз (5.36) із урахуванням отриманих формул для математичного сподівання  $M(\Delta_{N_i})$  та дисперсії  $D(\Delta_{N_i})$  ширини  $\Delta_{N_i}$  результуючого інтервалу:

$$f(N_i) = \left( \frac{16}{(N_i + 1)^2} + \frac{8 \cdot (N_i - 1)}{(N_i + 2) \cdot (N_i + 1)^2} \right). \quad (5.37)$$

Аналіз виразу (5.37), дозволив встановити такі важливі для розробки методів планування апріорних оптимальних планів локалізаційного експерименту властивості функції  $f(N_i)$ .

1. Функція  $f(N_i)$  є монотонно спадною.
2.  $f(N_i) > 0 \quad \forall N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}$ .
3. Якщо  $N_i = 1$ , то  $f(N_i) = 4$  (для рівномірного закону розподілу).

4. Якщо  $N_i \longrightarrow \infty$ , то  $f(N_i) \longrightarrow 0$ .

Зауважимо, що наведені властивості є справедливими у випадку будь-якого обмеженого закону розподілу похибки  $e_i$ , за виключенням властивості 3, що власне дозволяє стверджувати, що усі наведені нижче результати не залежать від вигляду неперервної на інтервалі  $[-\Delta_i; \Delta_i]$  функції  $W(e_i)$  щільності розподілу імовірностей даної похибки.

Спираючись на властивості функції  $f(N_i)$  перейдемо до синтезу  $M(I_D)$ -оптимальних планів. Для цих цілей спочатку сформулюємо і доведемо допоміжне твердження.

Л е м а 5.1. Розв'язок задачі (5.33) еквівалентний результату розв'язування такої послідовності задач:

$$\det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^m \Delta_i^2 \xrightarrow{F_m} \min, \bar{x}_i \in \mathcal{X}; \quad (5.38)$$

$$\prod_{i=1}^m \left( (M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})) \cdot \Delta_i^{-2} \right) \xrightarrow{N_i} \min, \sum_{i=1}^m N_i = N, \\ N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}, i = 1, \dots, m. \quad (5.39)$$

*Доведення.* Для доведення леми достатньо показати, що формула (5.30) для розрахунку значень  $M(I_D)$ -критерію складається із двох додатних та не залежних між собою співмножників.

Як видно з формули (5.30), цими співмножниками є цільові функції задач математичного програмування (5.38), (5.39). Оскільки матриця  $F_m \cdot F_m^T$  є додатно означена, то

$$\det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^m \Delta_i^2 > 0,$$

і до того ж значення цільової функції задачі (5.38) не залежать від  $N_i$ . Із властивості 2 функції  $f(N_i)$  витікає, що

$$\prod_{i=1}^m \left( (M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})) \cdot \Delta_i^{-2} \right) > 0, \forall N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\},$$

а підставляючи у цільовій функції задачі (5.39), замість виразу

$$(M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})) \cdot \Delta_i^{-2}$$

формулу (5.37), отримаємо

$$\prod_{i=1}^m f(N_i) \xrightarrow{N_i} \min, \sum_{i=1}^m N_i = N, N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}, i = 1, \dots, m. \quad (5.40)$$

Як видно, значення цільової функції оптимізаційної задачі (5.40), еквівалентної задачі (5.39), не залежать від матриці  $F_m$ , що підтверджує справедливість леми 5.1.

**Т е о р е м а 5.4.** Спектр  $M(I_D)$ -оптимального плану співпадає зі спектром  $I_D$ -оптимального насиченого плану на спільній області експерименту  $\chi$ , а частоти у точках спектру є однаковими, тобто  $N_1 = \dots = N_i = \dots = N_m = \frac{N}{m}$ , якщо  $N$  кратне  $m$ .

*Доведення.* Порівнюючи цільову функцію задачі (5.38), розв'язком якої є матриця  $F_m$ , тобто спектр  $M(I_D)$ -оптимального плану, із виразом (1.43), що задає  $I_D$ -критерій бачимо, що вони співпадають із точністю до постійного множника. Отже, якщо області експерименту при побудові цих планів співпадають, то і їхні спектри також співпадають.

Тепер покажемо, що при цьому частоти у точках спектру є однакові. Для цього замінимо задачу (5.40) без врахування обмежень дискретності плану  $N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), на задачу знаходження екстремального значення такої функції Лагранжа:

$$L(N_1, \dots, N_i, \dots, N_m, \lambda) = \prod_{i=1}^m f(N_i) + \lambda \cdot (\sum_{i=1}^m N_i - N),$$

де  $\lambda$  – множник Лагранжа.

Запишемо умови існування екстремуму цієї функції :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(f(N_1))}{\partial N_1} \cdot \prod_{i=2}^m f(N_i) = -\lambda \\ \vdots \\ \frac{\partial(f(N_i))}{\partial N_i} \cdot \prod_{j=1, i \neq j}^m f(N_j) = -\lambda \\ \vdots \\ \frac{\partial(f(N_m))}{\partial N_m} \cdot \prod_{i=1}^{m-1} f(N_i) = -\lambda \\ \sum_{i=1}^m N_i - N = 0 \end{array} \right.$$

звідси

$$\frac{\partial(f(N_1))}{\partial N_1} \cdot \prod_{i=2}^m f(N_i) = \dots = \frac{\partial(f(N_i))}{\partial N_i} \cdot \prod_{j=1, i \neq j}^m f(N_j) = \dots = \frac{\partial(f(N_m))}{\partial N_m} \cdot \prod_{i=1}^{m-1} f(N_i); \sum_{i=1}^m N_i = N.$$

Оскільки функція  $f(N_i)$  є монотонно спадною (властивість 1), то отримані умови справедливі тільки у випадку  $f(N_1) = \dots = f(N_i) = \dots = f(N_m)$ , звідси  $N_1 = \dots = N_i = \dots = N_m$ . Із урахуванням обмеження

$$\sum_{i=1}^m N_i = N,$$

отримаємо:  $N_1 = \dots = N_i = \dots = N_m = \frac{N}{m}$ .

Розв'язок задачі (5.40) отримано без урахування дискретності плану  $N_i \in \{1, 2, \dots, N - m + 1\}$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Однак, за умовою теореми, число  $N$  кратне  $m$ , що завжди забезпечує дискретність плану.

У випадку порушення умови кратності кількості спостережень до кількості невідомих параметрів, частоти у точках спектру оптимального плану повинні мінімально відрізнятися.

**Т е о р е м а 5.5.** Спектр  $M(I_D)$ -оптимального плану співпадає зі спектром  $D$ -оптимального насиченого плану регресійного експерименту, якщо виконується хоча б одна із умов:

1.  $\Delta(\bar{x}) = \Delta, \sigma(\bar{x}) = \sigma, \forall \bar{x} \in \chi$ .
2.  $\Delta^2(\bar{x}) = \sigma^2(\bar{x}), \forall \bar{x} \in \chi$ .



Справедливість теореми безпосередньо витікає із теореми 5.4 та теореми еквівалентності між  $I_D$ -оптимальними насиченими планами та  $D$ -оптимальними насиченими планами регресійного експерименту [31].

Застосування теорем 5.4 та 5.5 суттєво спрощує синтез  $M(I_D)$ -оптимальних планів, оскільки по-перше не вимагає знання імовірнісних властивостей випадкової обмеженої похибки спостережень, а по-друге дозволяє використати існуючі каталоги  $D$ -оптимальних насичених планів регресійного експерименту для поліноміальних моделей статичних систем [17].

У додатку В наведені таблиці характеристик та матриці  $M(I_D)$ -оптимальних планів, синтезованих на базі теорем 5.4 та 5.5 для випадків, коли області експерименту задані  $n$ -вимірним кубом

$$\mathcal{X} = \{ \bar{x} \in R^n \mid |x_k| \leq 1, k=1, \dots, n \},$$

та  $n$ -вимірною кулею із радіусом, що дорівнює 1

$$\mathcal{X} = \{ \bar{x} \in R^n \mid \bar{x}^T \cdot \bar{x} \leq 1 \},$$

інтервальна похибка постійна на усій області експерименту ( $\Delta(\bar{x}) = \Delta, \forall \bar{x} \in \mathcal{X}$ ), а статична система описується лінійними чи квадратичними моделями різних типів. Особливості побудови та застосування вказаних таблиць розглянуті у підрозділі 6.3.

5.3.3. У м о в и е к в і в а л е н т н о с т і м і ж  $M(I_D)$ - та  $M(I_A)$ - та  $M(I_E)$ -о п т и м а л ь н и м и п л а н а м и. У загальному випадку для синтезу  $M(I_A)$ - та  $M(I_E)$ -оптимальних планів необхідно застосовувати складні процедури розв'язування задач математичного програмування, які особливо складно реалізувати при зростанні розмірності матриці плану. Тому важливо встановити ті випадки, коли вказані плани еквівалентні  $M(I_D)$ -оптимальним планам, для синтезу яких можливе застосування теореми 5.5.

Для отримання співвідношень між кількісними характеристиками планів, які задаються сподіваними значеннями  $M(I_D)$  та  $M(I_A)$  скористуємося

нерівністю, наведеною у праці [157, теорема 1.1.15]

$$Sp(B \cdot C) \geq m \cdot (\det(C) \cdot \det(B))^{1/m}, \quad (5.41)$$

де  $B, C$  – додатно означені матриці.

Підставляючи у нерівність(5.41), замість матриці  $B$ , додатно означену матрицю  $(F_m \cdot F_m^T)^{-1}$ , а замість  $C$  додатно означену діагональну матрицю  $diag(M^2(\Delta_{N_1}) + D(\Delta_{N_1}), \dots, M^2(\Delta_{N_m}) + D(\Delta_{N_m}))$ , отримаємо

$$Sp[(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot diag(M^2(\Delta_{N_1}) + D(\Delta_{N_1}), \dots, M^2(\Delta_{N_m}) + D(\Delta_{N_m}))] \geq m \cdot [\det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \det(diag(M^2(\Delta_{N_1}) + D(\Delta_{N_1}), \dots, M^2(\Delta_{N_m}) + D(\Delta_{N_m})))]^{1/m}. \quad (5.42)$$

Звідси, урахуваючи формули (5.30) та (5.31) для  $M(I_D)$ - та  $M(I_A)$ -критеріїв, маємо

$$M(I_A)/2^{m-1} \geq m \cdot (M(I_D))^{1/m}. \quad (5.43)$$

Оскільки  $M(I_A)$ -критерій задає математичне сподівання суми квадратів довжин  $2^{m-1}$  діагоналей, а  $M(I_E)$ -критерій – квадрат довжини найдовшої діагоналі області локалізації, то справедливою є така нерівність:

$$M(I_A) \leq 2^{m-1} \cdot M(I_E). \quad (5.44)$$

На основі встановлених співвідношень між кількісними характеристиками планів можна отримати умови еквівалентності між  $M(I_D)$ -,  $M(I_A)$ - та  $M(I_E)$ -оптимальними планами. Сформулюємо ці умови у вигляді теореми.

**Т е о р е м а 5.6.**  $M(I_D)$  -,  $M(I_A)$ - та  $M(I_E)$ -оптимальні плани є еквівалентними між собою у випадку лінійної багатофакторної моделі системи (5.2) на області експерименту, заданої  $n$ -вимірною кулею (5.1).

*Доведення.* Покажемо справедливість теореми, спираючись на вище отримані властивості  $M(I_D)$ -оптимальних планів.

Із теорем 5.3 та 5.4 витікає, що для лінійної багатофакторної моделі (5.2), на області експерименту, заданій кулею (5.1), спектр  $M(I_D)$ -оптимального

плану задається ортогональною матрицею  $F_m$ , а частоти рівномірно розподілені у точках спектру, тобто  $N_i = N/m$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Тоді даний план, забезпечує мінімальне значення  $M(I_D)$ -критерію:

$$\min_{F_m, N_i} M(I_D) = m \cdot (M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i}))^m, \quad (5.45)$$

розраховане за формулою (5.30). Значення  $M(I_A)$ -критерію для  $M(I_D)$ -оптимального плану отримуємо за формулою (5.31)

$$M(I_A) = 2^{m-1} \cdot m \cdot (M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})). \quad (5.46)$$

Підставляючи отримані значення  $M(I_A)$ - та  $M(I_D)$ -критеріїв для матриці  $F_m$  та частот  $M(I_D)$ -оптимального плану у нерівність (5.43) перетворюємо її до рівності, що означає еквівалентність  $M(I_A)$ - та  $M(I_D)$ -оптимальних планів між собою.

З іншого боку, підставляючи у нерівність (5.44) значення  $M(I_A)$ -критерію та значення  $M(I_E)$ -критерію

$$M(I_E) = m \cdot (M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i})), \quad (5.47)$$

розраховане за формулою (5.32) тепер вже для матриці  $F_m$  та частот  $M(I_A)$ - та  $M(I_D)$ -оптимального плану, також перетворюємо її до рівності, що засвідчує еквівалентність  $M(I_D)$ -,  $M(I_A)$ - та  $M(I_E)$ -оптимальних планів між собою і підтверджує справедливість теореми 5.6.

**Н а с л і д о к.** Спектри  $M(I_D)$ ,  $M(I_A)$ - та  $M(I_E)$ -оптимальних планів для лінійних багатofакторних моделей (5.2) на області експерименту, заданої  $n$ -вимірною кулею задаються ортогональними матрицями, а частоти рівномірно розподілені у точках спектру.

Із урахуванням вище викладеного можемо стверджувати, що проблема активної ідентифікації параметрів лінійних за входами інтервальних моделей (5.2), на області, заданій багатовимірною кулею на основі критеріїв  $M(I_D)$ ,

$M(I_A)$ - та  $M(I_E)$ -оптимальності є вирішеною.

#### 5.3.4. Приклади синтезу $M(I_A)$ -оптимальних планів.

Розглянемо випадок, коли застосування теореми 5.6 для побудови  $M(I_A)$ -оптимального плану неможливе. Наприклад, коли лінійна багатофакторна модель містить постійну складову, тобто не відповідає моделі (5.2) [72].

Нехай необхідно побудувати  $M(I_A)$ -оптимальні плани для чотирьох випадків із різною загальною кількістю спостережень  $N = 3, 6, 9, 12$  спостережень на області експерименту  $x_i \in [-1; 1]$  із метою локалізації області параметрів лінійної інтервальної моделі, структура якої задана рівнянням  $y_0(x) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$ . При цьому відомо, що похибка спостережень  $e_i$  є адитивною  $y_i = y_{0i} + e_i$  та обмеженою  $-\Delta \leq e_i \leq \Delta$ , із рівномірним законом розподілу випадкових значень

$$w(e_i) = \begin{cases} 0, & e_i < -\Delta \\ \frac{e_i + \Delta}{2 \cdot \Delta}, & e_i \in [-\Delta; \Delta] \\ 1, & e_i > \Delta \end{cases} .$$

Для отримання формального запису задачі побудови  $M(I_A)$ -оптимальних планів (5.34) спочатку скористуємося формулою (5.31) для  $M(I_A)$ -критерію, враховуючи, що у даному випадку спектр плану задається матрицею

$$F_m = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix},$$

$M^2(\Delta_{N_i}) + D(\Delta_{N_i}) = f(N_i) \cdot \Delta^2$ , де функція  $f(N_i)$  для рівномірного закону задається виразом (5.37). Для спрощення покладемо  $\Delta = 1$ .

Після нескладних перетворень, задачу знаходження  $M(I_A)$ -оптимального плану (5.34) при  $N=3$  формалізуємо у вигляді такої задачі математичного програмування:

$$\frac{16 \cdot \Delta^2}{(1+x_1^2) \cdot (1+x_2^2) - (1+x_1 \cdot x_2)^2} \cdot [(1+x_2^2) \cdot \left( \frac{2}{(N_1+1)^2} + \frac{(N_1-1)}{(N_1+2) \cdot (N_1+1)^2} \right) + (1+x_1^2) \cdot \left( \frac{2}{(N_2+1)^2} + \frac{(N_2-1)}{(N_2+2) \cdot (N_2+1)^2} \right)] \xrightarrow{x_1, x_2, N_1, N_2} \min, x_1, x_2 \in [-1; 1],$$

$$N_1 + N_2 = 3, N_1, N_2 \in \{1, 2\}.$$

Аналогічний вигляд матимуть задачі знаходження  $M(I_A)$ -оптимальних планів для випадків  $N=6, N=9, N=12$  із заміною умови  $N_1 + N_2 = 3, N_1, N_2 \in \{1, 2\}$  на відповідні умови:  $N_1 + N_2 = 6, N_1, N_2 \in \{1, \dots, 5\}$ ;  $N_1 + N_2 = 9, N_1, N_2 \in \{1, \dots, 8\}$ ;  $N_1 + N_2 = 12, N_1, N_2 \in \{1, \dots, 11\}$ .

Для розв'язання отриманих задач застосуємо ППП MATLAB.

У результаті отримаємо для усіх задач матрицю, що задає спектр оптимальних планів

$$F_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а якщо  $N=3$ , то  $N_1=1, N_2=2, M(I_A)=6$ ; якщо  $N=6$ , то  $N_1=3, N_2=3, M(I_A)=2,4$ ; якщо  $N=9$ , то  $N_1=4, N_2=5, M(I_A)=1,371$ ; якщо  $N=12$ , то  $N_1=6, N_2=6, M(I_A)=0,898$ .

Для порівняння сподіваних значень суми квадратів довжин діагоналей області параметрів, заданих значеннями  $M(I_A)$ -критерію, із реальними, проводились чисельні експерименти для отриманих планів. При цьому інтервальні значення виходу  $[y^-(\bar{x}_i); y^+(\bar{x}_i)]$  отримувались із виразів  $y^-(\bar{x}_i) = y(\bar{x}_i) - 1, y^+(\bar{x}_i) = y(\bar{x}_i) + 1$ , відповідно, де  $y(\bar{x}_i) = 5 + 3 \cdot x_i + e_i, e_i \in [-1; 1]$  – обмежена похибка моделювалась із застосуванням генератора випадкових чисел згідно рівномірного закону розподілу. Сума квадратів довжин діагоналей  $l_1^2 + l_2^2$ , отриманої області параметрів лінійної моделі розраховувалась за формулою (1.44)  $l_1^2 + l_2^2 = 8 \cdot Sp(E \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \cdot E)$ , у якій матриця  $E = diag(\Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_m)$  була замінена на діагональну матрицю із

елементами  $\Delta_{N_i}/2$ , ( $i=1,\dots,m$ ), що задають ширину результуючих інтервалів у точках  $x_i$ .

Результати чисельних експериментів, наведені у таблицях 5.2, 5.3, 5.4 та 5.5, відповідно.

Таблиця 5.2

Результати чисельного експерименту при  $N=3$

$N_i$ спост.	1	2	3
$i$	1	2	2
$x_i$	-1	1	1
$[y_i^-; y_i^+]$	[0,5;2,5]	[7,4;9,4]	[7,8;9,8]
$\Delta_{N_i}$	2	2	1,6

Отримане значення суми квадратів довжин діагоналей області параметрів для даного випадку:  $l_1^2 + l_2^2 = 6,56$ .

Таблиця 5.3

Результати чисельного експерименту при  $N=6$

$N_i$ спост.	1	2	3	4	5	6
$i$	1	1	1	2	2	2
$x_i$	-1	-1	-1	1	1	1
$[y_i^-; y_i^+]$	[1,6;3,6]	[1,3;3,3]	[0,4;2,4]	[7,1;9,1]	[6,8;8,8]	[6,5;8,5]
$\Delta_{N_i}$	2	1,7	0,8	2	1,7	1,4

Отримане значення суми квадратів довжин діагоналей області параметрів для даного випадку:  $l_1^2 + l_2^2 = 2,6$ .

Результати чисельного експерименту при  $N=9$ 

$N_0$ спост.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$i$	1	1	1	1	2	2	2	2	2
$x_i$	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
$[y_i^-; y_i^+]$	[1,1;3,1]	[0,4;2,4]	[0,1;2,1]	[0,8;2,8]	[8;10]	[7,4;9,4]	[6,7;8,7]	[7,8;9,8]	[7;9]
$\Delta_{N_i}$	2	1,3	1	1	2	1,4	0,7	0,7	0,7

Отримане значення суми квадратів довжин діагоналей області параметрів:

$$l_1^2 + l_2^2 = 1,49$$

Таблиця 5.5

Результати чисельного експерименту при  $N=12$ 

$N_0$ спост.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$i$	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
$x_i$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
$[y_i^-; y_i^+]$	[1,8;3,8]	[1;3]	[1,5;3,5]	[0,2;2,2]	[1,4;3,4]	[1,6;3,6]	[6,8;8,8]	[7,5;9,5]	[7,9;9,9]	[7,6;9,6]	[6,7;8,7]	[7,2;9,2]
$\Delta_{N_i}$	2	1,2	1,2	0,4	0,4	0,4	2	1,3	0,9	0,9	0,8	0,8

Отримане значення суми квадратів довжин діагоналей області параметрів:

$$l_1^2 + l_2^2 = 0,8$$

Рисунок 5.4 ілюструє співвідношення між сподіваними значеннями сум квадратів довжин діагоналей, розрахованих для  $M(I_A)$ -оптимальних апріорних планів та сумами квадратів довжин діагоналей області параметрів, отриманих за результатами чисельних експериментів для різної кількості спостережень:  $N = 3, 6, 9, 12$ .

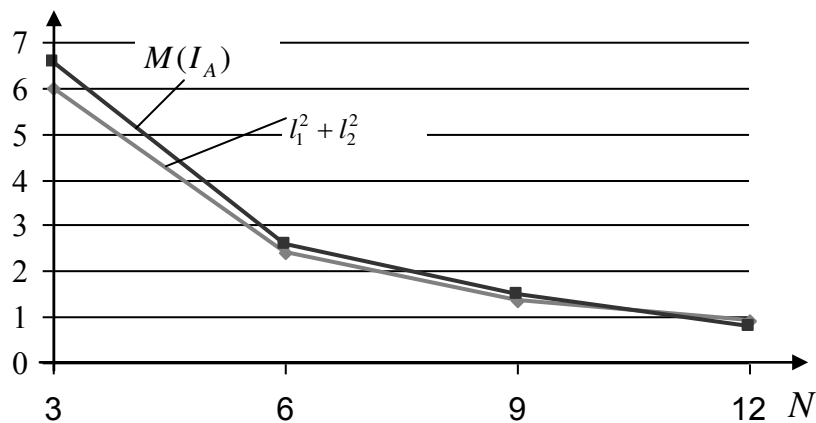


Рис. 5.4.

Як видно із рис. 5.4, при зростанні кількості спостережень у експерименті, сподіване значення  $M(I_A)$ -критерію наближається до значення, отриманого за результатами експерименту. При цьому значення  $M(I_A)$  монотонно зменшується.

Отже наведені результати засвідчують, що при достатньо великій кількості спостережень  $N$ , існує не тільки можливість організації оптимального локалізаційного експерименту, але і отримання достатньо достовірної апріорної оцінки розмірів області локалізації  $\Omega_m$  параметрів моделі.



## ВИСНОВКИ

1. Доведена еквівалентність між  $I_G$ - та  $I_E$ -оптимальними планами для лінійної факторної моделі на заданій кулею області експерименту з  $N \geq m$  спостереженнями, що дозволяє розширити можливості методів побудови моделей вхід-вихід статичних систем на основі аналізу інтервальних даних.

2. Доведено еквівалентність між собою та ортогональність  $I_G$ -,  $I_E$ -,  $I_D$ -,  $I_A$ -оптимальних насичених планів експерименту для лінійної багатofакторної моделі статичної системи на області експерименту, заданої  $n$ -вимірною кулею, що дозволяє спростити розв'язання задач ідентифікації інтервальних моделей статичних систем.

3. Показано, що у випадку реалізації  $I_G$ -,  $I_E$ -,  $I_D$ -,  $I_A$ -оптимальних насичених планів із постійною інтервальною похибкою  $\Delta(\bar{x}) = \Delta$  спостережень на області, заданій багатовимірною кулею, максимальне значення похибки прогнозування лінійних інтервальних моделей дорівнює  $2 \cdot \Delta \cdot \sqrt{m}$ . Отримана властивість дозволяє оцінити потенційну точність лінійної інтервальної моделі статичної системи при її побудові на основі інтервальних даних експерименту.

4. Розроблено алгоритм послідовного  $I_G$ -оптимального планування експериментів на многогранній області і адаптовано його для більш поширеного випадку, коли область експерименту задана багатовимірною кулею. Ефективність алгоритму підтверджена результатами чисельного експерименту.

5. Для випадку локалізації області параметрів з виділенням насиченого блоку формалізовано задачу знаходження оптимальних планів “локалізаційних” експериментів із випадковими інтервальними похибками на основі розроблених критеріїв  $M(I_A)$ -  $M(I_D)$ - та  $M(I_E)$ -оптимальності, що задають математичні сподівання, відповідно: квадрату об'єму, суми квадратів довжин діагоналей та квадрату довжини максимальної діагоналі області локалізації. Отримані формули для критеріїв оптимальності локалізаційних планів дозволяють

оцінити сподівану точність інтервальної моделі статичної системи на основі відомих її статистичних властивостей та кількості спостережень.

6. Доведено, що спектр  $M(I_D)$ -оптимального плану співпадає зі спектром  $I_D$ -оптимального насиченого плану та  $D$ -оптимального насиченого плану регресійного експерименту на спільній області експерименту  $\chi$ , а частоти у точках спектру є однаковими, тобто  $N_1 = \dots = N_i = \dots = N_m = N/m$ , що дозволяє при побудові інтервальних моделей статичних систем із застосуванням методу локалізації з виділенням насиченого блоку експерименту використовувати відомі таблиці оптимальних планів регресійних експериментів. Показано, що синтез  $M(I_D)$ -оптимальних планів не залежить від імовірнісних властивостей інтервальних похибок спостережень, що розширює можливості їх застосування при побудові моделей в умовах відсутності інформації про статистичні характеристики системи.

7. Доведено, що для лінійної багатофакторної моделі з нульовою постійною складовою на області експерименту, заданої багатовимірною сферою  $M(I_A)$ -  $M(I_D)$ - та  $M(I_E)$ -оптимальні плани еквівалентні між собою, їхні спектри задаються ортогональними матрицями, а частоти рівномірно розподіляються у точках спектру. Доведена властивість суттєво спрощує побудову лінійних моделей статичних систем.

8. На прикладі синтезу  $M(I_A)$ -оптимальних планів показано, що при великій кількості спостережень  $N$ , отримані формули, що задають  $M(I_A)$ -  $M(I_D)$ - та  $M(I_E)$ -критерії дозволяють розрахувати достовірні апріорні оцінки точності параметрів інтервальної моделі і таким чином обґрунтувати загальну кількість спостережень у експерименті для її забезпечення.

## РОЗДІЛ 6

ЗАСТОСУВАННЯ РОЗРОБЛЕНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ ПОБУДОВИ МОДЕЛЕЙ  
ВХІД-ВИХІД СТАТИЧНИХ СИСТЕМ

Розроблені у розділах 1-5 теоретичні засади моделювання типу вхід-вихід використані для дослідження статичних систем, таких як статичні режими технологічних процесів виробництва інтегрованих мікросхем (ІМС) [45, 54, 59, 62, 63, 198] та для побудови моделей прогнозування кількості захворювань серед населення – наслідків техногенної діяльності підприємств у системі екологічного контролю за умов інтервального (множинного) представлення результатів спостережень [9, 49, 52, 53, 115, 187, 200-202]. Окрім цього застосування методів планування експериментів із інтервальними даними спостережень, розроблених у п'ятому розділі, дозволило побудувати таблиці деяких важливих апріорних оптимальних планів для поліноміальних моделей першого та другого порядків.

## 6.1. Моделювання технологічного процесу герметизації інтегрованих мікросхем

Процеси виготовлення ІМС поділяються на такі етапи: виготовлення кристалів; розділ пластини на кристали; монтаж кристалів до основи корпусу; під'єднання відводів; захист ІМС від зовнішніх впливів, шляхом герметизації захисним покриттям, керамікою, склом, або у герметичному металевому корпусі [76]. Герметизація є однією із останніх операцій технологічного процесу виробництва ІМС, тому повинна забезпечувати максимальний вихід придатних ІМС. На сьогоднішній день найбільш поширеним і дешевим способом герметизації є безкорпусна герметизація, яка проводиться у трансферних машинах термореактивною пластмасою [76]. Зокрема, даний спосіб герметизації тривалий час застосовується на ВАТ "Квантор" м. Збараж.

Розглянемо особливості даного процесу [76].

ТП виконують у трансферних машинах термореактивною пластмасою. Кристали, змонтовані на рамках, завантажують у робочі гнізда нижньої пластини прес-форми, яку закривають верхньою і поміщають між двома плитами-нагрівачами гідравлічного преса. Під час роботи преса рухливий плунжер-трансфер витискає пластмасу, яка під дією нагрівачів і тиску перетворюється у в'язкий стан і через отвори, зроблені у прес-формі, надходить у робочі гнізда. Унаслідок цього пластмаса повністю огортає арматуру ІМС.

Процес герметизації суттєво зменшує вихід придатних ІМС, внаслідок порушення з'єднань між контактними площадками кристала і зовнішніми відводами корпусу ІМС. Управління ТП здійснюється шляхом зміни температури формування  $T$  та швидкості або часу  $t$  витискування прес-матеріалу у робочі гнізда. Критерієм оптимальності керування є забезпечення максимального відсотка виходу у придатних ІМС. Оптимальні значення температури формування  $T$  та часу витискування  $t$  залежать від типу прес-матеріалу, а саме: від його характеристик: плинності  $l$  та часу желатинізації  $\tau$ .

Для більшості прес-матеріалів типу “пласкон” фірми “Plaskon Electronic Materials”, які широко використовують для герметизації ІМС, ці показники є в межах  $l = 700 - 1200$  мм,  $\tau = 40 - 80$  с. Оптимальна температура формування задається в межах  $T = 165 - 185^\circ\text{C}$ , а час витискування –  $t = 30 - 70$  с. Як бачимо, чинник керування  $t$  вибирають в залежності від параметру матеріалу  $\tau$  із співвідношення  $t = \tau - 10$  с [62, 63].

Практика реалізації процесів герметизації ІС серій КР 580 та К145 1911 на ВАТ “Квантор” м. Збараж засвідчила, що у разі використання матеріалу типу  $НС - 10 - 2$  оптимальні значення плинності  $l_0 = 750$  мм та часу желатинізації  $\tau_0 = 45$  с є при температурі  $T_0 = 165^\circ\text{C}$ . Ці значення з часом витискування  $t = 35$  с забезпечували в практичних умовах достатньо високий вихід придатних ІМС - до  $y_0 = 94\%$ . Для прогнозування зміни відсотку придатних ІМС від номінального значення  $y_0 = 94\%$  в залежності від зміни температури формування на етапі герметизації використовувалось таке співвідношення [63]:

$$\Delta y(T) = \Delta y_1(T) - \Delta y_2(T), \quad (6.1)$$

де  $\Delta y_1(T)$  – зміна (збільшення чи зменшення) відсотку виходу придатних ІМС, через зменшення чи збільшення кількості порушень з'єднань між контактними площадками кристала і зовнішніми відводами корпусу ІМС;  $\Delta y_2(T)$  – зміна відсотку браку серед функціонально-придатних мікросхем, згідно суб'єктивної оцінки зовнішнього вигляду результатів герметизації.

Значення  $\Delta y_1(T)$  переважно залежить від зміни параметра  $\tau$ , а  $\Delta y_2(T)$  ( $0 \leq \Delta y_2(T)$ ) – від плинності матеріалу  $l$ .

Залежність між зміною відсотка придатних ІМС  $\Delta y_1(T)$  та зміною часу желатинізації для невеликих відхилень  $\Delta \tau(T) = \tau(T) - \tau(T_0)$  в околі номінального значення  $\tau(T_0)$  вважалася лінійною і обчислювалася за формулою [63]

$$\Delta y_1(T) = k \cdot \Delta \tau(T), \quad (6.2)$$

де  $k \approx 0,5$  коефіцієнт, визначений емпірично.

Зазначимо, що зростання часу желатинізації  $\tau$  хоча і призводить до деякого збільшення виходу придатних ІМС, однак досягається при низьких температурах, коли занадто велика плинність і в цілому тривалість виробничого циклу.

Аналогічно, відсоток браку в лінійно-пропорційній залежності зростає від зміни плинності як у бік збільшення, так і у бік зменшення в околі оптимального значення. У першому випадку це пов'язано із витіканням рідкої пластмаси із литників, а в другому – із неповним їх заповненням. Відповідно до цього, зміну відсотка браку  $\Delta y_2(T)$  залежно від зміни плинності  $\Delta l(T)$  в околі точки  $l_0$  можна записати так [54, 63]:

$$\Delta y_2 = r \cdot |\Delta l(T)|, \quad (6.3)$$

де  $r \approx 0.02$  – емпіричний коефіцієнт.

Із урахуванням формул (6.2) та (6.3), для прогнозування зміни відсотку придатних ІМС у залежності від температури формування використовувався

такий вираз

$$\Delta y(T) = k \cdot \Delta \tau(T) - r \cdot |\Delta l(T)|. \quad (6.4)$$

Однак, зі збільшенням часу зберігання прес-матеріали втрачають свої властивості. Зокрема, матеріал типу *НС-10-2* втрачає 40% плинності при температурах 4 та 21°С протягом, відповідно, 20 місяців та 3 тижнів. Також змінюється час герметизації. Це ускладнює вибір оптимальних чинників керування і призводить до значної кількості бракованих ІМС. У цих умовах виникає необхідність ідентифікації моделі ТП шляхом експериментального дослідження властивостей наявної термореактивної пластмаси і на основі прогнозування відсотка виходу придатних ІМС прийняття рішення про можливість застосування наявної пластмаси для герметизації ІМС та формування оптимальних управлінь.

Для синтезу структури моделі процесу були використані технологічні характеристики пластмаси *НС-10-2*, описані у супроводжувачій документації виробника, а також емпіричні коефіцієнти, які використовуються у економічному підрозділі ВАТ “Квантор” для розрахунку економічної ефективності та доцільності застосування пластмаси, яка тривалий час зберігалася на складі при умовах середовища, що відхиляються від оптимальних.

На рис. 6.1 та рис. 6.2 наведені технологічні криві зміни параметрів ТП від чинника керування – температури. Користуючись ними, структура функціональних залежностей була задана у такому вигляді [54]:

$$\tau = \tau_0 \cdot e^{-(T-T_0) \cdot a}, \quad (6.5)$$

$$l = l_0 - b \cdot (T - T_0). \quad (6.6)$$

У формулах (6.5) та (6.6)  $\tau_0$ ,  $l_0$ ,  $a$ ,  $b$  – невідомі параметри, які визначають властивості пластмаси. Зауважимо, що параметри  $\tau_0$ ,  $l_0$  мають фізичний зміст, оскільки задають характеристики пластмаси при номінальній температурі формування. Враховуючи, що значення цих параметрів змінюються із

збільшенням тривалості зберігання пластмаси, для їхньої ідентифікації проводилися випробовування прес-матеріалу. Плинність та час желатинізації прес-матеріалу вимірювалися згідно спірального тесту при номінальному значенні часу витискування  $t = 35$  с в діапазоні температур  $T = 150 - 180^\circ \text{C}$ . При цьому похибки вимірювань плинності  $\Delta l_i$  при заданій температурі  $T_i$  встановлювалися за результатами 10 повторних спостережень, як різниця найбільшого та найменшого значення, із заокругленням різниці до більшого значення. Визначення похибок вимірювань часу желатинізації  $\Delta \tau_i$  проводилося аналогічним способом із застосуванням секундоміра за допомогою десяти повторних циклів витискування прес-матеріалу.

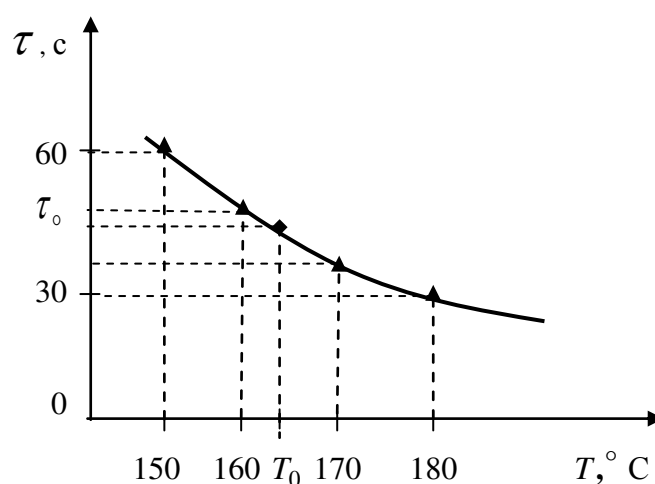


Рис. 6.1. Графік залежності часу желатинізації  $\tau$  від температури формування  $T$  (для  $HC - 10 - 2$ ).

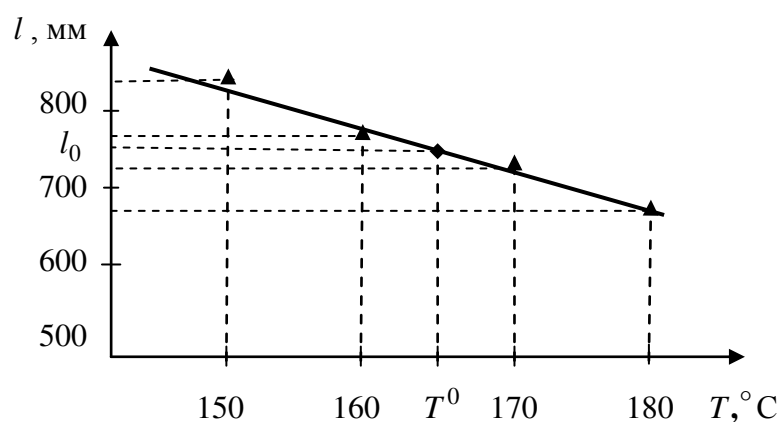


Рис. 6.2. Графік залежності плинності  $l$  від температури формування  $T$  (для  $HC - 10 - 2$ ).

Результати випробувань прес-матеріалу наведені у таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

Результати тестових випробувань партії прес-матеріалу *НС – 10 – 2*

Номер випробування, $i$	$T_i$ (°C)	$\tau_i$ (с)	$\Delta\tau_i$ (с)	$\tau_i^-$ (с)	$\tau_i^+$ (с)	$l_i$ (мм)	$\Delta l_i$ (мм)	$l_i^-$ (мм)	$l_i^+$ (мм)
1	150	58	5	55	63	825	40	785	865
2	160	52	4	48	56	770	30	740	800
3	170	40	3	37	43	725	25	700	750
4	180	30	3	27	33	690	25	665	715

Враховуючи, що похибки спостережень є обмеженими, а результати експерименту наведені в інтервальному вигляді, було прийнято рішення для знаходження оцінок  $\hat{\tau}_0$ ,  $\hat{l}_0$ ,  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  параметрів  $\tau_0$ ,  $l_0$ ,  $a$ ,  $b$  застосувати метод аналізу інтервальних даних.

Прологарифмувавши ліву та праву частину виразу (6.5) і користуючись даними таблиці 6.1 отримали таку систему із чотирьох інтервальних рівнянь [45]:

$$\begin{cases} \ln(55) \leq \ln(\hat{\tau}_0) - (150 - 165) \cdot \hat{a} \leq \ln(63) \\ \ln(48) \leq \ln(\hat{\tau}_0) - (160 - 165) \cdot \hat{a} \leq \ln(56) \\ \ln(37) \leq \ln(\hat{\tau}_0) - (170 - 165) \cdot \hat{a} \leq \ln(43) \\ \ln(27) \leq \ln(\hat{\tau}_0) - (180 - 165) \cdot \hat{a} \leq \ln(33) \end{cases}$$

Розв'язки даної системи оцінювали методом локалізації з виділенням насиченого блоку експерименту, розглянутим у розділі 3. Для цього, на основі теореми 5.3 (про ортогональність оптимальних насичених планів для лінійних інтервальних моделей) було вибрано базовий насичений блок із двох рівнянь інтервальної системи

$$\begin{cases} \ln(55) \leq \ln(\hat{\tau}_0) - (150 - 165) \cdot \hat{a} \leq \ln(63) \\ \ln(27) \leq \ln(\hat{\tau}_0) - (180 - 165) \cdot \hat{a} \leq \ln(33) \end{cases}$$



Застосування методу локалізації дозволило перетворити систему базових рівнянь з урахуванням решти рівнянь вихідної системи у таку систему:

$$\begin{cases} \ln(57,89) \leq \ln(\hat{\tau}_0) - (150 - 165) \cdot \hat{a} \leq \ln(63) \\ \ln(28,36) \leq \ln(\hat{\tau}_0) - (180 - 165) \cdot \hat{a} \leq \ln(33) \end{cases}$$

Множину розв'язків даної системи оцінювали на основі леми з праці [31] гарантованим (описаним) еліпсом (1.51)

$$\mathcal{Q}_{m=2} = \left\{ \ln \hat{\tau}_0, \hat{a} \left| \begin{pmatrix} \ln \hat{\tau}_0 - 3,7608 \\ \hat{a} - 0,02267 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 183,3 & 1443 \\ 1443 & 41243,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln \hat{\tau}_0 - 3,7608 \\ \hat{a} - 0,02267 \end{pmatrix} \leq m = 2 \right. \right\}$$

На рис 6.3 зображені локалізаційна область оцінок  $\ln \hat{\tau}_0$ ,  $\hat{a}$  параметрів та її оцінка у вигляді еліпса. Для порівняння, штриховими лініями відмічена область оцінок  $\ln \hat{\tau}_0$ ,  $\hat{a}$  параметрів, знайдена за вихідною системою із чотирьох рівнянь методом, описаним у праці [102].

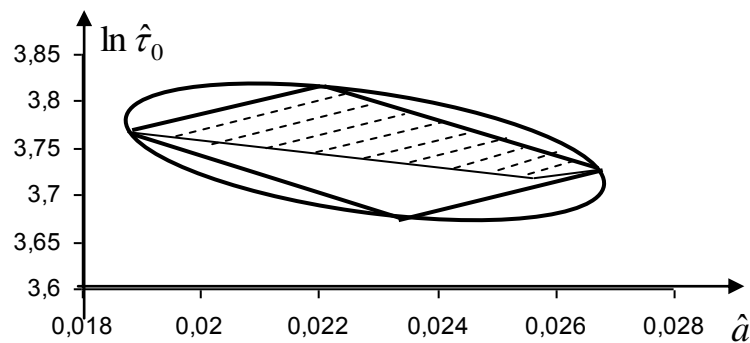


Рис. 6.3.

На основі області параметрів у вигляді еліпса  $\mathcal{Q}_{m=2}$ , із застосуванням формули (2.32), а також враховуючи відому структуру функції (6.5), отримали функціональний коридор інтервальних моделей у такому вигляді:

$$\begin{aligned} [\ln \hat{\tau}(T)] = & [3,7608 - (T - 165) \cdot 0,02267 - 0,5 \cdot \Delta_{\ln \hat{\tau}(T)}; \\ & 3,7608 - (T - 165) \cdot 0,02267 + 0,5 \cdot \Delta_{\ln \hat{\tau}(T)}], \end{aligned}$$

де  $\Delta_{\ln \hat{\tau}(T)}$  – значення функції похибки прогнозування при заданій температурі  $T$  обчислене згідно формули (2.33)

$$\Delta_{\ln \hat{\tau}(T)} = 2 \cdot \left| \left( 2 \cdot 10^{-3} \cdot (1, T - 165) \cdot \begin{pmatrix} 7,529 & -0,2634 \\ -0,2634 & 0,0335 \end{pmatrix} \cdot (1, T - 165)^T \right)^{1/2} \right|. \quad (6.7)$$

Врахувавши монотонність функції  $e^x$ , побудували такий функціональний коридор інтервальних моделей:

$$[\hat{\tau}(T)] = e^{[3,7608-(T-165) \cdot 0,02267-0,5 \cdot \Delta_{\ln \hat{\tau}(T)}; 3,7608-(T-165) \cdot 0,02267+0,5 \cdot \Delta_{\ln \hat{\tau}(T)}]} = 42,98 \cdot e^{-(T-165) \cdot 0,02267} \cdot [e^{-0,5 \cdot \Delta_{\ln \hat{\tau}(T)}}; e^{0,5 \cdot \Delta_{\ln \hat{\tau}(T)}}]. \quad (6.8)$$

Тепер для оцінювання параметрів  $l_0$ ,  $b$ , розглянемо таку систему інтервальних рівнянь:

$$\begin{cases} 785 \leq \hat{l}_0 - (150 - 165) \cdot \hat{b} \leq 865 \\ 740 \leq \hat{l}_0 - (160 - 165) \cdot \hat{b} \leq 800 \\ 700 \leq \hat{l}_0 - (170 - 165) \cdot \hat{b} \leq 750 \\ 665 \leq \hat{l}_0 - (180 - 165) \cdot \hat{b} \leq 715 \end{cases}$$

Аналогічно, як і при знаходженні оцінок  $\hat{\tau}_0$ ,  $\hat{a}$ , розв'язки даної системи оцінювали методом локалізації з виділенням насиченого блоку експерименту. Для цього було вибрано базовий насичений блок з двох рівнянь інтервальної системи

$$\begin{cases} 785 \leq \hat{l}_0 - (150 - 165) \cdot \hat{b} \leq 865 \\ 665 \leq \hat{l}_0 - (180 - 165) \cdot \hat{b} \leq 715 \end{cases}$$

Свою чергою розв'язки отриманої системи оцінювались таким еліпсоїдом:

$$Q_{m=2} = \{l_0, \hat{b} \left| \begin{pmatrix} \hat{l}_0 - 757,5 \\ \hat{b} - 4,5 \end{pmatrix}^T \cdot 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 0,556 & -3,66 \\ -3,66 & 125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{l}_0 - 757,5 \\ \hat{b} - 4,5 \end{pmatrix} \leq 2\}$$

На рис 6.4 зображені локалізаційна область оцінок  $\hat{l}_0$ ,  $\hat{b}$  параметрів та її оцінка еліпсом. Штриховими лініями відмічена область оцінок параметрів  $l_0$ ,  $b$ , знайдена для вихідної системи із чотирьох рівнянь.

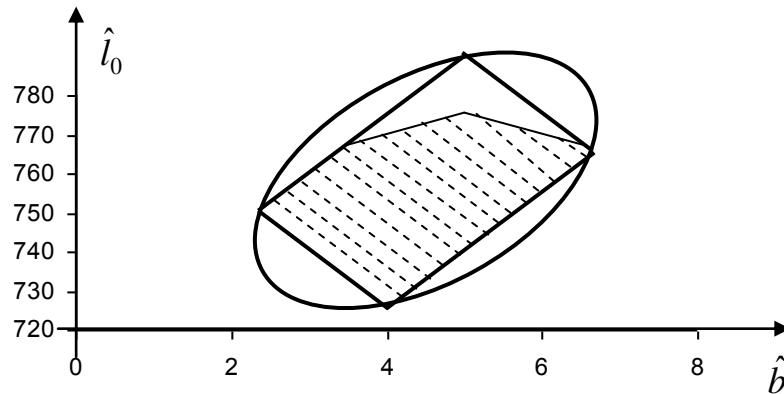


Рис.6.4.

Застосовуючи отриману у вигляді еліпса область оцінок параметрів, побудували функціональний коридор інтервальних моделей

$$[\hat{l}(T)] = [757,5 - (T - 165) \cdot 4,5 - 0,5 \cdot \Delta_{\hat{l}(T)}; 757,5 - (T - 165) \cdot 4,5 + 0,5 \cdot \Delta_{\hat{l}(T)}], \quad (6.9)$$

де значення функції  $\Delta_{\hat{l}(T)}$  для заданого  $T$  обчислювали згідно виразу

$$\Delta_{\hat{l}(T)} = 2 \cdot \left| \left( 2 \cdot (1, T - 165) \cdot \begin{pmatrix} 2225 & 65 \\ 65 & 9,889 \end{pmatrix} \cdot (1, T - 165)^T \right)^{1/2} \right|. \quad (6.10)$$

Отримані, за результатами експериментальних досліджень термореактивної пластмаси, інтервальні моделі  $\hat{\tau}(T)$ ,  $\hat{l}(T)$ , що задають, відповідно, зміну часу желатинізації та плинності від температури, дозволили побудувати функціональний коридор інтервальних моделей ТП для прогнозування виходу придатних ІМС із урахуванням реальних властивостей пластмаси

$$[\Delta y(T)] = k \cdot [\Delta \hat{\tau}(T)] - r \cdot |[\Delta \hat{l}(T)]|, \quad (6.11)$$

де  $[\Delta\hat{\tau}(T)]$ ,  $[\Delta\hat{l}(T)]$  – функціональні коридори відхилень від відповідних номінальних значень  $\tau(T_0)$ ,  $l(T_0)$ , тобто  $[\Delta\hat{\tau}(T)]=[\hat{\tau}(T)]-\tau(T_0)$ ,  $[\Delta\hat{l}(T)]=[\hat{l}(T)]-l(T_0)$ .

Враховуючи, правило обчислення абсолютного значення інтервалу у інтервальній математиці [2], отримаємо

$$|[\Delta\hat{l}(T)]| = \max\{|\Delta\hat{l}^-(T)|; |\Delta\hat{l}^+(T)|\}.$$

Тоді вираз (6.11) матиме такий вигляд:

$$[\Delta y(T)] = k \cdot [\Delta\hat{\tau}(T)] - r \cdot \max\{|\Delta\hat{l}^-(T)|; |\Delta\hat{l}^+(T)|\}. \quad (6.12)$$

Зауважимо, що значення коефіцієнтів  $k \approx 0,5$  та  $r \approx 0,02$  у формулі (6.12) отримані для випадку незначних відхилень параметрів пластмаси від їхніх номінальних значень, тобто коли інтервали  $[\hat{\tau}(T)]$  та  $[\hat{l}(T)]$  включають відповідні номінальні значення  $\tau(T_0)$ ,  $l(T_0)$  і є не дуже широкими. У протилежному випадку значення цих коефіцієнтів необхідно визначити.

Користуючись формулами (6.7)-(6.10) для даної партії термореактивної пластмаси при температурі формування  $T_0 = 165^\circ\text{C}$  було розраховано відповідні інтервали значень  $[\hat{\tau}(T_0)]=[38,01; 48,59]$ ,  $[\hat{l}(T_0)]=[690,7; 824,2]$ . Оскільки отримані інтервали включають номінальні значення, відповідно  $\tau(T_0)=45$ ,  $l(T_0)=750$ , то у формулі (6.12), можна використовувати коефіцієнти зі значеннями  $k \approx 0,5$  та  $r \approx 0,02$ , що дало змогу розрахувати інтервали відхилень  $[\Delta\hat{\tau}(T_0)]=[-6,98; 3,59]$   $[\Delta\hat{l}(T_0)]=[-59,2; 74,2]$  і спрогнозувати інтервал зміни відсотку придатних ІМС:  $[\Delta y(T)]=[-4,976; 0,311]$ . Враховуючи відоме номінальне значення  $y_0 = 94\%$ , прогнозований інтервал відсотку виходу придатних ІМС при даній температурі формування  $T_0 = 165^\circ\text{C}$  складатиме  $[\hat{y}(T_0)]=[89,024; 94,311]$ . Оскільки нижня допустима межа відсотку виходу придатних ІМС, що забезпечує рентабельне виробництво на етапі герметизації

дорівнює 89%, то було прийнято рішення про придатність випробуваної партії прес-матеріалу для використання в технологічному процесі при таких режимах формування  $T = 165^\circ \text{C}$ ,  $t = 35 \text{c}$ .

З метою оцінки можливості підвищення відсотка виходу придатних мікросхем моделювалася зміна температурного режиму формування в межах  $\pm 3^\circ \text{C}$  від номінального. Користуючись формулами (6.7)-(6.10) при температурах формування  $T_1 = 168^\circ \text{C}$  та  $T_2 = 162^\circ \text{C}$  було розраховано відповідні інтервали значень  $[\hat{\tau}(T_1)] = [35,43; 45,51]$ ,  $[\hat{l}(T_1)] = [670,4; 817,5]$ ,  $[\hat{\tau}(T_2)] = [40,59; 52,13]$ ,  $[\hat{l}(T_2)] = [708,9; 833,0]$  та інтервали відхилень  $[\Delta \hat{\tau}(T_1)] = [-9,56; 0,51]$ ,  $[\Delta \hat{l}(T_1)] = [-79,54; 67,54]$ ,  $[\Delta \hat{\tau}(T_2)] = [-4,41; 7,13]$ ,  $[\Delta \hat{l}(T_2)] = [-41,1; 83,0]$ . Останні дозволили спрогнозувати відповідні інтервали зміни відсотку придатних ІМС:  $[\Delta y(T_1)] = [-6,375; -1,337]$ ,  $[\Delta y(T_2)] = [-3,86; 1,94]$ . Оцінюючи ці відхилення зі урахуванням номінального значення  $y_0 = 94\%$ , приходимо до висновку, що температура формування  $T_1 = 168^\circ$  призведе до недопустимого зниження відсотку виходу придатних ІМС, оскільки  $[\hat{y}(T_1)] = [87,625; 92,663]$ . Тим часом як при температурі  $T_2 = 162^\circ$  для даної партії прес-матеріалу спостерігається деякий ріст відсотку придатних ІМС:  $[\hat{y}(T_2)] = [90,14; 95,94]$ . Подальше збільшення температури формування є недоцільним, оскільки при цьому необхідно проводити оцінку коефіцієнтів  $k$  та  $r$  у моделі процесу (6.12) і збільшувати час витискування прес-матеріалу, і в цілому тривалість етапу герметизації.

Отримані оптимальні температурні режими герметизації ІМС для різних партій прес-матеріалу, були використані на практиці і підтвердили працездатність побудованої моделі ТП. Попередньо проведене моделювання дозволило збільшити вихід придатних ІМС на стадії герметизації і досягнути певного економічного ефекту, про що засвідчує довідка про впровадження, наведена у додатку Д.

## 6.2. Інтервальне моделювання та прогнозування кількості захворювань в системі екологічного контролю м. Тернопіль

Діяльність підприємств в умовах промислового міста супроводжує порушення екологічного балансу, який безпосередньо впливає на захворюваність населення. У працях [9, 53, 200-202] показано, що вплив господарської діяльності на захворюваність може підсилюватися, або послаблюватися соціальними факторами. Тому для оцінки масштабів нанесених збитків навколишньому середовищу внаслідок діяльності підприємств необхідно використовувати методику комплексного дослідження, розроблену у працях [9, 187].

Узагальнена блок-схема процесу регулювання техногенної діяльності підприємств з точки зору їхнього впливу на соціально-екологічне середовище наведена на рис. 6.5.

За критерій регулювання вибирають зміну рівня захворюваності у певній соціально-екологічній зоні, що межує із санітарно-захисною зоною (СЗЗ) підприємства, у якій проводиться постійний контроль викидів шкідливих речовин з метою недопущення їхнього перевищення концентрацій гранично допустимих викидів (ГДВ), затверджених міністерством охорони здоров'я України. Саме проект ГДВ підприємства є вхідною інформацією для регулювання. У проекті ГДВ вказуються допускові норми шкідливих речовин, яку підприємство може викидати за одиницю часу, а також розташування усіх джерел викидів. На основі проекту, із урахуванням "рози вітрів" обчислюється СЗЗ підприємства. Якщо у СЗЗ підприємства потрапляє житлова забудова, то проект ГДВ відхиляється чи спрямовується на доопрацювання, а даний вид діяльності забороняється підприємству. Коли у межах СЗЗ підприємства відсутні житлові будови, чи інші заклади, такі як дитячі садки чи лікарні, то проводиться регулярний аналіз здоров'я населення, житлові будови якого межують із СЗЗ підприємства. Цей аналіз проводиться шляхом імітаційного моделювання техногенної діяльності підприємства, яка призводить до

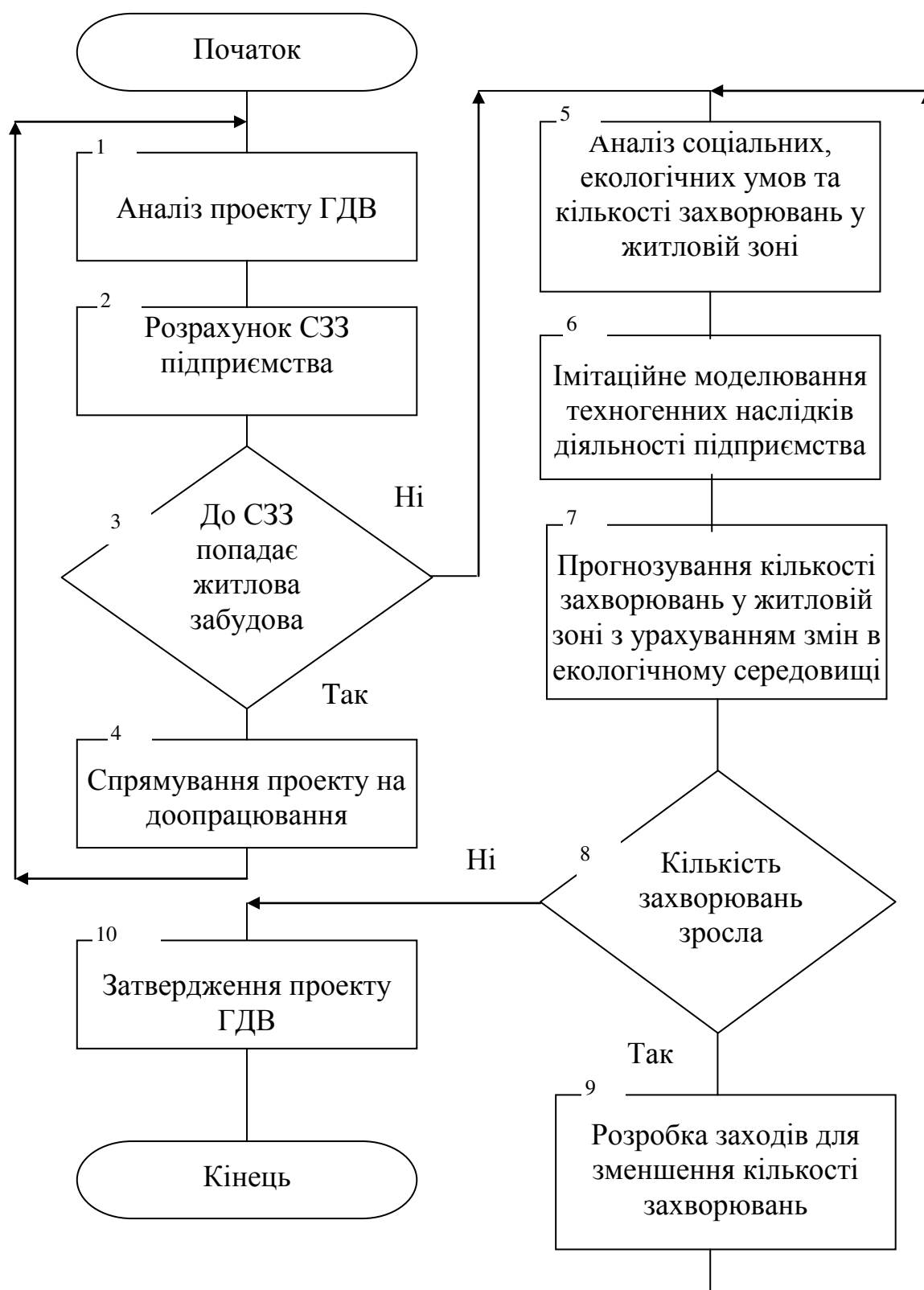


Рис. 6.5. Блок-схема процесу регулювання комплексного впливу підприємств на соціально-екологічне середовище.

накопичення у навколишньому середовищі шкідливих речовин та прогнозування зміни кількості захворювань із урахуванням соціальних факторів та імітованого екологічного середовища. Якщо прогнозований рівень кількості захворювань зростає, то підприємство перед затвердженням проекту ГДВ зобов'язане провести ряд соціальних та технологічних заходів для стабілізації соціально-екологічного балансу.

Дана методика була реалізована в інформаційно-картографічній системі екологічного контролю (ІКС ЕК), яка розроблялася згідно договору ІОСУ-29-93Б від 29.10.93 між санітарно-епідеміологічної станцією м. Тернополя і Тернопільською академією народного господарства та впроваджена у відділенні екологічної медицини.

Як видно із наведеної на рис. 6.5 блок-схеми, одним із основний етапів реалізації методики є прогнозування кількості захворювань у житловій зоні, що межує із СЗЗ підприємства. Для реалізації цього етапу проводилося [52]:

- соціально-екологічне зонування міста Тернополя;
- вимірювання концентрацій шкідливих викидів та шумових навантажень у визначених зонах;
- експертна оцінка соціальних умов проживання населення та аналіз кількості випадків захворювань в соціально-екологічних зонах;
- обчислення значень узагальнених соціального та екологічного факторів;
- ідентифікація взаємозв'язків між соціально-екологічними факторами та рівнем захворюваності шляхом розробки багатфакторної моделі.

#### 6.2.1. Особливості отримання узагальнених соціальних та екологічних чинників.

Соціально-екологічне зонування проводилося з метою виділення частин території міста з відповідними переважаючими екологічними факторами і де проживають групи населення з характерними близькими соціальними ознаками, наведеними у додатку Б, таблиця Б.1. У результаті зонування було виділено всього 21 соціально-екологічну зону: 7 районів (вулиць) із різними екологічними факторами, у кожному із яких по три групи населення з



характерними соціальними ознаками.

Інтегральна оцінка екологічних факторів проводилася на основі лінгвістичного підходу теорії нечітких множин, описаного у праці [52].

Узагальнений екологічний фактор розглядався як лінгвістична змінна такої структури:  $\langle L, T, V \rangle$ , де  $L$  – ім'я лінгвістичної змінної;  $T$  – множина лінгвістичних значень;  $V = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\}$  – множина базисних змінних. Позначивши узагальнений екологічний фактор за  $x_1$ , описували його такою структурою:  $\langle$  “екологічні умови”, {“хороші” “задовільні” “погані”},  $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_N\}$   $\rangle$ , де  $i$  – номер соціально-екологічної зони. Задавши лінгвістичне значення “задовільні” лінгвістичної змінної “екологічні умови”, для кожної базисної змінної  $v_1, \dots, v_i, \dots, v_N$ , отримали нечітку множину  $A_1 = \{\mu_{A_1}(v_i) | v_i\}$ ,  $i=1, \dots, 21$ , де  $\mu_{A_1}(v_i) \in [0,1]$  – функція належності, яка задає відношення базової змінної до нечіткої множини, тобто ступінь відповідності твердження “екологічні умови-задовільні” для заданої соціально-екологічної зони. У результаті, значення узагальненого екологічного фактора для заданої соціально-екологічної зони визначалося так:  $x_{1i} = \mu_{A_1}(v_i)$ .

Для побудови функції відповідності  $\mu_{A_1}$  проводились періодичні вимірювання концентрацій шкідливих викидів транспортом та підприємствами, а також шумових навантажень у 7 районах (один раз на місяць чи квартал) на протязі шести років. Результати вимірювань накопичувалися у спеціально створеній для цих цілей базі даних “ЕКОЛОГІЯ”, інтерфейс, структура і вихідні форми, що є результатом її функціонування, наведені у додатку Б. База даних виконана у середовищі FOXPRO.

За основу для розрахунку значення  $\mu_{A_1}(v_i)$  у заданій соціально-екологічній зоні була вибрана методика, розроблена спеціалістами відділу екологічної медицини СЕС у відповідності з нормативними документами СН 369-74. При цьому попередньо для кожної соціально-екологічної зони були розраховані такі показники:  $C_l$  – відношення фактичної концентрації  $l$  – тої речовини до

гранично-допустимої концентрації цієї ж речовини; інтегровані оцінки забруднення території району підприємством  $C_\Sigma$ , обчисленні згідно “Вказівок по розрахунку розсіювання в атмосфері шкідливих речовин, що містяться у викидах підприємств” за формулою

$$C_\Sigma = \sum_{l=1}^L \frac{C_l}{C_{ГДК}^l}.$$

Тоді базисна змінна для  $i$ -тої соціально-екологічної зони:  $v_i = \max_{\Sigma, l} \{C_\Sigma, C_l\}$ .

Функція належності  $\mu_{A_1}(v_i)$ , для випадку  $v_i \leq 1$ , наведена на рис. 6.6 а), а для випадку  $v_i \geq 1$  – на рис.6.6 б).

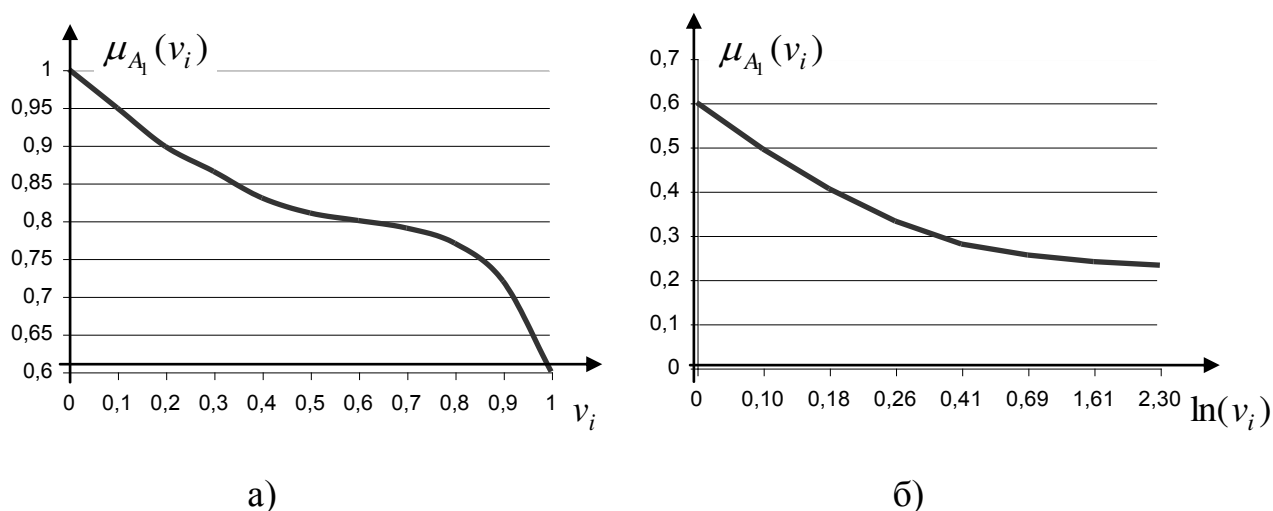


Рис. 6.6.

Методика реалізована за допомогою програмного модуля ECOLEXP, виконаного в середовищі TURBO PASCAL. Лістинг програмного модуля включає понад 400 операторів. Допоміжні програмні модулі FMKU, FMKONC, FMNORM, FMSHUM, наведені на структурній схемі ІКС ЕК у додатку Б, рис. Б.1, виконують функції читання даних з бази “ЕКОЛОГІЯ”.

Результати оцінки значень узагальненого екологічного фактора для районів міста Тернополя, розраховані у відповідності з розглянутим підходом, наведені у таблиці Б.2. Для порівняння, у цій же таблиці наведені рангові оцінки, отримані шляхом опрацювання результатів опитування екологів міста за методикою усереднення рангових оцінок [52].

Подібний підхід застосовувався для побудови узагальнених соціальних факторів [49]. Як лінгвістичні змінні розглядалися: “Умови проживання”, “Матеріальний стан”, “Спосіб життя”. Надаючи їм значення “задовільні”, отримали відповідні нечіткі множини  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  з функціями належності  $\mu_{A_2}(w_i)$ ,  $\mu_{A_3}(w_i)$ ,  $\mu_{A_4}(w_i)$ , що визначали ступінь відповідності твердження “Соціальні умови – задовільні” для фіксованого відсотка  $w_i$  осіб заданої соціально-екологічної зони. При побудові факторної моделі, узагальнені соціальні фактори позначалися за  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ , а їхні значення дорівнювали відповідним значенням функцій належності  $\mu_{A_2}(w_i)$ ,  $\mu_{A_3}(w_i)$ ,  $\mu_{A_4}(w_i)$  при  $w_i=100\%$ . Значення функцій належності для кожної соціально-екологічної зони розраховувались за такою методикою. Спочатку виділялися детальні характеристики кожного із узагальнених соціальних факторів. “Умови проживання” характеризувалися: розмірами житла, його освітленістю, способом опалювання, наявністю інших зручностей. “Матеріальний стан” характеризувався: доходами на одну особу, наявністю додаткових можливостей для організації відпочинку, наявністю присадибної ділянки, рівнем забезпечення харчування. Характеристиками “Способу життя” були: наявність щоденного сну більше 7 годин, сімейними стосунками та стосунками на роботі, наявність шкідливих звичок (куріння, надмірне вживання алкоголю), регулярність заняття спортом. Характеристиками соціальних факторів отримувалися шляхом опитування населення соціально-екологічної зони, а для амбулаторних хворих – від дільничних лікарів і заносилися в базу даних “ЕКОЛОГІЯ”. Від дільничних лікарів також були отримані дані про кількість захворювань  $y_i$  населення соціально-екологічної зони із урахуванням відсотка звертань з приводу хвороби та похибки діагнозу ці дані записувалися в базу “ЕКОЛОГІЯ” в інтервальному вигляді  $[y_i^-; y_i^+]$ . Потім, згідно розглянутих соціальних характеристик, проводилась декомпозиція кожної лінгвістичної змінної зі значенням “задовільні”. Проведена декомпозиція, дозволила отримати множини нечітких змінних, які описуються нечіткими множинами:

$\{A_{t2}\}$ ,  $\{A_{t3}\}$ ,  $\{A_{t4}\}$  із відповідними функціями належності  $\mu_{A_{t2}}(w_i)$ ,  $\mu_{A_{t3}}(w_i)$ ,  $\mu_{A_{t4}}(w_i)$ . Значення функцій належності  $\mu_{A_{t2}}(w_i)$ ,  $\mu_{A_{t3}}(w_i)$ ,  $\mu_{A_{t4}}(w_i)$ , при  $w_i=100\%$  визначались як відсоток осіб в  $i$ -тій соціально-екологічній зоні зі спільною  $t$ -тою соціальною характеристикою. На наступному кроці були отримані нечіткі множини

$$A_2 = \bigcap_t A_{t2}^{\alpha_t}, \quad A_3 = \bigcap_t A_{t3}^{\alpha_t}, \quad A_4 = \bigcap_t A_{t4}^{\alpha_t}$$

і відповідні функції належності

$$\mu_{A_2}(w_i) = \min_t \{\mu_{A_{t2}}^{\alpha_t}(w_i)\}, \quad \mu_{A_3}(w_i) = \min_t \{\mu_{A_{t3}}^{\alpha_t}(w_i)\}, \quad \mu_{A_4}(w_i) = \min_t \{\mu_{A_{t4}}^{\alpha_t}(w_i)\},$$

де  $\alpha_{t2}$ ,  $\alpha_{t3}$ ,  $\alpha_{t4}$  – коефіцієнти важливості, що задають інтенсивність впливу певної соціальної характеристики на результуючий показник – захворюваність.

Коефіцієнти важливості визначалися на основі розрахованих коефіцієнтів кореляції між соціальною характеристикою, заданою значенням відповідної функції належності  $\mu_{A_{t2}}(w_i)$ ,  $\mu_{A_{t3}}(w_i)$  чи  $\mu_{A_{t4}}(w_i)$  для  $w_i=100\%$ , і середнім значенням  $\bar{y}_i = 0,5 \cdot (y_i^- + y_i^+)$  результуючого показника, яким є кількість захворювань у розрізі 21-ї соціально-екологічної зони. Попарні відношення коефіцієнтів кореляції дозволили побудувати матрицю вагових коефіцієнтів, із якої, згідно методики описаної в [9] були отримані:  $\alpha_{t2}$ ,  $\alpha_{t3}$ ,  $\alpha_{t4}$ .

Реалізація методики отримання значень узагальнених соціальних факторів  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  здійснена за допомогою програмного модуля EXP, виконаного в середовищі TURBO PASCAL. Лістинг програми модуля включає понад 350 операторів.

Результати оцінки значень узагальнених соціальних факторів для 21-ї соціально-екологічної зони міста Тернополя, розраховані у відповідності з розглянутим підходом, наведені у додатку Б, таблиця Б.3.

6.2.2. Ідентифікація інтервальної моделі взаємозв'язку між соціально-екологічними чинниками та рівнем захворюваності. Особливості отримання узагальнених соціальних та екологічних факторів, а також наведення вихідного показника (кількість захворювань) в інтервальному вигляді дозволяють стверджувати, що методи теорії імовірностей та статистичні методи, зокрема, регресійний аналіз є непридатними для ідентифікації взаємозв'язків між соціально-екологічними факторами та рівнем захворюваності. Для розв'язування даної задачі було запропоновано використати метод аналізу інтервальних даних, який базується на менш жорстких гіпотезах стосовно даних спостережень [49].

Вихідні дані для побудови інтервальної моделі розміщені у таблиці 6.2, яка побудована на основі: таблиці Б.2 - оцінки значень узагальненого екологічного фактора для районів; таблиці Б.3 - оцінки значень узагальнених соціальних факторів та таблиці Б.4, що містить дані про захворюваність населення соціально-екологічних зон в досліджуваних районах м. Тернополя.

6.2.2.1. Синтез оптимальної структури моделі. Оптимальну модель шукали у класі поліномів. Для синтезу оптимальної структури застосовувався метод послідовного включення, описаний у підрозділі 2.1. За критерії оптимальності було вибрано мінімум кількості членів поліноміальної структури (критерій складності) та об'єму описаного навколо області параметрів моделі прямокутного паралелепіпеда  $P^+$  (критерій точності) при заданій кількості входів-факторів, що дорівнює 4 [49].

Спочатку, виходячи із особливостей об'єкту досліджень, у модель взаємозв'язку між соціально-екологічними факторами та кількістю захворювань включили усі чотири фактори. Отже найпростіша модель була задана поліномом першого порядку:

$$y(\vec{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4,$$

де  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ ;

$x_1$  – узагальнений екологічний фактор;

$x_2$  – узагальнений фактор, що задає ступінь відповідності групи населення твердженню “Умови проживання – задовільні”;

$x_3$  – задає ступінь відповідності групи населення твердженню “Матеріальний стан – задовільний”;

$x_4$  – задає ступінь відповідності групи населення твердженню “Спосіб життя – задовільний”.

Таблиця 6.2.

## Зведена таблиця характеристик соціально-екологічних зон

№ СЕЗ	Екологічний фактор	Соціальні фактори			Захворюваність на 100 осіб
		$x_{1i}$	$x_{2i}$	$x_{3i}$	
$i$	$x_{1i}$	$x_{2i}$	$x_{3i}$	$x_{4i}$	$[y_i^-; y_i^+]$
1	0,91	0,923	0,709	0,933	[24;30]
2	0,91	0,912	0,564	0,482	[38;48]
3	0,91	0,931	0,621	0,784	[30;38]
4	0,62	0,754	0,518	0,421	[51;66]
5	0,62	0,703	0,619	0,521	[46;56]
6	0,62	0,603	0,354	0,245	[72;90]
7	0,65	0,922	0,803	0,954	[39;48]
8	0,65	0,902	0,622	0,655	[44;55]
9	0,65	0,784	0,735	0,921	[43;53]
10	0,70	0,442	0,423	0,421	[57;72]
11	0,70	0,456	0,385	0,327	[63;78]
12	0,70	0,431	0,356	0,435	[60;75]
13	0,23	0,342	0,318	0,423	[83;97]
14	0,23	0,255	0,267	0,196	[115;135]
15	0,23	0,248	0,225	0,247	[99;120]
16	0,34	0,521	0,359	0,343	[78;96]
17	0,34	0,347	0,277	0,288	[93;111]
18	0,34	0,351	0,290	0,412	[84;99]
19	0,75	0,358	0,443	0,364	[54;69]
20	0,75	0,276	0,337	0,294	[64;80]
21	0,75	0,234	0,318	0,275	[66;82]

На основі даних таблиці 6.2 була складена система інтервальних рівнянь

$$y_i^- \leq b_0 + b_1 \cdot x_{1i} + b_2 \cdot x_{2i} + b_3 \cdot x_{3i} + b_4 \cdot x_{4i} \leq y_i^+, \quad i = 1, \dots, 21.$$

Перевірка адекватності запропонованої моделі проводилась шляхом розрахунку прямокутного паралелепіпеда  $\Pi^+$  навколо області  $\Omega$  розв'язків системи. Для цього застосовувався програмний модуль SYNSTRUC, виконаний на алгоритмічній мові PASCAL, і побудований на базі алгоритмів, описаних у підрозділі 2.1 та підрозділі 3.1. Блок-схема алгоритму реалізації програмного модуля наведена у додатку А.

Складена система інтервальних рівнянь для даної структури моделі виявилась несумісною, що означало неадекватність моделі.

Тоді було прийнято рішення ускладнити модель, шляхом додавання членів, що відображають парну взаємодію факторів:  $x_1 \cdot x_2$ ,  $x_1 \cdot x_3$ ,  $x_1 \cdot x_4$ ,  $x_2 \cdot x_3$ ,  $x_2 \cdot x_4$ ,  $x_3 \cdot x_4$ . У результаті сформували шість моделей

$$y(\vec{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{jk} \cdot x_j \cdot x_k, \quad j, k = 1, \dots, 4, \quad j < k.$$

При перевірці адекватності отриманих моделей жодна з інтервальних систем, складених на їхній основі не була сумісною.

Шляхом нарощування членів моделі (до семи) із коефіцієнтами парних взаємодій отримали 15 моделей-претендентів, при перевірці яких було встановлено:

– п'ять моделей з членом парної взаємодії  $b_{34} \cdot x_3 \cdot x_4$

$$y(\vec{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{jk} \cdot x_j \cdot x_k + b_{34} \cdot x_3 \cdot x_4, \quad j = 1, 2, \quad k = 2, \dots, 4, \quad j < k$$

забезпечували сумісність складених систем інтервальних рівнянь, але мали незначимі параметри, обнулення яких призводило до несумісності системи, а також незадовільні прогностні властивості (мінімальний об'єм  $V_{\Pi^+}$  прямокутного паралелепіпеда  $\Pi^+$  дорівнював  $1,37 \cdot 10^{11}$ ), тому вони вилучалися з подальшого розгляду;

– згідно критерію точності та подібних властивостей, як у попередньому

випадку, також були вилучені із розгляду дві моделі

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4, \quad ,$$

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_4 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4,$$

для яких  $V_{II^+}$  дорівнював  $1,07 \cdot 10^7$  та  $4,21 \cdot 10^9$ , відповідно;

– решта моделей, не забезпечувала сумісності систем інтервальних рівнянь, складених на їхній основі, і вимагали подальшого ускладнення до восьми членів.

Враховуючи результати проведеного вище аналізу, на наступному етапі є зміст розглядати тільки ті моделі із восьми членів, які не включають комбінацій членів парних взаємодій, що призвели до вилучення попередніх моделей з розгляду. Наприклад, не має змісту розглядати моделі, у яких одночасно є елементи парних взаємодій  $x_j \cdot x_k$  ( $j=1,2, k=2,\dots,4, j < k$ ) та  $x_3 \cdot x_4$ , чи  $x_1 \cdot x_3$  та  $x_2 \cdot x_4$ . Отже на наступному етапі синтезу структури спочатку розглядалися такі моделі:

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{14} \cdot x_1 \cdot x_4,$$

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3,$$

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{14} \cdot x_1 \cdot x_4 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3,$$

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4,$$

$$y(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{14} \cdot x_1 \cdot x_4 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3,$$

які виявились неадекватними, тобто, складені з їхнім застосуванням на основі таблиці 6.2 системи інтервальних рівнянь не мали розв'язку. Потім на базі восьми моделей із попереднього етапу було побудовано 32 моделі із відповідними членами потрійної взаємодії факторів  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ ,  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_4$ ,  $x_1 \cdot x_3 \cdot x_4$ ,  $x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ , серед яких виявилися адекватними:

$$y^1(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$



$$y^2(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4 + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3,$$

$$y^3(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{14} \cdot x_1 \cdot x_4 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3,$$

$$y^4(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + \rho^{53} \cdot x_5 \cdot x_3 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4 + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3,$$

$$y^5(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{14} \cdot x_1 \cdot x_4 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{124} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4,$$

$$y^6(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + \rho^{53} \cdot x_5 \cdot x_3 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4 + b_{124} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4$$

$$y^7(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{124} \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4$$

$$y^8(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4 + b_{124} \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4$$

$$y^9(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{14} \cdot x_1 \cdot x_4 + b_{124} \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4,$$

$$y^{10}(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{124} \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4,$$

$$y^{11}(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + \rho^{53} \cdot x_5 \cdot x_3 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4 + b_{124} \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4$$

Усі моделі з членом потрійної взаємодії факторів  $x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$  були спрощені, шляхом обнулення обох членів парних взаємодій і набули такого вигляду

$$y^{12}(\bar{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{234} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4,$$

однак при цьому отримана модель не мала достатньо високих прогнозних властивостей (об'єм  $V_{\Pi^+}$  прямокутного паралелепіпеда  $\Pi^+$  дорівнював  $9,67 \cdot 10^6$ ).

Діаграма, що відображає значення критерію точності для кожної із отриманих 12-ти моделей наведена на рис. 6.7.

Як видно із рисунка 6.7, найкращою за критерієм точності, серед розглянутих моделей, є модель  $y^3(\bar{x})$  за номером 3. Об'єм описаного навколо області параметрів цієї моделі прямокутного паралелепіпеда  $\Pi^+$  дорівнював 8325 ( $\ln(V_{\Pi^+})=9,03$ ). Серед моделей із найменшою кількістю коефіцієнтів (шість), найкращою виявилась модель  $y^{12}(\bar{x})$  за номером 12, однак вона має гірші прогнозні властивості ніж модель  $y^3(\bar{x})$ .

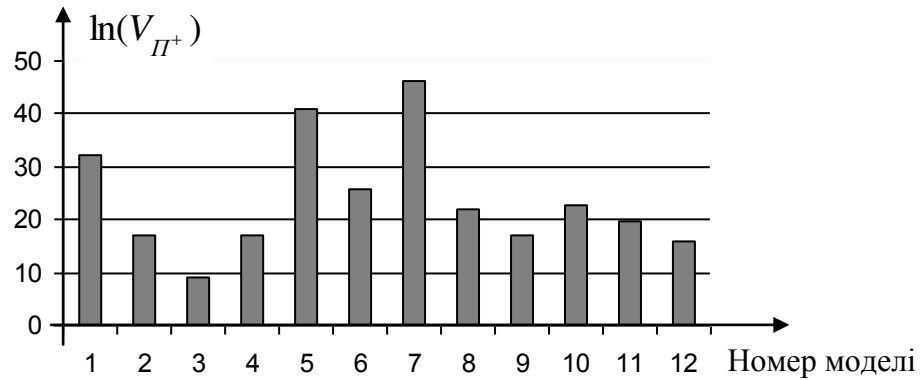


Рис.6.7. Показники точності адекватних моделей.

Подальше нарощування членів моделей не має змісту, оскільки супроводжується втратою точності моделей.

Отже, для побудови інтервальної моделі взаємозв'язку між соціально-екологічними факторами та кількістю захворювань була вибрана така базова структура [49]

$$y(\vec{x}) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_5 \cdot x_1 \cdot x_4 + b_6 \cdot x_2 \cdot x_3 + b_7 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Застосування методу інтервальної локалізації дозволило оцінити інтервальні значення параметрів отриманої моделі:  $[b_0^-; b_0^+] = [187,84; 188,36]$ ,  $[b_1^-; b_1^+] = [-54,83; -53,99]$ ,  $[b_2^-; b_2^+] = [-91,04; -87,04]$ ,  $[b_3^-; b_3^+] = [-165,65; -160,35]$ ,  $[b_4^-; b_4^+] = [-62,70; -60,38]$ ,  $[b_5^-; b_5^+] = [53,99; 59,74]$ ,  $[b_6^-; b_6^+] = [244,19; 250,26]$ ,  $[b_7^-; b_7^+] = [-112,01; -101,01]$ .

6.2.2.2. Локалізація параметрів інтервальної моделі з виділенням насиченого блоку. Для підвищення точності прогнозування інтервальної моделі взаємозв'язку між соціально-екологічними факторами і кількістю захворювань, та забезпечення аналітичності задання меж її коридору прогнозування, для вибраної базової структури моделі застосовувався метод локалізації параметрів з виділенням насиченого блоку, розглянутий у підрозділах 3.2, та 3.3.

Насиченим блоком локалізували розв'язки такої системи інтервальних рівнянь [49]:

$$y_i^- \leq b_0 + b_1 \cdot x_{1i} + b_2 \cdot x_{2i} + b_3 \cdot x_{3i} + b_4 \cdot x_{4i} + b_5 \cdot x_{1i} \cdot x_{4i} + b_6 \cdot x_{2i} \cdot x_{3i} + b_7 \cdot x_{1i} \cdot x_{2i} \cdot x_{3i} \leq y_i^+, \quad i=1, \dots, 21, \quad (6.13)$$

побудованої із використанням відомої структури моделі та даних таблиці 6.2.

Для отримання базового насиченого блоку із  $m = 8$  інтервальних рівнянь системи (6.13), який задаватиме конфігурацію локалізаційного гіперпаралелепіпеда  $\Omega_m$  області параметрів моделі, необхідно розв'язати задачу математичного програмування (3.6) на дискретній множині значень входів моделі (факторів), де матриця  $F_m$  у нашому випадку матиме вигляд  $F_m = \{1, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, x_{1i} \cdot x_{4i}, x_{2i} \cdot x_{3i}, x_{1i} \cdot x_{2i} \cdot x_{3i}, i = 1, \dots, 8\}$ . Зауважимо, що метою розв'язування задачі (3.6) є формування такої системи із  $m$  рівнянь, щоб вигляд гіперпаралелепіпеда  $\Omega_m$ , який є її розв'язком у просторі параметрів, максимально наближався до вигляду многогранника  $\Omega$  – розв'язку усієї системи (6.13). Виходячи з цього, взамін розв'язування задачі (3.6) для формування базового насиченого блоку застосовувався підхід, побудований на аналізі вершин області параметрів  $\Omega$  [49]:

$$\vec{b}^1 = (187,84; -54,146; -91,046; -160,35; -60,383; 53,998; 244,2; -101,01)^T,$$

$$\vec{b}^2 = (188,37; -54,231; -87,871; -165,2; -62,624; 59,325; 250,09; -111,48),$$

$$\vec{b}^3 = (188,08; -54,835; -87,162; -164,13; -62,521; 59,041; 248,17; -110,09),$$

$$\vec{b}^4 = (188,2; -53,995; -87,852; -165,18; -62,216; 58,7; 249,99; -111,36),$$

$$\vec{b}^5 = (188,04; -54,201; -87,039; -164,74; -62,632; 59,749; 248,83; -112,02),$$

$$\vec{b}^6 = (188,3; -54,031; -87,858; -165,65; -62,208; 58,977; 250,21; -111,45),$$

$$\vec{b}^7 = (188,26; -54,121; -87,840; -165,14; -62,707; 59,441; 250,26; -111,811),$$

знайдених при реалізації методу інтервальної локалізації у процесі синтезу структури моделі.

Розрахунки показали, що найбільша відстань (14,89) є між вершинами  $\vec{b}^1$  та  $\vec{b}^7$ . Достатньо вірогідним є припущення, що у випадку сильної витягнутості області  $\Omega$  саме ці вершини (або наближені до них) мають належати найдовшій чи одній із найдовших, діагоналей локалізаційного гіперпаралелепіпеда  $\Omega_m$ . Тоді, розглянуті вершини можуть бути спільними для відповідних восьми граней гіперпаралелепіпеда  $\Omega_m$ . Ураховуючи, що кожна грань  $\Omega_m$  задається лівою чи правою частиною одного із інтервальних рівнянь системи (6.3), для знаходження базового насиченого блоку спочатку достатньо вибрати вісім інтервальних рівнянь, що задовільняють одній вершині та вісім інтервальних рівнянь, що задовільняють другій вершині. Потім оцінити об'єми отриманих гіперпаралелепіпедів  $\Omega_m$  і за базову систему вибрати тих вісім інтервальних рівнянь, які забезпечують найменші розміри області локалізації.

У результаті реалізації описаного підходу було отримано базовий блок інтервальних рівнянь, який включав рівняння системи (6.13) із такими номерами: 1, 2, 5, 7, 9, 13, 14 та 21. У матричному вигляді базовий блок був записаний так:

$$\vec{Y}^- \leq F_m \cdot \vec{b} \leq \vec{Y}^+, \quad (6.14)$$

де  $\vec{Y}^- = (24, 38, 46, 39, 43, 83, 115, 66)^T$ ;

$\vec{Y}^+ = (30, 48, 56, 48, 53, 97, 135, 82)^T$ ;

$\vec{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)^T$  – вектор невідомих параметрів моделі;

$$F_{m=8} = \begin{pmatrix} 1 & 0,91 & 0,923 & 0,709 & 0,933 & 0,84903 & 0,65441 & 0,59551 \\ 1 & 0,91 & 0,912 & 0,564 & 0,482 & 0,43862 & 0,51437 & 0,46808 \\ 1 & 0,62 & 0,703 & 0,619 & 0,521 & 0,32302 & 0,43516 & 0,26980 \\ 1 & 0,65 & 0,922 & 0,803 & 0,954 & 0,62010 & 0,74037 & 0,48124 \\ 1 & 0,65 & 0,784 & 0,735 & 0,921 & 0,59865 & 0,57624 & 0,37456 \\ 1 & 0,23 & 0,342 & 0,318 & 0,423 & 0,09729 & 0,10876 & 0,02501 \\ 1 & 0,23 & 0,255 & 0,267 & 0,196 & 0,04508 & 0,06809 & 0,01566 \\ 1 & 0,75 & 0,234 & 0,318 & 0,275 & 0,20625 & 0,07441 & 0,05581 \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Далі, для локалізації параметрів моделі на основі знайденого базового насиченого блоку застосовувався програмний модуль LOCNAS, реалізований на базі паралельних обчислювальних графів (рис. 3.2) алгоритмічною мовою Сі. Блок-схема алгоритму програмного модуля наведена у додатку А. У результаті, локалізована область параметрів визначалась розв'язком системи (6.14), в якій вектори  $\vec{Y}^-$  та  $\vec{Y}^+$  тепер мали такий вигляд:

$$\vec{Y}^- = (29,93; 38; 55,95; 47,88; 43; 96,93; 115; 81,67)^T; \quad (6.16)$$

$$\vec{Y}^+ = (30; 38,04; 56; 48; 43,05; 97; 115,06; 82)^T. \quad (6.17)$$

Об'єм гіперпаралелепіеда  $\Omega_m$ , отриманого із розв'язку насиченої системи (6.14) із урахуванням векторів (6.16) та (6.17), дорівнював  $1,32 \cdot 10^{-3}$ , що у  $6,26 \cdot 10^6$  разів менше від об'єму прямокутного паралелепіеда  $\Pi^+$ , отриманого при інтервальній локалізації для тієї ж моделі. Отриманий результат засвідчує достатньо високу ефективність запропонованого у дисертації методу локалізації.

6.2.2.3. Оцінка прогностичних властивостей моделі. Для забезпечення аналітичності задання границь коридору прогнозування інтервальної моделі область  $\Omega_m$  описували еліпсоїдом (1.50).

$$Q_{m=8} = \{ \vec{b} \in R^m \mid (\vec{b} - \vec{\bar{b}})^T \cdot F_m^T \cdot E^{-2} \cdot F_m \cdot (\vec{b} - \vec{\bar{b}}) = m \},$$

де  $\vec{\bar{b}} = (189,415; -54,324; -76,193; -180,775; -69,321; 76,445; 267,847; -146,141)^T$  - вектор, обчислений за формулою (1.32)  $\vec{\bar{b}} = F_m^{-1} \cdot \vec{\bar{Y}}$ ;

$$\vec{\bar{Y}} = 0,5(\vec{Y}^- + \vec{Y}^+);$$

$F_m$  – матриця та  $\vec{Y}^-$ ,  $\vec{Y}^+$  – вектори, задані виразами (6.15) та (6.16), (6.17), відповідно;

$E = \text{diag} \{0,035; 0,02; 0,025; 0,06; 0,025; 0,035; 0,0315; 0,165\}$  – діагональна матриця інтервальних похибок, обчислена із векторів (6.16), (6.17).

Застосування замість локалізованої області  $\Omega_m$  параметрів моделі у

вигляді гіперпаралелепіеда описаного  $m$ -вимірного еліпсоїда, дозволило побудувати такий коридор прогнозування інтервальної моделі:

$$[\widehat{y}(\vec{x})]_{\vec{b} \in Q_{m=8}} = [189,415 - 54,324 \cdot x_1 - 76,193 \cdot x_2 - 180,775 \cdot x_3 - 69,321 \cdot x_4 + 76,445 \cdot x_1 \cdot x_4 + 267,847 \cdot x_2 \cdot x_3 - 146,141 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \pm 0,5 \cdot \Delta_{\widehat{y}(\vec{x})} |_{\vec{b} \in Q_{m=3}}] \quad (6.18)$$

де  $\Delta_{\widehat{y}(\vec{x})} |_{\vec{b} \in Q_{m=3}} = 2(8 \cdot (1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1 \cdot x_4, x_2 \cdot x_3, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \cdot H^{-1} \cdot (1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1 \cdot x_4, x_2 \cdot x_3, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^T)^{1/2}$ ;

$$H^{-1} = (F_m^T \cdot E^{-2} \cdot F_m)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,352 & -0,006 & 3,048 & -4,359 & -1,869 & 4,705 & 5,109 & -9,523 \\ -0,006 & 0,138 & -0,376 & 0,175 & 0,205 & -0,428 & -0,125 & 0,596 \\ 3,048 & -0,376 & 29,694 & -40,401 & -17,782 & 44,819 & 46,701 & -89,923 \\ -4,359 & 0,175 & -40,401 & 56,395 & 24,368 & -61,575 & -65,583 & 124,354 \\ -1,869 & 0,205 & -17,782 & 24,36 & 10,756 & -27,019 & -28,299 & 54,196 \\ 4,705 & -0,428 & 44,819 & -61,575 & -27,019 & 68,059 & 71,432 & -136,744 \\ 5,109 & -0,125 & 46,701 & -65,583 & -28,299 & 71,432 & 76,491 & -144,426 \\ -9,523 & 0,596 & -89,923 & 124,354 & 54,196 & -136,744 & -144,426 & 275,471 \end{pmatrix}$$

У таблиці 6.3 наведені результати прогнозування кількості захворювань інтервальної моделі взаємозв'язку між соціально-екологічними факторами та захворюваністю населення, отримані для контрольованих соціально-екологічних зон згідно виразу (6.18). Для порівняння, у цій же таблиці наведені дані спостережень про кількість захворювань.

Як видно з таблиці 6.3 максимальна похибка прогнозування не перевищує значення 7,24. Інтервали прогнозування переважно належать інтервалам спостережень (в окремих випадках перетинають їх), що засвідчує високу адекватність побудованої інтервальної моделі та достатньо високу точність її прогнозування.

Таблиця результатів прогнозування кількості захворювань

№ СЕЗ	Кількість захворювань на 100 осіб		Похибка прогнозування
	Результати прогнозування	Дані спостережень	
$I$	$[\hat{y}_i^-; \hat{y}_i^+]$	$[y_i^-; y_i^+]$	$\Delta_{\hat{y}(\bar{x})} \Big _{\bar{b} \in Q_{m=8}}$
1	[29,86; 30,06]	[24;30]	0,2
2	[37,98; 38,08]	[38;48]	0,1
3	[33,39; 36,50]	[30;38]	3,11
4	[62,06; 67,22]	[51;66]	5,16
5	[55,90; 56,04]	[46;56]	0,14
6	[74,64; 81,88]	[72;90]	7,24
7	[47,76; 48,11]	[39;48]	0,35
8	[54,29; 59,82]	[44;55]	5,53
9	[42,96; 43,10]	[43;53]	0,14
10	[64,71; 66,38]	[57;72]	1,67
11	[69,67; 72,21]	[63;78]	2,54
12	[70,28; 75,16]	[60;75]	4,88
13	[96,86; 97,07]	[83;97]	0,21
14	[114,94; 115,13]	[115;135]	0,19
15	[117,18; 118,10]	[99;120]	0,92
16	[89,15; 95,43]	[78;96]	6,28
17	[101,43; 104,44]	[93;111]	3,01
18	[94,96; 97,30]	[84;99]	2,34
19	[60,96; 63,14]	[54;69]	2,18
20	[77,50; 78,33]	[64;80]	0,83
21	[81,37; 82,30]	[66;82]	0,93

Побудована інтервальна модель застосовувалась для оцінки комплексного впливу автотранспортного підприємства АТП-16127, розміщеного у місті Тернополі.

Підприємство має дванадцять найбільш інтенсивних джерел викидів шкідливих речовин у атмосферу. У 1998 році санітарно-захисна зона АТП-16127 згідно із СН-245-71 становила 50 метрів. На основі результатів

вимірювань концентрацій шкідливих речовин у повітрі та ґрунті, шумових навантажень на території житлової забудови, що межує із СЗЗ АТП-16127, встановлено значення узагальненого екологічного фактора  $x_1=0,23$ , узагальнених соціальних факторів  $x_2=0,261$ ,  $x_3=0,22$ ,  $x_4=0,242$  та розрахований згідно моделі (6.18) прогнозований інтервал захворювань [114; 122].

Найближчим часом підприємство АТП-16127 планує наростити свої потужності удвічі, що збільшить обсяги викидів бутилацетату, толуолу, тетраетилсвинцю, сірчаного ангідриду, формальдегіду. При цьому значення узагальненого екологічного фактора  $x_1$ , обчислене за розглянутою методикою, становитиме 0,14, а прогнозований інтервал захворювань: [118; 126]. Хоча отримані інтервали і перетинаються, однак при нарощуванні потужностей автотранспортним підприємством прогнозується зростання кількості захворювань. Тому для нарощування потужностей у межах існуючого проекту ГДВ підприємству було запропоновано здійснити ряд заходів соціального та технологічного характеру, які дозволяють знизити прогнозований рівень захворюваності.

Ефективність застосування розроблених теоретичних засад, алгоритмічного та програмного забезпечення на базі яких були побудовані інтервальні моделі взаємозв'язку між соціально-екологічними факторами і кількістю захворювань підтверджується довідкою про впровадження, наведеною у додатку Д.

Розроблені інтервальні моделі на протязі декількох років дозволяють спеціалістам СЕС досліджувати вплив господарської діяльності підприємств на зміну широкого спектру екологічних та соціальних факторів і запобігати зростанню рівня захворюваності при реалізації проектів промислової забудови міста.



6.3. Особливості побудови та застосування таблиць оптимальних планів експерименту при локалізації параметрів на основі виділення насиченого блоку для поліноміальних моделей

Розроблені у підрозділі 5.3 критерії оптимальності експериментів за умов інтервальних даних спостережень, придатні для синтезу оптимальних планів локалізації параметрів моделей статичних систем, заданих лінійно-параметричними рівняннями із відомими базисними функціями різних типів (поліноми, тригонометричні та логарифмічні функції, тощо). При цьому для знаходження оптимальних планів необхідно застосовувати складні обчислювальні процедури розв'язування задач математичного програмування (5.33), (5.34) чи (5.35).

Тим часом, для опису статичних систем достатньо часто використовують поліноміальні моделі, зокрема, лінійні та квадратичні. Застосування розроблених у підрозділі 5.3 методів планування експериментів для локалізації параметрів моделей даного типу дозволило створити та систематизувати таблиці оптимальних планів (каталоги).

Розглянемо особливості побудови цих таблиць.

При складанні таблиць оптимальних планів розглядалися випадки:

– лінійних за входами моделей статичних систем з постійною складовою

$$y(\bar{x}) = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k \cdot x_k \quad (6.19)$$

та без постійної складової

$$y(\bar{x}) = \sum_{k=1}^n b_k \cdot x_k ; \quad (6.20)$$

– неповних квадратичних моделей двох типів

$$y(\bar{x}) = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k \cdot x_k + \sum_{k < j} b_{kj} \cdot x_k \cdot x_j \quad (6.21)$$

та

$$y(\vec{x}) = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k \cdot x_k + \sum_{k=1}^n b_{kk} \cdot x_k^2; \quad (6.22)$$

– повної квадратичної моделі

$$y(\vec{x}) = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k \cdot x_k + \sum_{k=1}^n b_{kk} \cdot x_k^2 + \sum_{k < j} b_{kj} \cdot x_k \cdot x_j, \quad (6.23)$$

де  $b_{kk}, b_{kj}$  – коефіцієнти при квадратичних членах та при членах взаємодії вхідних змінних моделі.

У таблицях додатку В розглянуті моделі відзначені як типи: I, II, III, IV та V, відповідно.

Області планування експерименту задавалися  $n$ -вимірними кубом

$$\mathcal{X} = \{ \vec{x} \in R^n \mid |x_k| \leq 1, k=1, \dots, n \}$$

та кулею одиничного радіусу

$$\mathcal{X} = \{ \vec{x} \in R^n \mid \vec{x}^T \cdot \vec{x} \leq 1 \}.$$

Розроблені матриці оптимальних планів придатні для використання за умов виконання гіпотез методу аналізу інтервальних даних, коли вихідні змінні у спостереженнях представляються в інтервальному вигляді згідно моделі випадкової (1.17) інтервальної похибки. Застосування розроблених оптимальних планів забезпечує таку організацію експерименту, яка дозволяє отримати оптимальні оцінки вектора невідомих параметрів інтервальної моделі статичної системи. При цьому оцінки вектора невідомих параметрів задаються множиною локалізації  $\Omega_m$ , із конфігурацією, визначеною насиченим блоком експерименту.

За характеристики оптимальних планів, наведених в таблицях, прийняті властивості множини  $\Omega_m$  локалізації параметрів, які визначають прогнознi властивості інтервальних моделей статичних систем і задаються значеннями, відповідно:  $M(I_D)$ ,  $M(I_A)$  та  $M(I_E)$ . Розрахунок значень  $M(I_D)$ ,  $M(I_A)$  та  $M(I_E)$  для фіксованого плану експерименту, побудований на припущенні, що випадкова обмежена похибка спостережень  $e_i$  в формулі (1.17) має рівномірний

закон розподілу, а інтервальна похибка є постійною на усій області експерименту і дорівнює 1 ( $\Delta(\vec{x})=1, \forall \vec{x} \in \chi$ ), тобто

$$w(e_i) = \begin{cases} 0, & e_i < -1 \\ \frac{e_i + 1}{2}, & e_i \in [-1; 1] \\ 1, & e_i > 1 \end{cases} \quad (6.24)$$

У випадку мінімальної інформації про статистичні характеристики статичної системи, припущення про рівномірний закон розподілу похибки спостережень (6.24) у найбільшій мірі відповідає принципу невизначеності Бернуллі–Лапласа і дозволяє обґрунтувати вибір кількості спостережень в експерименті, яка забезпечує потрібну точність моделі.

Для отримання значень  $M(I_D)$ ,  $M(I_A)$  та  $M(I_E)$  для фіксованого плану експерименту з урахуванням заданого закону розподілу похибки  $e_i$ , використовувались такі формули:

$$M(I_D) = \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^m \left( \frac{16}{(N_i + 1)^2} + \frac{8 \cdot (N_i - 1)}{(N_i + 2) \cdot (N_i + 1)^2} \right) \quad (6.25)$$

$$M(I_A) = 2^{m-1} \cdot Sp[(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot$$

$$diag \left( \left[ \frac{16}{(N_1 + 1)^2} + \frac{8 \cdot (N_1 - 1)}{(N_1 + 2) \cdot (N_1 + 1)^2} \right], \dots, \left[ \frac{16}{(N_m + 1)^2} + \frac{8 \cdot (N_m - 1)}{(N_m + 2) \cdot (N_m + 1)^2} \right] \right) \quad (6.26)$$

$$M(I_E) = \max_{p=1, \dots, 2^{m-1}} \{ \tilde{\Delta}_p^T(N) \cdot (F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot \tilde{\Delta}_p(N) \} +$$

$$Sp[(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \cdot diag \left( \frac{8 \cdot (N_1 - 1)}{(N_1 + 2) \cdot (N_1 + 1)^2}, \dots, \frac{8 \cdot (N_m - 1)}{(N_m + 2) \cdot (N_m + 1)^2} \right) ] \quad (6.27)$$

де  $\tilde{\Delta}_p^T(N) = (\pm \frac{4}{N_1 + 1}, \dots, \pm \frac{4}{N_m + 1})$ .

Формули (6.25), (6.26) та (6.27) отримані із формул (5.30), (5.31) та (5.32), відповідно, заміною замість  $M(\Delta_{N_i})$  та  $D(\Delta_{N_i})$  їхніх значень, розрахованих за формулами (5.23) та (5.24) для рівномірного закону розподілу обмеженої похибки (6.24).

Слід зауважити, що наведені у таблицях додатку В  $M(I_D)$ -оптимальні плани є робастними. Тобто вони є оптимальними для “локалізаційних” експериментів у випадку будь-якого обмеженого закону розподілу похибки спостережень  $e_i$ , хоча сподіване значення об’єму  $M(I_D)$  області  $\Omega_m$  у таблицях наведене для випадку рівномірного закону. Аналогічна властивість робастності стосується планів, побудованих для моделі (6.20) на області експерименту, заданій багатовимірною кулею.

Для порівняння планів у таблицях наведені значення відносних показників їх  $e^{(M(I_D))}$  -  $e^{(M(I_A))}$  -,  $e^{(M(I_D))}$  -ефективності, відповідно:

$$e^{(M(I_D))} = M(I_D(X_D))/M(I_D),$$

$$e^{(M(I_A))} = M(I_A(X_A))/M(I_A),$$

$$e^{(M(I_E))} = M(I_E(X_E))/M(I_E),$$

де  $X_D$ ,  $X_A$ ,  $X_E$  – означають матриці  $M(I_D)$ -,  $M(I_A)$ - та  $M(I_E)$ -оптимальних планів, відповідно;

$M(I_D(X_D))$ ,  $M(I_A(X_A))$ ,  $M(I_E(X_E))$  – задають значення  $M(I_D)$ -,  $M(I_A)$ -,  $M(I_E)$ -критеріїв, для відповідних оптимальних планів.

Наведені у додатку В матриці оптимальних планів, переважно, побудовані із застосуванням теорем 5.4, 5.5, 5.6 на основі існуючих каталогів та методів синтезу оптимальних планів насичених регресійних експериментів [17]. Виключенням є оптимальні плани за номерами 19-26. Для їх побудови розв’язувалися задачі математичного програмування, відповідно: для планів 19, 20, 22 – задача (5.33); для планів 21, 23, 24 – задача (5.34); для планів 25, 26 – задача (5.35).

Для оптимальних за  $M(I_D)$ -критерієм планів наведені тільки матриці насичених експериментів ( $N=t$ ), оскільки згідно теореми 5.5 для заданої структури моделі статичної системи і при фіксованій кількості вхідних змінних вони визначають спектр усіх планів експериментів із  $N>t$ . При цьому частоти є однаковими у точках спектру.

Аналогічно, у випадку побудови моделі (6.20) статичної системи, коли область експерименту задається  $n$ -вимірною кулею для усіх  $M(I_A)$ - та  $M(I_E)$ -оптимальних планів, у додатку В наводяться тільки ортогональні матриці спектрів планів насичених експериментів.

Тепер розглянемо порядок застосування таблиць  $M(I_D)$ -,  $M(I_A)$ - та  $M(I_E)$ -оптимальних планів експерименту для побудови моделей статичних систем на основі інтервальних значень вихідних змінних.

Блок-схема алгоритму вибору придатної матриці плану для побудови інтервальної моделі статичної системи, наведена на рис. 6.8.

Згідно блок-схеми, спочатку задається тип моделі I, II, III, IV чи V, що визначається формулами (6.19), (6.20), (6.21), (6.22) чи (6.23), відповідно. Потім необхідно вказати критерій оптимальності плану, потрібну точність моделі (значення критерію), область експерименту, кількість вхідних змінних  $n$  моделі та кількість спостережень в експерименті  $N$ . Враховуючи, що точність оцінок параметрів інтервальної моделі статичної системи визначається сподіваними значеннями квадрату об'єму  $M(I_D)$ , сумою квадратів довжин діагоналей  $M(I_A)$  чи сподіваною довжиною найбільшої діагоналі  $M(I_E)$  локалізаційної множини  $\Omega_m$ , то числове значення кількості спостережень в експерименті можна визначити користуючись таблицями оптимальних планів виходячи із потрібної точності оцінок параметрів.

Оскільки у таблицях оптимальних планів наведені значення  $M(I_D)$ -,  $M(I_A)$ -,  $M(I_E)$ -критеріїв для випадку  $\Delta(\vec{x})=1$ , то для знаходження значень цих критеріїв для  $\Delta(\vec{x})=const = \Delta \neq 1$  необхідно провести перерахунок за такими формулами:

$$M(\tilde{I}_D) = \Delta^{2m} \cdot M(I_D), \quad M(\tilde{I}_A) = \Delta^2 \cdot M(I_A), \quad M(\tilde{I}_E) = \Delta^2 \cdot M(I_E),$$

де  $M(\tilde{I}_D)$ ,  $M(\tilde{I}_A)$ ,  $M(\tilde{I}_E)$  – задають значення  $M(I_D)$ -,  $M(I_A)$ -,  $M(I_E)$ -критеріїв, відповідно, для випадку  $\Delta(\vec{x}) = \Delta$ .

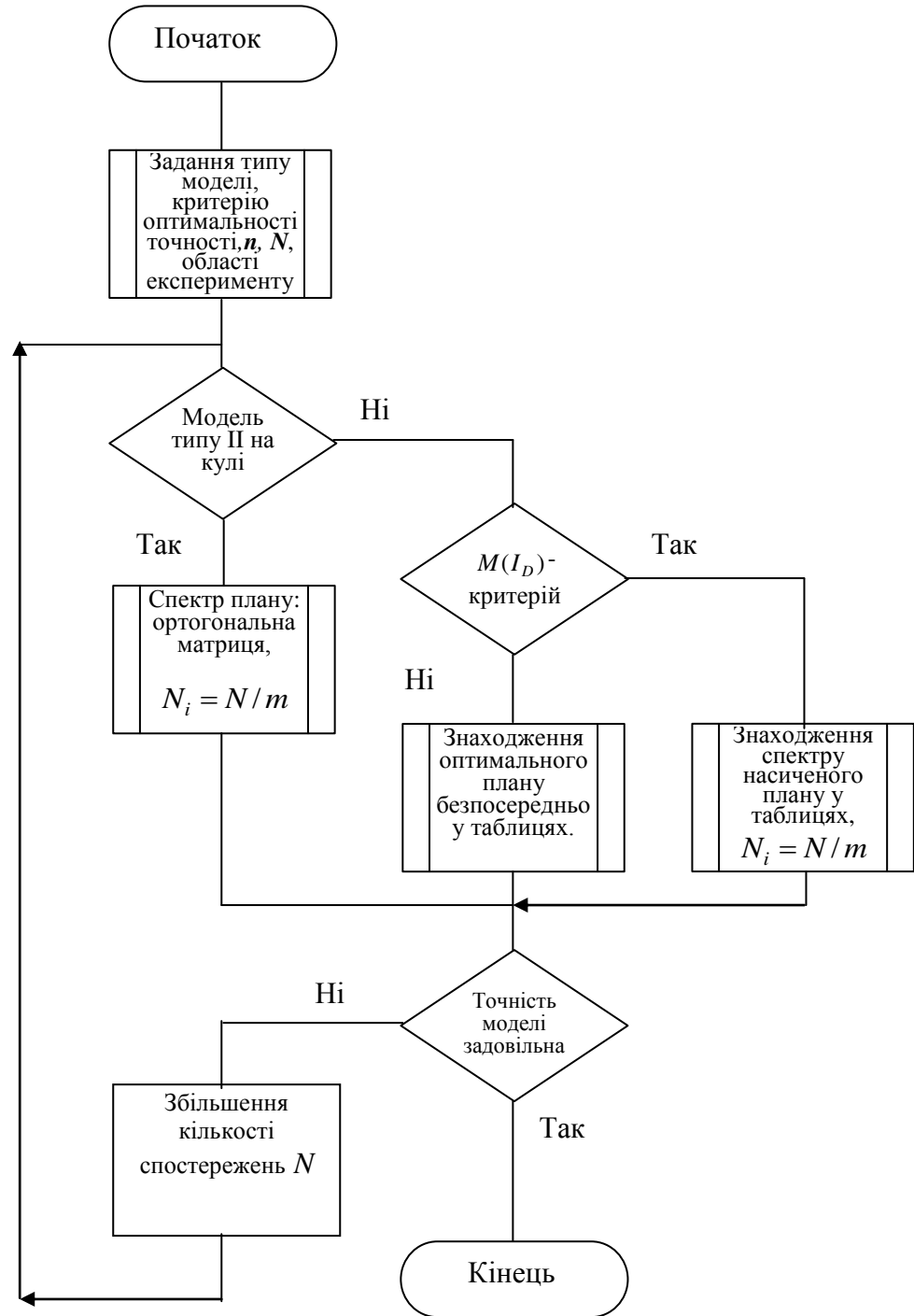


Рис.6.8

Якщо вигляд моделі статичної системи заданий формулою (6.20), а область експерименту задана  $n$ -вимірною кулею, то спектр оптимального плану за будь-яким із критеріїв  $M(I_D)$ -,  $M(I_A)$ -,  $M(I_E)$ -оптимальності визначається ортогональною матрицею, а загальну кількість спостережень  $N$  необхідно якомога рівномірніше розподілити у  $m$  точках спектру.

Для усіх  $M(I_D)$ -оптимальних планів незалежно від типу моделі і області експерименту спочатку необхідно знайти матрицю спектру для випадку  $N=m$ , а потім задану чи отриману кількість спостережень рівномірно розподілити у  $m$  точках спектру.

В усіх інших випадках, згідно вказаних вимог до моделі статичної системи, спочатку у таблицях характеристик оптимальних планів знаходять номер потрібного плану, а потім безпосередньо за його номером – відповідну матрицю.

Отримані матриці планів задають безрозмірні масштабовані на заданій області експерименту

$$\chi = \{ \bar{x} \in R^n \mid |x_k| \leq 1, k=1, \dots, n \} \text{ чи } \chi = \{ \bar{x} \in R^n \mid \bar{x}^T \cdot \bar{x} \leq 1 \}$$

значення вхідних змінних для усіх спостережень. Для отримання реальних значень вхідних змінних  $\tilde{x}_i$  моделі статичної системи необхідно використати формули переходу. Наприклад, у випадку області експерименту, заданої паралелепіпедом

$$\chi = \{ x_{nk} \leq \tilde{x}_k \leq x_{ek}, k=1, \dots, n \},$$

де  $x_{nk}, x_{ek}$  – означають, відповідно, нижнє та верхнє значення вхідної змінної, для отримання реальних значень  $\tilde{x}_{ik}$  вхідних змінних які будуть задаватися в  $i$ -тому спостереженні експерименту застосовуємо формулу переходу

$$\tilde{x}_{ik} = x_{ik} \cdot ((x_{nk} - x_{ek}) + (x_{nk} + x_{ek}))/2,$$

у якій  $x_{ik}$  є компонентами отриманої із таблиць матриці плану

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \cdots x_{1k} \cdots x_{1n} \\ \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ x_{i1} \cdots x_{ik} \cdots x_{in} \\ \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ x_{m1} \cdots x_{mk} \cdots x_{mn} \end{pmatrix}.$$

У додатку В, з метою економнішого запису матриць оптимальних планів локалізаційного експерименту вони наведені у транспонованому вигляді, тобто замість матриць  $X$  наведені матриці  $X^T$ .

На закінчення зауважимо, що розроблені оптимальні плани експерименту для реалізації методу локалізації параметрів інтервальних моделей, дозволяють розширити можливості методів інтервального аналізу при моделюванні статичних систем.



## ВИСНОВКИ

1. Розроблені теоретичні засади побудови моделей вхід-вихід статичних систем методами аналізу інтервальних даних дозволили провести експериментальні дослідження статичних режимів технологічного процесу герметизації інтегральних мікросхем і побудувати його інтервальну модель. На основі побудованої інтервальної моделі ТП отримані оптимальні температурні режими герметизації ІМС для різних партій прес-матеріалу, що дозволило збільшити вихід придатних ІМС на стадії герметизації і досягнути значного економічного ефекту.

2. Розроблене на основі теоретичних засад алгоритмічне та програмне забезпечення дозволило побудувати інтервальну модель взаємозв'язку між соціально-екологічними чинниками та рівнем захворюваності населення і реалізувати вказані моделі для дослідження та регулювання комплексного впливу наслідків техногенної діяльності підприємств на соціально-екологічне середовище. Співставлення реальних даних із прогнозованими за допомогою моделі підтверджує її високу адекватність. Розроблені інтервальні моделі прогнозування захворюваності дозволяють попередити можливі збитки навколишньому середовищу і мінімізувати витрати на лікування населення, що фінансуються за рахунок державного та місцевого бюджетів.

3. Із застосуванням методів синтезу оптимальних “локалізаційних” планів з виділенням насиченого блоку експерименту розроблені таблиці планів, які забезпечують задану точність лінійних та квадратичних за вхідними змінними інтервальних моделей статичних систем та локалізаційних множин їх параметрів, що суттєво розширює можливості застосування інтервального аналізу для моделювання статичних систем.

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі на основі розвитку методів інтервального аналізу розроблено теоретичні засади та алгоритмічне забезпечення побудови моделей “вхід-вихід” статичних систем, коли результати спостережень за вихідною змінною представлені в інтервальному вигляді. На теоретичних засадах розвинуті нові методи планування експериментів, ідентифікації структур інтервальних моделей статичних систем, локалізації та допустимого оцінювання множин їх параметрів, наближення складних моделей простішими. Отримані у дисертації результати у сукупності складають суттєвий внесок у подальший розвиток теорії моделювання статичних систем.

1. Проведений аналіз задач математичного моделювання статичних систем з виходами, значення яких задаються числовими інтервалами, показав актуальність розробки теоретичних засад побудови моделей “вхід-вихід” цих систем шляхом розвитку інтервального аналізу для планування оптимального експерименту, аналізу властивостей та синтезу структури моделей, розробки методів локалізації та допустимого оцінювання у задачах параметричної ідентифікації.

2. Показана еквівалентність задач наближення даних та синтезу структури інтервальних моделей статичних систем при лінійній параметризації і на основі інтервального локалізаційного підходу розроблено метод синтезу оптимальної структури цих моделей, що дозволило розширити можливості методів ідентифікації моделей статичних систем із виходами, заданими інтервалами.

3. Запропоновано систематизований підхід до аналізу властивостей інтервальних моделей, у випадках застосування різних методів локалізації параметрів інтервальних моделей, який побудований на таких критеріях: забезпечення методом максимальної точності прогнозування інтервальної моделі; мінімізації обчислювальних витрат на прогнозування інтервалу виходу у заданій точці області експерименту; аналітичності задання та гладкості меж функціонального коридору прогнозування. Розроблений підхід дозволив

порівняти різні методи локалізації параметрів при розв'язуванні задач параметричної ідентифікації, що дає змогу обґрунтовувати їх вибір залежно від вимог до властивостей інтервальних моделей.

4. Модифіковано метод інтервальної локалізації параметрів моделі на основі симплекс-методу розв'язування задач лінійного програмування. Побудований на базі методу алгоритм дозволяє скоротити кількість симплекс-ітерацій не менше ніж у два рази, а його ефективність порівняно із існуючими алгоритми зростає при збільшенні кількості невідомих параметрів моделі.

5. Розроблено новий ітераційний метод локалізації розв'язків системи інтервальних рівнянь з виділенням насиченого блоку, що забезпечує аналітичність розрахунку границь коридору інтервальних моделей статичних систем та відсіювання неінформативних спостережень, і у якому розв'язана проблема розмірності, актуальна для існуючих методів локалізації у вигляді многогранних областей. Реалізована на паралельних обчислювальних графах рекурентна схема методу дозволила розв'язати проблему обчислювальних витрат, актуальну для еліпсоїдних методів оцінювання, та розробити алгоритм активної ідентифікації параметрів інтервальних моделей, ефективність якого підтверджується результатами чисельного моделювання та порівнянням із іншими алгоритмами активної ідентифікації.

6. Отримано оптимальну допустиму еліпсоїдальну оцінку множини параметрів лінеаризованої моделі статичної системи та зв'язок її конфігурації із матрицею плану для випадку, коли кількість вихідних характеристик системи, заданих у інтервальному вигляді, співпадає із кількістю параметрів. Виведена формула для множини допустимих  $m$ -вимірних еліпсоїдів, яка дозволяє визначити еліпсоїдальну оцінку допустимої множини параметрів у такий спосіб, щоб максимально наблизити її до вигляду технологічної множини розсіювання параметрів і тим самим забезпечити максимальні допуски на параметри. Для випадку, коли значення параметрів моделі "вхід-вихід" статичної системи або логарифми їхніх значень мають нормальний закон розподілу отримано зв'язок між властивостями оптимальної допустимої

множини параметрів та імовірністю працездатності системи, що дозволило спростити алгоритми оцінки імовірності її працездатності.

7. Отримано умови існування області допусків, коли статична система описується інтервальною моделлю, і розроблено ітераційний алгоритм, у якому суміщено ідентифікацію локалізаційної області параметрів моделі і допустиме еліпсоїдалне оцінювання. Формалізовано і проведено аналіз задачі допустимого оцінювання параметрів лінеаризованої інтервальної моделі в умовах ідентифікації базових функцій, який дозволив розробити способи вибору конфігурації оптимальної еліпсоїдалної допустимої оцінки.

8. Для лінійної за входами інтервальної моделі статичної системи на заданій багатовимірною кулею області експерименту доведена еквівалентність між  $I_G$ - та  $I_E$ -оптимальними планами із  $N \geq m$  спостереженнями, а для випадку насичених експериментів ( $N = m$ ) – ортогональність і еквівалентність між собою  $I_G$ -,  $I_E$ -,  $I_D$ -,  $I_A$ -оптимальних планів, що дозволило значно спростити їх синтез.

9. Розроблено алгоритм послідовного  $I_G$ -оптимального планування, який дозволяє покроково мінімізувати максимальну на  $n$ -вимірній многогранній області експерименту похибку прогнозування лінійної за входами інтервальної моделі статичної системи. Ефективність алгоритму підтверджена результатами чисельного експерименту.

10. Для випадку локалізації множини параметрів з виділенням насиченого блоку формалізовано задачу знаходження нового типу оптимальних “локалізаційних” планів експериментів із випадковими інтервальними похибками спостережень. На основі розроблених  $M(I_A)$ -  $M(I_D)$ - та  $M(I_E)$ -критеріїв оптимальності, що задають математичні сподівання, відповідно: квадрату об’єму, суми квадратів довжин діагоналей та квадрату довжини максимальної діагоналі області локалізації, побудовано методи синтезу планів, оптимальних за цими критеріями, а для лінійних та квадратичних моделей – таблиці оптимальних планів, які дозволяють забезпечувати достовірні апріорні оцінки точності параметрів інтервальних моделей, обґрунтувати загальну

кількість спостережень у експерименті та суттєво скоротити витрати на проведення експериментів при побудові інтервальних моделей статичних систем.

11. Із застосуванням алгоритму інтервальної локалізації параметрів моделі модифікованим симплекс-методом розв'язання задач лінійного програмування, розроблено алгоритмічне та програмне забезпечення, яке дозволяє визначати оптимальні структури моделей типу “вхід-вихід” на основі інтервальних даних для широкого класу статичних систем. Побудований алгоритм методу локалізації параметрів моделей статичних систем з виділенням насиченого блоку експерименту і реалізований на паралельних обчислювальних графах значно розширює клас статичних систем та розмірність задач, до яких можна застосовувати методи аналізу інтервальних даних.

12. Розроблені теоретичні засади, алгоритмічне та програмне забезпечення були застосовані для ідентифікації інтервальних моделей статичних режимів технологічного процесу герметизації інтегрованих мікросхем та визначення допусків його параметрів, а також для ідентифікації моделей прогнозування кількості захворювань у системі екологічного контролю м. Тернополя. Розроблені моделі статичних режимів технологічного процесу герметизації мікросхем знайшли своє застосування на ВАТ “Квантор”, м. Збараж, і дозволили підвищити вихід функціонально придатних мікросхем. Моделі прогнозування кількості захворювань використовувались санітарно-епідеміологічною станцією м. Тернополя в інформаційно-картографічній системі екологічного контролю для ефективного розвитку промислової частини міста із врахуванням медико-екологічного та соціального чинників, а також для вивчення та регулювання техногенних наслідків діяльності підприємств. Основні результати роботи використані в навчальному процесі у Тернопільській академії народного господарства при викладанні дисциплін “Теорія систем та системний аналіз” та “Економічна кібернетика”, а також у Національному університеті “Львівська політехніка” при викладанні дисципліни “Математичне моделювання електромеханічних систем”.

13. Обґрунтованість наукових положень та висновків підтверджується використанням коректних методів досліджень, строгим доведенням тверджень, узгоджень розрахунків із раніше відомими з літературних джерел результатами, проведенням чисельних експериментів і порівнянням їх результатів з реальними даними та апробацією основних теоретичних положень і отриманих практичних результатів на наукових конференціях та семінарах.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
2. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 360 с.
3. Архиреева И.Н. Бородюк В.П., Полванов Ф.Ю. Формирование оптимальной регрессионной структуры по данным пассивного эксперимента // Заводская лаборатория. – 1987. - №10. – С. 71 – 74.
4. Бакан Г.М., Куссуль Н.Н. Аппроксимация пересечения четкого и нечеткого множеств в методе размытых эллипсоидов // Кибернетика и вычислительная техника.- 1995. – Вып.105. – С. 18 – 27.
5. Бакан Г.М., Куссуль Н.Н. Размытые эллипсоидальные множества в задачах нестохастического оценивания // Автоматика. – 1989. - №5. – С. 11 – 17.
6. Бакан Г.М., Куссуль Н.Н. Размытый эллипсоидальный алгоритм фильтрации состояний статического объекта // Проблемы управления и информатики.- 1996. - №5. – С. 77 – 93.
7. Бакан Г.М., Куссуль Н.Н. Теоретико-множественная идентификация линейных объектов в классе размытых эллипсоидальных множеств // Автоматика.- 1990. - №4.- С. 72 - 78.
8. Бакан Г.М., Нижниченко Е.А. Алгоритм решения счетной системы линейных уравнений с использованием операции растяжения пространства // Кибернетика. – 1980. - № 5. – С. 42-48.
9. Барткова Л.М., Дивак М.П. Реалізація методики вивчення комплексного впливу господарської діяльності підприємств на соціо-екологічне середовище для АТП-16127 міста Тернополя // Вісн. Тернопільського держ. технічн. унів.- 1999.- Т. 4. - №4. -С.166-170.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М., Численные методы. - М.: Наука, 1987. – 589 с.
11. Беклемешев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.:

Наука, Гл. ред. физ. - мат. литер., 1983 – 336 с.

12. Бородюк В.П., Лецкий Э.К. Статистическое описание промышленных объектов. – М.: Энергия, 1971. – 110 с.

13. Бочков А. Ф., Евтушенко Т. В. Один подход к выбору стационарных режимов технологических процессов в условиях неопределенности. - Москва, 1988. - 17 с. – Деп. в ВИНТИ, №2891-В88.

14. Бочков А. Ф., Милевский М. В. Оценивание параметров модели для объектов с интервальной неопределенностью в выходных параметрах. - Москва, 1988. - 23 с. – Деп. в ВИНТИ, №926-В88.

15. Бочков А.Ф., Вошинин А.П., Сотиров Г.Р. Интервальный анализ как альтернатива регрессионному анализу // Заводская лаборатория. – 1990. - №7. – С. 76 – 81.

16. Бродский В.З. Введение в факторное планирование эксперимента. – М.: Наука, 1976. – 223 с.

17. Бродский В.З., Бродский Л.И., Голикова Т.И., Никитина Е.П., Панченко Л.А. Таблицы планов эксперимента. - М.: Металлургия, 1982. – 751 с.

18. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд. Исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ. – мат. лит., 1986. – 544 с.

19. Ватолин А. А. О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и матем. физики. - 1984. - Т. 24. -С. 1629-1637.

20. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964. – 576 с.

21. Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах. – М.: Наука, 1986. – 296 с.

22. Волосов В.В. К построению параметрических семейств эллипсоидальных оценок и их оптимизации в задачах нестохастической идентификации параметров и состояния многомерных дискретных объектов управления // Проблемы управления и информатики. – 1996. - № 4. – С. 37 - 54.

23. Волосов В.В. Об одном способе построения эллипсоидальных оценок



в задачах нестохастической фильтрации и идентификации параметров управляемых систем // Автоматика. – 1991. - № 3. – С. 24-32.

24. Волосов В.В. Робастные алгоритмы эллипсоидального оценивания состояния многомерных нестационарных непрерывных динамических систем // Проблемы управления и информатики. – 1999. - № 1. – С. 38 - 53.

25. Волосов В.В., Калита А.С., Нижниченко Е.А. Исследование одного вида нестохастических алгоритмов идентификации с помощью прямого метода Ляпунова // Автоматика. – 1989. - № 3. – С. 34-42.

26. Волосов В.В., Одинцова Е.А. Исследование сходимости алгоритмов одного вида наблюдателей состояния дискретных динамических систем с использованием функций Ляпунова // Автоматика и телемеханика. – 1990. - № 12. – С. 41-51.

27. Волосов В.В., Одинцова Е.А. К задаче восстановления вектора фазового состояния и идентификации параметров линейных стационарных динамических систем // Автоматика. – 1986. - № 6. – С. 22-29.

28. Волосов В.В., Храмов С.А., Одинцова Е.А. Алгоритмы эллипсоидального оценивания матрицы параметров линейного дискретного динамического объекта управления // Проблемы управления и информатики. – 1995. - № 1. – С. 63-77.

29. Воцинин А. П., Сотиров Г. Р. Оптимизация в условиях неопределенности. – М.: МЭИ - София: Техника, 1989. – 224 с.

30. Воцинин А.П. Решение задач оптимизации по интервальным оценкам критерия // Заводская лаборатория.- 1987.- №7. – С. 68 – 71.

31. Воцинин А.П., Дывак М.П. Планирование оптимального насыщенного эксперимента в задачах построения интервальных моделей // Заводская лаборатория. – 1993. - №1. – С.56 – 59.

32. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - Москва: Наука, 1967. – 575с.

33. Горский В.Г., Адлер Ю.П., Талалай А.П. Планирование промышленных экспериментов. М.: Металлургия, 1987.- 112 с.

34. Грановский В.Г., Сирая Т.Н. Методы обработки экспериментальных

данных при измерениях. - Ленинград: Энергоатомиздат, 1990.

35. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302 с.

36. Дейвид Г. Порядковые статистики. – М.: Наука, 1979. – 263 с.

37. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.

38. Дивак М. П. Допустиме оцінювання області параметрів радіоелектронних кіл в класі еліпсоїдів // Теоретична електротехніка. - 2002.- Вып. № 56 - С. 113 - 122.

39. Дивак М.П, Використання властивостей інтервальних моделей у задачах послідовного планування оптимальних експериментів // Вісн. НУ “Львівська політехніка”. Електроенергетичні та електромеханічні системи.- 2001.- № 418. - С. 53-58.

40. Дивак М.П. Аналіз точності лінійної інтервальної моделі в задачах статичної ідентифікації // Вісн. ДУ “Львівська політехніка”. Автоматика, вимірювання та керування.- 1999.- № 366. - С. 31-35

41. Дивак М.П. Використання насиченого експерименту для оцінювання параметрів інтервальної моделі при аналізі інтервальних даних // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы.- 1999.- №2(5).- С.33-36.

42. Дивак М.П. Властивості інтервальних моделей при інтервальній формі їх параметрів // Сб. науч. тр. международного науч.-учеб. центра информ. технологий и систем, науч. совет НАН Украины по пробл. “Кибернетика”. Моделирование и управление состоянием эколого-экономических систем региона. – Киев, 2001. - С.58-63.

43. Дивак М.П. Волощук С.В. Локалізація гарантованих оцінок параметрів технологічних процесів. // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах: Зб. наук. праць. - 2001. – Вип. 8– С. 310 – 316.

44. Дивак М.П. Інтервальні методи компресії картографічної інформації // Тез. доп. міжн. наук. – техн. конф., присвяченої 150- річчю від дня народження видатного українського фізика і електротехніка І. Пулюя. – Тернопіль: ТПІ. -

1995р. С. 78- 79.

45. Дивак М.П. Метод локалізації гарантованих оцінок в задачах параметричної ідентифікації // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2000. - №4.-С.12 - 17.

46. Дивак М.П. Обчислювальні аспекти методів локалізації розв'язків задач параметричного оцінювання в умовах обмежених похибок. // Відбір та обробка інформації. - 2002. - №16 (92) - С. 43-47.

47. Дивак М.П. Оцінка точності параметрів радіоелектронних кіл методами аналізу інтервальних даних // Пр. Ін-ту електродинаміки НАНУ. Електротехніка'2001. - Київ: ІЕД НАНУ, 2001.-С. 29 - 33.

48. Дывак Н.П. Планирование  $I_G$ - и  $I_E$ - оптимальних експериментов в задачах идентификации интервальных моделей // Проблемы управления и информатики.- 2001.-№2.-С.42-49.

49. Дивак М.П. Побудова інтервальної моделі для прогнозування кількості захворювань в системі екологічного контролю м. Тернопіль // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2001. - №3.- С.177-183.

50. Дивак М.П. Послідовне планування експерименту при локалізації області параметрів інтервальної моделі // Доп. спільної українсько - польської школи – семінару “Актуальні проблеми теоретичної електротехніки: наука і дидактика”. - Алушта, 2001. С.20-22.

51. Дивак М.П. Допустиме оцінювання множини параметрів статичної системи в класі багатомірних еліпсоїдів // Комп'ютинг. – 2002. – Том 1. - №1. – С.108-114.

52. Дивак М.П., Гладій Г.М, Волощук С. В. Проектування інтервальних моделей соціально-екологічних систем на основі нечітких даних // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах: Зб. наук. праць.- 2002. – Вип. 9. – С. 130 – 135.

53. Дивак М.П., Дністрян С.С., Когут Р.Д., Кондратюк В.А., Литвинова

О.Н. Захворювання населення міста Тернополя та його залежність від соціологічних умов // Матеріали конф. “Методичні основи викладання та наукові проблеми сьогодення”. – Тернопіль: Укрмедкнига. – 1997. С. 21 – 22.

54. Дивак М.П., Ідентифікація інтервальної моделі технологічного процесу герметизації інтегральних схем // Вісник ДУ “Львівська політехніка”. Радіоелектроніка та телекомунікації.- 2000.- № 387. - С. 375 - 380.

55. Дивак М.П., Кобернюк В.П., Франко Ю.П., Пітух І.Р., Цимбалій В.П. Проблеми ідентифікації динамічних систем в умовах інтервальної невизначеності // Вимірювання та обчислювальна техніка в технологічних процесах: Зб. наук. праць.- 2001. – Вип. 8– С. 307 – 310.

56. Дивак М.П., Крамар О.В. Алгоритм наближення області параметрів інтервальної моделі в задачах лінійної ідентифікації // Вісн. Тернопільської акад. нар. господ. - 2000.- №10.- С.98-103.

57. Дивак М.П., Крамар О.В. Ідентифікація параметрів моделі на основі аналізу інтервальних даних // Вісн. Тернопільського держ. технічн. унів.-Тернопіль. - 1999.- Т. 4. - №1.- С.76-80.

58. Дивак М.П., Манжула В. Активна ідентифікація параметрів інтервальних моделей методом локалізації з виділенням насиченого блоку експерименту // Вісник НУ “Львівська політехніка”. Радіоелектроніка та телекомунікації.- Львів: НУ “Львівська політехніка”. - 2002.- № 440. - С. 241 - 246.

59. Дивак М.П., Пітух І.Р. Шклярєнко Н.Г Франко Ю.П. Використання властивостей інтервальних похибок при моделюванні технологічних процесів // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах: Зб. наук. праць. - 2000. – Вип. 7. – С. 204 – 208.

60. Дивак М.П., Стахів П.Г. Ідентифікація моделей об’єктів в умовах інтервальної невизначеності на основі методів аналізу інтервальних даних // Пр. міжн. конф. з управління “АВТОМАТИКА-2000”, Львів 11-15 вересня 2000: В 7-ми томах. – Львів: Держ. НДІ інформ. інфраструкт., 2000.-Т. 2. – С. 90 - 97.

61. Дивак М.П., Стахів П.Г. Реалізація методу локалізації параметрів

інтервальних моделей з виділенням насиченого блоку експерименту на паралельних обчислювальних графах. // *Электроника и связь*. – 2001. №12. – С. 120 – 124.

62. Дивак М.П., Франко Ю.П. Методи аналізу інтервальних даних стосовно оцінки технологічних процесів виготовлення інтегральних схем // *Матеріали 3 міжнар. конф. “Математичне моделювання в електротехніці, електроніці та електроенергетиці”*. – Львів. 1999. - С. 75.

63. Дивак М.П., Франко Ю.П. Методи аналізу інтервальних даних стосовно оцінки технологічних процесів виготовлення інтегральних схем // *Теоретична електротехніка*. - 2000.- Вып. 55 - С. 167 - 173.

64. Дивак М.П., Франко Ю.П. Оцінювання області параметрів інтервальної моделі на основі блоку насиченого експерименту при аналізі інтервальних даних // *Матеріали 5 міжн. конф. “Досвід розробки і застосування САПР в мікроелектроніці”*.- Львів. 1999. С.188-189

65. Дивак М.П., Франко Ю.П. Пітух І.Р., Цимбалій В.П. Інтервальне моделювання ефективності сільськогосподарського виробництва // *Тез. доп. 4 наук. – техн. конф. "Прогресивні матеріали, технології та обладнання в машино - і приладобудуванні*. - Тернопіль: ТДТУ. 2000. - С. 200.

66. Дивак М.П. Розрахунок функціональної придатності радіоелектронних кіл на основі методу аналізу інтервальних даних *Тези доповідей четвертої науково- технічної конференції ТДТУ // Тез. доп. 4 наук. – техн. конф. "Прогресивні матеріали, технології та обладнання в машино - і приладобудуванні*. - Тернопіль: ТДТУ. 2000. - С. 122.

67. Дивак М.П., Шкляренко Н.П. Модифікація симплекс методу розв’язування задач лінійного програмування для побудови інтервальних моделей // *Вимірjuвальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах*. – 2000.-№1.- С.138-141.

68. Добронец Б. С., Шайдуров В. В. Двусторонние численные методы. - Новосибирск: Наука, 1990. – 208 с.

69. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. В 2- х кн. –

М.: Финансы и статистика, 1986. кн. 1. – 355с., кн. 2. –349 с.

70. Дугарова И. В., Смагина Е. М. Обеспечение устойчивости системы с неопределенными параметрами // Автоматика и Телемеханика. - 1990. - №11. - С. 176-181.

71. Дывак Н.П. Интервальные модели ошибок в прикладных задачах // Материалы Всесоюз. конф. “Актуальные проблемы прикладной математики”. – Ч. 1.- Саратов: Государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 1991. – С. 70-75.

72. Дывак Н.П. Оптимальное планирование эксперимента в случае локализации области параметров интервальной модели // Кибернетика и вычислительная техника. - 2001.- Вып. 132. - С.39-47.

73. Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. – М.: Наука, 1987. – 319 с.

74. Жуков А.А., Фурасов В.Д. Рекуррентное эллипсоидальное оценивание состояний дискретных систем // Развитие и применение метода функций Ляпунова/ Под ред. В.М.Матросова. – Новосибирск: Наука, 1992. – С. 220-224.

75. Жуков А.А., Фурасов В.Д. Эллипсоидальная аппроксимация и оценивание состояний дискретных систем // Техн. кибернетика. – 1990. - № 2. – С. 121-129.

76. Закалик Л.І., Ткачук Р.А. Основи мікроелектроніки. Навчальний посібник. – Тернопіль: ТДТУ ім. І. Пулюя, 1998. – 352 с.

77. Захаров А.В., Шокин Ю.И. Синтез систем управления при интервальной неопределённости параметров их математических моделей // Докл. АН СССР. – 1988. - Т. 299 - №2. - С. 292-295.

78. Зюзин В. С. Итерационный метод решения системы алгебраических сегментных уравнений первого порядка // Дифференциальные уравнения и теория функций . - Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1989. – Вып. 8 - С. 72-82.

79. Зюзин В. С. Об одном способе отыскания двусторонних интервальных приближений решения системы линейных интервальных уравнений //

Дифференциальные уравнения и теория функций. - Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1987. - С. 28-32.

80. Ивахненко А.Г. Богаченко Н.Н. Ли Тянь Мин . Этапы оптимизации алгоритма прогнозирования случайных процессов с помощью комплексирования аналогов // Проблемы управления и информатики. – 1997. - №4. – С. 111- 118.

81. Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации сложных систем. – К.: Наукова думка, 1982. – 245 с.

82. Ивахненко А.Г. Коппа Ю.В. Регуляризация решающих функций в методе группового учета аргументов // Автоматика. – 1970. - №2. – С. 19 – 23.

83. Ивахненко А.Г., Петухова С.А., Юдин В.М. Объективный выбор оптимальной кластеризации выборки данных при компенсации неробастных помех // Автоматика. –1993. - №3. - С.46 – 58.

84. Ивлев Р. С., Соколова С. П. Построение векторного управления многомерным интервально - заданным объектом // Вычислительные Технологии. - 1999. - Т. 4 - С. 3-13.

85. Калман Р. Идентификация систем с шумами // Успехи матем. наук. – 1985 – 40. - Вып. 4. – С. 27 – 41.

86. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. - Москва: Мир, 1971.

87. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. - Новосибирск: Наука, 1986. – 222с.

88. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Об интервально – аналитическом методе второго порядка для обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. Акад. наук. УзССР. Сер. физ. – мат. наук.- 1976. - №3. – С. 28 – 30.

89. Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сиб. математ. журнал. - 1962. - Т. 3 - №5. - С. 701-709.

90. Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Эллипсоидальное оценивание по

обобщенному критерию // Автоматика и телемеханика. – 1991. - № 9. – С. 133-145.

91. Коппа Ю.В., Степашко В.С. Сравнение прогнозирующих свойств моделей регрессионного типа и МГУА // Сб. науч. тр. международного науч.-учеб. центра информ. технологий и систем, науч. совет НАН Украины по пробл. “Кибернетика”. Моделирование и управление состоянием эколого-экономических систем региона. – Киев, 2001. - С. 69 - 76.

92. Корноушенко Е.К. Интервальные покоординатные оценки для множества достижимых состояний линейной стационарной системы // Автоматика и Телемеханика. – 1980. - Ч.1. - №5. С. 12-22.

93. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с.

94. Кривошейкин А.В. Точность параметров и настройка аналоговых радиоэлектронных цепей. - М.: Радио и связь, 1983. 136 с.

95. Крищук В.М., Шило Г.М., Гапоненко М.П. Інтервальні методи оптимізації допусків // Вісн. НУ “Львівська політехніка”. Комп’ютерні системи проектування: Теорія і практика.- 1999.- № 373. - С. 196 - 201.

96. Кротов Г.И., Коппа Ю.В., Степашко В.С. Интерактивное моделирование сложных объектов на основе алгоритмов МГУА // Кибернетика и вычисл. техника. – 1994. С. 55 – 61.

97. Кузнецов В.П. Интервальные статистические модели. – М.: Радио и связь, 1991. – 352 с.

98. Кунцевич В.М. О работах в теории управления в институтах НАН Украины в последние годы // Проблемы управления и информатики. – 1998. - №6. – С. 5 – 14.

99. Кунцевич В.М. Пшеничный Б.Н. Инвариантные и стационарные множества нелинейных дискретных систем при ограниченных шумах // Проблемы управления и информатики. – 1996. - №1-2. – С. 35 – 45.

100. Кунцевич В.М., Кунцевич А.В. Активная идентификация и управление при ограниченных шумах // Пр. міжн. конф. з управління



“АВТОМАТИКА-2000”, Львів 11-15 вересня 2000: В 7-ми томах. – Львів: Держ. НДІ інформ. інфраструкт., 2000.- .-Т. 1. - С .7-13.

101. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Об оптимальном и адаптивном управлении динамическими объектами в условиях неопределенности // Автоматика и телемеханика. – 1979. - №1.- С. 79 – 88.

102. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Получение гарантированных оценок в задачах параметрической идентификации // Автоматика. – 1982. - №4. – С. 49 - 59.

103. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. – Киев: Наук. думка, 1985. – 248 с.

104. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Управление в условиях неопределенности (синтез адаптивных систем управления) // Автоматика. – 1987. - №5. – С. 16 – 26.

105. Кунцевич В.М., Лычак М.М., Никитенко А.С. Активная идентификация параметров линейного статического объекта (игровая задача планирования эксперимента) // Автоматика и телемеханика. – 1987. - №9. – С.68 – 73.

106. Куржанский А. Б. Задача идентификации - теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. - 1991. - №4. - С. 3-26.

107. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.

108. КуССуль Н.Н. Исследование сходимости размытого алгоритма наблюдения для многомерных динамических систем // Проблемы управления и информатики.- 1996. - №4. – С. 54 – 61.

109. КуССуль Н.Н. Нечеткий эллипсоидальный наблюдатель состояния пониженного порядка // Проблемы управления и информатики.- 2000. - №5. – С.44 – 51.

110. Лакеев А.В., Носков С.И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью // Сиб. математ. журнал. - 1994. - Т. 35 - №5. - С. 1074-1084.

111. Леган Э. Проверка статистических гипотез. – М.: Наука, 1979. – 258с.
112. Лецкий Э.К. Планирование испытаний технических объектов // Сб. тр. Вопросы кибернетики. Планирование и автоматизация эксперимента в научных исследованиях. – М., 1982. – С. 62 – 76.
113. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. – М.: Физ. мат. изд., 1962. – 187 с.
114. Лисенков А.Н. О методах идентификации и управления в условиях неопределенности // Межд. конф. по интерв. и стох. методам в науке и технике. ИНТЕРВАЛ – 92: Сб. тр. – Москва, 1992.- Т.1.- 92 –96.
115. Литвин І.С., Дивак М.П., Гладій Г.М. Інформаційно - картографічна система контролю екологічної ситуації // Тез. доп. 1 Української конференції з автоматичного керування “Автоматика 94”. – Київ: - 1994.
116. Лоусон Ч., Хентон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. –246 с.
117. Лычак М.М. Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода // Проблемы управления и информатики .- 1999. - №5. – С. 34-41.
118. Лычак М.М. Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода // Проблемы управления и информатики. – 1999. - №5. – С. 34 – 42.
119. Лычак М.М. Множественная модель неопределенного процесса и ее использование для обработки результатов измерений // Проблемы управления и информатики. – 1996. - №1- 2. – С. 184 – 192.
120. Лычак М.М. Множественная фильтрация// Проблемы управления и информатики. – 1996. - №5. – С. 63 – 77.
121. Лычак М.М. О решении задачи структурной параметрической идентификации в условиях неопределенности // Автоматика. – 1990. – №6. – С.72 – 77.
122. Лычак М.М. Синтез дискретных адаптивных систем управления на основе теоретико- множественных моделей неопределенности // Дис. докт. физ.

– мат. наук.- Киев: Ин-т киб., 1995.

123. Лычак М.М., Евтушок В.П. Расчет электронных устройств технических систем управления с использованием множественного подхода // Проблемы управления и информатики. – 2000. - №1. – С. 105 – 112.

124. Манусов В.З., Моисеев С.М., Перков С.Д. Интервальный анализ в задачах расчета токов короткого замыкания // Техническая электродинамика. - 1987. -№5. – С. 13-18.

125. Марков С.М. Некоторые задачи интерполяции, идентификации и оценивания для интервальных данных // Межд. конф. по интерв. и стох. методам в науке и технике. ИНТЕРВАЛ – 92: Сб. тр. – Москва, 1992.- Т.1.- 103.

126. Математическая энциклопедия. Том 2. - Москва: Советская Энциклопедия, 1979.

127. Математический энциклопедический словарь. - Москва: Наука, 1995.

128. Меньшиков Г.Г. Интервальные вычисления: упущенные возможности и попытки наверстать // Процессы управления и устойчивость: Тр. XXIX научн. конф. 4-11 апреля 1998 года, Санкт-Петербург, СПбГУ, Факультет прикладной математики- процессов управления. - Санкт-Петербург: СПбГУ, 1998. - С. 440-447.

129. Мессарович М., Такахара Я. Общая теория систем: Математические основы. – М.: Мир, 1978.

130. Михайлов А.В. Савин С.К. Точность радиоэлектронных устройств. - М.:, 1976. - 214 с.

131. Михайлов А.В. Эксплуатационные допуски и надежность в радиоэлектронной аппаратуре. - М.:, 1970. - 216 с.

132. Молчанов И.Н. Введение в алгоритмы параллельных вычислений. – К.: Наукова думка, 1990. – 128 с.

133. Морланг А.А., Авдеев Л.А., Колмогоров В.Г. Исследование режима трехузловой схемы электрической сети методами интервального анализа / Информационно – оперативный материал. (Интервальный анализ): Препр. /

Вычисл. центр. СО АН СССР; 17. – Красноярск: 1990. – С.21 - 25.

134. Недашковський М.А. Збалансовані обчислення для задач лінійної алгебри в комп'ютерних мережах // Вісн. Тернопільської акад. нар. господ. - 2000.- №10.- С. 9 - 14.

135. Неклепаев Б.Н. Электрическая часть электростанций и подстанций. – М.: Наука, 1986. –640 с.

136. Орлов А.И. Интервальная статистика// Межд. конф. по интерв. и стох. методам в науке и технике. ИНТЕРВАЛ – 92: Сб. тр. – Москва., 1992.- Т.1.- 122 – 125.

137. Орлов А.И. О развитии реалистической статистики // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: Сб. тр. – Пермь: ПГУ, 1990.- С.89 –99.

138. Орлов А.И. Устойчивость в социально – экономических моделях. – М.: Наука, 1979. – 296 с.

139. Орлов А.И. Часто ли распределение результатов наблюдений является нормальным? // Заводская лаборатория. – 1992. - №1. – С. 67 – 74.

140. Палюх В.В. Гарантированная оценка оперативных значений диагностических параметров химического производства / Информационно – оперативный материал. (Интервальный анализ): Препр. / Вычисл. центр. СО АН СССР; 17. – Красноярск: 1990. – С. 26 - 29.

141. Пархомец С. М., Дивак М.П., Волощук С.В. Регресійний аналіз і прогнозування собівартості виробництва продукції тваринництва у Західній Україні з використанням комп'ютерної техніки // Регіональні аспекти розвитку і розміщення продуктивних сил України: Зб. наук. пр. каф. УТР і РПС Тернопільської акад. нар. господ. – 2001.- Вип. 5.- С. 71 - 78.

142. Покотило В.Г. Новый метод квазиоптимальной аппроксимации пересечения эллипсоидов: Препр./ АН УССР, Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова; 90-13.– Киев, 1990. – 18 с.

143. Потемкин В.Г. Система MathLAB: Справ. пособие. – М.: Диалог-МИФИ, 1997. – 350 с.

144. Потемкин В.Г. Система инженерных и научных расчетов MathLAB

5.х: В 2-х т.– М.: Диалог-МИФИ, 1999. – Т.1. - 366 с, Т.2. - 304 с.

145. Радіотехніка: Енциклопедичний навчальний довідник: Навч. Посібник/ За ред. Мазора Ю.Л., Мачуського Є.А., Правди В.І. – К.: Вища шк., 1999. – 838 с.

146. Райбман Н.С., Чадеєв В.М., Построение моделей производства. – Л.: Энергия, 1975. – 375 с.

147. Сейдж А., Мелс Дж. Идентификация систем. – М.: Наука, 1976. – 495с.

148. Сеньо П.С., Дивак М.П., Гладій Г.М., Венгерський П.С. Інтервальні моделі в медико -екологічному прогнозуванні // Вісн. Львівського державного університету. Задачі та методи прикладної математики. – 1995.- Вип. 41. – С.105- 108.

149. Степанюк В.В. Методи математичного програмування. – К.: Вища шк., 1977.- 272 с.

150. Степашко В.С. Алгоритмы МГУА как основа автоматизации процесса моделирования сложных объектов на основе процесса моделирования по экспериментальным данным // Автоматика. – 1988. - № 4. – С. 44-45.

151. Степашко В.С. Конечная селекционная процедура получения результата полного перебора // Автоматика. – 1981. - № 3. – С. 76 - 79.

152. Степашко В.С. О задаче структуризации знаний в области моделирования по эмпирическим данным // Кибернетика и вычисл. техника. – 1991. – Вып. 92. – С. 80 – 83.

153. Степашко В.С., Костенко Ю.В. Исследование свойств комбинаторно-селекционного (многоэтапного) алгоритма МГУА // Сб. науч. тр. международного науч.-учеб. центра информ. технологий и систем, науч. совет НАН Украины по пробл. “Кибернетика”. Моделирование и управление состоянием эколого-экономических систем региона. – Киев, 2001. - С. 96 - 100.

154. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Сысоева Ю. А. Математическая модель оптимизационной задачи размещения правильных многоугольников с учетом погрешностей исходных данных // Доп. НАН України. –1998 - №5 – С. 104 -

111.

155. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Сысоева Ю. А. Оптимизационная задача размещения правильных интервальных многоугольников // Доп. НАН України. –1998 - №9 – С. 114 - 120.

156. Успенский А.Б., Федоров В.В. Вычислительные аспекты метода наименьших квадратов при анализе и планировании регрессионных экспериментов. – М.: МГУ, 1975. – 168 с.

157. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. – М.: Наука, 1971.- 312 с.

158. Хартман К., Лецкий Э.К., Шефер В. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. – М.: Мир, 1977. – 552 с.

159. Химельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. –М.: Мир, 1975. – 534 с.

160. Хлебалин Н. А. Синтез интервальных регуляторов в задаче модального управления // Аналитические методы синтеза регуляторов. - Саратов: Саратовский политехн. ин-т., 1988. - С. 26-30.

161. Хлебалин Н.А., Шокин Ю.И. Интервальный вариант метода модального управления // Докл. акад. наук. - 1991. - Т. 316, №4. - С. 846-850.

162. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. – М.: Наука, 1968. – 400 с.

163. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. – М.: Наука. Гл. ред физ. – мат лит., 1984. – 320 с.

164. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1988. – 320 с.

165. Черноусько Ф.Л., Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов // Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1980. - №3. С. 3 – 11.

166. Чунихин А.А., Акимов Е.Г., Коробова Ю.С., Соколов В.П., Савельев А.В. Выбор электрических аппаратов для промышленных установок. М.: МЭИ, 1990.- 155 с.

167. Шайдуров В.В., Шарый С.П. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках: Препр./ ВЦ СО АН СССР, №5. – Красноярск: 1988. - 27 с.

168. Шарая И.А. О максимальной внутренней оценке множеств решений интервальных линейных систем // Вычислительные технологии. - 1998. - Т. 3 - №2. - С. 55-66.

169. Шарый С. П. Анализ чувствительности интервальных линейных статических систем // Труды XI международной Байкальской школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск, Байкал, 5-12 июля 1998 г., секция 4. - Иркутск ИСЭМ, 1998. - С. 187-190.

170. Шарый С.П. Алгебраический подход во "внешней задаче" для интервальных линейных систем // Вычислительные Технологии. - 1998. - Т. 3, №2. - С. 67-114

171. Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределённостью // Известия РАН. Теория и системы управл. - 1997. - №3. - С. 51-61.

172. Шарый С.П. Внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем // Вычислительные Технологии. - 1999. - Т. 4, №4. - С. 82-110.

173. Шарый С.П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение // Дис. доктора физ. –математ. наук. - Новосибирск: Ин-т вычисл. Технологий СО РАН, 2000. - 322 с.

174. Шарый С.П. Интервальный анализ: прошлое, настоящее и будущее // Наука в Сибири. - 1997. - №41 (2127). - С. 3.

175. Шарый С.П. Линейные статические системы с интервальной неопределенностью: эффективные алгоритмы для решения задач управления и стабилизации. Препр. / ВЦ СО РАН; №7 - Красноярск.: 1994. - 13 с.

176. Шарый С.П. Новый подход к анализу статических систем с интервальной определенностью в данных // Вычислительные Технологии. - 1997. - Т. 2 - №1.- С. 84-102.

177. Шарый С.П. О разрешимости линейной задачи о допусках // Interval

Computations.- 1991. - №1. - С. 92-97.

178. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. – Новосибирск: Наука, 1981. – 116 с.

179. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975.- 684 с.

180. Яковлев А.Г. Интервальные вычисления – предмет исследований и полезный инструмент // Интервальные вычисления. – 1991. - №1.- С. 10 – 26.

181. Яковлев А.Г. Машинная арифметика мультиинтервалов // Вопросы Кибернетики (Научный Совет по компл. проблеме "Кибернетика" АН СССР). – 1986.- Вып. 125. - С. 66-81.

182. Якубович В.А. Рекуррентные конечно сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // Докл. АН СССР. Математ., физ. – 1966. - №6 – С.1308 – 1311.

183. Alefeld G., Herzberger J. über die Verbesserung von Schranken für die Lösung bei linearen Gleichungssystemen // Angewandte Informatik. - 1971. - B. 13. - S. 107-112.

184. Aubin J.-P. Viability Theory. - Boston: Birkhauser, 1991.

185. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-Valued Analysis. - Boston: Birkhauser, 1990.

186. Babichev A. B., Kadyrova O. B., Kashevarova T. P., Leshchenko A.J., Semenov A. L. UniCalc, a novel approach to solving systems of algebraic equations // Interval Computations. - 1993. - №2. - P. 29-47.

187. Bartkova L., Hladij G., Dywak M., Kogut P. Badanie i regulacja kompleksowego wpływu gospodarczej działalności przedsiębiorstw na środowisko socjoekologiczne // V krajowa konf. "Modelowanie cybernetyczne systemów biologicznych".- Krakow: 2000. S. 139 - 141.

188. Bäumann M. Numerical experience with methods for solving an interval linear system // Freiburger Intervall-Berichte. - 1984. - №7. - S. 61-66.

189. Burgeimer P. Controllability and interval mathematics / Mathematical Modelling and Scientific Computations / Andreev A. S., Dimov I. T., Markov S. M.



and Ullrich Ch., eds. - Sofia: Bulgarian Academy of Sciences, 1991. - P. 1-13.

190. Caprani O., Madsen K. Experiments with interval methods for nonlinear systems // *Freiburger Intervall-Berichte*. - 1981. - №7. - S. 1-13.

191. Coxson G. E. Computing exact bounds on elements of an inverse interval matrix is NP-hard // *Reliable Computing*. - 1999. - Vol. 5. - P. 137-142.

192. Design of experiments and data analysis: New trends and results / Letzky E.K., Voshinin A.P., Dyvak N.P., Simoff S.J., Orlov A.I., Gorsky V.G., Nikitina E.P., Nosov V.N. / Edited by E.K. Letzky. – Moscow.: ANTAL., 1993 – 192p.

193. Dimitrova N.S., Markov S.M., Popova E.D. Extended interval arithmetics: new results and applications // *Computer Arithmetic and Enclosure Methods* / Atanassova L., Herzberger J., eds. - Amsterdam: Eisevier, 1992. - P. 225-232.

194. Dobronets B. S. On some two-sided methods for solving systems of ordinary differential equations // *Interval Computations*. - 1992. - №1(3). - P. 6-21.

195. Dyvak M., Franko Yu., Pituh I., Voloshchyk S. The full combination algorithm modification in the task of technological process interval modelling // *Proc. of the sixth international conf. “The Experience of Designing and Application of CAD System in Microelectronics”* - Lviv, 2001.- P. 314.

196. Dyvak M., Hladiy G., Vitsentiy V. The experimental design in tasks of interval models identification // *Proc. of the international workshop “Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications”*. Foros, 2001. P. 224- 227.

197. Dyvak M., Voloshchuk S., Mangula V. The localization method for active identification of the interval model // *Proc. of international conf. “Modern problem of telecommunication, computer science and engineeris training”*. – Lviv, 2002. P. 43 – 44.

198. Dyvak M.P. Interval model identification of hermetic sealing technological process the integrated circuits // *Proc. of international conf. “Modern problem of telecommunication, computer science and engineeris training”*. - Lviv: 2000. P. 37-38.

199. Dyvak M.P., Franko Yu., Pituh I., Tsymbaliy V. Algorithm of technological process interval modeling // Proc. of international conf. "Modern problem of telecommunication, computer science and engineeris training". - Lviv: 2000. P. 31.

200. Dyvak M., Hladiy G. Application interval methods in static identification of the medical and ecological conditions of on average industrial city // Ref. IV krajowa konf. "Modelowanie Systemow Biologicznych".- Krakow: 1995. S. 95-99.

201. Dyvak M., Hladiy G., Dnistrian S. The geographic information systems for control of medical and ecological conditions of on average industrial city // Materialy 8 krajowa konf. naukowa "Uniwersalnosc cybernetyki" .- T.1.- Krakow: 1996. S. 3-4.

202. Dyvak M., Hladiy G., Zhang D. Identification Socio - Ecological System and Design of Interval Model on the Basis Fuzzy – Data // Abstracts 2<sup>nd</sup> IMACS International Multiconference CESA'98 "Computational engineering in systems applications". – Tunisia: 1998. P.234.

203. Filippov A. F. Ellipsoidal estimates for a solution of a system of differential equatuations // Interval Computations. - 1992. - №2(4). - P. 6-17.

204. Garloff J. Block methods for the solution of linear equations // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. - 1990.— Vol. 11. - P. 89-106.

205. Garulli A., Teci A., Vicino A.. Robustness in identification and control // Lect. notes in control and inform. sci.– 1999. – 245. – 413 p.

206. Golubcova T.D. Voschinin A.P. Some applications of interval regression analysis in biometrics // International conference on interval and computer-algebraic methods in science and engineering "Interval'94"- St. Petersburg, 1994. – P. 96 - 98.

207. Gorskii V.G., Katsman E.A., Klebanova V.M., Grigor'ev A.A. Selecting the "best" equation for response surface // Industrial laboratory.- 1986.- Vol 52. - №12. – P. 1122 – 1125.

208. Hadjihassan S., Walter E., Pronzato L. Quality improvement via optimization of tolerance intervals during the design stage // Applications of Interval Computatons / Kearfott R. B., Kreinovich V., eds. - Dordrecht: Kluwer, 1996. - P. 91-131.

209. Hansen E. Bounding the solution of interval linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. - 1992. - Vol. 29, №5. - P. 1493-1503.
210. Hansen E. Interval forms of Newton's method // *Computing*. - 1978. - №20. - P. 153 - 163.
211. Hansen E. R. Global optimization using interval analysis — the multidimensional case // *Numerische Mathematik*. - 1980. - Vol. 34, №3. - P. 247-270.
212. Hansen E. R. Global optimization using interval analysis — the one-dimensional case // *Journal of Optimization Theory and Applications*. - 1979. - Vol. 29. - P. 331-344.
213. Hansen E. R. Interval form of Newton's method // *Computing*. 1978. - Vol. 4, №3. -P.187-201.
214. Hansen E.R. On linear algebraic equations with interval coefficients // *Topics in Interval Analysis* / Hansen E., eds. - Oxford: Clarendon Press, 1969. - P. 35-46.
215. Hartfiel D.J. Concerning the solution set of  $Ax = b$  where  $P < A < Q$  and  $p < b < q$  // *Numerische Mathematik*. - 1980. - Vol. 35, №3. - P. 355-359.
216. Heindl G., Kreinovich V., Lakeyev A. Solving linear interval systems is NP-hard even if we exclude overflow and underflow // *Reliable Computing*. - 1998. - Vol. 4. - P. 383-388.
217. Herzberger J. Note on a bounding technique for polynomial functions // *SIAM J. Appl. Math.* - 1978 - № 34. - P. 685 - 686.
218. Jansson C. Calculation of exact bounds for the solution sets of linear interval systems // *Linear Algebra and its Applications*. - 1997. - Vol. 251. - P. 321-340.
219. Jansson C. An NP-hardness result for nonlinear systems // *Reliable Computing*. - 1998. - Vol. 4. - P. 345-350.
220. Jerrell M. E. Applications of interval computations to regional economic input-output models // *Applications of Interval Computations*; Kearfott R. B. and Kreinovich V., eds. - Dordrecht: Kluwer, 1996. - P. 133-143.

221. Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming // *Combinatorica*. - 1984. - Vol. 4. - P. 373-395.
222. Kearfott R.B. Preconditioners for the interval Gauss-Seidel method // *SIAM Jourf on Numerical Analysis*. - 1990. - Vol. 27, №3. - P. 804-822.
223. Kearfott R.B. *Rigorous Global Search: Continuous Problems*. - Dordrecht: Kluwer, 1996.
224. Klatt P., Ullrich ch. Complex sector arithmetic // *Computing*. - 1980. – Vol.24 - P. 139-148.
225. Kolev L.V. *Interval Methods for Circuit Analysis*. - Singapore: World Scientific, 1993.
226. Krawchczyk R. Interval extensions and interval iterations // *Computing*. – 1980. - №24. – P. 119 – 129.
227. Krawczyk R. Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fellerschranken // *Computing*. - 1969. - Vol. 4. - P. 187-201.
228. Kreinovich V., Lakeyev A.V, Noskov S.I. Approximate linear algebra is intractable // *Linear Algebra and its Applications*. - 1996. - Vol. 232. - P. 45-54.
229. Kreinovich V., Lakeyev A.V., Noskov S.I. Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard) // *Interval Computations*. - 1993. - №1. - P. 6-14.
230. Kuntzevich V.M., Lychak M.M. *Guaranteed estimates, adaptation and robastness in control systems*. – Berlin, Heidelberg, New-York, London, Paris, Tokyo: Sringer, 1992. – 209 p.
231. Kupriyanova L. Inner estimation of the united solution set of interval linear algebraic system // *Reliable Computing*. - 1995. - Vol. 1. - №1. - P. 15-31.
232. Kurzanski A., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. – Boston, Basel, Berlin: Laxenburg IIASA, 1997.- 321 p.
233. Lakeyev A.V. On the computational complexity of the solution of linear systems with moduli // *Reliable Computing*. - 1996. - Vol. 2 - №2. - P. 125-131.
234. Litvin I.S., Dyvak M.P., Gladiy G.M. Some particular aspects of using interval methods in the automated monitoring systems // *International conference on*

interval and computer-algebraic methods in science and engineering “Interval’94”- St. Petersburg, 1994. – P. 169.

235. Madsen K., Toft O. A parallel method for linear interval equations // Interval Computations. - 1994. - №3. - P. 81-105.

236. Markov S.M. Extended interval arithmetic involving infinite intervals // Mathematica Balcanica. New Series. - 1992. - Vol. 6 - Fase. 3. - P. 269-304.

237. Mayer G. Enclosing the solutions of systems of linear equations by interval iterative processes // Computing Supplement. - 1988. - Vol. 6. - P. 47-58.

238. Mayer G., Pieper L.A necessary and sufficient criterion to guarantee feasibility of the interval Gaussian algorithm for a class of matrices // Applications of Mathematics. -1993. - Vol. 38, №3. - P. 205-220.

239. Mayer G., Rohn J. On the applicability of the interval Gaussian algorithm // Reliable Computing. - 1998. - Vol. 4, №3. - P. 205-222.

240. Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E. Bounded approaches to system identification. - New-York, London: Plenum Press, 1996. – 357 p.

241. Moore R.E. Automatic error analysis in digital computation // Technical Report LMSD-48421, Lockheed Missiles and Space Division. - Sunnyvale, 1959.

242. Moore R.E. Interval Analysis. - Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966. – 145 p.

243. Moore R.E. Methods and Applications of Interval Analysis. - SIAM, Philadelphia, 1979 – 190 p.

244. Moore R.E., Jones S.T. Safe starting regions for iterative methods // SIAM Journal on Numerical Analysis. - 1977. - Vol. 14. - P. 1051-1065.

245. Mysovskikh V.I., Kovshov A.M. On symbolic computations in groups which arising from the analysis electronic circuits // International conference on interval and computer-algebraic methods in science and engineering “Interval’94”- St. Petersburg, 1994. – P. 181 - 182.

246. Neumaier A. A simple derivation of Hansen-Bliek-Rohn-Ning-Kearfott enclosure linear interval equations // Reliable Computing. - 1999. - Vol. 5, №2. - P. 131-136.

247. Neumaier A. Interval methods for systems of equations. - Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

248. Neumaier A. On Shary's algebraic approach for linear interval equations // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. - 2000. - Vol. 21. - P. 1156-1162.

249. Neumaier A. Overestimation in linear interval equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. - 1987. - Vol. 24. - P. 207-214.

250. Neumaier A. Rigorous sensitivity analysis for parameter-dependent systems of equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 1989. - Vol. 144. - P.16-25.

251. Neumaier A. Tolerance analysis with interval arithmetic // Freiburger Interval- Berichte. - 1986. - №86/9. - S. 5-19.

252. Nickel K. Die Auflösbarkeit linearer Kreisscheiben- und Intervall-Gleichungssysteme // Linear Algebra and its Applications. - 1982. - Vol. 44. - P. 19-40.

253. Nickel K. Die Überschätzung des Wertebereiches einer Funktion in der Intervallrechnung mit Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme // Computing. - 1977. - Vol.44. -P. 15-36.

254. Nickel K. Using interval methods for the numerical solution of ODE's // ZAMM. -1986. - B. 66, №11. - P. 513-523.

255. Ning S., Kearfott R.B. A comparison of some methods for solving linear interval equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. - 1997. - Vol. 34, №4. - P. 1289-1305.

256. Oettli W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients // SIAM Journal on Numerical Analysis. - 1965. - Vol. 2, №1. - P. 115-118.

257. Oettli W., Prager W. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides // Numerische Mathematik. -1964. - Vol. 6. - P. 405-409.

258. Orlov A.I. Interval statistics // Interval computations. – 1992.- №1. – P. 44 – 52.

259. Orlov A.I. On the influence of observation errors on the properties of

statistical procedures // *Jornal of Soviet Mathematics.*- 1991.- Vol 56. - № 3.

260. Popova E.D. Algebraic solutions to a class of interval equations // *Journal of Universal Computer Science.* - 1998. - Vol. 4, №1. - P. 48-67.

261. Popova E.D. Generalized interval distributive relations and their applications // *Workshop on Applications of Interval Analysis to Systems and Control.* - Girona: Universität de Girona, 1999. - P. 13-23.

262. Ratschek H. Centered forms // *SIAM J. Num. Anal.* – 1980. - №17.- P. 656 – 662.

263. Ratschek H. Gleichheit von produkt und formalprodukt bei intervallpolynomen // *Computing.* – 1972. - №10. – P. 245 - 254.

264. Ratschek H. Inclusion functions and global optimization // *Mathematical Programming.* - 1985. - Vol. 33. - P. 300-317.

265. Ratschek H., Sauer W. Linear interval equations // *Computing.* 1982. - Vol. 28, №2. - P. 105-115.

266. Ratz D., Csendes T. On the selection of subdivision directions in interval brand and-bound methods for global optimization // *Journal of Global Optimization.* - 1995. Vol. 7.- P.183-207.

267. Rex G., Rohn J. Sufficient conditions for regularity and singularity of interval matrices // *SIAM Journal on Numerical Analysis.* - 1999. - Vol. 20. - P. 437-445.

268. Rohn J. A Farkas-type theorem for linear interval equations // *Computing.* - 1989. -Vol. 43. - P. 93-95.

269. Rohn J. A two-sequence method for linear interval equations // *Computing.* - 1989. -Vol. 41, №1-2. - P. 137-140.

270. Rohn J. Cheap and tight bounds: the recent result by E. Hansen can be made more efficient // *Interval Computations.* - 1993. - №4. - P. 13-21.

271. Rohn J. Duality in interval linear programming // *Interval Mathematics* 1980; Nickel K., ed. - New York: Academic Press, 1980. - P. 521-529.

272. Rohn J. Input-output model with interval data // *Econometrica.* - 1980. - Vol. 48.- P. 767-769.

273. Rohn J. NP-hardness results for linear algebraic problems with interval data // Topics in Validated Numerics; Herzberger J., ed. - Amsterdam: North-Holland, 1994. - P. 463-471.

274. Rohn J. On singular matrices contained in an interval matrix // Ekonomicko-Matematicky Obzor. - 1989. - Vol. 25, №3. - S. 320-322.

275. Rohn J. Systems of linear interval equations // Linear Algebra and its Applications. -1989. - Vol. 126. - P. 39-78.

276. Rohn J., Kreinovich V. Computing exact componentwise bounds on solutions of linear system is NP-hard // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. - 1995. -Vol. 16. - P. 415-420.

277. Rohn J., Kreslovä J. Linear interval inequalities // Linear and Multilinear Algebra. - 1994. - Vol. 38. - P. 41-43.

278. Rump S. M. Solution of linear and nonlinear algebraic problems with sharp guaranteed bounds // Computing Supplement. - 1984. - Vol. 5. - P. 147-168.

279. Schweppe F.C. Recursive state estimation: unknown but bounded error and system inputs // IEEE Trans. Automat. Control. – 1968. – AC-13. - № 1. – P. 22-28.

280. Sharaya I.A. On maximal inner estimation of the solution sets of linear systems with interval parameters // Reliable Computing. - 2001. - Vol. 7, №5. - P. 409-424.

281. Shary S. P. A new approach to the analysis of static systems under interval uncertainty // Scientific Computing and Validated Numerics; Alefeld G., Frommer A. and Lang B., eds. - Berlin: Akademie Verlag, 1996. - P. 118-132.

282. Shary S. P. Controllable solution sets to interval static systems // Applied Mathematics and Computation. - 1997. - Vol. 86, №2-3. - P. 185-196.

283. Shary S. P. Interval Gauss-Seidel method for generalized solution sets to interval linear systems // Reliable Computing. - 2001. - Vol. 7, №2. - P. 141-155.

284. Shary S. P. Linear static systems under interval uncertainty: Algorithms to solve control and stabilization problems // Extended Abstracts of APIC'95, International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, 1995. - P. 181-184.



285. Shary S. P. On optimal solution of interval linear equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. - 1995. - Vol. 32, №2. - P. 610-630.
286. Shary S. P. Solving the tolerance problem for interval linear systems // Interval computations. - 1994. - №2. - P. 6-26.
287. Shiryaev V.I., Velkova I.S., Pelzwerger S.B. Control of the social – economic process under uncertain conditions // International conference on interval and computer-algebraic methods in science and engineering “Interval’94”- St. Petersburg, 1994. – P. 218 - 219.
288. Smagina Ye. M. A new approach to the modal regulator synthesis for interval plant with scalar input // Reliable Computing. - 1997. - Vol. 3. - P. 401-410.
289. Walter E. Piet- Lohanier H. Estimation of parameter bounds from bounded – error data // Proc. 12- th IMACS world congress. – Paris, 1988.
290. Walter E., Pronzato L. Identification of parametric model from experimental data. - London, Berlin, Heidelberg, New York, Paris, Tokyo: Springer, 1997. – 413 p.
291. Yakovlev A. G. Classification approach to programming of localizational (interval) computations // Interval Computations. - 1992. - №1(3). - P. 61-84.