МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В. М. Неміш, А. І. Процик, К. М. Березька

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Видання третє, виправлене та доповнене

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

ТЕРНОПІЛЬ
Економічна думка
2010

УДК 51
ББК 22.11я73
Н-50

Рекомендовано до друку вченою радою
Тернопільського національного економічного університету
(Протокол № 6 від 30 серпня 2010 р.)

Неміш В. М., Процик А. І., Березька К. М. Практикум з вищої математики: Навчальний посібник., 3-ге видання. – Тернопіль: Економічна думка, 2010. – 304 с.

Навчальний посібник написано відповідно до вимог програми дисципліни “Вища математика” для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Посібник має 11 розділів, де наведено елементи лінійної і векторної алгебри, аналітичної геометрії на площині та просторі, диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних, інтегральне числення, диференціальні рівняння та ряди. Подано основні теоретичні відомості, приклади детального розв’язування типових задач економічного характеру з повним аналізом розв’язку, вправи для самостійної роботи студентів з вказівками і відповідями, зразки контрольних робіт, довідкові таблиці.

Для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів усіх форм навчання.

Рецензенти: **Притула М. М.**, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри дискретного аналізу та інтелектуальних систем Львівського національного університету ім. Івана Франка;
Самойленко В.Г., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичної фізики Київського національного університету ім. Тараса Шевченка;
Боднар Д.І., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри інтелектуальної власності комп’ютерного та інформаційного права Тернопільського національного економічного університету.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
Лист № 1.4/18-Г-871 від 04.06.07 р.

ISBN 978-966-654-207-9

© В. М. Неміш, А. І. Процик,
К. М. Березька, 2010
© “Економічна думка”, ТНЕУ, 2010

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасна модель підготовки спеціалістів економічного напрямку включає в себе чотири складові (блоки):

- блок економічних дисциплін;
- блок математичних дисциплін;
- блок дисциплін з обробки економічної інформації на ЕОМ;
- блок фахових дисциплін з конкретної спеціальності.

Серед названих складових чільне місце займає математична підготовка фахівців. Вона дає змогу науково обгрунтовано приймати рішення в економіці, використовуючи при цьому кількісні співвідношення між економічними показниками, адже ефективність рішень, що приймають у підприємництві, комерції, бізнесі, залежить від уміння знаходити аналітичні зв'язки між економічними процесами та явищами.

Стрижневою дисципліною математичного блоку є "Вища математика", на основі якої базуються усі інші дисципліни (теорія імовірностей і математична статистика, математичні методи та моделі в економіці, економетрія, математичне програмування, економічний ризик і методи його вимірювання).

Даний посібник написаний відповідно до вимог програми курсу "Вища математика". Він має одинадцять розділів. Структурно посібник поділений на дві частини:

- аналітичну геометрію і лінійну алгебру;
- математичний аналіз.

У першій частині наведено елементи лінійної і векторної алгебри, аналітичної геометрії на площині і в просторі.

У другій частині розглянуто диференціальне числення функцій однієї і багатьох змінних, інтегральне числення, диференціальні рівняння та ряди.

У кожному розділі подано основні відомості з теорії (визначення, формули), детальне розв'язування типових задач економічного характеру з повним аналізом розв'язку, вправи для самостійної роботи студентів. Наводяться зразки контрольних робіт. Така структура посібника дає можливість студентам працювати як під керівництвом викладача, так і самостійно опрацьовувати матеріал, оскільки всі вправи мають відповіді, а до багатьох є вказівки до розв'язку. При підготовці цього навчального посібника використані матеріали з [1-24].

РОЗДІЛ 1. **ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ**

§ 1. Визначники

1. *Визначником другого порядку* називається число, яке знаходиться за формулою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. *Визначником третього порядку* називається число, яке знаходиться за формулою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

3. Визначник n-го порядку має вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, одержаний із попереднього після викреслювання i-го рядка і j-го стовпчика.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається мінор для цього елемента, взятий зі знаком "+", якщо число $(i+j)$ – парне, та зі знаком "–", якщо воно непарне. Тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Визначником n-го порядку називається число, що дорівнює сумі попарних добутків елементів довільного рядка (або стовпчика) на їх відповідні алгебраїчні доповнення.

Тобто

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

4. Властивості визначників довільного порядку:

1) визначник не змінюється, якщо рядки поміняти на відповідні стовпчики, а стовпчики – на рядки;

2) при перестановці двох рядків (стовпчиків) абсолютна величина визначника не змінюється, а знак змінюється на протилежний;

3) якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) дорівнюють нулю, то визначник теж дорівнює нулю;

4) визначник, у якому є два однакових рядки (стовпчики), дорівнює нулю;

5) якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника;

6) визначник, у якого всі елементи одного рядка (стовпчика) пропорційні до відповідних елементів іншого рядка (стовпчика), дорівнює нулю;

7) якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) визначника є сумою двох доданків, то визначник можна подати у вигляді суми двох визначників. При цьому елементи розглянутого рядка (стовпчика) в першому визначнику є першими доданками, а елементи відповідного рядка (стовпчика) другого визначника – другими доданками;

8) визначник не змінюється, якщо до всіх елементів довільного рядка (стовпчика) додати елементи іншого рядка (стовпчика), помножені на одне і те ж саме число;

9) сума попарних добутків елементів деякого рядка (стовпчика) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпчика) дорівнює нулю.

*　　*

*

∢ **Задача 1.** Обчислити визначник другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-4) \cdot 2 = 3 + 8 = 11 .$$

∢ **Задача 2.** Обчислити визначник третього порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot 4 + (-3) \cdot 3 \cdot (-2) - (-3) \cdot 0 \cdot 4 - -1 \cdot 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) = 0 - 4 + 18 + 0 - 15 - 4 = =-5.$$

∢ **Задача 3.** Обчислити визначник третього порядку, розклавши його за елементами рядка (або стовпчика):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3} \cdot (-10 - 8) - 1 \cdot (-1)^{4} \cdot (-5 - 4) + 0 =$$

$$= -3 \cdot (-18) - 1 \cdot (-9) = 63 .$$

∢ **Задача 4.** Обчислити визначник четвертого порядку, використавши його властивості:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-9 - 3) = 24 .$$

*   *

*

ВПРАВИ

Обчислити визначники:

1.1. $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}.$

1.2. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}.$

1.3. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}.$

1.4. $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$

1.5. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$

1.6. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}.$

1.7. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$

1.8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$

1.9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

1.10. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

1.11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

1.12. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

1.13. $\begin{vmatrix} -5 & 8 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}$.

1.14. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 5 \\ -7 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & -8 \end{vmatrix}$.

1.15. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

1.16. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

1.17. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 16 \\ 8 & 1 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

1.19. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

1.20. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

1.21. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 11 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

1.22. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

1.23. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$. 1.24. $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 9 & 16 \\ 1 & 1 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

1.25. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$. 1.26. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$.

Обчислити визначники, розклавши їх за елементами першого стовпчика:

1.27. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. 1.28. $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$.

Спростити і обчислити визначники:

1.29. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$. 1.30. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$.

1.31. $\begin{vmatrix} 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\dfrac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. 1.32. $\begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \cos 3\alpha & 1 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

Знайти x із рівняння:

1.33. $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & x+5 \end{vmatrix} = 0$. 1.34. $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = 0$.

1.35. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = 0$.   1.36. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-x & 2 \\ 8-x & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Використовуючи властивості визначника третього порядку, обчислити такі визначники:

1.37. $\begin{vmatrix} a+x & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a \end{vmatrix}$.   1.38. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

1.39. $\begin{vmatrix} 2 & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ 1 & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ 1 & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix}$.   1.40. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

§ 2. Матриці

1. *Матрицею* називається прямокутна таблиця із $m \times n$ чисел, що містить m рядків та n стовпчиків, взятих у квадратні (або круглі) дужки.

Сумою (різницею) двох матриць A і B одного розміру $m \times n$ називається матриця C, елементи якої дорівнюють сумі (різниці) відповідних елементів матриць A і B.

Добутком матриці A на довільне число k (або числа k на матрицю A) називається матриця, елементами якої є добуток елементів матриці A на число k.

Добутком $A \cdot B$ матриці A розміру $m \times n$ і матриці B розміру $n \times p$ називається матриця C розміром $m \times p$, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпчика матриці B.

2. *Рангом матриці* називається найбільший порядок її мінорів, що не дорівнюють нулю.

3. Матриця A^{-1} називається *оберненою матрицею* до матриці A, якщо виконуються рівності $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, тобто матриці A та A^{-1} комутують і їх добуток є одинична матриця.

*   *

*

⮜ **Задача 1.** Знайти добуток $A\cdot B$, якщо

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&1&4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-2&1&2\\3&2&1\\1&3&2\end{bmatrix}.$$

Розв'язування.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2&1&2\\3&2&1\\1&3&2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot(-2)+2\cdot3+3\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot2\\4\cdot(-2)+5\cdot3+6\cdot1 & 4\cdot1+5\cdot2+6\cdot3 & 4\cdot2+5\cdot1+6\cdot2\\2\cdot(-2)+1\cdot3+4\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot2+4\cdot3 & 2\cdot2+1\cdot1+4\cdot2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}7&14&10\\13&32&25\\3&16&13\end{bmatrix}.$$

⮜ **Задача 2.** Знайти ранг матриці

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1&3\\3&6&-3&-1\\3&6&-3&10\end{bmatrix}.$$

Розв'язування. Ранг матриці будемо шукати методом елементарних перетворень.

$$A=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 3 & 6 & -3 & -1\\ 3 & 6 & -3 & 10\end{bmatrix} & \begin{array}{l}(-3)\,(-3)\\ \\ \\ \end{array}\end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{cl}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -10\end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ 10\\ \\ \end{array}\end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Звідси випливає, що ранг цієї матриці дорівнює 2 (нижче головної діагоналі – нулі і два елементи головної діагоналі $\neq 0$), тобто $\mathrm{rang}(A)=2$.

∢ **Задача 3.** Знайти обернену матрицю до матриці

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -3\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Розв'язування. Спочатку впевнимось, що матриця A має обернену A^{-1}. Визначник

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -3\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=4+24+9-4-18-12=3\neq 0.$$

Отже, матриця A має обернену A^{-1}. Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-2-(-6)=4;$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}3 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-(6-3)=-3;$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=6-1=5;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1; \qquad A_{31}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & -3\end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 3 & -3\end{vmatrix}=6; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-7.$$

Матриця з алгебраїчних доповнень буде

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}4 & -3 & 5\\ 2 & 0 & 1\\ -5 & 6 & -7\end{bmatrix}.$$

Приєднана матриця має вигляд:

$$A^*=\begin{bmatrix}4 & 2 & -5\\ -3 & 0 & 6\\ 5 & 1 & -7\end{bmatrix}.$$

Таким чином, одержуємо

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 2 & -5\\ -3 & 0 & 6\\ 5 & 1 & -7\end{bmatrix}.$$

* *

*

ВПРАВИ

Знайти суму та різницю двох матриць:

2.1. $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$, $\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}$.

2.2. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

2.3. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

2.4. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Помножити матрицю на число:

2.5. $-4\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.6. $5\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Перемножити матриці:

2.7. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

2.8. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

2.9. $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

2.10. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.11. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

2.12. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2.13. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

2.14. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$

2.15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -9 \end{bmatrix}.$

2.16. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$

2.17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$

2.18. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}.$

2.19. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

2.20. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$

2.21. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$

Знайти добуток матриць AB і BA:

2.22. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$

2.23. $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$

2.24. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$

2.25. $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}.$

Обчислити степінь квадратних матриць:

2.26. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}^3.$

2.27. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2.$

2.28. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^3.$

Обчислити *AB–BA*:

2.29. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

2.30. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$

2.31. Знайти матрицю $2A+5B$, якщо

$A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$

2.32. Знайти матрицю $2A^2+3A+5E$, якщо

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

2.33. Довести, що

$$4\cdot\begin{bmatrix}3 & 8\\ 1 & 9\end{bmatrix}-3\cdot\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ 7 & 4\end{bmatrix}+5\cdot\begin{bmatrix}1 & 8\\ -2 & 5\end{bmatrix}.$$

2.34. Довести, якщо

$$A=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\ \text{то}\ A^2=A.$$

2.35. Довести, якщо

$$A=\begin{bmatrix}6 & -4\\ 9 & -6\end{bmatrix},\ \text{то}\ A^2=0.$$

2.36. Знайти A^2, B^2, AB, BA і довести, що

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=\begin{bmatrix}40 & 5 & 44\\ -28 & 13 & -33\\ -1 & -62 & 88\end{bmatrix},$$

якщо $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ 0 & -5 & 2\end{bmatrix}$.

2.37. Задані матриці

$$A=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Довести, що $A' \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 8 \\ 6 & -1 & 17 & 13 \end{bmatrix}$,

$$[A + A']B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 10 & 20 \\ 8 & -2 & 22 & 18 \end{bmatrix} = AB + A'B \,.$$

Обчислити методом окантування ранги матриць:

2.38. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.   2.39. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$.

2.40. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$.   2.41. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \\ -7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

2.42. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

За допомогою елементарних перетворень обчислити ранги матриць:

2.43. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

2.44. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.   2.45. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

2.46. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.   2.47. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

2.48. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$.

2.49. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2.50. $\begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 49 \end{bmatrix}$.

Знайти обернені матриці до матриць:

2.51. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

2.52. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

2.53. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

2.54. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

2.55. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

2.56. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2.57. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.58. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

2.59. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.60. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.61. Мале підприємство виробляє 4 види продукції А, В, С та Д, використовуючи на кожну з них різну кількість двох матеріалів та праці (кількість робочих годин). Конкретна інформація вказана у таблиці:

Вироби	A	B	C	Д
Одиниці матеріалу, X	250	300	170	200
Одиниці матеріалу, Y	160	230	75	0
Кількість робочих годин	80	85	120	100

Охарактеризувати зміст кожного рядка та стовпчика матриці, впорядкованої з цих чисел.

2.62. У таблиці задані показники взаємних потреб та пропозицій між різними галузями промисловості:

Галузеві пропозиції	Галузеві потреби			Потреби інших галузей	Кількість усіх пропозицій
	1	2	3		
1	20	48	18	14	100
2	30	12	54	24	120
3	30	36	36	78	180

Визначити матрицю потреб–пропозицій А.

2.63. Підприємство складається з трьох цехів, кожен з яких виробляє один вид продукції. У таблиці задані витратні норми двох видів сировини і палива на виробництво одиниці продукції кожного цеху, трудомісткість у людино-годинах на одиницю продукції. Потрібно знайти сумарні витрати сировини, палива та трудових ресурсів для виконання програм виробництва.

Показники	Норми витрат цехів		
	1	2	3
Сировина а)	1,4	2,4	0,8
Сировина в)	0	0,6	1,6
Паливо	2	1,8	2,2
Трудомісткість	10	20	20

Відомо, що плани валового випуску продукції такі: для першого цеху – 238, для другого – 186, для третього – 400.

2.64. Магазин здійснює роздрібний, оптовий продаж, а також продаж по лінії посилторгу товарів. Дані про денний продаж записано в таблиці:

Продаж	Товар (ціна)		
	Костюм (1 тис. грн.)	Пальто (2 тис. грн.)	Плаття (0,5 тис. грн.)
Роздрібний	45	30	50
Оптовий	38	25	40
Посилторг	20	15	20

Обчислити денний прибуток від продажу кожного товару окремо.

§ 3. Системи лінійних рівнянь

1. Система алгебраїчних рівнянь називається *лінійною*, якщо вона може бути записана у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

де $x_1, x_2, ..., x_n$ – невідомі, a_{ij} – дійсні числа, які називаються коефіцієнтами системи; $b_k\,(k = 1,2,3,...,n)$ – вільні члени.

Якщо всі $b_k = 0$, тоді систему називається *однорідною*. Якщо хоч один вільний член b_k не дорівнює нулю, тоді система алгебраїчних рівнянь називається *неоднорідною*.

Розв'язком системи називається множина дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, підстановка яких у систему замість невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ перетворює кожне рівняння у тотожність.

2. *Правило Крамера*. Якщо основний визначник Δ неоднорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (визначник складений із коефіцієнтів, що стоять біля невідомих) не дорівнює нулю, то ця система має єдиний

розв’язок, який знаходиться за формулами:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \ k = 1,2,...,n,$$

де Δ_k – допоміжний визначник, який одержується з основного визначника Δ шляхом заміни його k-го стовпчика стовпчиком вільних членів системи.

3. Якщо позначити

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{bmatrix},$$

то згідно з правилом множення матриць та умовою рівності матриць одержимо запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі: $AX = B$. Якщо матриця A квадратна порядку n і її визначник $\Delta(A)$ не дорівнює нулю, тоді існує обернена до A матриця A^{-1}, і матричний розв’язок системи знаходиться за формулою $X = A^{-1}B$.

* *

*

⊲ **Задача 1.** Розв’язати за правилом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}.$$

Розв’язування. Задана неоднорідна система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими. Основний визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 + 2 + 3 + 4 + 1 = 9 \neq 0.$$

Тому, згідно з правилом Крамера, задана система має єдиний розв'язок, який знайдемо за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Спочатку обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9 - 1 + 6 + 9 - 2 - 3 = 18,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 - 3 - 1 - 6 - 3 = -18,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 6 - 2 + 9 - 12 - 1 = 9.$$

Тепер знаходимо

$$x_1 = \frac{18}{9} = 2;\quad x_2 = \frac{-18}{9} = -2;\quad x_3 = \frac{9}{9} = 1.$$

Отже, розв'язком заданої системи буде (2; –2; 1).

∢ **Задача 2.** Розв'язати матричним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}.$$

Розв'язування. Основною матрицею заданої системи буде матриця

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 8 - 27 - 12 - 3 + 24 = -6 \neq 0.$$

Для запису оберненої матриці A^{-1} знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{21} = 5; \qquad A_{22} = -4;$$

$$A_{23} = 1; \qquad A_{31} = -13; \qquad A_{32} = 8; \qquad A_{33} = 1.$$

Матриця, складена з алгебраїчних доповнень, має вигляд

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 14 & -10 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -13 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приєднана до матриці A буде

$$A^* = \begin{bmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв’язок вихідної системи знаходимо за формулою $X = A^{-1}B$, тобто

$$X=-\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}14 & 5 & -13\\ -10 & -4 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}9\\ 14\\ 16\end{bmatrix}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}14\cdot 9+5\cdot 14+(-13)\cdot 16\\ (-10)\cdot 9+(-4)\cdot 14+8\cdot 16\\ (-2)\cdot 9+1\cdot 14+1\cdot 16\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-12\\ -18\\ 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ -2\end{bmatrix}.$$

Розв’язком системи буде: $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=-2.$

* *

*

ВПРАВИ

Розв’язати системи лінійних рівнянь:

а) за правилом Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса;

г) методом Жордана – Гаусса.

3.1. $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1\\ 2x_1-x_2+2x_3=-4\\ 4x_1+x_2+4x_3=-2\end{cases}.$

3.2. $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ 2x_1+x_2+3x_3=11\end{cases}.$

3.3. $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4\\ 3x_1+4x_2-2x_3=11\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}.$

3.4. $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=2\\ -2x_1+x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+x_3=6\end{cases}.$

3.5. $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=8\\ 3x_1+2x_2+x_3=10\\ 4x_1+3x_2-2x_3=4\end{cases}.$

3.6. $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=5\\ x_1-2x_2+2x_3=-5\\ 7x_1+x_2-x_3=10\end{cases}.$

3.7. $\begin{cases}x+3y-6z=12\\ 3x+2y+5z=-10\\ 2x+5y-3z=6\end{cases}.$

3.8. $\begin{cases}2x+y+3z=-9\\ 8x+3y+5z=-13\\ 2x+5y-z=-5\end{cases}.$

3.9. $\begin{cases} 2x+3y+5z-10=0 \\ 3x+7y+4z-3=0 \\ x+2y+2z-3=0 \end{cases}$.

3.10. $\begin{cases} 5x-6y+4z-3=0 \\ 3x-3y+2z-2=0 \\ 4x-5y+2z-1=0 \end{cases}$.

3.11. $\begin{cases} 4x-3y+2z+4=0 \\ 6x-2y+3z+1=0 \\ 5x-3y+2z+3=0 \end{cases}$.

3.12. $\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$.

3.13. $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=10 \end{cases}$.

3.14. $\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3=1 \\ 2x_1+10x_2+8x_3=3 \\ 3x_1+15x_2+12x_3=5 \end{cases}$.

3.15. $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+3y-z=3 \\ 4x-y+z=11 \end{cases}$.

3.16. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4 \end{cases}$.

3.17. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4 \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=6 \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$.

§ 4. Довільні системи лінійних рівнянь

1. Довільна система m лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \text{ де } m \neq n.$$

Складемо основну матрицю A і розширену матрицю $\widetilde{A}$ цієї системи:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mn} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Теорема Кронекера – Капеллі. Система m лінійних рівнянь з n невідомими має розв’язок, тобто сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці A дорівнює рангу розширеної матриці $\widetilde{A}$, тобто $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\widetilde{A})$.

2. Система лінійних рівнянь називається *однорідною,* якщо вона має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Якщо ранг матриці A системи лінійних однорідних рівнянь дорівнює кількості невідомих, тобто $\mathrm{rang}(A) = n,$ то система має єдиний нульовий розв’язок. Якщо $\mathrm{rang}(A) < n,$ то задана система має ненульові розв’язки.

*   *

*

∢ **Задача 1.** Дослідити на сумісність систему рівнянь і розв’язати її у випадку сумісності

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

Розв'язування. Знайдемо ранги основної і розширеної матриць системи:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Звідси випливає, що $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\tilde{A}) = 2.$ Це означає, що система сумісна, причому має безліч розв'язків. За базисний мінор візьмемо мінор другого порядку, наприклад:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0\,.$$

За основні (базисні) невідомі приймемо x_1 і x_2. Невідомі x_3 та x_4 будуть вільними.

Вихідна система еквівалентна такій:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4 \end{cases}.$$

За формулами Крамера знаходимо:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 4x_3 - 3x_4 & 5 \\ -2x_3 + x_4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1 + 4x_3 + 3x_4 + 10x_3 - 5x_4}{-11} =$$

$$= -\frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4 + \frac{1}{11};$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-4x_3-3x_4 \\ 2 & -2x_3+x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2x_3+x_4-2+8x_3+6x_4}{-11} =$$

$$= -\frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}.$$

Надаючи вільним невідомим x_3, x_4 довільних значень, одержимо відповідні значення базисних невідомих x_1 і x_2. Наприклад, один із розв'язків розглянутої системи буде: $x_1 = \frac{17}{11}$, $x_2 = \frac{1}{11}$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$.

∢ **Задача 2.** Розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язування. Оскільки кількість рівнянь $(m = 3)$ збігається з кількістю невідомих $(n = 3)$, а головний визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3-4+6-9-4-2 = -16 \neq 0,$$

то система лінійних однорідних рівнянь має нульовий розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

∢ **Задача 3.** Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	7	1	3	2	2
S_2	7	2	1	2	3
S_3	7	2	2	1	2

Визначити кількість продукції P_1, P_2 ,P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо сировину буде повністю вичерпано. Вказати базовий розв'язок.

Розв'язування: Якщо вважати, що x_1, x_2, x_3, x_4 – це кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, то дану задачу можна записати в вигляді системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases},$$

що представляє собою математичну модель даної економічної задачі.

Розв'яжемо її методом Жордана-Гаусса, використовуючи таблиці:

Табл. 1. В першому рядку за ключовий елемент вибираємо 1. Цей рядок називається ключовим рядком. Переписуємо його без змін першим рядком другої таблиці. До відповідних елементів другого і третього рядків додаємо елементи першого помножені на “-2”. Результати записуємо другим і третім рядком таблиці 2.

	$\boldsymbol{x_1}$	x_2	x_3	x_4	$в_i$
1	**<u>1</u>**	3	2	2	7
	2	1	2	3	7
	2	2	1	2	7
2	1	3	2	2	7
	0	**<u>-5</u>**	-2	-7	-7
	0	-4	-3	-2	-7
3	1	0	4/5	7/5	14/5
	0	1	2/5	1/5	7/5
	0	0	**<u>-7/5</u>**	-6/5	-7/5

	1	0	0	5/7	2
4	0	**1**	0	-1/7	1
	0	0	**1**	6/7	1

Табл. 2. В якості ключового елемента вибираємо “-5”. Результат ділення другого рядка на ключовий елемент, записуємо другим рядком третьої таблиці. Помноживши другий рядок таблиці 3 на “-3”, а потім на ”4”, додаючи отримані рядки відповідно до першого і третього рядків другої таблиці, отримуємо перший і третій рядки третьої таблиці, в яких відбувся процес виключення невідомої x_2.

Табл. 3. В третьому рядку ключовий елемент (-7/5) є коефіцієнтом при невідомій x_3. Тому ділимо третій рядок третьої таблиці на ключовий елемент (-7/5) і записуємо отриманий рядок третім рядком четвертої таблиці. Нам залишається виключити невідому x_3 з перших двох рядків третьої таблиці. Для цього третій рядок множимо спочатку на (-4/5) і додаємо до першого рядка третьої таблиці, а потім, множимо на (-2/5) і додаємо до другого рядка третьої таблиці. Результати дій записуємо першим і другим рядком четвертої таблиці. Таким чином ми отримали результуючу четверту таблицю, в якій кожний рядок має лише дві із чотирьох невідомих. Ця таблиця є розширеною матрицею системи рівнянь: $\begin{cases} x_1 + 5/7x_4 = 2 \\ x_2 - 1/7x_4 = 1, \\ x_3 + 6/7x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 5/7x_4 \\ x_2 = 1 + 1/7x_4 \\ x_3 = 1 - 6/7x_4. \end{cases}$

В останній системі рівнянь x_1, x_2, x_3 називаються базисними змінними, оскільки матриця, складена з коефіцієнтів при них є одиничною. Невідома x_4 називається вільною, тому що може приймати будь-які значення. Але в нашій задачі невідомі x_i *(i*=1, 2, 3, 4) виражають кількість реалізованої продукції, тому вони повинні бути невід’ємними, тобто $x_i \geq 0$. А значить

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 5/7x_4 \geq 0 \\ x_2 = 1 + 1/7x_4 \geq 0, \\ x_3 = 1 - 6/7x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 \leq 14/5 \\ x_4 \geq 0, \\ x_4 \leq 7/6 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x_4 \leq \min\{14/5; 7/6\} = 7/6.$$

Будь-якому значенню $x_4 \in [0; 7/6]$ відповідає невід'ємний розв'язок, який задовольняє умові задачі. Отже, для $x_4 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ - базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види виробів *A1*, *A2*, *A3*, *A4*. Відповідно: 13 шт.; 12 шт.; 4 шт.; 11 шт.; II –13; 7; 21; 15; III – 2; 10; 12; 8. Ціна 1 шт. продукції в місті B_1 відповідно: 5 грн., 4, 3 грн., 2 грн., 1, 5 грн., в B_2 – 1; 1, 4; 3, 2; 1, 3; в B_3 – 2; 3, 6; 2, 5;1. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

Розв'язування. Запишемо матрицю продукції $\boldsymbol{A_n}$, стрічки якої утворюються з чисел - кількості виробленої продукції кожною фірмою. Запишемо матрицю цін $\boldsymbol{B_ц}$, стовпці якої утворені цінами на вироби в кожному з міст.

$$A_n = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 4 & 11 \\ 13 & 7 & 21 & 15 \\ 2 & 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}, \quad B_ц = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4{,}3 & 1{,}4 & 3{,}6 \\ 2 & 3{,}2 & 2{,}5 \\ 1{,}5 & 1{,}3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо добуток матриць A_n та $B_ц$:

$$\begin{pmatrix} 13 & 12 & 4 & 11 \\ 13 & 7 & 21 & 15 \\ 2 & 10 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4{,}3 & 1{,}4 & 3{,}6 \\ 2 & 3{,}2 & 2{,}5 \\ 1{,}5 & 1{,}3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 13\cdot5+12\cdot4{,}3+4\cdot2+11\cdot1{,}5 & 13\cdot1+12\cdot1{,}4+4\cdot3{,}2+11\cdot1{,}3 & 13\cdot2+12\cdot3{,}6+4\cdot2{,}5+11\cdot1 \\ 13\cdot5+7\cdot4{,}3+21\cdot2+15\cdot1{,}5 & 13\cdot1+7\cdot1{,}4+21\cdot3{,}2+15\cdot1{,}3 & 13\cdot2+7\cdot3{,}6+21\cdot2{,}5+15\cdot1 \\ 2\cdot5+10\cdot4{,}3+12\cdot2+8\cdot1{,}5 & 2\cdot1+10\cdot1{,}4+12\cdot3{,}2+8\cdot1{,}3 & 2\cdot2+10\cdot3{,}6+12\cdot2{,}5+8\cdot1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 141{,}5 & 56{,}9 & 90{,}2 \\ 939{,}6 & 103{,}7 & 118{,}7 \\ 89 & 64{,}8 & 78 \end{pmatrix}.$$

Матриця-добуток дає можливість аналізувати і порівнювати очікуваний дохід від продажу виробленої продукції. Наприклад: *141,5* –дохід першої фірми в місті B_1, *103,7* – дохід другої фірми в місті B_2, *118,7* – дохід другої фірми в місті B_3. З матриці також видно, що перша фірма одержить дохід в першому місті *141,5* грн., в другому – *56,9* грн., в третьому –*90,2* грн., друга, відповідно – *939,6; 103,7; 118,7*; третя – *89; 64,8; 78*.

ВПРАВИ

Дослідити системи рівнянь і розв'язати їх, якщо вони сумісні:

4.1. $\begin{cases} 2x_1+5x_2-8x_3=8 \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9 \\ 2x_1+3x_2-5x_3=7 \\ x_1+8x_2-7x_3=12 \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7 \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13 \end{cases}.$

4.3. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+3x_4=1 \\ 4x_1-2x_2-x_3+x_4=5 \\ 6x_1-3x_2-x_3-x_4=9 \\ 2x_1-x_2+2x_3-12x_4=10 \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x - 2y + 2z = 3 \\ 5x - 4y = 2 \end{cases}.$

4.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}.$

4.6. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}.$

4.7. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}.$

4.8. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}.$

4.9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 - 5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 1 = 0 \end{cases}.$

4.10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 2 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 17x_3 + 2x_4 - 10 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 + 8 = 0 \end{cases}.$

4.11. $\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 4 \\ 7x_1 - 20x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 12 \\ 3x_1 - 11x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}.$

4.12. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}.$

4.13. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=5 \\ 4x_1+3x_2+x_3-2x_4=3 \end{cases}$.

4.14. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_4=2 \\ 3x_1-x_2-2x_3+3x_4=1 \\ 4x_1+3x_2+x_3-2x_4=-1 \\ 9x_1+3x_2-x_3+2x_4=2 \\ x_1+3x_2+2x_3-x_4=3 \end{cases}$.

4.15. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2 \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3 \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9 \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1 \end{cases}$.

Розв'язати системи лінійних однорідних рівнянь:

4.16. $\begin{cases} 4x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$.

4.17. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+6y+5z=0 \\ x+4y+3z=0 \end{cases}$.

4.18. $\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3=0 \\ 3x_1+5x_2-7x_3=0 \\ 4x_1-5x_2-6x_3=0 \end{cases}$.

4.19. $\begin{cases} 3x-2y+4z=0 \\ 2x-3y+5z=0 \end{cases}$.

4.20. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_2-3x_4=0 \\ 3x_1-x_3+x_4=0 \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=0 \end{cases}$.

4.21. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_1+2x_2+9x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$.

4.22. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1-5x_2+4x_3=0 \\ x_1+17x_2+4x_3=0 \end{cases}$.

4.23. $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0 \end{cases}$.

$$4.24.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$4.25.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$4.26.\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$4.27.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$4.28.\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}.$$

$$4.29.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$4.30.\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 0 \end{cases}.$$

4.31. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*140*	*2*	*4*	*3*	*2*
S_2	*70*	*2*	*1*	*1*	*1*
S_3	*190*	*4*	*5*	*3*	*1*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4.32. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*420*	*5*	*3*	*4*	*2*
S_2	*250*	*4*	*1*	*2*	*3*
S_3	*490*	*7*	*4*	*2*	*1*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4.33. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*330*	*2*	*5*	*3*	*4*
S_2	*200*	*1*	*3*	*2*	*1*
S_3	*280*	*2*	*4*	*3*	*5*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4.34. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	210	3	5	5	1
S_2	160	4	2	3	1
S_3	250	2	7	7	1

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4.35. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *65* шт.; *30* шт.; *35* шт.; *13* шт.; друга *–9*; *5*; *8*; *58*; третя *– 10*; *30*; *12*; *39*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7,9* грн., *3,5* грн., *2,8* грн., *3,1* грн., в B_2 *– 2,3*; *3, 4*; *6,3*; *8,3*; в B_3 *– 5*; *7,9*; *3,5*; *7,3*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

4.36. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4.

Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *18* шт.; *11* шт.; *15* шт.; *24* шт.; друга *–16*; *14*; *13*; *50*; третя *– 13*; *10*; *12*; *80*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7, 7* грн., *3, 6* грн., *2* грн., *2, 1* грн., в B_2 *– 3, 7*; *2, 4*; *2, 9*; *1, 3*; в B_3 *– 3*; *7*; *3, 5*; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

4.37.Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *81* шт.; *80* шт.; *66* шт.; *114* шт.; друга *–95*; *45*; *93*; *50*; третя *–222*; *90*; *32*; *89*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *27* грн., *13* грн., *12,1* грн., *3,1* грн., в B_2 *– 3*; *7,8*; *2,3*; *1,3*; в B_3 *– 7*;

7,8; *3,9*; *7,6*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

4.38. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *8* шт.; *0* шт.; *16* шт.; *14* шт.; друга –*5*; *5*; *33*; *50*; третя – *3*; *0*; *2*; *80*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *1,7* грн., *3* грн., *2* грн., *2, 1* грн., в B_2 – *3*; *2,4*; *2,3*; *1,3*; в B_3 – *3*; *7*; *3,5*; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

РОЗДІЛ 2. **ВЕКТОРНА АЛГЕБРА**

§ 1. Дії над векторами

1. Розклад вектора $\vec{u}$ за одиничними векторами (ортами):

$$\vec{u} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \text{ – у просторі,}$$

$$\vec{u} = X\vec{i} + Y\vec{j} \text{ – на площині.}$$

2. Проекції (координати) X, Y, Z вектора $\vec{u}$:

$$\text{пр}_x\vec{u} = X = x_2 - x_1,$$

$$\text{пр}_y\vec{u} = Y = y_2 - y_1,$$

$$\text{пр}_z\vec{u} = Z = z_2 - z_1.$$

3. Довжина вектора $\vec{u}$:

$$|\vec{u}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

4. Напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Тут $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

5. Якщо $\vec{a}\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\vec{b}\{X_2, Y_2, Z_2\}$ то

$\vec{a} \pm \vec{b} = \vec{c}\{X_1 \pm X_2;\ Y_1 \pm Y_2;\ Z_1 \pm Z_2\}$,

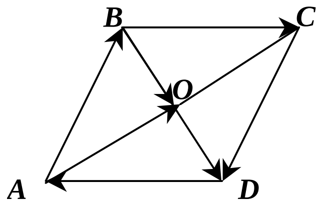
$\lambda\vec{a} = \{\lambda X_1, \lambda Y_1, \lambda Z_1\}$.

*   *

*

∢ **Задача 1.** У ромбі $ABCD$ задані діагоналі $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Розкласти за цими двома векторами всі вектори, що збігаються зі сторонами ромба: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

Розв'язування. Розглянемо ромб $ABCD$.



$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a};$$

$$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO};$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b});$$

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b});$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b});$$

$$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

∢ **Задача 2.** Вектор $\vec{a}$ заданий координатами своїх кінців $A(1; 3; -2)$ і $B(2; -1; 5)$. Визначити координати, довжину та напрям цього вектора.

Розв'язування. Знаходимо координати вектора $\vec{a}$ як різницю між кінцевими і початковими координатами точок:

$$X = 2 - 1 = 1; \quad Y = -1 - 3 = -4; \quad Z = 5 - (-2) = 7.$$

Довжина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 16 + 49} = \sqrt{66}.$$

Напрям вектора визначають напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{66}}; \quad \cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{66}}; \quad \cos\gamma = \frac{7}{\sqrt{66}}.$$

Для перевірки одержаних результатів знайдемо

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{66}}\right)^2 + \left(-\frac{4}{\sqrt{66}}\right)^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{66}}\right)^2 = \frac{1+16+49}{66} = 1.$$

* *

*

ВПРАВИ

1.1. Дано три компланарних одиничних вектори $\vec{m}$, $\vec{n}$ і $\vec{p}$, причому $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=30°$ і $(\widehat{\vec{n},\vec{p}})=60°$. Побудувати вектор $\vec{U} = \vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$ і обчислити його модуль.

Вказівка. У ламаній, побудованій з векторів $\vec{m}$, $2\vec{n}$ і $-3\vec{p}$, продовжити першу ланку до перетину з третьою.

1.2. На трьох некомпланарних векторах $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ і $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ побудовано паралелепіпед. Назвати ті його вектор-діагоналі, які відповідно дорівнюють $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ та $\vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$.

1.3. Дано вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, кут між якими 120°. Побудувати вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - 1{,}5\vec{b}$ і визначити його модуль, якщо $|\vec{a}| = 3$ та $|\vec{b}| = 4$.

1.4. Дано вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ та $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ – медіана $\Delta\, OAB$. Розкласти аналітично і геометрично:

1) вектор $\vec{c}$ по векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{a}$ по векторах $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

1.5. У трапеції $OACB$ маємо $BC = \dfrac{OA}{3}$ та $BC \parallel OA$. Розкласти геометрично й аналітично вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ по векторах $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ та $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Вказівка. З $\Delta\, OBC$ можна $\vec{c}$ виразити через $\vec{b}$ і $\vec{a}$, а потім розв'язати одержане рівняння відносно $\vec{a}$.

1.6. У трикутнику ABC проведена медіана $AД$. Виразити вектор $\overrightarrow{AД}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

1.7. Користуючись паралелограмом, побудованим на векторах, перевірити графічно справедливість таких тотожностей:

$$а)\ (\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a};$$

$$б)\ (\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{b};$$

$$в)\ \vec{a}+(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b};$$

$$г)\ \frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2};$$

$$д)\ \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}+\vec{b}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

1.8. При якій умові вектор $\vec{p}+\vec{q}$ поділить кут між векторами $\vec{p}$, $\vec{q}$ навпіл? Припускають, що всі три вектори мають спільний початок.

1.9. Три вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ є сторонами трикутника. За допомогою $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виразити вектори, що збігаються з медіанами трикутника: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$.

1.10. У рівнобедреній трапеції $ABCД$ відома нижня основа $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, бічна сторона $\overrightarrow{AД}=\vec{b}$ і кут між ними $\angle A=\pi/3$. Виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ усі вектори, які є іншими сторонами і діагоналями трапеції.

1.11. Побудувати точку $M(5;-3;4)$, визначити довжину і напрям її радіус-вектора.

1.12. Знаючи одну з вершин трикутника $A(2;-5;3)$ і вектори, що збігаються з двома його сторонами $\overrightarrow{AB}\{4;1;2\}$ і $\overrightarrow{BC}\{3;-2;5\}$, знайти інші вершини і сторону $\overrightarrow{CA}$.

1.13. Як записати умову колінеарності трьох точок $A(\vec{r}_1)$, $B(\vec{r}_2)$, $C(\vec{r}_3)$? (Точки називається колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій).

1.14. Побудувати вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{\kappa}$, визначити його довжину і напрям (перевірити за формулою $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$).

1.15. Вектор $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ утворює з осями координат рівні гострі кути. Визначити ці кути, побудувати вектор $\vec{r}$, якщо його довжина дорівнює $2\sqrt{3}$.

1.16. Радіус-вектор точки M утворює з віссю OX кут $45°$ і з віссю OY кут $60°$. Довжина його $|\vec{r}|=6$. Визначити координати точки M, якщо її координата z від'ємна та виразити вектор $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ через орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{\kappa}$.

1.17. Дано точки $A(1;2;3)$ та $B(3;-4;6)$. Побудувати вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, його проекції на осі координат і визначити довжину та напрям вектора. Побудувати кути вектора $\vec{u}$ з осями координат.

1.18. Побудувати паралелограм на векторах $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+\vec{j}$ та $\overrightarrow{OB}=\vec{k}-3\vec{j}$. Визначити його діагоналі.

1.19. На площині XOY побудувати вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}=2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}=3\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}=2\vec{i}+6\vec{j}$. Розкласти геометрично і аналітично вектор $\vec{c}$ по векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

1.20. Дано три вектори $\vec{a}\{5;7;2\}$, $\vec{b}\{3;0;4\}$, $\vec{c}\{-6;1;-1\}$. Знайти вектори: 1) $3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$; 2) $5\vec{a}-6\vec{b}+4\vec{c}$.

§ 2. Скалярний добуток двох векторів

1. *Скалярним добутком двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними, тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi.$$

Якщо відомі координати двох векторів $\vec{a}\{X_1;Y_1;Z_1\}$, $\vec{b}\{X_2;Y_2;Z_2\}$, то скалярний добуток цих векторів дорівнює:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2.$$

Скалярний добуток ортів:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1.$$

2. Кут між двома векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності двох векторів:

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0.$$

Умова паралельності (колінеарності) двох векторів

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}.$$

*   *

*

∢ **Задача 1.** Обчислити кут між векторами $\vec{a}\{2;-4;4\}$ і $\vec{b}\{-3;2;6\}$.

Розв'язування. Використавши формулу

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}},$$

одержимо $\cos\varphi=\dfrac{2(-3)+(-4)\cdot 2+4\cdot 6}{\sqrt{4+16+16}\cdot\sqrt{9+4+36}}=\dfrac{5}{21}.$

Тоді $\varphi=\arccos(\frac{5}{21})\approx 76°13'$.

*　　　*

*

ВПРАВИ

2.1. Знайти кут між векторами $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$ та $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$.

2.2. Знайти кути $\Delta\,ABC$ з вершинами $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$ і $C(0;0;5)$.

2.3. На площині дано трикутник з вершинами $O(0;0)$, $A(2a;0)$ і $B(a;-a)$. Знайти кут, утворений стороною OB і медіаною OM цього трикутника.

2.4. Дано два вектори $\vec{a}\{5;2\}$, $\vec{b}\{7;-3\}$. Знайти вектор $\overrightarrow{X}$, який задовольняє одночасно два рівняння $\vec{a}\vec{X}=38$, $\vec{b}\vec{X}=30$.

2.5. Задані вектори $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$. Знайти $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ і $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$.

2.6. Розкрити дужки у виразі $(2\vec{i}-\vec{j})\vec{j}+(\vec{j}-2\vec{k})\vec{k}+$ $+(\vec{i}-2\vec{k})^2$.

2.7. Задані точки $A(a;0;0)$, $B(0;0;2a)$ і $C(a;0;a)$. Побудувати вектори $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{BA}$ і знайти кут між ними.

2.8. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ і $\vec{b}=-2\vec{j}+\vec{k}$.

2.9. Розкрити дужки у виразах: $(\vec{a}+\vec{b})^2$;

$(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2$ і з'ясувати геометричний зміст одержаних формул.

2.10. Дано компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ причому $|\vec{a}|=3$; $|\vec{b}|=2$; $|\vec{c}|=5$; $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60°$ та $(\widehat{\vec{b},\vec{c}})=60°$. Побудувати вектор $\vec{U}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ і обчислити його модуль за формулою $|\vec{U}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})^2}$.

2.11. Визначити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ і $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, де $\vec{m}$ та $\vec{n}$ – одиничні вектори, кут між якими 60°.

2.12. З вершини прямокутника зі сторонами 6 см і 4 см проведено прямі, які ділять протилежні сторони пополам. Знайти кут φ між ними.

2.13. Дано координати трьох послідовних вершин паралелограма: $A(-3;-2;0)$, $B(3;-3;1)$ і $C(5;0;2)$. Знайти координати його четвертої вершини $Д$ та кут між векторами $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BД}$.

2.14. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\pi/3$. Знайти довжину вектора $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$.

2.15. Підприємство випустило продукцію вищого (400 шт.), першого (750 шт.), другого (200 шт.) і третього (300 шт.) сортів. Ціни в одних і тих же грошових одиницях задані у відповідному порядку: 3; 2,1; 1,2; 0,5. Визначити вартість усієї продукції.

2.16. Магазин за день продає 45 шт. деякого товару, по 1 грн. за штуку, 30 шт. – по 2 грн. і 50 шт. – по 0,5 грн. Обчислити денний прибуток від продажу всіх товарів.

§ 3. Векторний добуток

1. *Векторним добутком* двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається *вектор* $\vec{c}$, що має такі властивості:

а) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}});$$

б) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до площини цього паралелограма, тобто перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в) вектор $\vec{c}$ напрямлений у таку сторону, з якої найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ вважається здійсненим проти годинникової стрілки.

Векторний добуток двох векторів $\vec{a}\{X_1; Y_1; Z_1\}$ і $\vec{b}\{X_2; Y_2; Z_2\}$ одержуємо за допомогою визначника:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

2. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S = |\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

* *

*

∢ **Задача 1.** Знайти площу трикутника з вершинами $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$ і $C(5; 2; 6)$.

Розв'язування. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|.$$

Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}; \quad \overrightarrow{AC} = 4\vec{i} + 6\vec{k}.$$

Їх векторним добутком буде:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=$$

$=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}=4(-3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k})$, тому

$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=4\left|-3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}\right|=4\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+2^2}=28$,

а отже, $S_{\Delta} = 14$ кв. од.

*　　　*

*

ВПРАВИ

3.1. Визначити та побудувати вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, якщо

1) $\vec{a} = 3\vec{i}$; $\vec{b} = 2\vec{k}$;

2) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$;

3) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Знайти в кожному випадку площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

3.2. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(7; 3; 4)$, $B(1; 0; 6)$ і $C(4; 5; -2)$.

3.3. Побудувати паралелограм на векторах $\vec{a} = 2\vec{j} + \vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$ та обчислити його висоту і площу.

3.4. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут 45°. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ і $3\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$.

3.5. Обчислити діагоналі та площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ та $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

3.6. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ та $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ – одиничні вектори, що утворюють кут 30°.

3.7. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a}\{2; 3; 1\}$ і $\vec{b}\{5; 6; 4\}$.

3.8. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\{1; 2; 3\}$ і $\vec{b}\{-1; 2; 2\}$.

3.9. Знайти векторний добуток двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}\{5; -2; 1\}$, $\vec{b}\{4; 0; 6\}$.

3.10. Розкрити дужки і спростити вираз:

$$2\vec{i}\,(\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j}(\vec{i} \times \vec{k}) + 4\vec{k}(\vec{i} \times \vec{j}).$$

§ 4. Векторні простори

1. Упорядкована система n чисел a_1, a_2, ..., a_n називається *n-мірним вектором*. Довільна сукупність усіх n-мірних векторів, для яких встановлені поняття додавання векторів та множення вектора на число, називається *n-мірним векторним (або лінійним) простором*.

2. *Лінійно залежними* називаються вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, якщо існує хоча б одне дійсне число α_i $(i = 1, 2, ..., n)$, що не дорівнює нулю, і виконується рівність:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = 0.$$

Лінійно незалежними називаються вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, якщо ця рівність виконується тільки тоді, коли усі $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

3. Сукупність лінійно незалежних векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, при яких довільний вектор простору є лінійною комбінацією векторів цієї сукупності, називається *базисом* *n*-мірного простору.

* *

*

∢ **Задача 1.** Визначити лінійну залежність або незалежність системи векторів

$$\vec{a}_1\{2; 1; 0\},\ \vec{a}_2\{0; -2; 1\},\ \vec{a}_3\{1; 2; -1\}.$$

Розв'язування. Знайдемо всі значення λ_1, λ_2, λ_3, при яких виконується рівність: $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = 0$.

Підставивши в цю рівність замість векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ їх координати, одержимо:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = \lambda_1(2; 1; 0) + \lambda_2(0; -2; 1) + \lambda_3(1; 2; -1) = (2\lambda_1; \lambda_1; 0) +$$
$$+ (0; -2\lambda_2; \lambda_2) + (\lambda_3; 2\lambda_3; -\lambda_3) = (2\lambda_1 + \lambda_3; \lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3; \lambda_2 - \lambda_3).$$

Одержаний вектор дорівнює нульовому вектору, тобто

$$(2\lambda_1 + \lambda_3;\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3;\ \lambda_2 - \lambda_3) = (0; 0; 0),$$

звідси випливає:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Оскільки кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, а визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то система лінійних однорідних рівнянь має нульовий розв'язок, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Отже, задані вектори лінійно незалежні.

∢ **Задача 2.** Дано чотири вектори $\vec{a}_1\{1;1;-1\}$, $\vec{a}_2\{1;2;1\}$, $\vec{a}_3\{3;2;1\}$, $\vec{b}\{1;7;-1\}$ у деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{b}$ у цьому базисі.

Розв'язування. Матриця

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

складена з координат заданих векторів, має визначник $|A| = 2 - 2 + 3 + 6 - 1 - 2 = 6 \neq 0$, тому вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ лінійно незалежні й утворюють базис трьохвимірного векторного простору. Для визначення координат вектора $\vec{b}$ цього базису потрібно знайти такі числа: λ_1, λ_2, λ_3, що $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3$ або

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вектори рівні, коли їх відповідні координати рівні. Тому з останньої рівності одержимо

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 7 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1 \end{cases}.$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь за формулами Крамера. Для цього знайдемо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 24, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12,$$

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{6} = 3, \ \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{6} = 4, \ \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-12}{6} = -2 .$$

Отже, маємо розклад вектора $\vec{b}$ за базисом

$$\vec{b} = 3\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 .$$

Координати вектора $\vec{b}$ у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ будуть $(3; 4; -2)$.

* *

*

ВПРАВИ

Довести, що система векторів лінійно залежна:

4.1. $\vec{a}_1\{1; 4\}$, $\vec{a}_2\{3; 6\}$, $\vec{a}_3\{0; -6\}$.

4.2. $\vec{a}_1\{4; -2; 6\}$, $\vec{a}_2\{6; -3; 9\}$.

4.3. $\vec{a}_1\{5; 4; 3\}$, $\vec{a}_2\{3; 3; 2\}$, $\vec{a}_3\{8; 1; 3\}$.

4.4. $\vec{a}_1\{5; 2; 1\}$, $\vec{a}_2\{-1; 3; 3\}$, $\vec{a}_3\{9; 7; 5\}$, $\vec{a}_4\{3; 8; 7\}$.

4.5. $\vec{a}_1\{1; 2; 3; 4\}$, $\vec{a}_2\{4; 3; 2; 1\}$, $\vec{a}_3\{5; 5; 5; 5\}$.

Довести, що система векторів лінійно незалежна:

4.6. $\vec{a}_1\{1; 2; 3\}$, $\vec{a}_2\{3; 6; 7\}$.

4.7. $\vec{a}_1\{1; 1; 1\}$, $\vec{a}_2\{1; 2; 3\}$, $\vec{a}_3\{1; 3; 3\}$.

4.8. $\vec{a}_1\{2; -3; 1\}$, $\vec{a}_2\{3; -1; 5\}$, $\vec{a}_3\{1; -4; 3\}$.

4.9. $\vec{a}_1\{1; 2; 3\}$, $\vec{a}_2\{5; 0; 3\}$, $\vec{a}_3\{1; 4; 5\}$.

4.10. $\vec{a}_1\{2; 4; -1; 3\}$, $\vec{a}_2\{0; 1; 2; 3\}$, $\vec{a}_3\{-1; 0; 1; 1\}$.

Довести, що вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{b}$ у цьому базисі:

4.11. $\vec{a}_1\{1;1;1\}$, $\vec{a}_2\{1;2;1\}$, $\vec{a}_3\{0;0;1\}$, $\vec{b}\{1;0;4\}$.

4.12. $\vec{a}_1\{1;0;1\}$, $\vec{a}_2\{0;1;0\}$, $\vec{a}_3\{2;3;4\}$, $\vec{b}\{1;-3;-3\}$.

4.13. $\vec{a}_1\{3;1;-3\}$, $\vec{a}_2\{-5;2;-1\}$, $\vec{a}_3\{7;3;4\}$, $\vec{b}\{11;10;-1\}$.

4.14. $\vec{a}_1\{1;2;1\}$, $\vec{a}_2\{2;3;3\}$, $\vec{a}_3\{3;1;7\}$, $\vec{b}\{3;3;5\}$.

4.15. $\vec{a}_1\{-1;2;1\}$, $\vec{a}_2\{2;1;-1\}$, $\vec{a}_3\{1;2;-1\}$, $\vec{b}\{7;9;-4\}$.

РОЗДІЛ 3. **АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ**

§ 1. Найпростіші та основні задачі аналітичної геометрії

1. *Відстань* d між точками $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ на осі:
$$d=|x_2-x_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}.$$
2. *Відстань* d між точками $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$:
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$
3. Координати точки $M(x;y)$, що ділить відрізок M_1M_2 $(M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2))$ у відношенні λ:
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$
4. Координати точки $M(x;y)$, що ділить відрізок M_1M_2 навпіл:
$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$
5. *Площа трикутника* з вершинами $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_3(x_3;y_3)$:
$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}\ \text{або}\ S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$
6. *Площа многокутника* з вершинами $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, ..., $M_n(x_n;y_n)$:
$$S=\pm\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right).$$

*   *

*

∢ **Задача 1.** Точки $A(-5;-3)$, $B(-1;4)$, $C(-1;-7)$ – три вершини паралелограма (A і C є протилежними). Знайти четверту вершину D.

Розв'язування. Діагоналі паралелограма в точці перетину M діляться навпіл. Отже:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-5-1}{2} = -3,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-3-7}{2} = -5.$$

Знайдемо координати точки D:

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2}, \quad -3 = \frac{-1 + x_D}{2}, \quad x_D = -5,$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2}, \quad -5 = \frac{4 + y_D}{2}, \quad y_D = -14.$$

Шукана вершина $D(-5; -14)$.

∢ **Задача 2.** Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від початку координат і від точки $A(-5;3)$.

Розв'язування. Якщо точка $M(x, y)$ належить геометричному місцю точок, то з умови випливає, що $MA = MO.$ Значить

$$MA = \sqrt{(x+5)^2 + (y-3)^2}, \quad MO = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}.$$

Тоді

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2.$$

Після спрощення матимемо $5x - 3y + 17 = 0$. Таким геометричним місцем точок є пряма, перпендикулярна до відрізка, що з'єднує задані точки і проходить через його середину.

*　　　*

*

ВПРАВИ

1.1. Знайти периметр трикутника, утвореного відрізками середніх ліній трикутника, вершини якого $A(-2;1)$, $B(6;-5)$ і $C(0;-5)$.

1.2. Довести, що трикутник з вершинами $A(-3;-2)$, $B(0;-1)$ і $C(-2;5)$ – прямокутний.

1.3. Побудувати точки $A(-4;0)$, $B(-1;4)$ і точки A_1, B_1, симетричні відносно осі OY. Обчислити периметр трапеції ABB_1A_1.

1.4. Довести, що трикутник з вершинами $A(4;0)$, $B(2;2)$, $C(-1;-1)$ – прямокутний. Який з його кутів прямий?

1.5. На осі ординат знайти точку, віддалену від точки $B(4;2)$ на 5 одиниць. Зробити рисунок.

1.6. Знайти точку, віддалену на 5 одиниць від точки $A(2;1)$ та від осі OY.

1.7. На осі OX знайти точку, рівновіддалену від початку координат і від точки $A(8;4)$.

1.8. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від початку координат і від точки $A(-2;5)$.

1.9. На осі абсцис знайти точку, рівновіддалену від точки $A(-2;3)$ на $3\sqrt{5}$ одиниць.

1.10. Задані вершини паралелограма $A(-4;2)$, $B(0;6)$ і точка перетину його діагоналей $M(2;4)$. Знайти дві інших сторони паралелограма.

1.11. У трикутнику з вершинами $A(3;1)$, $B(-3;-1)$, $C(5;-12)$ знайти: а) довжину медіани, проведену з вершини C; б) точку перетину медіан.

Вказівка. Медіани перетинаються у точці, що ділить кожну з них у відношенні 2:1, починаючи від вершини.

1.12. Знайти координати вершин трикутника, якщо відомо координати середини сторін $M(3;6)$, $N(6;8)$, $P(4;-2)$.

1.13. Обчислити довжини медіан трикутника ABC, якщо $A(2;3), B(4;8), C(0;5)$.

1.14. У трикутнику з вершинами $A(7;3)$, $B(-1;-3)$, $C(4;-1)$ обчислити довжину бісектриси $AД$ та медіани CM.

Вказівка. Бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні до довжини прилеглих сторін.

1.15. Побудувати точки $A(-2;1)$ та $B(3;6)$ і знайти точку $M(x;y)$, що ділить AB у відношенні $AM:MB=3:2$.

1.16. Відрізок AB, що з’єднує точки $A(2;5)$ і $B(4;9)$, поділити у відношенні $1:3$.

1.17. Довести, що точки $A(1;1), B(-1;7)$ і $C(0;4)$ лежать на одній прямій.

1.18. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(2;0)$, $B(5;3)$ і $C(2;6)$.

1.19. Обчислити площу чотирикутника з вершинами $A(3;1)$, $B(4;6)$, $C(6;3)$ і $D(5;-2)$.

1.20. Дано точки $A(1;2)$ і $B(4;4)$. На осі OX визначити точку C так, щоб площа ΔABC дорівнювала 5. Побудувати ΔABC.

1.21. Дано координати вершин трикутника $A(1;2)$, $B(-5;-3)$ і $C(7;-6)$. Знайти точку, що ділить медіану AD навпіл.

1.22. На відрізку AB взято точку C так, що $AC=\frac{3}{5}AB$.

Визначити кординати точки C, якщо $A(2;-7)$, $B(7;3)$.

Вказівка. Рівність $AC = \frac{3}{5}AB$ означає, що $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2} = \lambda$.

1.23. Знайти рівняння геометричного місця точок, відстань кожної із яких від точки $A(4;0)$ у два рази менша від відстані з точки $B(-8;0)$.

1.24. Знайти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $A(3;3)$ і $B(1;1)$.

1.25. Написати рівняння траєкторії точки $M(x,y)$, що рухаючись, залишається у два рази ближче до точки $A(-1;1)$, ніж до точки $B(-4;4)$.

1.26. Написати рівняння геометричного місця точок, якщо сума відстаней від кожної з них до точок $F_1(-2;0)$ і $F_2(2;0)$ дорівнює $2\sqrt{5}$.

1.27. Написати рівняння лінії, по щой рухається точка $M(x,y)$, що залишається удвічі віддаленішою від осі OX, ніж від осі OY.

1.28. Написати рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від осі OY і від точки $F(4;0)$.

1.29. Написати рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від осі OX і від точки $F(0;2)$.

1.30. Написати рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F(2;2)$ і від осі OX.

§ 2. Різновиди рівняння прямої лінії

1. Рівняння прямої лінії, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}\{A; B\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

2. Загальне рівняння прямої лінії:

$$Ax + By + C = 0.$$

3. Рівняння прямої лінії з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b.$$

Тут кутовий коефіцієнт

$$k = \mathrm{tg}\alpha,$$

де α – кут нахилу прямої до осі OX, b – відрізок, що відтинає пряма на осі OY.

Кутовий коефіцієнт для прямої, що проходить через дві заданих точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$, дорівнює:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

4. Рівняння в’язки (пучка) прямих, що проходять через точку $M_0(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

5. Рівняння прямої лінії, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

6. Рівняння прямої лінії у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Тут a, b – довжини відрізків, що відтинає пряма на осях координат OX і OY.

7. Нормальне рівняння прямої лінії:

$$x\cos\beta + y\sin\beta - p = 0.$$

Тут p – довжина перпендикуляра (нормалі), опущеного з початку координат на пряму; β – кут нахилу цього перпендикуляра до осі OX.

8. Кут між двома прямими $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$ $(A_1 x + B_1 y + C = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0)$:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad \left(\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right).$$

9. Умова паралельності двох прямих:

$$k_1 = k_2 \quad \left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}\right).$$

10. Умова перпендикулярності двох прямих:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0).$$

11. Відстань від заданої точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

*　　　*

*

∢ **Задача 1.** Знайти рівняння висоти AD трикутника ABC, якщо відомо, що $A(2;6)$, $B(-3;1)$, $C(6;0)$.

Розв'язування. Запишемо рівняння сторони BC як рівняння прямої, що проходить через дві точки B і C, за формулою:

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B},$$

тобто $\frac{y-1}{0-1}=\frac{x+3}{6+3}$, або $x+2y-6=0$. Тут $k_{BC}=-\frac{1}{9}$. З умови перпендикулярності двох прямих AD і BC $k_{AD}=-\frac{1}{k_{BC}}$, маємо $k_{AD}=9$. Отже, рівняння шуканої висоти буде: $y-6=9(x-2)$, або $9x-y-12=0$.

∢ **Задача 2.** Знайти відстань між паралельними прямими $4x-3y-7=0$ і $4x-3y+3=0$.

Розв'язування. Шукану відстань можна знайти як відстань довільної точки однієї з паралельних прямих до другої. Припустимо, наприклад, в першому рівнянні, що $x=1$, тоді $y=-1$. Відстань точки $M(1;-1)$ до другої прямої знайдемо за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}, \text{ тобто } d=\frac{|4\cdot 1-3(-1)+3|}{\sqrt{16+9}}=\frac{10}{5}=2.$$

*　　　*

*

ВПРАВИ

2.1. Написати рівняння прямої, що проходить через початок координат і утворює з віссю OX кут 135°.

2.2. Визначити параметри k і b прямої, що проходить через точку (–2; 3) і утворює з віссю OX кут 45°. Побудувати пряму і написати її рівняння.

2.3. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(4;3)$ і відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 3.

2.4. Написати рівняння сторін ромба з діагоналями 10 см і 6 см, взявши більшу діагональ за вісь OX, а меншу – за вісь OY.

2.5. Побудувати точку $A(-2;5)$ і пряму $2x-y=0$. Написати рівняння пучка прямих, що проходять через точку A, і вибрати з пучка: 1) рівняння прямої, паралельної до заданої; 2) рівняння прямої, перпендикулярної до заданої.

2.6. У точках перетину прямої $2x-5y-10=0$ з осями кординат проведені перпендикуляри до цієї прямої. Написати їх рівняння.

2.7. У трикутнику з вершинами $A(-2;0), B(2;6)$ і $C(4;2)$ проведено висоту BD і медіану $BE.$ Написати рівняння сторони $AC,$ висоти BD і медіани BE. Знайти довжину висоти $BD.$

2.8. Написати рівняння прямих, що проходять через початок координат під кутом 45° до прямої $y=4-2x.$

2.9. Написати рівняння прямих, що проходять через точку $A(-1;1)$ під кутом 45° до прямої $2x+3y=6.$

2.10. Визначити вершини і кути трикутника, сторони якого задані рівняннями $x+3y=0,\ \ x=3,\ \ x-2y+3=0.$

2.11. Дано трикутник з вершинами $A(-2;0),\ B(2;4)$ і $C(4;0).$ Написати рівняння сторін трикутника, медіани $AE,$ висоти AD і знайти довжини медіани $AE,$ висоти $AD.$

2.12. Дано дві точки $A(-4;-3)$ і $B(1;2).$ Написати рівняння прямої, проведеної перпендикулярно до прямої AB через точку $C,$ що ділить AB у відношенні $AC:CB=1:2.$

2.13. Написати рівняння сторін і знайти кути трикутника з вершинами $A(0;7),\ \ B(6;-1)$ і $C(2;1).$

2.14. Знайти кординати вершин ромба $ABCD,$ якщо задано рівняння двох його сторін $BC:\ x+2y=4,$ $AД:$ $x+2y=10$ і рівняння діагоналі $AC:\ \ y=x+2$.

2.15. Пряма $2x-y+8=0$ перетинає осі OX і OY в точках A і $B.$ Точка M ділить AB у відношенні $AM:MB=$

$= 3:1$. Написати рівняння перпендикуляра, проведеного через точку M до прямої AB.

2.16. Написати рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $2x - 3y - 1 = 0$, $3x - y - 2 = 0$ перпендикулярно до прямої $y = x + 1$.

2.17. Побудувати трикутник, сторони якого задані рівняннями $x + y - 4 = 0$, $3x - y = 0$, $x - 3y - 8 = 0$. Знайти кути і площу трикутника.

2.18. Знайти точку перетину медіан і точку перетину висот трикутника, вершини якого $A(-4;2)$, $B(2;-5)$ і $C(5;0)$.

2.19. Дано трикутник з вершинами $A(-1;1)$, $B(1;5)$ і $C(3;-2)$. Знайти рівняння його сторін і визначити внутрішній кут A.

2.20. Знайти відстань від початку координат до прямої $12x - 5y + 39 = 0$.

2.21. Показати, що прямі $2x - 3y - 6 = 0$ і $4x - 6y - 25 = 0$ паралельні, і знайти відстань між ними.

2.22. Написати рівняння прямої, віддаленої від точки $A(4;-2)$ на відстані $d = 4$ і паралельної до прямої $8x - 15y = 0$.

2.23. Написати рівняння прямих, паралельних до прямої $12x+5y-7=0$ і віддалених від неї на відстань $d = 3$.

2.24. Перевірити, що точки $A(-4;-3)$, $B(-5;0)$, $C(5;6)$ і $D(1;0)$ є вершинами трапеції і знайти її висоту.

2.25. Написати рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $x+2y-11=0$, $2x - y - 2 = 0$ на відстані 5 масштабних одиниць від початку кординат.

2.26. Написати рівняння прямої, що проходить через точку M перетину прямих $2x + y + 6 = 0$ і $3x + 5y - 15 = 0$ та через точку $N(1;-2)$.

2.27. Написати рівняння прямої, що проходить через точку M перетину прямих $5x - y + 10 = 0$ і $8x + 4y + 9 = 0$ паралельно до прямої $x + 3y = 0$.

2.28. Написати рівняння прямої, що проходить через точку M перетину прямих $2x - 3y + 5 = 0$ і $3x + y - 7 = 0$ перпендикулярно до прямої $y = 2x$.

2.29. Транспортні витрати на перевезення одиниці вантажу y залізничним і автомобільним транспортом на відстань x знаходять за формулами:

$$y = \frac{1}{2}x + 10 \quad \text{і} \quad y = x + 5,$$

де x вимірюється десятками кілометрів. Визначити, коли транспортні витрати на перевезення автотранспортом менші від витрат на перевезення залізничним транспортом і коли рентабельнішим буде залізничний транспорт.

2.30. Знайти точки рівноваги та області прибутків і збитків компанії, що виготовляє щомісяця x виробів вартістю p гривень кожен, а сума загальних щомісячних витрат $y_в$ має таку закономірність:

а) $p = 4$, $y_в = 2{,}8x + 600$;

б) $p = 7$, $y_в = 1000 + 5x$.

2.31. Вартість обладнання авторемонтної майстерні 480000 гривень, а річна амортизація – 25000 гривень. Виразити вартість обладнання залежно від часу (x років) роботи майстерні, якщо амортизаційне відрахування залишається постійною величиною.

2.32. Витрати при перевезенні вантажу трьома видами транспорту відповідно обчислюють за формулами:

$$y_1 = 150 + 50x, \quad y_2 = 250 + 25x, \quad y_3 = 350 + 25x,$$

де x – відстань у сотнях кілометрів, y_1, y_2, y_3 – вартість перевезення у гривнях. Графічно визначити, на які відстані і яким видом транспорту перевозити вантаж економніше:

а) при використанні всіх видів транспорту;
б) при використанні другого і третього видів транспорту;
в) при використанні першого і третього видів транспорту.

2.33. Із пункту A в пункти B, C, D, E вантаж можна доставити трьома видами транспорту: водним, залізничним і автомобільним. Витрати при перевезенні вантажу відповідно обчислюють за формулами:

$$y_в = 25 + 25x, \quad y_з = 50 + 25x, \quad y_а = 75 + \frac{25}{3}x,$$

де x – відстань у сотнях кілометрів, y – вартість перевезення вантажу в гривнях. Обчислити графічно, яким видом транспорту економніше доставити вантаж у пункти A, B, C, D, E, якщо відстані від пункту A до цих пунктів відповідно дорівнюють 200, 300, 500 і 900 км.

2.34.Повні витрати з перевезення вантажу залізничним і автомобільним транспортом подаються відповідно залежностями:

$$y_1 = a_1x + b_1 \text{ і } y_2 = a_2x + b_2,$$

де x – відстань в км, на яку здійснюється перевезення; y – транспортні витрати.

Знаючи, що $0 < a_1 < a_2$ і $0 < b_1 < b_2$ встановити, яким видом транспорту і на яку відстань дешевше перевозити вантаж.

2.35. Початкова врожайність деякої зернової культури на малопридатних для землеробства землях становила 12 ц/га. Завдяки застосуванню інтенсивної технології передбачається щорічне її зростання на 2 ц/га. Записати закон зміни врожайності y як функції часу x. Обчислити її значення для п'ятого року застосування зазначеної технології ($x = 5$).

2.36. Повні витрати на виготовлення 5 умовних одиниць деякої продукції становлять 5,5 млн. грн., а для виготовлення 10 таких одиниць – 9 млн. грн. Знайти функцію витрат виробництва, вважаючи її лінійною. Визначити витрати на виготовлення 7 умовних одиниць продукції.

2.37. Монополіст, знаючи з маркетингових досліджень функцію попиту на свій товар $Q = 10 - 0{,}6p$, вирішує скільки йому виробляти товару. Допоможіть монополісту:

а) розрахувати кількість товару при ціні $p_1 = 5$ грош. од., $p_2 = 6$ грош. од.

б) розрахувати ціну товару, якщо він хоче виробити товару у кількості $Q_1 = 5{,}8$ млн. шт., $Q_2 = 7$ млн. шт.

Задачу зобразіть графічно.

2.38. Попит (Q) та пропозиція (S) на товар залежно від ціни (p) на ринку задаються формулами:

$Q = 500 - 10p; \quad S = 50 + 5p.$

Показати графічно лінії попиту та пропозиції і знайти рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиція врівноважуються.

§ 3. Криві лінії другого порядку

1. *Колом* називається геометричне місце точок, рівновіддалених від фіксованої точки – центра кола.

Канонічне рівняння кола з центром у точці $M_0(x_0; y_0)$ і радіусом R:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Якщо центр кола знаходиться в початку координат O(0;0), тоді рівняння кола має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

2. *Еліпсом* називається геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) дорівнює постійній величині $2a$.

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Тут $a,\ b$ – велика і мала півосі еліпса.

Відстань від центра до одного з фокусів еліпса:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Ексцентриситет еліпса:

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}.$$

Відстань точки $M(x;y)$ еліпса до його фокусів (фокальні радіус-вектори):

$$r_1=a-ex,\quad r_2=a+ex.$$

3. *Гіперболою* називається геометричне місце точок, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) дорівнює постійній величині $2a$.

Канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Тут $a,\ b$ – дійсна і уявна півосі гіперболи.

Відстань від центра до одного з фокусів гіперболи:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Ексцентриситет гіперболи:

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}.$$

Відстані точки $M(x;y)$ гіперболи до її фокусів (фокальні радіус-вектори):

$$r_1=|ex-a|,\quad r_2=|ex+a|.$$

Рівняння асимптот гіперболи:

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Канонічне рівняння рівносторонньої гіперболи:

$$x^2-y^2=a^2.$$

4. *Параболою* називається геометричне місце точок, відстані від яких до заданої прямої (директриси) і заданої точки (фокуса) рівні.

Канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = 2px.$$

Тут: $F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$ – фокус; $x=-\dfrac{p}{2}$ – директриса; $r = x+\dfrac{p}{2}$ – фокальний радіус-вектор точки $M(x;y)$.

Для параболи $x^2 = 2py$ фокус $F(0;\dfrac{p}{2})$, директриса – $y=-\dfrac{p}{2}$ і фокальний радіус-вектор точки $M(x;y)$ – $r = y+\dfrac{p}{2}$.

* *

*

∢ **Задача 1.** Знайти центр і радіус кола

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0.$$

Розв'язування. Подамо задане рівняння у вигляді $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$, згрупувавши доданки з невідомими x та y:

$$(x^2+4x)+(y^2-6y)-3=0.$$

Вирази в дужках доповнимо до повних квадратів:

$$(x^2+2\cdot x\cdot 2+4)-4+(y^2-2\cdot y\cdot 3+9)-9-3=0,$$

$$(x+2)^2-4+(y-3)^2-9-3=0,$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=16.$$

Звідси, радіус кола $R=4$, а центр у точці (–2;3).

∢ **Задача 2.** Написати канонічне рівняння еліпса, якщо його більша піввісь $a=12$, а ексцентриситет $e=0{,}5$.

Розв'язування. Використаємо формулу, що виражає ексцентриситет через відношення півосей:

$e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$, або $e^2=1-\dfrac{b^2}{a^2}$. Тобто $b^2=a^2(1-e^2)$.

У даному випадку $b^2=144(1-0{,}25)=108$.

Отже, канонічне рівняння еліпса буде:

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{108}=1.$$

∢ **Задача 3.** Написати канонічне рівняння гіперболи, що проходить через точки $A(2;1)$, $B(-4;\sqrt{7})$.

Розв'язування. Канонічне рівняння гіперболи знайдемо, використавши формулу $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Оскільки точки $A(2;1)$ і $B(-4;\sqrt{7})$ лежать на гіперболі, то їх координати задовольняють це рівняння. Звідси:

$$\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1\\ \dfrac{16}{a^2}-\dfrac{7}{b^2}=1\end{cases}, \qquad \begin{cases}4b^2-a^2=a^2b^2\\ 16b^2-7a^2=a^2b^2\end{cases}.$$

Після алгебраїчного віднімання одержимо $a^2=2b^2$. Із першого рівняння системи маємо:

$$\frac{2}{b^2}-\frac{1}{b^2}=1,\ \ b^2=1,$$

отже, $a^2=2$. Тоді шукане рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{1}=1.$$

∢ **Задача 4.** Парабола, вершина якої у початку координат, проходить через точку $A(1;-2)$ і симетрична відносно осі OY. Написати її рівняння.

Розв'язування. Оскільки парабола симетрична відносно осі OY і проходить через точку з від'ємною ординатою, то її канонічне рівняння буде: $x^2 = -2py$. Підставивши координати точки $A(1; -2)$ у це рівняння, одержимо $p = \frac{1}{4}$. Отже, шукане рівняння таке: $x^2 = -\frac{1}{2}y$ або $y = -2x^2$. Фокус параболи – $F\left(0; -\frac{1}{8}\right)$, а директриса – $y = \frac{1}{8}$.

∢ **Задача 5.** Завод виробляє вироби A і продає їх по 2 гривні за кожний. Керівництво заводу встановило, що сума $y_в$ загальних щотижневих витрат (у гривнях) на виготовлення виробів A кількістю x (тисяч одиниць) має таку закономірність:

$$y_в = 1000 + 1300x + 100x^2.$$

Визначити щотижневу кількість виготовлення та продажу виробів A, що забезпечує рівновагу витрат і доходу.

Розв'язування. Дохід від продажу x тисяч виробів A вартістю 2 гривні за кожний буде: $y_д = 2000x$. Для рівноваги доходу та витрат треба, щоб виконувалась рівність: $y_в = y_д$,

$$\text{тобто } 1000 + 1300x + 100x^2 = 2000x,$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 5.$$

Ця задача має дві точки рівноваги. Завод може виробляти 2000 ($x = 2$) виробів A з доходом і витратами 4000 гривень, або 5000 ($x = 5$) виробів A з доходом і витратами 10 000 гривень.

Розглянемо на цьому прикладі можливості заводу. Позначимо щотижневий прибуток через P. Тоді:

$$P = y_д - y_в = 2000x - (1000 + 1300x + 100x^2) = -1000 + 700x -$$

$$-100x^2 = -100(x-2)(x-5).$$

Звідси випливає, що при $x = 2$ або $x = 5$ маємо $P = 0$, тобто ці значення x будуть точками рівноваги.

Якщо $2 < x < 5$, тоді $x - 2 > 0$, $x - 5 < 0$ маємо $P > 0$, тобто завод одержить прибуток. При інших значеннях x, тобто коли $x \notin [2; 5]$, будемо мати $P < 0$ – завод несе збитки.

*   *

*

ВПРАВИ

3.1. Написати рівняння кола з центром в точці $C(2; -3)$ і радіусом, що дорівнює 6.

3.2. Знайти координати центра і радіус кола $x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0$.

3.3. Задано точку $A(-4; 6)$. Написати рівняння кола, діаметром якого є відрізок OA.

3.4. Побудувати кола, задані рівнянням:

1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;
2) $x^2 + y^2 - 8x = 0$;
3) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

3.5. Побудувати коло $x^2 + y^2 + 5x = 0$, пряму $x + y = 0$ і знайти точки їх перетину.

3.6. Написати рівняння кола, що дотикається до осей координат і проходить через точку $A(1; 2)$.

3.7. Задано точку $A(6; -2)$. Написати рівняння кола, діаметром якого є відрізок OA. Знайти точки перетину цього кола з бісектрисами координатних кутів.

Вказівка. $y = \pm x$ – рівняння бісектрис.

3.8. Знайти півосі, фокуси і ексцентриситет еліпса

$4x^2 + 9y^2 = 36.$

3.9. Написати рівняння еліпса, якщо фокусна відстань дорівнює 8, а мала піввісь – 3.

3.10. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 8, а мала піввісь $b = 3$;

2) більша піввісь $a = 6$, а ексцентриситет $e = 0{,}5$.

3.11. Еліпс, симетричний відносно осей координат, проходить через точки $M(2; \sqrt{3})$ і $B(0; 2)$. Написати його рівняння і знайти відстань від точки M до фокусів.

3.12. Еліпс, симетричний відносно осей координат, з фокусами на осі OX проходить через точку $M(-4; \sqrt{21})$ і має ексцентриситет $e = \frac{3}{4}$. Написати рівняння еліпса і знайти фокальні радіус-вектори точки M.

3.13. Знайти довжини осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса $4x^2 + 9y^2 = 144$.

3.14. На еліпсі $9x^2 + 25y^2 = 225$ знайти точку, відстань від якої до правого фокуса в чотири рази більша від відстані з цієї точки до лівого фокуса.

3.15. Знайти координати точок перетину еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ з колом $x^2 + y^2 = 16$.

3.16. Побудувати еліпс $x^2 + 4y^2 = 16$, знайти його фокуси і ексцентриситет.

3.17. Ординати всіх точок кола $x^2 + y^2 = 36$ зменшені в три рази. Написати рівняння одержаної кривої.

3.18. Абсциси точок кола $x^2 + y^2 = 4$ збільшені в два рази.

Написати рівняння одержаної кривої.

3.19. Написати найпростіше рівняння еліпса, у якого відстані від одного із фокусів до кінців великої осі дорівнюють 5 і 1.

3.20. Еліпс, симетричний відносно осей координат, проходить через точки $M(2\sqrt{3}; \sqrt{6})$ і $A(6; 0)$. Написати його рівняння, знайти ексцентриситет і відстані від точки M до фокусів.

3.21. Побудувати гіперболу $9x^2 - 16y^2 = 144$. Визначити її фокуси, ексцентриситет і рівняння асимптот.

3.22. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо відстані однієї з вершин до фокусів дорівнюють 9 і 1.

3.23. На гіперболі $x^2 - 4y^2 = 16$ є точка M з ординатою, що дорівнює 1. Знайти відстані від точки до фокусів.

3.24. Написати рівняння гіперболи, що має ексцентриситет $e = \sqrt{2}$, проходить через точку $(2; \sqrt{3})$ і симетрична відносно осей координат.

3.25. Гіпербола проходить через точку $M(6; \frac{3\sqrt{5}}{2})$, симетрична відносно осей кординат і має дійсну піввісь $a = 4$.

Написати рівняння перпендикулярів, проведених з лівого фокуса гіперболи на її асимптоти.

3.26. Знайти відстань фокуса гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ до її асимптот і кут між асимптотами.

3.27. Побудувати гіперболу $x^2 - 4y^2 = 16$ і її асимптоти. Знайти фокуси, ексцентриситет і кут між асимптотами.

3.28. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо:

1) відстань між фокусами $2c = 10$, а між вершинами $2a = 8$;
2) дійсна піввісь $a = 2\sqrt{5}$, а ексцентриситет $e = \sqrt{1{,}2}$.

3.29. Гіпербола, симетрична відносно осей кординат, проходить через точку $M(6; -2\sqrt{2})$ і має уявну піввісь $b = 2$. Написати її рівняння і знайти відстань точки M до фокусів.

3.30. Написати рівняння гіперболи, що має вершини у фокусах, а фокуси – у вершинах еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3.31. Задано рівносторонню гіперболу $x^2 - y^2 = 8$. Написати рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться у фокусах гіперболи, якщо відомо, що еліпс проходить через точку $A(4; 6)$.

3.32. Побудувати параболи, задані рівняннями:
1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -4x$; 3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -4y$, а також їх фокуси, директриси і написати рівняння директрис.

3.33. Написати рівняння кола, що має центр у фокусі параболи $y^2 = 4x$ і дотикається до її директриси. Знайти точки перетину параболи і кола.

3.34. Написати рівняння параболи і її директриси, якщо парабола проходить через точки перетину прямої $x + y = 0$ і кола $x^2 + y^2 + 4y = 0$ та симетрична відносно осі OY. Побудувати коло, пряму і параболу.

3.35. Написати рівняння і знайти координати фокуса параболи, вершина якої лежить у початку координат, а рівняння директриси $4x + 7 = 0$.

3.36. Парабола, що симетрична відносно осі OX, проходить через точку $A(4; -1)$ і вершина її лежить у початку координат. Написати рівняння параболи.

3.37. Написати рівняння параболи, якщо її вершина знаходиться у початку координат і відстань від фокуса до вершини дорівнює 4, а вісь OX є віссю симетрії.

3.38. Земля рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце. Найменша відстань від Землі до Сонця дорівнює $\approx 147{,}5$ мільйона кілометрів, а найбільша – $\approx 152{,}5$ мільйона кілометрів. Знайти більшу піввісь і ексцентриситет орбіти Землі.

3.39. Верхня дуга залізничного мосту має вигляд параболи. Написати рівняння параболи, якщо відстань між кінцями мосту дорівнює 32 метри, а найбільша висота дуги – 8 метрів.

3.40. Знайти точки рівноваги та області прибутків і збитків заводу, що виготовляє щомісяця x виробів вартістю 10 гривень кожен, а сума загальних щомісячних витрат $y_в$ має таку закономірність: $y_в = 80{,}4 - 4x + 0{,}1x^2$.

3.41. Витрати палива для судна на підводних крилах зростають пропорційно квадрату швидкості судна. Знайти аналітичну залежність між витратами m і швидкістю V судна, враховуючи, що при $V = 40$ км/год витрачається 20 л палива за годину, а також визначити витрати палива за годину при швидкості 60 км/год.

3.42. Бригада, яка складається з x робітників-ремонтників і бригадира, виконуючи певне замовлення, щомісяця одержувала загалом 3000 грн. заробітної плати. Подати заробітну плату члена бригади виразом, коли відомо, що вона в усіх однакова і 50 грн. з належної кожному суми становлять різні відрахування.

РОЗДІЛ 4. **АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ**

§ 1. Площина

1. Загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0 .$$

Тут $\vec{N}\{A;\ B;\ C\}$ – вектор, перпендикулярний до площини (вектор нормалі).

2. Нормальне рівняння площини:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 .$$

Тут $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора нормалі.

3. Рівняння площини, що проходить через точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і перпендикулярна до вектора нормалі $\vec{N}\{A;\ B;\ C\}$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 .$$

4. Рівняння площини у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 .$$

Тут $a,\ b,\ c$ – відрізки, що відтинає площина від осей координат OX, OY, OZ.

5. Рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

6. Косинус кута φ, утвореного двома площинами:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\vec{N}_1\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} .$$

Тут $\overrightarrow{N}_1$ і $\overrightarrow{N}_2$ – вектори нормалей до площин
$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

7. Умова паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

8. Умова перпендикулярності двох площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

9. Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

* *

*

∢ **Задача 1.** Площина проходить через точку $P(3; 6; -4)$ і відтинає відрізки на осі абсцис $a = -3$ та на осі аплікат $c = 2$. Написати рівняння площини.

Розв'язування. Скористаємось формулою $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

За умовою $a = -3$, $c = 2$, тому $\frac{x}{-3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{2} = 1$.

Точка P лежить на площині, тому її координати задовольняють рівняння цієї площини:

$$\frac{3}{-3} + \frac{6}{b} + \frac{-4}{2} = 1, \text{ звідси } b = \frac{3}{2}.$$

Шуканим рівнянням площини буде $\frac{x}{-3} + \frac{2y}{3} + \frac{z}{2} = 1$, або

$$2x - 4y - 3z + 6 = 0.$$

∢ **Задача 2.** Знайти відстань точки $A(2; 3; -1)$ до площини $7x - 6y - 6z + 42 = 0$.

Розв'язування. Відстань точки до площини знаходимо за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Підставивши у формулу значення $A = 7$; $B = -6$; $C = -6$; $x_0 = 2$; $y_0 = 3$; $z_0 = -1$, одержимо

$$d = \left| \frac{7 \cdot 2 + (-6) \cdot 3 + (-6)(-1) + 42}{\sqrt{7^2 + (-6)^2 + (-6)^2}} \right| = \left| \frac{14 - 18 + 6 + 42}{11} \right| = 4.$$

*   *

*

ВПРАВИ

1.1. Побудувати площини: 1) $5x - 2y + 3z - 10 = 0$; 2) $3x + 2y - z = 0$; 3) $3x + 2z = 6$; 4) $2z - 7 = 0$.

1.2. Побудувати площину $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ і знайти кути нормалі до площини з осями координат.

1.3. Дано точки $M_1(0; -1; 3)$ і $M_2(1; 3; 5)$. Написати рівняння площини, що проходить через точку M_1 і перпендикулярна до вектора $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

1.4. Написати рівняння площини, що паралельна до осі OX і проходить через точки $M_1(0; 1; 3)$ і $M_2(2; 4; 5)$. Побудувати цю площину.

1.5. Написати рівняння площини, що паралельна до осі OZ і проходить через точки $M_1(2; 2; 0)$ і $M_2(4; 0; 0)$. Побудувати цю площину.

1.6. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M_1(-4; 0; 4)$ і відтинає на осях OX і OY відрізки $a = 4$ та $b = 3$.

1.7. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1; -3; 5)$ і відтинає на осях OY і OZ у два рази більші відрізки, ніж на осі OX.

1.8. Знайти кут між площинами:

1) $x-2y+2z-8=0$ і $x+z-6=0$;

2) $x+2z-6=0$ і $x+2y-4=0$.

1.9. Знайти площину, що проходить через точку $(2; 2; -2)$ паралельно до площини $x-2y-3z=0$.

1.10. Написати рівняння площини, що проходить через точку $(-1; -1; 2)$ перпендикулярно до площин $x-2y+z-4=0$ та $x+2y-2z+4=0$.

1.11. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1; -2; 0)$ і $M_2(1; 1; 2)$ перпендикулярно до площини $x+2y+2z-4=0$.

1.12. Через вісь OZ провести площину, що утворює з площиною $2x+y-\sqrt{5}z=0$ кут $60°$.

1.13. Знайти відстань від точки $(5; 1; -1)$ до площини $x-2y-2z+4=0$.

1.14. Знайти відстань між паралельними площинами $4x+3y-5z-8=0$ і $4x+3y-5z+12=0$.

Вказівка. Взяти на першій площині довільну точку, наприклад (2; 0; 0), і знайти відстань від неї до другої площини.

1.15. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(4; 6; 1)$, $M_2(1; 0; -2)$, $M_3(4; -2; 4)$, привести його до загального вигляду. Побудувати цю площину.

1.16. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(0; 1; 2)$, $M_3(-1; 1; 1)$.

1.17. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(1;-1;2)$ перпендикулярно до площин $x-2y+z-2=0$ і $x+2y-2z=0$.

1.18. Знайти площину, що проходить через точку $M(1;-1;-2)$ паралельно до площини $x+2y-z+5=0$.

1.19. Через точку $M(7;-5;1)$ провести площину, що б відтинала на додатніх осях координат рівні між собою відрізки.

1.20. Площина відтинає на осях координат відрізки $a=11$, $b=55$, $c=10$. Знайти напрямні косинуси прямої, перпендикулярної до цієї площини.

§ 2. *Пряма лінія*

1. Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

Тут $\vec{S}\{m;n;p\}$ – вектор, паралельний до прямої (напрямний вектор).

2. Параметричне рівняння прямої:

$$\begin{cases} x=x_1+mt \\ y=y_1+nt \\ z=z_1+pt \end{cases}.$$

3. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

4. Загальне рівняння прямої:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}.$$

Тут $\overrightarrow{N}_1\{A_1; B_1; C_1\}$, $\overrightarrow{N}_2\{A_2; B_2; C_2\}$ – вектори нормалей двох площин.

5. Рівняння прямої у проекціях:

$$x = mz + x_1,\ \ y = nz + y_1,$$

$$\text{або}\ \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - 0}{1}.$$

6. Косинус кута φ між двома прямими:

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Тут $\vec{S}_1\{m_1; n_1; p_1\}$, $\vec{S}_2\{m_2; n_2; p_2\}$ – напрямні вектори прямих.

7. Умова паралельності двох прямих:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

8. Умова перпендикулярності двох прямих:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

*　　　*

*

∢ **Задача 1.** Написати канонічне та параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1; -2; 2)$ паралельно до осі OY.

Розв'язування. Вектор $\vec{P}\{0; 1; 0\}$ розміщений на осі OY і за умовою паралельний до прямої, тому його можна взяти за напрямний вектор цієї прямої. За формулою $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ одержимо канонічне рівняння прямої $\frac{x - 1}{0} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 2}{0}$. При переході до параметричного рівняння треба врахувати, що нулі в знаменниках першого і третього відношень показують, що $x-1=0$ та $z-2=0$.

Прирівнявши друге відношення до t, одержимо $y=-2+t$.

Отже, шукані параметричні рівняння мають вигляд $x=1,\ y=-2+t,\ z=2$.

∢ **Задача 2.** Пряма лінія задана загальним рівнянням

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}.$$

Записати канонічне рівняння цієї прямої.

Розв'язування. Припустимо, що $z=0$. Розв'язавши систему

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ 2x+y=3 \end{cases},$$

знаходимо, що $x=1,\ y=1$, тобто пряма проходить через точку $M_1(1;1;0)$.

Якщо $y=0$, то розв'язавши систему

$$\begin{cases} x+z=-1 \\ 2x-z=3 \end{cases},$$

знаходимо, що $x=\frac{2}{3},\ z=\frac{-5}{3}$, тобто пряма проходить також через точку $M_2\left(\frac{2}{3};0;\frac{-5}{3}\right)$. Використавши рівняння прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

одержимо: $$\frac{x-1}{\frac{2}{3}-1}=\frac{y-1}{0-1}=\frac{z-0}{-\frac{5}{3}-0}.$$

Отже, канонічне рівняння прямої має такий вигляд:

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{3}}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-\frac{5}{3}}.$$

*   *

*

ВПРАВИ

2.1. Знайти сліди прямих:

1) $x=z+5;\ y=4-2z$;

2) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$

на площинах XOY і XOZ та побудувати прямі.

Вказівка. У рівняннях прямої взяти, що 1) $z=0$; 2) $y=0$.

2.2. Рівняння прямої $\begin{cases} x+2y+3z-13=0 \\ 3x+y+4z-14=0 \end{cases}$ написати в канонічній формі. Знайти сліди прямої на координатних площинах і побудувати цю пряму.

2.3. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(4;3;0)$ і паралельна до вектора $\vec{P}\{-1;1;1\}$. Знайти слід прямої на площині YOZ і побудувати пряму.

2.4. Побудувати пряму $x=4,\ y=3$ і знайти її напрямний вектор.

2.5. Написати рівняння прямої, що проходить через точки $A(-1;2;3)$ і $B(2;6;-2)$. Знайти її напрямні косинуси.

2.6. Написати параметричні рівняння прямої:

1) що проходить через точку $(-2;1;-1)$ і паралельна до вектора $\vec{P}\{1;-2;3\}$;

2) що проходить через точки $A(3;\,-1;\,4)$ і $B(1;1;\,2)$.

2.7. Написати рівняння прямої, що проходить через точку (a,b,c):

1) паралельно до осі OZ;

2) перпендикулярно до осі OZ.

2.8. Скласти рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку $M\ (a,b,c)$.

2.9. Обчислити напрямні косинуси прямої

$$\begin{cases} 5x-6y+2z+21=0 \\ x-z+3=0 \end{cases}.$$

2.10. Визначити кут між двома прямими

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 4x+y-6z-2=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}.$$

§ 3. Пряма і площина

1. Рівняння зв'язки площин, що проходять через пряму

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases},$$

має вигляд

$$A_1x+B_1y+C_1z+Д_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+Д_2)=0,$$

де k – довільне число.

2. Кут між прямою і площиною:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Тут $\vec{N}\{A;\,B;\,C\}$ – вектор нормалі площини, $\vec{S}\{m;\,n;\,p\}$ – напрямний вектор прямої.

3. Умова паралельності прямої і площини:

$$Am+Bn+Cp=0.$$

4. Умова перпендикулярності прямої і площини:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

*   *

*

⮘ **Задача 1.** Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{3}=$ $=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{5}$ з площиною $x+y-2z-4=0$.

Розв'язування. Запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді. Нехай кожне з відношень, що входить у рівняння прямої, дорівнює t:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{5}(=t) \text{ або } \frac{x-1}{3}=t; \ \frac{y+1}{-1}=t; \ \frac{z-2}{5}=t,$$

тобто $x=3t+1;$ $y=-t-1;$ $z=5t+2.$

Оскільки координати точки перетину прямої та площини повинні задовольняти рівняння прямої і рівняння площини, то підставивши значення x, y і z з параметричного рівняння прямої у рівняння площини, одержимо

$$3t+1+(-t-1)-2(5t+2)-4=0.$$

Розв'язавши його, знайдемо $t=-1$. Значення t є значенням параметра в точці перетину прямої і площини. Підставимо його в параметричне рівняння прямої і одержимо: $x=-2;$ $y=0;$ $z=-3.$ Отже, $(-2;0;3)$ є шуканими координатами точки перетину прямої і площини.

⮘ **Задача 2.** Написати рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{4}; \ \frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}.$$

Розв'язування. Рівняння першої прямої запишемо так:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{3} \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z}{4} \end{cases},$$

або після спрощення

$$\begin{cases} 3x-2y+3=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases}.$$

Рівняння зв'язки площин, які проходять через цю пряму, матиме вигляд:

$$3x-2y+3+\lambda(2x-z-2)=0$$

або

$$(3+2\lambda)x-2y-\lambda z+3-2\lambda=0.$$

Звідси виділимо ту площину, що проходить через пряму. Друга пряма проходить через точку $M(-2;-1;1)$, а тому площині, що проходить через другу пряму, повинна належати ця точка. Підставивши в рівняння зв'язки координати точки $M(-2;-1;1)$, одержимо співвідношення, з якого знайдемо λ.

$$(3+2\lambda)(-2)-2(-1)-\lambda 1+3-2\lambda=0;$$

$$\lambda=-\frac{1}{7}.$$

Підставивши знайдене значення λ у рівняння зв'язки, одержимо шукане рівняння площини

$$19x-14y+z+23=0.$$

*　　　*

*

ВПРАВИ

3.1. Знайти кут прямої $y = 3x - 1;\ 2z = -3x + 2$ з площиною $2x + y + z - 4 = 0$.

3.2. Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ і точку (3; 4; 0).

3.3. Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ і перпендикулярна до площини $2x + 3y - z = 4$.

3.4. Написати рівняння площини, що проходить через паралельні прямі $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ і $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

3.5. Знайти точку перетину прямої $x = 2t - 1$; $y = t + 2$; $z = 1 - t$ з площиною $3x - 2y + z = 3$.

3.6. Знайти точку перетину прямої $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ з площиною $x + 2y + 3z - 29 = 0$.

3.7. Знайти проекцію точки $(3; 1; -1)$ на площину $x + 2y + 3z - 30 = 0$.

3.8. Знайти проекцію точки $(2; 3; 4)$ на пряму $x = y = z$.

3.9. Написати рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин $2x - y + 3z - 6 = 0$ і $x + 2y - z + 3 = 0$ та через точку $(1; 2; 4)$.

3.10. Написати рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин $4x - y + 3z - 6 = 0$ і $x + 5y - z + 10 = 0$ перпендикулярно до площини $2x - y + 5z - 5 = 0$.

РОЗДІЛ 5. **ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ**

§ 1. Поняття функції

1. Сукупність усіх дійсних чисел, що задовольняють нерівність $a < x < b$, називається *інтервалом* і позначається (a, b) або $]a, b[$.

Сукупність усіх дійсних чисел, що задовольняють нерівність $a \le x \le b$, називається *відрізком* і позначається $[a, b]$.

2. *Абсолютною величиною* $|a|$ дійсного числа a, називається число a, якщо a додатне або дорівнює нулю і число $-a$, якщо a від'ємне, тобто

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \ge 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

3. Змінна величина y називається *функцією* змінної величини x (позначається $y = f(x)$), якщо вказано закон, за яким кожному значенню x, взятому з області можливих значень, відповідає певне дійсне значення y. Змінна величина x називається *незалежною змінною* або *аргументом*.

Областю визначення функції $y = f(x)$ називається сукупність усіх тих значень аргумента x, для яких значення y існують, тобто є певними дійсними числами.

Областю значень функції $y = f(x)$ називається сукупність усіх значень y, коли x змінюється в області визначення цієї функції.

* *

*

∢ **Задача 1.** Визначити, при яких значеннях x виконується нерівність $|x - 3| < 2$.

Розв'язування. Задану нерівність можна записати так: $-2 < x-3 < 2$. До кожної частини цієї нерівності додамо по 3 і одержимо $-2+3 < x < 2+3$, тобто $1 < x < 5$. Отже, нерівність $|x-3| < 2$ виконується для всіх значень x з інтервалу $(1, 5)$.

∢ **Задача 2.** Знайти область визначення функції $y = \sqrt{2-x}$.

Розв'язування. Для того, щоб функція y мала лише дійсні значення, величина $2-x$, що знаходиться під коренем, не повинна мати від'ємних значень, а мусить бути $2-x \geq 0$, звідси $x \leq 2$. Областю визначення функції є сукупність дійсних значень x, що менші або дорівнюють 2, тобто $x \in (-\infty; 2]$.

*   *

*

ВПРАВИ

1.1. Визначити області зміни змінної x, що задовольняють нерівності:

1) $|x| < 4$; 2) $x^2 \leq 9$;

3) $|x-4| < 1$; 4) $-1 < x-3 \leq 2$;

5) $x^2 > 9$; 6) $(x-2)^2 \leq 4$.

1.2. Визначити область зміни змінної $x = 1 - \frac{1}{t}$, де t набуває значення ≥ 1.

1.3. Визначити, при яких значеннях x виконуються нерівності:

1) $|x-1| < 3$; 2) $|x+3| < 1$; 3) $|x+1| > 3$.

1.4. Записати нерівності та побудувати інтервали зміни змінних: $[-1, 3]$, $(0, 4)$, $[-2, 1)$.

1.5. Дано функцію $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2+1}$.

Обчислити: $f(0)$, $f(-1)$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{1}{f(x)}$.

1.6. Дано функцію $\varphi(x)=\dfrac{5x+1}{2-x}$.

Знайти: 1) $\varphi(3x)$; 2) $\varphi(x^3)$; 3) $3\varphi(x)$; 4) $[\varphi(x)]^3$.

1.7. Дано, що $\varphi(x)=x^2+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$. Довести, що $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)=\varphi(x)$.

1.8. Функція $f(x)$ називається *парною*, якщо $f(-x)=f(x)$; *непарною*, якщо $f(-x)=-f(x)$. Вказати, котрі зі заданих функцій парні, а які – непарні:

1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$;

2) $\varphi(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$;

3) $F(x)=a^x+\dfrac{1}{a^x}$;

4) $\Phi(x)=a^x-\dfrac{1}{a^x}$;

5) $F_1(x)=x\sin^2 x-x^3$;

6) $f_1(x)=x+x^2$.

Знайти області визначення функцій:

1.9. $y=\sqrt{x+2}$.

1.10. $y=\sqrt{9-x^2}$.

1.11. $y=\sqrt{4x-x^2}$.

1.12. $y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x}$.

1.13. $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$.

1.14. $y=\dfrac{x(2\pm\sqrt{x})}{4}$.

1.15. $y=\pm x\sqrt{4-x}$.

1.16. $y=1-\sqrt{2\cos 2x}$.

1.17. $y=-\dfrac{x\sqrt{16-x^2}}{2}$.

1.18. $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+x+1}$.

1.19. $y = \dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}}$. 1.20. $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

1.21. $y = \sqrt{(x-2)(x+3)}$. 1.22. $y = \lg(x-5)$.

1.23. $y = \mathrm{tg} 2x$. 1.24. $y = \arccos(3x-6)$.

1.25. $y = \arcsin\sqrt{4x-3}$.

1.26. $y = \sqrt{4+x} - \sqrt{x+2} + \sqrt{15-x}$.

1.27. $y = \log_4 \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}$.

1.28. Побудувати за точками на відрізку $|x| \le 3$ графіки функцій:

1) $y = 2x-3$; 2) $y = x^2-2$; 3) $y = \dfrac{x^3}{3}+1$; 4) $y = |x|$.

1.29. Знайти функції, обернені до заданих:

1) $y = 3-2x$; 2) $y = x^2+2$;

3) $y = 2+\dfrac{3}{1-x}$; 4) $y = e^{2x+3}$.

1.30. Знайти корені x_1 та x_2 функції $y = 4x-x^2$ і побудувати її графік на відрізку $[x_1-1; x_2+1]$.

§ 2. *Границя функції*

1. Число a називається *границею числової послідовності* x_1, x_2, …, x_n, …, якщо для довільного як завгодно малого додатного числа ε знайдеться таке натуральне число N, що при $n \ge N$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

У цьому випадку записують: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2. Число b називається *границею функції* $f(x)$ при $x \to a$, якщо для довільної числової послідовності $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$ значень аргумента x відповідна послідовність

$$y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ ...,\ y_n = f(x_n), \ldots$$

значень функції y має границею число b.

Аналогічно записують $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$

3. Якщо існують $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B,$ то:

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B$;

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad \left(\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0\right).$

4. Перша визначна границя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

5. Друга визначна границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \approx 2{,}72.$$

6. При розв'язуванні задач використовують формули:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}, \quad \lim_{\alpha\to 0}(1+k\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{k}.$$

7. Формули зростання за складними відсотками:

$$K_t = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^{t} = K_0(1+i)^{t},$$

де K_t – сума вкладу, нагромаджена через t років; K_0 – початкова сума вкладу; p – щорічний відсотковий приріст; t – період зростання в роках; $i = p/100$, $1+i = r$ – коефіцієнт складних відсотків.

8. Неперервне зростання за складними відсотками:

$$K_t = K_0 \cdot e^{\frac{p}{100}t} = K_0 \cdot e^{it}$$

Якщо $p > 0$, формула називається показниковим законом зростання, а при $p < 0$ – показниковим законом спадання.

9. Кінцеву величину K_t початкової суми K_0 через t років у випадку, коли питома відсоткова ставка $-$ i, а проценти нараховуються m разів у рік, обчислюють за формулою:

$$K_t = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}.$$

10. Рахунки накопичення:

$$S = P \cdot S_{n/i}$$

Тут S - величина рахунку накопичення;

P - початковий внесок;

$S_{n/i}$ - знаходиться в розрахунковій таблиці Д8 (в додатках).

11. Розрахунки ренти:

$$A = P \cdot a_{n/i},$$

де $a_{n/i} = i^{-1}\left[1 - (1+i)^{-n}\right]$ табульована для різних значень $i = \dfrac{R}{100}$ та n.

Тут A - величина внеску на рентний рахунок;

P - щорічна виплата протягом n років;

R - величина щорічного відсоткового зростання.

12. Погашення боргу:

$$P = \frac{A}{a_{n/i}}.$$

Тут A - величина внеску взятого в борг;

P - сума регулярного повернення;

$a_{n/i}$ - знаходиться в розрахунковій таблиці Д8 (в додатках).

∢ **Задача 1.** Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Розв'язування. При $x\to 2$ чисельник і знаменник дробу мають границю, що дорівнює нулю. Перенесемо ірраціональність у знаменник, помноживши чисельник і знаменник на спряжений вираз до чисельника, тобто на $\sqrt{x^2+5}+3$, одержимо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{2+2}{3+3}=\frac{2}{3}.$$

∢ **Задача 2.** У місті проживає 249 тис. мешканців. Щорічно народонаселення збільшується на 1,7%. Яка кількість жителів буде в цьому місті через 12 років?

Розв'язування. Використаємо формулу зростання за складними процентами:

$$K_{12}=249\left(1+\frac{1{,}7}{100}\right)^{12}\approx 305.$$

Отже, через 12 років у місті буде 305 тис. жителів.

∢ **Задача 3.** Вкладник надає банку 2000 гривень під складні відсотки з умовою їх неперервного зростання на 12% річних. Обчислити нагромадження капіталу за 4 роки.

Розв'язування. Використаємо формулу неперевного зростання за складними відсотками:

$$K_4=2000\cdot e^{4\cdot 0{,}12}\approx 3{,}2322 \text{ тис. грн.}$$

∢ **Задача 4.** Сума $K_0 = 200$ тис. грн. вкладена під складні відсотки з розрахунку 12% річних терміном на 4 роки. Обчислити кінцеву суму, якщо відсотки нараховуються в кінці кожного місяця.

Розв'язування. Відомо, що $K_0 = 200$ тис. грн., $i = 0{,}12$, $m = 12$, $t = 4$. Отже,

$$К_4 = 200\left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{12 \cdot 4} = 200 \cdot 1{,}01^{48} = 322{,}4 \text{ тис. грн.}$$

∢ **Задача 5.** Кожного місяця студент вносить 100 гривень на свій рахунок накопичення з одержанням прибутку 5% щомісячно. Обчислити величину його накопичення після здійснення 12 внеску.

Розв'язування. Оскільки табличне значення $S_{n/i}$ рівне

$S_{n/i} = S_{12/0,05} = 15{,}917127$, то

$S = 100 \cdot 15{,}917127 \approx 1591{,}71$ грн..

∢ **Задача 6.** В день 55-річчя працівниця фірми "Остер" відкрила рахунок ренти в страховій компанії "УНІВЕРСАЛЬНА" за умови щорічного отримання у свій день народження 1000 грн. протягом 15 років. Яку суму внесено на рахунок ренти, якщо кошти прийнято з 5% щорічним зростанням?

Розв'язування. Використаємо формулу $A = P \cdot a_{n/i}$. В нашій задачі регулярні виплати $P = 1000$ грн.. Коефіцієнт $a_{n/i}$ взято із таблиці Д8 і рівний $a_{15/0,05} = 10{,}379658$. Значить

$A = 1000 \cdot 10{,}379658 \approx 10379{,}66$ грн..

Отже, працівниця фірми повинна покласти на рахунок ренти 10379,66 грн., щоб одержувати по 1000 грн. щорічно протягом 15 років.

∢ **Задача 7.** На час навчання студент університету отримав з фонду навчання в борг 8000 грн. Цей кредит йому надано із 8% щорічного зростання і умовою щорічного

повернення боргу в кінці кожного року після закінчення університету протягом 15 років.
Скільки коштів повинен повертати студент кожного року після закінчення університету?

Розв'язування. Шукана величина P щорічної сплати боргу студентом знаходиться за формулою $P = \dfrac{A}{a_{n/i}}$.

В даному випадку борг $A = 8000$ грн., час його повернення $n = 15$, відсоток зростання $R = 8$, $i = \dfrac{R}{100} = 0{,}08$. Із таблиці Д 8 знаходимо $a_{15/0{,}08} = 8{,}559479$. Тому

$$P = \frac{8000}{a_{15/0{,}08}} = \frac{8000}{8{,}559479} \approx 934{,}64 \text{ грн.}.$$

Отже, для погашення боргу студент повинен в кінці кожного року сплачувати фонду навчання 934,64 грн.

* *

*

ВПРАВИ

Знайти границі:

2.1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{2x^2+5x-3}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Вказівка. $x = t^6$.

2.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-1}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$.

Вказівка. У прикладі 2.9 домножити чисельник і знаменник на $(\sqrt{2x+3}+3)(\sqrt{x-2}+1)$.

2.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2-4x}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x^2+1}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$.

2.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x}}\right)$.

2.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$.

Вказівка. У прикладі 2.17 чисельник і знаменник домножити на $10x$.

2.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}$.

2.20. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$.

Вказівка. У прикладі 2.19 зробити заміну $\mathrm{arctg}x=\alpha$, а в 2.20 – $\arcsin(1-2x)=\alpha$.

2.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n$.

Вказівка. Зробити заміну $\left(-\dfrac{5}{n}\right)=\alpha$.

2.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^n$.

2.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n+3}$.

2.24. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

2.25. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

2.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.

2.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

2.28. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$. 2.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

2.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

2.31. У банк на терміновий внесок під 10% річних вкладена сума 10 тис. грн. Яку суму отримає клієнт через 5 років?

2.32. У страховій компанії були куплені чотири акції вартістю 100 грн., кожна з яких дає 20% приросту річних. Яку суму отримає клієнт через 3 роки?

2.33. За п'ять років обсяг продукції повинен зрости на 100%. Яким повинен бути середній темп зростання щорічно?

2.34. В ощадну касу зроблено внесок на 10 років у сумі 100000 грн. Яку суму виплатить ощадна каса після закінчення цього терміну при процентній ставці 3%?

2.35. Обладнання вартістю 10 тис. гривень внаслідок експлуатації втрачає кожного року 20% своєї вартості. Знайти:

а) вираз для вартості цього обладнання через t років;

б) кількість років його доцільного використання, якщо при вартості 3000 гривень обладнання використовувати недоцільно.

2.36. Обчислити кінцеву суму для початкової суми $K_0 = 100000$ грн., вкладеної під складні проценти із $p = 6\%$, що нараховуються неперервно протягом 3 років.

2.37. Яким повинен бути середній темп випуску синтетичної смоли і пластмас за 5 років, якщо загальний обсяг випуску повинен зрости на 35%?

2.38. Населення міста зростає щорічно на 3% порівняно з попереднім роком. Через скільки років населення цього міста збільшиться у 1,5 раза?

2.39. Ділянка лісу містить $1{,}44 \cdot 10^5$ м^3 деревини. Обчислити, на скільки кубометрів збільшиться кількість деревини за 15 років, якщо середній щорічний приріст деревини становить 2,8%.

2.40. Сума $K_0 = 1000$ гривень вкладена під складні проценти з $p = 6\%$ річних терміном на 3 роки. Обчислити кінцеву суму, якщо проценти нараховуються в кінці кожного місяця.

2.41. Кожного року батьки вносять P гривень на свій рахунок накопичення із щорічним прибутковим зростанням рахунку на R відсотків. Обчислити суму коштів, накопичених за n років.

а) $P = 600, \quad R = 2\%, \quad n = 12;$

б) $P = 500, \quad R = 2\%, \quad n = 12;$

в) $P = 300, \quad R = 3\%, \quad n = 18;$

г) $P = 200, \quad R = 3\%, \quad n = 18;$

д) $P = 100; \quad R = 5\%, \quad n = 24.$

2.42. Батьки бажають відкрити рахунок на ім'я сина у страховій компанії “ОРАНТА”, яка сплачує R щорічних прибуткових відсотків. Його умова - сплачувати на початку кожного року P гривень протягом n років починаючи з наступного року. Яку суму коштів він повинен внести на рахунок ренти?

а) $P = 500, \quad R = 3\%, \quad n = 6;$

б) $P = 800, \quad R = 3\%, \quad n = 8;$

в) $P = 1000, \quad R = 5\%, \quad n = 10;$

г) $P = 600, \quad R = 5\%, \quad n = 12;$

д) $P = 700, \quad R = 8\%, \quad n = 15.$

2.43. На час навчання студент університету отримав з фонду навчання в борг A гривень. Цей кредит йому надано із R % щорічного зростання і умовою щорічного повернення боргу в кінці кожного року після закінчення університету протягом n років. Скільки коштів повинен повертати студент кожного року після закінчення університету?

а) $A = 8000, R = 8\%, n = 5;$

б) $A = 9000, R = 8\%, n = 8;$

в) $A = 10000, R = 5\%, n = 10;$

г) $A = 11000, R = 5\%; n = 12;$

д) $A = 12000, R = 3\%, n = 15.$

§ 3. Неперервність функції

1. *Приріст* аргументу і функції:

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

2. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною* у точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу Δx у точці $x = x_0$ відповідає нескінченно малий приріст Δy функції, що визначена в точці x_0 та в її околі. Тобто при $\Delta x \to 0$ буде $\Delta y \to 0$.

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною* при $x = x_0$, якщо:

1) $f(x)$ існує при $x = x_0$ і в деякому околі точки x_0;
2) існує лівостороння границя $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x);$
3) існує правостороння границя $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x);$
4) лівостороння і правостороння границі рівні

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

5) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ незалежно від способу прямування x до x_0, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

3. Класифікація точок розривів функції:

1) Якщо функція $f(x)$ не визначена в точці x_0 або визначена, але мають місце співвідношення

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0),$$

то розрив у точці називається *ліквідовним* (усувним).

2) Якщо однобічні границі функції $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ існують і скінченні, але не рівні між собою, то x_0 називається точкою розриву *першого роду*, а різниця $\Delta = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ називається *стрибком* функції.

3) Якщо хоч одна з однобічних границь не існує або дорівнює ∞, то розрив у цій точці називається розривом *другого роду*.

Такі розриви першого і другого роду називаються *неліквідовними* (неусувними).

* *

*

∢ **Задача 1.** Знайти інтервал неперервності функції

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 6.$$

Розв'язування. Візьмемо довільну точку x_0 на числовій осі та позначимо через Δx приріст аргументу x. Тоді задана функція одержить приріст

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \left[4(x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 6\right] -$$
$$-(4x_0^2 - 3x_0 + 6) = 4x_0^2 + 8x_0\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 6 -$$
$$-4x_0^2 + 3x_0 - 6 = 4(\Delta x)^2 + (8x_0 - 3)\Delta x.$$

Знайдемо тепер границю Δy при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[4(\Delta x)^2+(8x_0-3)\Delta x\right]=0.$$

Отже, функція неперервна в точці x_0. Це твердження має місце для будь-якої точки числової осі, тому функція $f(x)=4x^2-3x+6$ неперервна на всій числовій осі.

∢ **Задача 2.** Дослідити на неперервність і знайти точки розриву функції $f(x)=\dfrac{4}{x-2}$.

Розв'язування. Задана функція є неперервною для всіх значень x, крім $x=2$. Оскільки знаменник $x-2$ дробу дорівнює нулю при $x=2$, то функція $f(x)$ розривна при $x=2$. Визначимо характер цієї точки розриву. Знайдемо спочатку лівосторонню границю функції $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)$. Якщо $x\to 2-0$, то, можна підставити $x=2-\alpha$ ($\alpha>0$) і вважати, що α, залишаючись додатньою, прямує до нуля:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\frac{4}{x-2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{4}{2-\alpha-2}=-\lim_{\alpha\to 0}\frac{4}{\alpha}=-\infty.$$

Тепер визначимо правосторонню границю функції. Якщо $x\to 2+0$, можна зробити заміну $x=2+\alpha$ ($\alpha>0$) і вважати, що α, залишаючись додатною, прямує до нуля. Замінюючи x на $2+\alpha$, одержимо:

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{4}{x-2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{4}{2+\alpha-2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{4}{\alpha}=+\infty.$$

Таким чином, тут не існує ні границі зліва, ні границі справа, а тому точка $x=2$ – точка розриву другого роду.

∢ **Задача 3.** Б'юро економічного аналізу ВАТ "Ватра" встановило, що при виробництві x одиниць продукції A щоквартальні витрати $V(x)$ виражаються формулою

$$V(x)=20\,000+40x \text{ (гривень)},$$

а дохід $D(x)$, одержаний від продажу x одиниць цієї продукції виражається формулою

$$D(x) = 100x - 0{,}001x^2 \text{ (гривень).}$$

Кожного кварталу завод виробляє 3100 одиниць продукції A, але прагне збільшити випуск цієї продукції до 3200 одиниць. Обчислити приріст витрат, доходу та прибутку. Знайти середню величину приросту прибутку на одиницю приросту продукції.

Розв'язування. Запланований приріст продукції буде
Δx = 3200 – 3100 = 100 (одиниць продукції A).

Приріст витрат:

$$\Delta V(x) = V(3200) - V(3100) = (20000 + 40 \cdot 3200) -$$
$$-(20000 + 40 \cdot 3100) = 148000 - 144000 = 4000\,.$$

Приріст доходу:

$$\Delta D(x) = D(3200) - D(3100) = (100 \cdot 3200 - 0{,}01 \cdot 3200^2) -$$
$$-(100 \cdot 3100 - 0{,}01 \cdot 3100^2) = 217600 - 213900 = 3700.$$

Позначимо прибуток $P(x)$. Тоді

$$P(x) = D(x) - V(x) = 100x - 0{,}01x^2 - (20000 + 40x) =$$
$$= -20000 + 60x - 0{,}01x^2\,.$$

Приріст прибутку буде:

$$\Delta P(x) = P(3200) - P(100) = (-20000 + 60 \cdot 3200 - 0{,}01 \cdot 3200^2) -$$

$-(-20000 + 60 \cdot 3100 - 0{,}01 \cdot 3100^2) = 69600 - 69900 = -300,$ тобто зменшиться на 300 гривень. Середня величина прибутку на одиницю приросту продукції буде

$$\frac{\Delta P(x)}{\Delta(x)} = \frac{-300}{100} = -3\,.$$

Отже, кожна одиниця додаткової продукції зменшує прибуток на 3 гривні.

* *

*

ВПРАВИ

3.1. Знайти інтервал неперервності функції

$$f(x)=\frac{4x}{1+x^2}.$$

3.2. Показати, що при $x=3$ функція $f(x)=\frac{3+x^2}{3-x^2}$ неперервна.

3.3. Знайти точки розриву і побудувати графіки функцій:

1) $y=-\frac{3}{x}$; 2) $y=\mathrm{tg}x$; 3) $y=\frac{4}{4-x^2}$.

Знайти точки розриву функції:

1) $y=\frac{1}{x}$; 2) $y=e^{\frac{1}{x+1}}$; 3) $y=\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$.

Дослідити на неперервність, знайти точки розриву і побудувати ескіз графіка функцій:

3.5. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

3.6. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

3.7. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$.

3.8. $y=\dfrac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}}$.

3.9. $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$.

3.10. $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$.

3.11. Побудувати графік функції

$$y=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & \text{при} \quad x\neq 2\\ 0 & \text{при} \quad x=2\end{cases}$$

і вказати точку її розриву. Що з умов неперервності в цій точці виконані і що не виконані?

3.12. Побудувати графік функції

$$y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{при} \quad x\neq 0\\ 2 & \text{при} \quad x=0\end{cases}$$

і визначити її точку розриву. Що з умов неперервності в цій точці виконані і що не виконані?

Побудувати графіки функцій:

3.13. $y=\begin{cases}3x & \text{при} \quad -2\le x<1\\ 2+x & \text{при} \quad 1\le x\le 2\end{cases}$.

3.14. $y=\begin{cases}2x+1 & \text{при} \quad -1\le x\le 0\\ x^2+1 & \text{при} \quad 0<x\le 1\end{cases}$.

3.15. $y=\begin{cases}x^3+1 & \text{при} \quad -3\le x<0\\ x^2 & \text{при} \quad 0\le x\le 3\end{cases}$.

3.16. Мале підприємство встановило, що витрати на виготовлення x окремих виробів задовольняють таку закономірність:

$$V(x)=0{,}001x^3-0{,}3x^2+40x+1000\,.$$

Знайти приріст витрат, коли кількість виробів збільшиться з 50 до 100, та середні витрати на виготовлення кожної одиниці виробу, якщо їх кількість зросте з 50 до 60.

3.17. Загальний щотижневий дохід D у гривнях, одержаний підприємством після продажу виготовлених x одиниць виробів, має таку закономірність:

$$D(x)=500x+2x^2\,.$$

Визначити середнє значення доходу на одиницю приросту виготовленої продукції, якщо її кількість x збільшиться з 100 до 120.

3.18. Фірма платить продавцю за x одиниць проданого товару ($2x+40$) грн., якщо продано товару менше, ніж 60 од., і доплачує 20% комісійних, якщо товару продано 60 од. і більше. Описати залежність між кількістю проданого товару та заробітною платою, отриманою продавцем, і побудувати графік функції.

РОЗДІЛ 6. **ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ**

§ 1. Диференціювання функцій

1. *Похідною* функції $y = f(x)$ у точці x називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли Δx довільно прямує до нуля. Якщо ця границя існує, то вона позначається: y', або $f'(x)$, або y'_x, або $\dfrac{dy}{dx}$, або $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Математично похідна функції визначається за формулою:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

2. *Геометричний* зміст похідної: похідна $f'(x)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x.

Механічний зміст похідної: похідна $S'(t)$ є величиною миттєвої швидкості в момент t тіла, що рухається за законом $S = S(t)$.

Економічний зміст похідної: похідна $K'(x)$ дорівнює граничним витратам виробництва $K = K(x)$ однорідної продукції як функції кількості продукції x.

3. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $(n-1)$ порядку, диференційовану в деякій точці x інтервалу $[a;b]$, то похідна від $f^{(n-1)}(x)$ називається n-ою похідною, або похідною n-го порядку і позначають:

$$f^{(n)}(x), \text{ або } y^{(n)}, \text{ або } y_x^{(n)}, \text{ або } \frac{d^n y}{dx^n}, \text{ або } \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Тому, n-на похідна функції $y = f(x)$ визначається рівністю:

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'.$$

4. ***Основні формули диференціювання***:

1) $y = u(x) \pm v(x)$, $\quad y' = u' \pm v'$;

2) $y = u(x) \cdot v(x)$, $\quad y' = u'v + uv'$;

3) $y = c,\ c = const$, $\quad y' = 0$;

4) $y = c \cdot u(x)$, $\quad y' = cu'$;

5) $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, $\quad y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

6) $y = f(u), u = \varphi(x), y = f(\varphi(x))$, $\quad y' = y'_u \cdot u'_x$;

7) $y = u^{\alpha}(x)$, $\quad y' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$;

8) $y = \sqrt{u(x),}$ $\quad y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;

9) $y = \sin u(x)$, $\quad y' = \cos u \cdot u'$;

10) $y = \cos u(x)$, $\quad y' = -\sin u \cdot u'$;

11) $y = \mathrm{tg}\, u(x)$, $\quad y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

12) $y = \mathrm{ctg}\, u(x)$, $\quad y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

13) $y = a^{u(x)}$, $\quad y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

14) $y = e^{u(x)}$, $\quad y' = e^u \cdot u'$;

15) $y = \log_a u(x)$, $\quad y' = \dfrac{u'}{u} \log_a e = \dfrac{u'}{u \ln a}$;

16) $y = \ln u(x)$, $\quad y' = \dfrac{u'}{u}$;

17) $y = \arcsin u(x)$, $\quad y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

18) $y = \arccos u(x)$, $\qquad y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

19) $y = \mathrm{arctg}\, u(x)$, $\qquad y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

20) $y = \mathrm{arcctg}\, u(x)$, $\qquad y' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

* *

*

∢ **Задача 1.** Знайти похідну функції $y = 3x^2$ при $x = 4$.

Розв'язування. Знайдемо розв'язок цієї задачі, виходячи із означення. Якщо аргумент x одержує приріст Δx, то для функції $y = f(x) = 3x^2$ знайдемо приріст Δy, тобто

$$f(x+\Delta x) = 3(x+\Delta x)^2 = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2,$$
$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 3x^2 =$$
$$= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 = (6x + 3\Delta x)\Delta x.$$

Розділимо приріст функції Δy на приріст аргументу Δx, тобто знайдемо середню швидкість зміни заданої функції $y = 3x^2$ на проміжку $(x,\, x+\Delta x)$.

Для знаходження похідної y' потрібно знайти границю одержаного відношення при $\Delta x \to 0$ (тут x вважається постійною величиною). Таким чином

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(6x+3\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(6x + 3\Delta x) = 6x.$$

При $x = 4$ значення похідної $y'(4) = 6\cdot 4 = 24$. Це число 24 є швидкістю зміни функції $y = 3x^2$ при $x = 4$.

∢ **Задача 2.** Знайти похідні функцій:

а) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$; б) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

Розв'язування.

а) Використаємо правило диференціювання для суми двох диференційованих функцій, а потім знайдемо похідні складних функцій:

$$y'=(\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1})'=(\sqrt{x^2+1})'+(\sqrt[3]{x^3+1})'=\left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)'+$$

$$+\left((x^3+1)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)'+\frac{1}{3}(x^3+1)^{-\frac{2}{3}}(x^3+1)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x+\frac{1}{3\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}\cdot 3x^2=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}.$$

б) Задану функцію прологарифмуємо, а тоді знайдемо похідну складної функції:

$$y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln(1-\sin x)-\frac{1}{2}\ln(1+\sin x);$$

$$y'=\left(\frac{1}{2}\ln(1-\sin x)-\frac{1}{2}\ln(1+\sin x)\right)'=\left(\frac{1}{2}\ln(1-\sin x)\right)'-$$

$$-\left(\frac{1}{2}\ln(1+\sin x)\right)'=\frac{1}{2}\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}-\frac{1}{2}\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}=\frac{1}{2}\frac{-\cos x}{1-\sin x}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{-2\cos x}{2(1-\sin^2 x)}=-\frac{1}{\cos x}.$$

∢ **Задача 3.** Знайти похідну третього порядку функції $y=\sin^2 x$.

Розв'язування. Знайдемо похідну першого порядку, як похідну степеневої функції:

$$y' = (\sin^2 x)' = \left[(\sin x)^2\right]' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

Похідну другого порядку знаходимо як похідну від знайденого результату для y', тобто $y'' = (y')'$. Аналогічно $y''' = (y'')'$. Отже,

$$y'' = (\sin 2x)' = \cos 2x(2x)' = 2\cos 2x;$$

$$y''' = (2\cos 2x)' = 2(-\sin 2x)(2x)' = -4\sin 2x.$$

∢ **Задача 4.** Знайти похідну y' неявної функції

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Розв'язування. У заданому рівнянні функцію y знаходять неоднозначно, тому вона називається неявною. Диференціюючи обидві частини рівності, одержимо $2x + 2yy' = 0$. Звідси маємо $yy' = -x$. Розв'язуючи це рівняння відносно y', знаходимо, що $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Тут при диференціюванні другого доданка $\left[\left(y^2\right)_x' = 2yy'\right]$ спочатку знайдено похідну степеневої функції, а пізніше диференціюється основа y по незалежній змінній x (тобто y').

*　　　*

*

ВПРАВИ

1.1. Використовуючи означення похідної, знайти похідні функцій:

1) $y = x^4$;　2) $y = \sqrt[3]{x}$;　3) $y = \cos x$;

4) $y = \dfrac{1}{x}$;　5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;　6) $y = \mathrm{tg} x$;

7) $y = \dfrac{1}{x^2}$;　8) $y = \sqrt{1+3x}$;　9) $y = \dfrac{1}{2x+3}$;

10) $y = \ln x$.

1.2. Обчислити похідну функції $y = x^3$ при $x = 5$, використовуючи означення.

1.3. Обчисленням $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ знайти при $x = 1$ похідні функцій:

1) $y = \dfrac{2x-1}{3x+1}$; 2) $y = \sqrt{x^2+2}$; 3) $y = \dfrac{-1}{x-5}$.

1.4. Знайти за формулами похідні функцій:

1) $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$; 2) $y = \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)^2$;

3) $y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$; 4) $y = 2\sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{x^2}$;

5) $y = \dfrac{8}{\sqrt[4]{x}} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$; 6) $y = x^3 - 4\sin x$;

7) $y = x^2 \operatorname{ctg} x$; 8) $y = (\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^3$;

9) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - x}{x}$; 10) $y = \dfrac{\cos x}{1 + 2\sin x}$;

11) $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$. Знайти $f'(0)$, $f'(2)$ і $f'(-2)$.

Знайти похідні складних функцій:

1.5. 1) $y = 6\cos\dfrac{x}{3}$; 2) $y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}$;

3) $y = 3\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x$; 4) $y = \sqrt{3x - \cos 3x}$;

5) $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$; 6) $y = \operatorname{ctg}^3 \dfrac{x}{3}$;

7) $y = x\sqrt{x^2 - 1}$; 8) $y = \sin^2 x^3$;

9) $y = \dfrac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$; 10) $y = \sqrt[4]{1 + \sin 3x}$.

1.6. 1) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; 2) $y=\ln(x^2+2x)$;

3) $y=\ln\sin x-\dfrac{1}{2}\sin^2 x$; 4) $y=\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$;

5) $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; 6) $y=\ln\sqrt{\dfrac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}$;

7) $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$; 8) $y=\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1})$.

1.7. 1) $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$; 2) $y=\arccos(3x-1)$;

3) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; 4) $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+\arcsin e^x$;

5) $y=\operatorname{arctg}e^{2x}+\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$;

6) $y=\arccos\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-4x^2}$;

7) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$; 8) $y=\arccos\sqrt{\dfrac{\cos 3x}{\cos^3 x}}$.

1.8. Знайти похідні другого порядку від функцій:

1) $y=-\dfrac{22}{x+5}$; 2) $y=\dfrac{1}{4}x^2(2\ln x-3)$;

3) $y=-\dfrac{1}{9}x\sin 3x-\dfrac{2}{27}\cos 3x$; 4) $y=e^{-x}\sin x$;

5) $y=x^2\ln x$; 6) $y=x\cos x$.

1.9. Знайти похідні третього порядку від функцій:

1) $y=x^2\sin 2x$; 2) $y=\dfrac{x}{6(x+1)}$;

3) $y=\dfrac{1}{2}\ln^2 x$; 4) $y=(2x+3)^3\sqrt{2x+3}$.

1.10. Знайти похідні n-го порядку від функцій:

1) $y = e^{-\frac{x}{2}}$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = \cos^2 x$;

4) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$; 5) $y = \dfrac{1}{2x+1}$.

1.11. Знайти похідні функцій, заданих неявно:

1) $x^3 y - 3x^2 y + 5y^3 - 3x + 4 = 0$;

2) $x^2 y + \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} = 0$;

3) $x^2 + xy + y^2 = 6$;

4) $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$;

5) $x = y + \mathrm{arcctg} y$;

6) $xy + \ln y - 2\ln x = 0$;

7) $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$, знайти y' при $x = 0$;

8) $x^2 \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$, знайти y' при $y = \dfrac{\pi}{2}$.

1.12. Знайти y'' із рівнянь:

1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $ax + by - xy = c$; 3) $\mathrm{arctg} y = x + y$.

§ 2. Диференціал функції

1. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x, тобто має у цій точці скінченну похідну y', то її приріст

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x,$$

де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Диференціалом функції (dy) називається головна частина $f'(x)\Delta x$ приросту Δy функції, лінійна відносно Δx.

Диференціалом функції називається добуток її похідної на диференціал незалежної змінної: $dy = f'(x)dx$.

2. Формула наближеного обчислення значень функції:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

*   *

*

⮘ **Задача 1.** Знайти диференціал функції $y=\sin^4 \ln 2x$.

Розв'язування. Спочатку знайдемо диференціал степеневої функції:

$$dy=4\sin^3 \ln 2x d(\sin \ln 2x).$$

Потім диференціюємо синус:

$$dy=4\sin^3 \ln 2x\cdot \cos \ln 2x d(\ln 2x).$$

Диференціюючи логарифм, одержимо:

$$dy=4\sin^3 \ln 2x\cdot \cos \ln 2x \frac{dx}{x}.$$

⮘ **Задача 2.** Використовуючи поняття диференціала, обчислити наближено $\ln 1{,}02$.

Розв'язування. Число $\ln 1{,}02$ є одним з значень функції $y=\ln x$. У цьому випадку формула наближеного значення матиме вигляд:

$$\ln(x_0+\Delta x)\approx \ln x_0+\frac{\Delta x}{x_0}.$$

Підставимо $x_0=1$, $\Delta x=0{,}02$.

$$\ln 1{,}02=\ln(1+0{,}02)\approx \ln 1+\frac{0{,}02}{1}=0{,}02.$$

Такий результат є хорошим наближенням, оскільки табличне значення $\ln 1{,}02=0{,}0198$.

⮘ **Задача 3.** Знайти наближене значення $\sqrt{1{,}06}$.

Розв'язування. Розглянемо функцію $y=\sqrt{x}$. Її похідна дорівнює $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, тому маємо:

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x_0}}.$$

Якщо підставити $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}06$, то одержимо:

$$\sqrt{1{,}06} \approx 1 + \frac{0{,}06}{2} = 1{,}03.$$

(Табличне значення $\sqrt{1{,}06} = 1{,}0296$).

*　　*

*

ВПРАВИ

2.1. Знайти диференціали функцій:

1) $y = \sqrt{1 + x^2}$;　　2) $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$;

3) $S = \dfrac{\sin t}{1 + \cos t}$;　　4) $y = (2x - 3)^4$;

5) $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$;　　6) $y = \sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}$;

7) $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x-6}{x+6}$;　　8) $y = \mathrm{arctg}\,e^{2x}$.

2.2. Знайти диференціали функцій:

1) $d\left(\dfrac{a}{x} + \mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}\right)$;　　2) $d\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)$;

3) $d(e^{x\sin 2x})$;　　4) $d(\mathrm{tg}\alpha - \alpha)$;

5) $d(\ln x - 1)x$;

6) $d\left(\dfrac{x}{2}\sqrt{49 - x^2} + \dfrac{49}{2}\arcsin\dfrac{x}{7}\right)$.

2.3. Знайти наближене значення функцій:

1) $y = x^3 + x^2$ при $x = 2{,}01$;

2) $y = x^3 - 2x$ при $x = 0{,}02$;

3) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ при $x = 3{,}1$;

4) $y = \sqrt{\dfrac{4-x}{1+x}}$ при $x = 3{,}02$.

2.4. За допомогою диференціала функції обчислити наближено:

1) $(1{,}03)^5$; 2) $\sqrt[3]{0{,}998}$; 3) $\sqrt[4]{267}$;

4) $\dfrac{1}{1{,}0005}$; 5) $\dfrac{1}{0{,}9988}$; 6) $\dfrac{37}{1{,}004}$;

7) $\dfrac{5}{0{,}9997}$; 8) $\sqrt{4{,}012}$; 9) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{1{,}002}}$;

10) $\sqrt{2520}$; 11) $\sqrt[3]{24}$; 12) $\sqrt[4]{15{,}8}$;

13) $\cos 59°48'$; 14) $\arcsin 0{,}51$; 15) $\mathrm{tg}\,46°$;

16) $\mathrm{arctg}\,0{,}98$ 17) $\sin 89°$; 18) $\ln 3{,}2$;

19) $\ln 8$; 20) $\lg 102$.

2.5. Обчислити $\lg 12{,}2$, якщо $\lg 2 = 0{,}30103$ і $\lg 3 = 0{,}47712$. Порівняти знайдений результат з табличним.

2.6. Обчислити наближено $\lg 89$, якщо $\lg 3 = 0{,}47712$.

2.7. Обчислити наближено $\arcsin 0{,}46$, якщо $\arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$.

2.8. Знайти з допомогою диференціала наближене значення приросту функції $y = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ при зміні x від $x_1 = \pi$ до $x_2 = \pi + 0{,}01$.

2.9. У правильній чотирикутній піраміді висотою $45\,см$ і стороною основи $50\,см$ збільшили сторону основи на $0{,}01\,см$. За допомогою диференціала визначити, на скільки збільшиться при цьому об'єм піраміди.

2.10. Знайти наближений приріст площі круга, якщо радіус його змінився з 30 до $30{,}2\,см$.

2.11. Ребро куба дорівнює $10\,см$. Знайти наближене значення приросту об'єму куба при збільшенні його ребра на $0{,}01\,см$.

2.12. Сфера з радіусом $20\,см$ була нагріта, в результаті чого радіус її збільшився на $0{,}01\,см$. Обчислити, на скільки збільшився об'єм сфери.

2.13. Сфера з радіусом $9\,см$ була нагріта, в результаті чого об'єм її збільшився на $32{,}4\pi\,см^3$. Знайти, на скільки збільшився її радіус.

2.14. Знайти наближене значення приросту площі квадрата, якщо сторону квадрата збільшити з 5 до $5{,}01\,см$.

2.15. Дано прямокутний паралелепіпед з квадратною основою, сторона основи якого дорівнює $20\,см$, а висота $10\,см$. Обчислити, на скільки збільшиться його об'єм, якщо сторону основи видовжити на $0{,}02\,см$.

2.16. Радіус основи прямого конуса дорівнює $15\,см$, а висота його – $20\,см$. Знайти, на скільки збільшиться його об'єм, якщо радіус основи збільшити на $0{,}04\,см$.

§ 3. Застосування похідної

1. Рівняння *дотичної* у точці $M_0(x_0; y_0)$ на кривій $y = f(x)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

2. Рівняння *нормалі* в точці $M_0(x_0; y_0)$ на кривій $y = f(x)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\text{, або}$$

$$x - x_0 + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

3. *Правило Лопіталя.* Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ – неперервні і мають похідні в околі точки $x = x_0$, а в точці x_0 дорівнюють нулю

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0;\ \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = 0\right)$$

або нескінченності. Тоді границя відношення функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо остання існує, тобто

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Тут $\varphi(x) \neq 0$, $\varphi'(x) \neq 0$ в околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

4. *Маржинальною вартістю* називається гранично можлива вартість в умовах хоча б постійного відтворення виробництва відповідної продукції. Аналогічно визначають *маржинальні доходи* та *прибуток*.

Позначимо через $V(x)$, $D(x)$, $P(x)$ – витрати, дохід і прибуток виробництва x одиниць виробленої і проданої продукції. Тоді визначимо наступні величини.

Маржинальна вартість:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x}.$$

Маржинальний дохід:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta D(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{D(x+\Delta x) - D(x)}{\Delta x}.$$

Маржинальний прибуток:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x+\Delta x) - P(x)}{\Delta x}.$$

5. Еластичність попиту Q відносно ціни p:

$$E_p(Q) = \lim_{\Delta p \to 0} \left(\frac{\Delta Q}{Q} : \frac{\Delta p}{p} \right) = \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp}.$$

Оскільки з підвищенням ціни на товар попит на нього знижується, то $\frac{dQ}{dp} < 0$, тому за еластичність беремо:

$$E_c = -E_p(Q) = -\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp}.$$

Якщо $E_c > 1$ (підвищенню ціни на 1% відповідає зниження попиту більше, ніж на 1%), то попит еластичний.

Якщо $E_c = 1$ – попит нейтральний.

Якщо $0 < E_c < 1$ – попит нееластичний.

6. Еластичність пропозиції $S(p)$ відносно ціни p:

$$E_p(S) = E_p = \lim_{\Delta p \to 0} \left(\frac{\Delta S}{S} : \frac{\Delta p}{p} \right) = \frac{p}{S} \frac{dS}{dp}.$$

*   *

*

∢ **Задача 1.** Знайти рівняння дотичної і нормалі кривої $y = x^3 + 2x$ у точці $M_0(1;3)$.

Розв’язування. Для знаходження рівняння дотичної і нормалі знайдемо значення похідної у точці M_0. Тобто

$$y' = 3x^2 + 2, \text{ а при } x = 1, \ \ y' = 5.$$

Таким чином, рівняння дотичної буде

$$y - 3 = 5(x - 1) \text{ або } 5x - y - 2 = 0.$$

Рівняння нормалі:

$$y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1) \text{ або } x + 5y - 16 = 0.$$

∢ **Задача 2.** Обчислити $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$.

Розв'язування. Безпосередньою за допомогою підстановки можна переконатися, що маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$.

Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}} = \lim_{x \to 1} \frac{-1 + \dfrac{1}{x}}{\dfrac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}}} = -\lim_{x \to 1} \frac{(1 - x)\sqrt{2x - x^2}}{2x(1 - x)} =$$

$$= -\lim_{x \to 1} \sqrt{2x - x^2} = -1.$$

∢ **Задача 3.** Обчислити $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$.

Розв'язування. У даному випадку використаємо правило Лопіталя два рази, оскільки дане відношення і відношення похідних призводить до невизначеності виду $\dfrac{\infty}{\infty}$. Отже,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

∢ **Задача 4.** Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з них дорівнює p, причому

$p=70-0{,}2x,$ а функція витрат $V(x)=2000+12x$ (у гривнях).

Знайти маржинальний прибуток, якщо виготовлено і продано 50 і 200 виробів.

Розв'язування. У нашому випадку функцією доходу є:

$$D(x)=x\cdot p=x(70-0{,}2x)=70x-0{,}2x^2\,.$$

Прибуток від виготовлення і продажу x виробів буде

$$P(x)=D(x)-V(x)=70x-0{,}2x^2-(2000+12x)=$$

$$=-0{,}2x^2+58x-2000.$$

Маржинальний прибуток для довільного x дорівнює

$$P'(x)=(-0{,}2x^2+58x-2000)'=-0{,}4x+58\,.$$

Звідси, при $x=50$ і $x=200$ маємо:

$$P'(50)=-0{,}4\cdot 50+58=-20+58=38\,,$$

$$P'(200)=-0{,}4\cdot 200+58=-80+58=-22\,.$$

Отже, при зростанні і продажу кількості виробів підприємство матиме збитки у розмірі 22 гривні за кожен виріб.

∢ **Задача 5.** Знайти еластичність попиту $Q=15-2p$ стосовно ціни $p=5$.

Розв'язування. Знайдемо еластичність попиту:

$$E_c=-\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}=-\frac{p}{Q}(-2)=\frac{2p}{Q}=\frac{2p}{15-2p}.$$

При $p=5$ маємо $E_c=2.$ Це означає, що попит є еластичним. При ціні 5 грн. підвищення її на 1% приведе до зниження попиту на 2%.

∢ **Задача 6.** Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{30}x^2+8x+300$, $p=40-\dfrac{1}{10}x$ - залежність між питомою ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати, за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, прибуток при цих умовах.

Розв'язування. Прибуток P визначається як різниця між доходами і сумарними витратами виробництва $P = D - V$.

В нас дохід - $D = p \cdot x = (40 - \frac{1}{10}x) \cdot x = 40x - \frac{1}{10}x^2$,

сумарні витрати - $V = \frac{1}{30}x^2 + 8x + 300$, прибуток -

$$P = 40x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{30}x^2 - 8x - 300 = -\frac{2}{15}x^2 + 32x - 300.$$

Знайдемо маржинальний прибуток - $P' = -4/15 \cdot x + 32$.

Максимальний прибуток буде тоді, коли $P' = 0$, оскільки $P'' = -4/15 < 0$.

При цьому $-4/15 \cdot x + 32 = 0$; $-4x + 480 = 0$; $x = 120$.

Отже, щоб прибуток був максимальним, треба випускати 120 од. продукції.

Маржинальні витрати - $V'(120) = \frac{1}{15} \cdot 120 + 8 = 16$,

сумарні витрати

$$V(120) = \frac{1}{30} \cdot 120^2 + 8 \cdot 120 + 300 = 480 + 960 + 300 = 1740 .$$

Максимальний прибуток

$$P(120) = -\frac{2}{15} \cdot 120^2 + 32 \cdot 120 - 300 = 1620 .$$

∢ **Задача 7.** При відомій функції попиту $Q = Q(p) = 7 - p$ і пропозиції $S=S(p)=p+1$, де Q і S-кількість товару; p-ціна товару.

Знайти:

а) рівноважну ціну;

б) еластичність попиту і пропозиції для рівноважної ціни;

в) зміну доходу при підвищенні ціни на 5% від рівноважної.

Розв'язування.

а) рівноважна ціна – ціна, при якій попит і пропозиція врівноважуються. Тому, рівноважна ціна визначається з рівняння $Q(p) = S(p)$; $7 - p = p + 1$; $p=3$ грн.

б) знаходимо еластичність попиту і пропозиції за формулами:

$$E_p(Q) = \frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}, \quad E_p(S) = \frac{p}{S}\frac{dS}{dp}.$$

В даному випадку

$$E_p(Q) = \frac{p}{7-p}\cdot(-1) = -\frac{p}{7-p}; \; E_p(S) = \frac{p}{S}\cdot 1 = \frac{p}{p+1}.$$

Для рівноважної ціни $p=3$ маємо $E_{p=3}(Q) = -0{,}75$; $E_{p=3}(S) = 0{,}75$.

Знайдені значення еластичності за абсолютною величиною менші за 1, тоді і попит, і пропозиція даного товару при рівноважній ціні нееластичні відносно ціни, тобто зміна ціни не призведе до різкої зміни попиту і пропозиції. Так, при підвищенні ціни на 1%, попит зменшиться на 0,75%, а пропозиція підвищиться на 0,75%.

в) при підвищенні ціни p на 5% від рівноважної, попит зменшиться на $5\cdot 0{,}75 = 3{,}75\%$, а дохід зросте на 3,75%.

ВПРАВИ

3.1. Написати рівняння дотичної і нормалі до параболи $y = 4 - x^2$ у точці перетину її з віссю OX (при $x > 0$) і побудувати параболу, дотичну і нормаль.

3.2. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 3x^2 - 5x + 4$ у точці $x = -1$, $y = 2$.

3.3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \frac{3}{x}$ у точці $M(1;3)$.

В задачах 3.4 – 3.7 написати рівняння дотичних до кривої і побудувати криві та дотичні:

3.4. до кривої $y = \frac{x^3}{3}$ у точці $x = -1$.

3.5. до кривої $y = \sin x$ у точці $x = \pi$.

3.6. до кривої $y = 4x - x^2$ у точках перетину з віссю OX.

3.7. до кривої $y^2 = 4 - x$ у точках перетину з віссю OY.

3.8. Знайти кути нахилу дотичної до кривої $y = x^2 - x + 3$ у точках $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$ та $x = 1$.

3.9. Знайти кутові коефіцієнти дотичних до параболи $y = x^2$ у точках $x = \pm 2$.

3.10. Знайти відстань від вершини параболи $y = x^2 - 4x + 5$ до дотичної, що проходить через точку перетину параболи з віссю OY.

Знайти границі:

3.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{\sin 2x}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x - x}{\sin x - x}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^3}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}5x}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi - x)\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x$.

3.23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

3.24. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$.

3.25. $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{2x})\mathrm{ctg}x$.

3.26. Тіло рухається по прямій OX за законом $x = \dfrac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$. Визначити швидкість і прискорення руху. В які моменти тіло змінює напрям руху?

3.27. Точка рухається прямолінійно так, що $v^2 = 2ax$, де v – швидкість, x – пройдений шлях і $a = const$. Визначити прискорення руху.

3.28. Для функції витрат підприємства (у гривнях) $V(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 40x + 1000$ знайти маржинальну вартість як функцію x і обчислити її значення, коли вироблено $x_1 = 50$, $x_2 = 100$ і $x_3 = 150$ одиниць продукції.

3.29. Функція витрат підприємства має вигляд $V(x) = 0{,}002x^3 - 0{,}1x^2 + 10x + 2000$ (тисяч гривень). Знайти маржинальну вартість при $x_1 = 50$, $x_2 = 100$ і $x_3 = 120$.

3.30. Визначити маржинальний дохід виробництва 300 одиниць виробів, якщо кількість виготовлених виробів можна знайти за формулою $x = 1000 - 100p$, де p – роздрібна вартість одного виробу.

3.31. Знайти маржинальний дохід підприємства, якщо кількість виготовлених і проданих виробів x та роздрібна вартість кожного виробу p зв’язані рівністю $x = 4000 - 2p$.

3.32. Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з них $p = 80 - 0{,}1x$, а функція витрат $V(x) = 5000 + 20x$ (у гривнях). Знайти маржинальний прибуток, якщо виготовлено та продано 150 і 400 виробів.

3.33. Валовий продукт держави змінюється з часом t за формулою $П = 100 + t$ (мільярдів гривень), а кількість населення змінюється за законом $P = 120 + 2t$ (мільйонів). Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

3.34. Витрати виробництва $K(x)$ залежать від обсягу продукції x: $K(x) = 15x - \frac{1}{10}x^2$. Визначити граничні витрати, якщо обсяг виробництва становить 5 і 10 одиниць.

3.35. Функція ціни залежно від попиту на певний товар можна визначити формулою $p = 20 - x$, де x – попит, p – ціна. Визначити граничну виручку, якщо попит становить 3 одиниці.

3.36. Функція прибутку фірми залежно від ціни p на одиницю виготовленої продукції характеризується формулою $f(p) = -20p^2 + 400p + 150$. Визначити граничний прибуток фірми залежно від ціни для значень $p = 5$, $p = 10$, $p = 12$.

3.37. Знайти еластичність попиту Q відносно ціни p, якщо $q = 30 - 4p$, $p = 5$.

3.38. Крива повних витрат має вигляд $K = \ln(3 + 5x)$. Визначити еластичність повних витрат для $x = 1$.

3.39. Функція пропозиції певного товару $S = \dfrac{10 + 4p^2}{1 + 12p}$.

Визначити еластичність пропозицій, якщо ціна $p = 3$.

3.40. Мале підприємство може виготовити і продати кожну одиницю виробу з прибутком 10 гривень і витратити x гривень на рекламу. Кількість проданих товарів виражають функцією $f(x) = 1000(1 - e^{-0{,}001x})$. Знайти швидкість зміни прибутку відносно зміни витрат на рекламу при $x = 1000$ і $x = 3000$.

3.41. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \dfrac{1}{12}x^2 + 5x + 300$, а $p = 38 - \dfrac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

3.42.Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією

$V = \frac{1}{14}x^2 + 5x + 300$, а $p = 30 - \frac{1}{11}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

3.43.Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \frac{1}{11}x^2 + 12x + 124$, а $p = 33 - \frac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

3.44. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \frac{1}{15}x^2 + 7x + 300$, а $p = 22 - \frac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

3.45. Відомі функції попиту $Q = Q(p)$ і пропозиції $S = S(p)$, де Q і S - кількість товару; p – ціна товару.

Знайти:

1) рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиція врівноважуються;

2) еластичність попиту і пропозиції для рівноважної ціни;

3) зміну доходу при підвищенні ціни на 7% від рівноважної.

$$а) Q(p) = \frac{47p+1}{47p-1}, S(p) = 47p + 2;$$

$$б) Q(p) = \frac{48p+2}{48p-2}, S(p) = 48p + 4;$$

$$в) Q(p)=\frac{49p+3}{49p-3}, S(p)=49p+6;$$

$$г) Q(p)=\frac{50p+4}{50p-4}, S(p)=50p+8.$$

§ 4. *Екстремум функції*

1. Функція $y=f(x)$ називається *зростаючою* (*спадною*) у проміжку $(a,\ b)$, якщо більшому значенню аргументу в цьому проміжку відповідає більше (менше) значення функції, тобто якщо з нерівності $x_2>x_1$ випливає нерівність $f(x_2)>f(x_1)$, то функція $f(x)$ – зростаюча, а якщо $f(x_2)<f(x_1)$, то функція $f(x)$ – спадна.

Якщо диференційована функція зростає (спадає) у деякому проміжку, то похідна цієї функції невід'ємна (недодатня) у цьому проміжку.

2. Функція $f(x)$ має при $x=x_0$ *максимум* (*мінімум*), якщо існує такий окіл точки x_0, для усіх точок x якого виконується нерівність:

$f(x_0)>f(x)$ для максимуму,

$f(x_0)<f(x)$ для мінімуму.

Узагальненим терміном понять максимуму і мінімуму є екстремум.

3. *Необхідна умова екстремуму функції.*

Якщо функція $y=f(x)$ диференційована в точці x_0 і має у цій точці екстремум, то її похідна при $x=x_0$ дорівнює нулю $(f'(x_0)=0)$ або не існує.

Корені рівняння $f'(x_0)=0$ і значення x, в яких $f'(x_0)$ не існує, називаються *критичними точками першого роду*.

4. *Перша достатня умова екстремуму функції.*

Якщо похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ перетворюється в нуль у точці x_0 або не існує і при переході через x_0 змінює свій знак, то функція $f(x)$ має у цій точці екстремум: максимум, якщо знак змінюється з “+” на “–”, і мінімум, якщо знак змінюється з “–” на “+” .

Друга достатня умова екстремуму функції.

Якщо в точці x_0 перша похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ перетворюється в нуль, а її друга похідна $f''(x)$ не дорівнює нулю, то в точці x_0 функція $f(x)$ має екстремум: максимум, якщо $f''(x_0) < 0$, і мінімум, якщо $f''(x_0) > 0$.

5. Якщо в усіх точках інтервалу (a, b) $f''(x_0) > 0$, то крива $y = f(x)$ є *угнутою* на цьому інтервалі; якщо $f''(x_0) < 0$ на деякому інтервалі, то крива $y = f(x)$ *опукла* на цьому інтервалі. Точка кривої, в якій крива переходить від угнутості до опуклості або навпаки, називається *точкою перегину* кривої.

6. *Необхідна умова існування точки перегину*.

Якщо функція $f(x)$ має неперервну другу похідну і $A(x_0, f(x_0))$ – точка перегину кривої $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ або не існує.

Значення x, при яких $f''(x) = 0$ або не існує, називаються *критичними точками другого роду*.

7. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має першу похідну $f'(x_0)$, а друга похідна $f''(x_0)$ у цій точці дорівнює нулю або не існує і при переході через x_0 змінює знак, то $A(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

8. *Загальна схема дослідження функції $y = f(x)$ і побудова її графіка*.

1. Знаходимо область визначення функції $f(x)$.
2. Знаходимо інтервали неперервності та точки розриву.
3. Знаходимо точки перетину кривої з осями

координат.

4. Досліджуємо функцію на парність або непарність (осьова або центральна симетрія графіка).

5. Досліджуємо функцію на періодичність.

6. Знаходимо асимптоти графіка функції (горизонтальні, вертикальні або похилі).

7. Знаходимо критичні точки першого роду, інтервали зростання і спадання функції.

8. Знаходимо точки екстремумів та екстремальні значення функції.

9. Знаходимо критичні точки другого роду, інтервали опуклості та угнутості графіка функції.

10. Знаходимо точки перегину і значення функції в точках перегину.

11. Згідно з результатами дослідження будуємо у системі координат графік функції.

9. Для знаходження найбільшого і найменшого значень функції на $[a,\ b]$ потрібно:

а) знайти всі критичні точки першого роду;

б) обчислити значення функції на кінцях відрізка, тобто знайти $f(a)$ і $f(b)$, а також у тих критичних точках, які належать відрізку;

в) із одержаних чисел вибрати найбільше і найменше значення функції на відрізку.

* *

*

∢ **Задача 1.** Дослідити функцію $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язування. Задана функція є дробово-раціональною, тому визначена на всій числовій осі, крім точки $x=-1$, в якій знаменник перетворюється в нуль, тобто

$$\mathrm{D}(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)\ .$$

Функція є неперервною у своїй області визначення, крім точки $x=-1$, де вона має розрив другого роду.

Оскільки $f(-x)=\dfrac{-x^3}{2(-x+1)^2}$, то $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq$ $\neq -f(x)$, тобто функція не характеризується властивостями парності чи непарності: не є ні парною, ні непарною. Графік не буде симетричним ні відносно осей координат, ні відносно початку координат.

Задана функція не є періодичною, оскільки

$$f(x+T)=\frac{(x+T)^3}{2(x+T+1)^2}\neq f(x).$$

Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат. При $x=0$ одержимо $y=0$, тобто $O(0;0)$. У цій точці графік перетинає дві координатні осі.

Знайдемо асимптоти графіка функції. Однобічні границі функції в точці розриву будуть

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty,\ \lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty.$$

Отже, пряма $x=-1$ є вертикальна асимптота. Горизонтальної асимптоти графік не має, оскільки

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\pm\infty.$$

Похилі асимптоти мають рівняння $y=kx+b$. Тут $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]$.

У нашому випадку:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2+4x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{4x+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{4}=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2}=-1.$$

Тобто $y=\dfrac{1}{2}x-1$ є асимптотою кривої.

Знайдемо інтервали зростання, спадання і екстремум функції. Похідна функції буде

$$y' = \frac{3x^2 \cdot 2(x+1)^2 - 4(x+1)\cdot x^3}{4(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$$

Похідна не існує в точці $x = -1$ і дорівнює нулю, коли $x^2(x+3) = 0$, тобто при $x = -3$ і $x = 0$.

Отже, критичними точками першого роду будуть лише точки $x = -3$ і $x = 0$, бо $x = -1$ не належить області визначення функції.

Складаємо таблицю з урахуванням точки розриву і критичних точок.

x	$(-\infty;-3)$	$x=-3$	$(-3;-1)$	$x=-1$	$(-1;0)$	$x=0$	$(0;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	не існує	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	не існує	$\nearrow$	Екстремуму немає	$\nearrow$

Отже, на інтервалах $(-\infty;-3)$, $(-1;0)$ і $(0;+\infty)$ функція зростає, а в інтервалі $(-3;-1)$ – спадає.

Екстремальним значенням функції буде

$$y_{\max} = f(-3) = -\frac{27}{8}.$$

Знайдемо інтервали опуклості та угнутості графіка, точку перегину.

Друга похідна дорівнює

$$y'' = \left(\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}\right)' = \left(\frac{x^3+3x^2}{2(x+1)^3}\right)' =$$

$$= \frac{(3x^2+6x)\cdot 2(x+1)^3 - 6(x+1)^2(x^3+3x^2)}{4(x+1)^6} =$$

$$= \frac{2(x+1)^2[(x+2)(x+1)-(x^2+3x)]}{4(x+1)^6} = \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

Усі можливі точки перегину знаходимо з рівняння $\frac{3x}{(x+1)^4} = 0$, тобто $x = 0$ є критичною точкою другого роду.

Складаємо таблицю з урахуванням точки розриву і $x=0$.

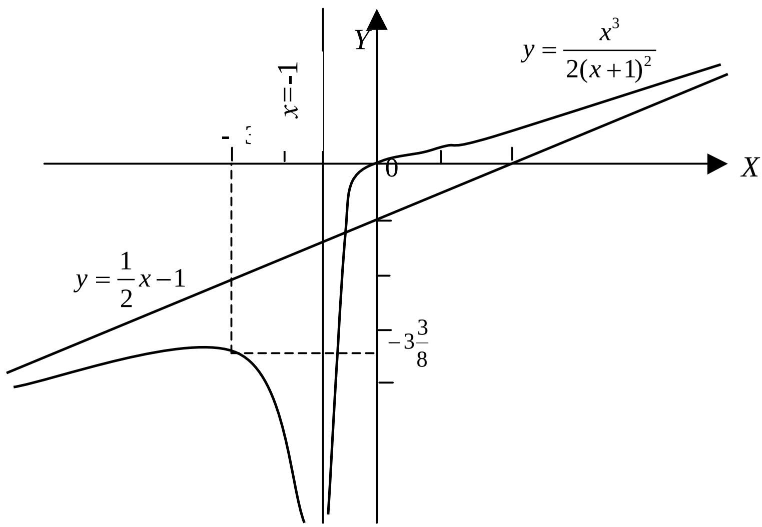
x	$(-\infty;-1)$	$x=-1$	$(-1;0)$	$x=0$	$(0;+\infty)$
$f''(x)$	–	не існує	–	0	+
$f(x)$	$\cap$	не існує	$\cap$	Точка перегину	$\cup$

Одержимо $f(-1)=-9,\ f(0)=1,\ f(5)=-99.$

Таким чином, найменшого значення функція досягає на правому кінці відрізка в точці $x=5$ і дорівнює –99, а найбільшого – у критичній точці $x=0$ і дорівнює 1.

Отже, на інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(-1;0)$ графік функції опуклий, а на інтервалі $(0;+\infty)$ – угнутий. Значення функції в точці перегину буде $y_{пер}=f(0)=0.$

За одержаними результатами будуємо графік заданої функції.



∢ **Задача 2.** Знайти найменше і найбільше значення функції $f(x) = x^3 - 9x^2 + 1$ на відрізку $[-1;5]$.

Розв'язування. Знайдемо похідну заданої функції $f'(x) = 3x^2 - 18x$. Прирівнюючи до нуля похідну $3x^2 - 18x = 0$, $3x(x-6) = 0$, знаходимо дві критичні точки: $x = 0$ і $x = 6$. Для знаходження найменшого і найбільшого значень функції на заданому відрізку обчислюємо її значення на кінцях відрізка і в точці $x = 0$, оскільки $x = 6$ не належить відрізку $[-1;5]$.

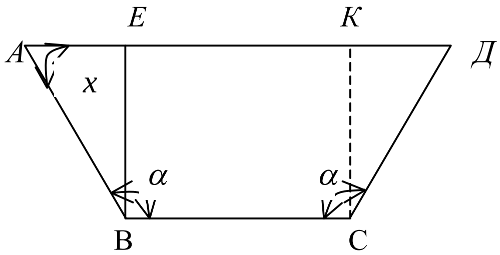
$$f(-1) = -10; \quad f_{найм.}(5) = -99; \quad f_{найб.}(0) = 1.$$

∢ **Задача 3.** Під яким кутом α потрібно збити три однакових дошки, щоб одержати водонапійний жолоб найбільшої місткості.

Розв'язування. Найбільшу місткість буде мати жолоб тоді, коли поперечний переріз буде найбільшим. У цій задачі поперечний переріз має форму рівносторонньої трапеції.

Позначимо через $x = \angle BAД$ і врахуємо, що ширина кожної дошки дорівнює $a (AB = BC = CД = a)$. Тоді висота трапеції $BE = \alpha \sin x$. Окрім цього, $AE = a \cdot \cos x$, тому

$$AД = AE + EK + KД = a\cos x + a + a\cos x = a + 2a\cos x.$$



Площа трапеції дорівнює

$$S(x) = \frac{BC + AД}{2} \cdot BE = \frac{a + a + 2a\cos x}{2} \cdot a\sin x = a^2(1 + \cos x)\sin x$$

$(0 \le x \le \pi/2)$.

Похідна функції

$$S'(x) = a^2(-\sin^2 x + \cos x(1+\cos x)) = a^2(-\sin^2 x +$$
$$+\cos x + \cos^2 x) = a^2(1+\cos x)(2\cos x - 1).$$

Оскільки похідна на інтервалі $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ перетворюється в нуль тільки при $x = \dfrac{\pi}{3}$, а $S(0) = 0$, $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = a^2$, $S(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, то S приймає найбільше значення при $x = \dfrac{\pi}{3}$, тобто при $\alpha = 120°$.

Крім цього,
$$S'' = a^2(-2\sin x\cos x - \sin x - 2\cos x \sin x) = -a^2 \sin x(4\cos x + 1).$$

При $x = \dfrac{\pi}{3}$ маємо $S'' = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, тобто $S'' < 0$. Це означає, що при $x = \dfrac{\pi}{3}$ функція $S(x)$ досягає максимуму. Отже, якщо три дошки збити під кутом $\alpha = 120°$, то водонапійний жолоб матиме найбільшу місткість.

*   *

*

ВПРАВИ

Дослідити зростання, спадання і екстремуми функцій:

4.1. $y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$.

4.2. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$.

4.3. $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^2}$.

4.4. $y = x + \cos 2x$ (в інтервалі $(0; \pi)$).

4.5. $y = x - \mathrm{arctg} 2x$.

4.6. $y = \dfrac{x}{x-2}$.

4.7. $y = \dfrac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$.

4.8. $y = 2x^2 - \ln x$.

4.9. $y = x^3 - 3x + 4$

4.10. $y = 2x^2 - x^4$.

Знайти екстремуми функцій і побудувати графіки:

4.11. $y=\frac{x^3}{3}+x^2$ 4.12. $y=x^3+6x^2+9x$.

4.13. $y=\frac{x^2}{x-2}$. 4.14. $y=x^3+\frac{x^4}{4}$.

4.15. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$. 4.16. $y=\frac{3-x^2}{x+2}$.

4.17. $y=x+\frac{1}{x}$. 4.18. $y=(1-x^2)(1-x^3)$.

4.19. $y=2\sin x+\cos 2x$ (в інтервалі $(0;\pi)$).

4.20. $y=2x+\mathrm{ctg}x$ (в інтервалі $(0;\pi)$).

Знайти асимптоти графіка функцій:

4.21. $y=\frac{x^2-6x+3}{x-3}$. 4.22. $y=\frac{1}{x^2-4x+5}$.

4.23. $y=\frac{x^2}{2(1-x)}$.

Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину функцій:

4.24. $y=(x+3)^{-1}$. 4.25. $y=x^3-5x^2+3x-5$.

4.26. $y=3x^5-5x^4+4$.

Дослідити функції і побудувати їх графіки:

4.27. $y=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$. 4.28. $y=x+\frac{4}{x+2}$.

4.29. $y=\frac{x^4}{x^3-1}$. 4.30. $y=\frac{x+1}{x-5}$.

4.31. $y=\frac{x^2-4}{x^2+1}$. 4.32. $y=\frac{x^2+4}{x^2-4}$.

Визначити найбільше і найменше значення функцій на відрізку $[a;b]$:

4.33. $y = x^3 - 3x^2 + 1,$ $\qquad [-1;4].$

4.34. $y = (x^2 - 1)^2,$ $\qquad [\frac{1}{2};2].$

4.35. $y = \dfrac{4 - x^2}{4 + x^2},$ $\qquad [-1;3].$

4.36. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1,$ $\qquad [-1;5].$

4.37. $y = \dfrac{x + 6}{x^2 + 13},$ $\qquad [-5;5].$

4.38. $y = 2\sin x + \cos 2x,$ $\qquad [0;\pi].$

4.39. $y = x - \ln(1 + x),$ $\qquad [-\frac{1}{2};1].$

4.40. $y = x - \mathrm{arctg} x,$ $\qquad [0;1].$

4.41. Сіткою довжиною $200\,\text{м}$ потрібно обгородити прилягаючу до будинку прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайти розміри прямокутної ділянки.

4.42. Визначити розміри відкритого басейну об'ємом $32\,\text{м}^3$ з квадратним дном так, щоб на облицювання його стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.

4.43. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу – $18\,\text{м}$. При якому радіусі півкруга площа перерізу буде найбільшою?

4.44. Із квадратних бляшаних листів зі стороною 60 см виготовляють коробки без кришок, вирізаючи по кутах чотири квадратики і загинаючи смужки, що залишились. При яких розмірах вирізаних квадратиків виготовлять коробки найбільшого об'єму?

4.45. Із відходів основного виду виробництва, якими є бляшані листи прямокутної форми з сторонами $80\,\text{см}$ і $50\,\text{см}$, роблять відкриті зверху ящики найбільшого об'єму, вирізавши по кутах рівні квадратики і загнувши бляху, щоб отримати бічні стінки. Якої довжини мають бути сторони вирізаних квадратиків?

4.46. Прямокутну земельну ділянку площею $90000\,\text{м}^2$ потрібно обкопати вздовж усієї межі ровом. Які повинні бути розміри ділянки, щоб витратити мінімум засобів на копання рова?

4.47. Потрібно побудувати канал, що має у перерізі форму рівнобедреної трапеції, основа і бічні сторони якої мають по $8\,\text{м}$. Яка повинна бути ширина каналу, щоб він уміщав найбільшу кількість води?

4.48. Які мають бути розміри циліндричної посудини об'ємом $\pi\,\text{м}^3$, відкритої зверху, щоб на її виготовлення пішло найменше матеріалу?

4.49. Бак для перевезення рідини має форму циліндра об'ємом V. Якими мають бути розміри циліндра, щоб кількість матеріалу, використаного для його виготовлення, була найменшою?

4.50. Довести, що з усіх прямокутних земельних ділянок зі заданим периметром $2p$ найбільшу площу має квадратна.

4.51. Довести, що з усіх прямокутних земельних ділянок заданої площі a^2, квадратна має найменший периметр.

4.52. Залізний стержень довжиною l зігнутий у прямокутник. Які розміри цього прямокутника, якщо площа його найбільша?

4.53. Бак об'ємом $4\,\text{м}^3$, що має форму паралелепіпеда з квадратною основою і відкритий зверху, потрібно покрити оловом. Якими мають бути розміри бака, щоб на його покриття пішла найменша кількість матеріалу?

4.54. Полотняний намет об'ємом V має форму прямого кругового конуса. При якому співвідношенні висоти конуса до радіуса основи потрібна найменша кількість полотна для намету?

4.55. Бічні сторони і менша сторона земельної ділянки трапецієподібної форми дорівнюють $16\,\text{м}$ кожна. Знайти її більшу основу, щоб площа була найбільшою.

4.56. Земельну ділянку прямокутної форми, розміщену вздовж прямого берега річки, потрібно обгородити з трьох сторін. Обчислити мінімальну вартість огорожі, якщо її погонний метр коштує 10 гривень, а площа земельної ділянки становить $0{,}45\,\text{га}$.

4.57. Потрібно покрити фарбою зовнішню поверхню циліндричного бака об'ємом $785\,\text{м}^3$. Які повинні бути розміри бака, щоб витратити мінімальну кількість фарби? Обчислити вартість фарбування бака, якщо вартість фарби та фарбування $1\,\text{м}^2$ коштує $60\,\text{коп.}$

4.58. Потрібно виготовити відкритий циліндричний бак об'ємом V. Матеріал, з якого виготовляють дно, коштує p_1 гривень за $1\,\text{м}^2$, а вартість матеріалу бічної поверхні – p_2 за $1\,\text{м}^2$. При якому співвідношенні радіуса дна до висоти бака витрати на матеріал будуть найменшими?

4.59. Кількість хворих під час епідемії грипу в 2006 році змінювалась з часом t (вимірюється днями) з початку вакцинації населення за законом

$$P(t) = \frac{200t}{t^2 + 100}.$$

Знайти час максимуму захворювань, інтервали зростання і спадання епідемії.

4.60. Промислова продукція держави протягом t років після 2000 року змінювалась за законом $y = 500(1 + 215e^{-0{,}07t})^{-1}$. Коли випуск продукції зростав, а коли – спадав?

4.61. Зміна населення держави з часом t здійснюється за законом $P(t) = \dfrac{A}{1 + Be^{-t}}$, де A і B – постійні величини. Чому дорівнює максимальна швидкість зміни населення?

4.62. Знайти еластичність попиту і вказати стан доходу відповідного підприємства при $p = 5$ і $p = 15$, якщо дано рівняння кількості виготовлених і проданих виробів x з вартістю кожного виробу p.

а) $x = 100(5 - p)$, б) $x = 50(4 - \sqrt{p})$, с) $x = 200\sqrt{9 - p}$.

4.63. Завод виробляє x одиниць продукції на місяць, а сумарні витрати виробництва становлять $K = \dfrac{1}{30}x^2 + 20x + 500.$

Залежність між питомою ціною p і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати за цією ціною, становить $p = 30 - \dfrac{1}{10}x.$ За яких умов прибуток буде максимальним?

4.64. Функція середніх витрат – $\varPi(x) = 4x$, а функція попиту – $p = 12 - 2x$. При якому обсязі виробництва прибуток буде найбільшим?

4.65. Крива повних витрат – $K = x^3 - 4x^2 + 10x$. При якому обсязі виробництва (x) середні витрати будуть мінімальними?

4.66. Витрати виробництва K залежать від обсягу продукції x за формулою $K(x) = -0{,}05x^3 + 3375x + 200$. При яких значеннях x витрати виробництва почнуть спадати?

4.67. Підводний телеграфний кабель складається із серцевини, виготовленої з мідного дроту, та оболонки, виготовленої з непровідного матеріалу. Нехай x - відношення радіуса серцевини до товщини оболонки. Тоді швидкість сигналізації пропорційна до $x^2 \ln\dfrac{1}{x}$. Показати, що найбільша швидкість досягається, коли $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

4.68. Потрібно обгородити парканом прямокутну ділянку землі площею $216\,\text{м}^2$, а далі поділити її на дві рівні частини стіною, загородкою, паралельною одній зі сторін цієї ділянки. Якої довжини слід узяти сторони ділянки, щоб на цю споруду пішла найменша кількість матеріалу?

4.69. Потрібно обгородити парканом прямокутну ділянку даної площі. Якщо частину вже зведеної кам'яної стіни взяти за одну зі сторін паркана, то якими мають бути розміри ділянки, щоб будівництво обійшлося найдешевше?

4.70. Які найбільш економічно вигідні розміри циліндричного парового котла даної місткості?

4.71. Потрібно побудувати намет у формі правильної чотирикутної піраміди. Знайти відношення висоти намета до сторони основи, за якою при даній площині бічної поверхні об'єм намета є найбільшим.

4.72. Довжина і периметр поперечного перерізу поштової посилки у сумі мають становити 60 см. Знайти найбільший об'єм посилок:

1) якщо посилка має форму прямокутного паралелепіпеда з квадратним поперечним перерізом;
2) посилка має форму циліндра.

4.73 Квітник прямокутної форми, який прилягає до будинку, потрібно огородити плитами (є 200 плит довжиною 0,5 м). Якими мають бути розміри квітника, щоб його площа була найбільшою?

4.74. Знайти найбільший об'єм циліндричної посудини, в якої повна поверхня дорівнює 30 м^2.

4.75. Канал, ширина якого 27 м, під прямим кутом впадає в другий канал, шириною 64 м. Якої найбільшої довжини стовбур можна сплавити цією системою каналів?

4.76.Якими мають бути розміри ящика з кришкою місткістю V= 1764 $см^3$, якщо сторони основи відносяться, як 3: 4, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу?

4.77.Довжина відкритого басейну об'ємом 288 $м^3$ вдвічі більша за ширину. Якими мають бути розміри басейну, щоб на його облицювання пішло найменше матеріалу?

4.78.На сторінці друкований текст повинен займати S $см^2$. Верхнє і нижнє поля мають бути по a см, праве і ліве – по b см. При яких розмірах сторінки на текст піде найменше паперу.

4.79.Треба зробити конічну лійку з твірною, що дорівнює 20 см. Якою має бути висота лійки, щоб її об'єм був найбільшим ?

4.80.Знайти розміри такого циліндричного бака, який би мав найбільший об'єм при заданій повній поверхні S.

4.81.Знайти найбільший об'єм купола конусної форми з твірною, рівною l .

РОЗДІЛ 7. **ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ**

§ 1. Диференціювання функцій

1. Якщо змінна величина z залежить від n незалежних змінних x, y, t, ..., u, v, то вона називається *функцією* цих змінних і позначається:

$$z = f(x, y, t, ..., u, v).$$

Сукупність усіх числових значень, які можуть приймати аргументи x, y, t, ..., u, v, і при яких функція z має певні дійсні значення, називається *областю визначення* функції.

Лінією рівня функцій двох змінних $z = f(x, y)$ називається сукупність усіх точок на площині XOY, для яких виконується умова $f(x, y) = C$.

2. Частинний приріст функції z по змінній x:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Частинний приріст функції z по змінній y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

3. *Частинною похідною* від функції $z = f(x, y)$ по незалежній змінній x називається похідна:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = z'_x = f'_x(x, y),$$

знайдена при сталому значенні y.

Частинною похідною від функції $z = f(x, y)$ по незалежній змінній y називається похідна:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = z'_y = f'_y(x, y),$$

знайдена при сталому значенні x.

4. *Повним диференціалом* функції $z = f(x, y)$ називається головна, лінійна відносно Δx і Δy, частина повного приросту функції

$$dz = df(x, y) = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y,$$

або

$$dz = df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

5. Формула для знаходження наближеного значення функції:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

6. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована, то *похідна за напрямом* $\vec{l}$ обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

де α – кут, утворений вектором $\vec{l}$ і віссю OX.

Для функції $u = f(x, y, z)$ похідна за напрямом $\vec{l}$ буде:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Тут $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

7. *Градієнтом* скалярної функції $z = f(x, y)$ називається вектор, проекції якого на координатних осях OX і OY відповідно дорівнюють $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, тобто:

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Для функції $u = f(x, y, z)$ маємо

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

8. Виробнича функція Кобба-Дугласа:

$y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, де A, α, β - невід’ємні константи, причому $\alpha + \beta \le 1$;

K – об’єм фондів у вартісному, або натуральному виражені;

L – об’єм трудових ресурсів – число працівників, число людино-днів;

y- випуск продукції у вартісному, або натуральному вигляді;

α - еластичність випуску по фондах;

β - еластичність випуску по праці.

Величина $l = \dfrac{y}{L}$ називається *середньою продуктивністю праці* (кількість продукції, виробленої одним робітником).

Величина $k = \dfrac{y}{K}$ називається *середньою фондовіддачею* (кількість продукції, виробленої одним верстатом).

Величина $f = \dfrac{K}{L}$ називається *середньою фондоозброєністю* (вартість фондів, які припадають на одиницю трудових ресурсів).

9. Рівняння обміну Фішера:

$$MV = PY.$$

Тут:

M - загальна кількість грошей, наявних в обороті;

V - швидкість їх обороту (скільки раз кожна гривня бере участь в розрахунках в середньому за рік);

P - рівень цін (середнє зважене значення цін готових товарів і послуг , що визначені відносно базового показника, прийнятого за одиницю);

Y - національний продукт або дохід (*національний продукт* – це всі готові товари і послуги, що виготовлені в економічній системі у вартісному виразі; *національний дохід* – це всі виплати, одержані домашніми господарствами: заробітна плата, рента, прибуток; національний продукт і національний дохід чисельно рівні).

*　　*

*

∢ **Задача 1.** Знайти частинні похідні функції $z=5x^2+3xy-4y^2$.

Розв'язування. Функція z є функцією двох змінних x і y. При знаходженні частинної похідної функції z по незалежній змінній x другу незалежну змінну потрібно розглядати як постійну. Тому $\frac{\partial z}{\partial x}=10x+3y$. Тут похідна по x від $4y^2$ дорівнює нулю, як похідна від сталої величини. При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ незалежну змінну x розглядають як постійну величину, а тому $\frac{\partial z}{\partial y}=3x-8y$.

∢ **Задача 2.** Знайти повний диференціал функції $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

Розв'язування. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Тому

$$dz=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}dy.$$

∢ **Задача 3.** Обчислити $(1{,}03)^{3{,}001}$.

Розв'язування. Оскільки $1^3=1$, то обчислимо, коли основа степеня 1 одержить приріст 0,03, а показник степеня 3 – приріст 0,001. Відповідно до функції $f(x,y)=x^y$ використаємо формулу знаходження наближеного значення функції, тобто в нашому випадку

$$(x_0+\Delta x)^{y_0+\Delta y} \approx {x_0}^{y_0} + y_0 {x_0}^{y_0-1}\Delta x + {x_0}^{y_0}\ln x_0 \Delta y .$$

У нас $f'_x(x,y)=yx^{y-1}$, $\quad f'_y(x,y)=x^y \ln x$;

$$x_0{=}1,\ y_0{=}3,\ \Delta x{=}0{,}03,\ \Delta y{=}0{,}001,$$

а тому

$$(1{,}03)^{3{,}001} \approx 1^3+3\cdot 1^{3-1}\cdot 0{,}03+1^3\ln 1\cdot 0{,}001=1+0{,}09=1{,}09,$$

оскільки $\ln 1=0$.

⮜ **Задача 4.** Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=x^2y^2+x^3y$.

Розв'язування. Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2+3x^2y, \quad z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y+x^3.$$

Диференціюючи одержані результати ще раз, знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2xy^2+3x^2y)'_x=2y^2+6xy,$$

$$z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(2xy^2+3x^2y)'_y=4xy+3x^2,$$

$$z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=(2x^2y+x^3)_x=4xy+3x^2,$$

$$z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(2x^2y+x^3)_y=2x^2.$$

Тут мішані частинні похідні другого порядку рівні між собою $(z''_{xy}=z''_{yx})$.

⮜ **Задача 5.** Знайти величину найбільшої швидкості зміни функції $z=4x^2y-2xy^3$ у точці $M_0(2;1)$.

Розв'язування. Частинні похідні першого порядку будуть:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8xy - 2y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 - 6xy^2.$$

Тому $\operatorname{grad} z = (8xy - 2y^3)\vec{i} + (4x^2 - 6xy^2)\vec{j}$. У точці $M_0(2;1)$ маємо $\operatorname{grad} z = (8\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 1^3)\vec{i} + (4\cdot 2^2 - 6\cdot 2\cdot 1^2)\vec{j} = 14\vec{i} + 4\vec{j}$.

Величина найбільшої швидкості зміни даної функції в точці M_0 дорівнює

$$|\operatorname{grad} z| = \sqrt{14^2 + 4^2} = \sqrt{212} \approx 14{,}6.$$

∢ **Задача 6.** Нехай виробнича функція визначається функцією Кобба-Дугласа. Щоб збільшити випуск продукції на 5%, треба збільшити фонди на 10% або чисельність робітників на 15%. В 2006 році один робітник за місяць виготовляв продукції на 2000 грн., а всього робітників було 1000. Основні фонди оцінювались в 4 млн. грн. Записати виробничу функцію, величину середньої фондовіддачі і середньої продуктивності праці, еластичність випуску по праці і по фондах.

Розв'язування. Еластичність випуску по праці $\beta = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, а по фондах $\alpha = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Отже, функція Кобба-Дугласа має вигляд: $y = AK^{1/2}L^{1/3}$,

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$. Підставляючи інші величини, одержимо:

$2000\cdot 1000 = A\cdot(4\cdot 10^6)^{1/2}(1000)^{1/3}$, тобто

$2000\cdot 1000 = A\cdot 2\cdot 10^3\cdot 10$; $A = \frac{2000\cdot 1000}{2000\cdot 10} = 100.$

Отже, шукана виробнича функція $y = 100\cdot K^{1/2}\cdot L^{1/3}$. Середня фондовіддача дорівнює $k = \frac{y}{K} = \frac{2000\cdot 1000}{4000000} = \frac{1}{2}$, а середня продуктивність $l = \frac{y}{L} = \frac{2000 \cdot 1000}{1000} = 2000,$ $E_K(y) = \alpha = 1/2$,

$E_L(y) = \beta = \frac{1}{3}$.

≺ **Задача 7.** Економіка країни характеризується наступними показниками :

а) реально-товарна маса дорівнює 600 млрд.грн.;

б) час обороту гривні дорівнює 4 місяці;

в) рівень дефляції 2%.

Визначити обсяг грошової маси.

Розв'язування. Із рівняння обміну Фішера $MV = PY$ знаходимо $M = \frac{PY}{V}$. Використавши дані із умови задачі, одержимо:

$P = \frac{100\% - 2\%}{100\%} = 0{,}98$, $V = \frac{t_{const}}{t_{обороту}} = \frac{12}{4} = 3$,

$M = \frac{0{,}98 \cdot 6000 \cdot 10^9}{3} = 196 \cdot 10^9$ грн..

ВПРАВИ

Знайти області визначення функцій і побудувати їх геометричне зображення:

1.1. $z = x + y$.

1.2. $z = \frac{4}{x+y}$.

1.3. $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}}$.

1.4. $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

1.5. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

1.6. $z = \ln(4x^2 + 9y^2 - 36)$.

Знайти лінії рівня функцій:

1.7. $z = x^2 + y^2$.

1.8. $z = 2x + y$.

1.9. $z=\frac{\sqrt{x}}{y}$. 1.10. $z=\frac{x}{y}$.

Знайти частинні похідні функцій:

1.11. $z=x^3+3x^2y-y^3$. 1.12. $z=\frac{y}{x}$.

1.13. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. 1.14. $z=\frac{xy}{x-y}$.

1.15. $z=\frac{x}{3y-2x}$. 1.16. $u=\ln\sin(x-2t)$.

1.17. $z=e^{(x^3+y^2)^2}$. 1.18. $u=\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}$.

1.19. $u=2y\sqrt{x}+3y^2\sqrt[3]{z^2}$. 1.20. $u=e^{x/y}+e^{-z/y}$.

1.21. Довести, що $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$, коли $z=\ln(e^x+e^y)$.

1.22. Довести, що $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$, коли $z=\ln(x^2+$
$+xy+y^2)$.

1.23. Довести, що $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{2}$, коли $z=\sqrt{x}\cdot\sin\frac{y}{x}$.

1.24. Довести, що $\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial u}{\partial y}=2u$, коли $u=x^y$.

1.25. Довести, що $2x\frac{\partial u}{\partial x}+t\frac{\partial u}{\partial t}=0$, коли $u=e^{x/t^2}$.

Знайти повні диференціали функцій:

1.26. $z=\frac{xy}{x-y}$. 1.27. $z=\frac{y}{x}$.

1.28. $z=x^3+y^3-3axy$. 1.29. $z=\cos(xy)$.

1.30. $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$.

1.31. Обчислити наближену зміну функції $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, якщо x змінюється від 2 до 2,1, а y – від 3 до 2,5.

1.32. При деформації циліндра його радіус R збільшився з $20\,\text{см}$ до $20{,}5\,\text{см}$, а висота H зменшилась з $100\,\text{см}$ до $98\,\text{см}$. Знайти наближену зміну об’єму V за формулою $\Delta V \approx dV$.

1.33. При деформації конуса його радіус R збільшився з $30\,\text{см}$ до $30{,}1\,\text{см}$, а висота H зменшилась з $60\,\text{см}$ до $59{,}5\,\text{см}$. Знайти наближену зміну об’єму V за формулою $\Delta V \approx dV$.

1.34. Обчислити наближено $1{,}02^{4{,}05}$, виходячи зі значення функції $z = x^y$ при $x = 1,\ y = 4$.

1.35. Обчислити наближено $\ln(0{,}09^3 + 0{,}99^3)$, виходячи зі значення функції $z = \ln(x^3 + y^3)$ при $x = 0$, $y = 1$.

1.36. Обчислити наближено $\sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2}$, виходячи зі значення функції $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ при $x = 1,\ y = 0$.

1.37. Обчислити наближено $\sqrt{5e^{0{,}02} + 2{,}03^2}$, виходячи зі значення функції $z = \sqrt{5e^x + y^2}$ при $x = 0,\ y = 2$.

Знайти частинні похідні другого порядку функцій:

1.38. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

1.39. $z = \dfrac{x^2}{1 - 2y}$.

1.40. Знайти частинні похідні третього порядку функції $z = x^3 + x^2 y + y^3$.

1.41. Довести, якщо $u = \operatorname{arctg}(2x - t)$, то $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$.

1.42. Довести, якщо $z=\dfrac{xy}{x-y}$, то $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ $=\dfrac{2}{x-y}$.

1.43. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. Довести, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

1.44. $z=2\cos^2(x-\dfrac{t}{2})$. Довести, що $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=0.$

1.45. Нехай $z=4-x^2-y^2$. Побудувати лінії рівня і знайти grad z у точці $A(1;\,2)$.

1.46. Для функції $z=\dfrac{4}{x^2+y^2}$ побудувати лінії рівня і знайти grad z у точці $(-1;\,2)$ та обчислити $|\text{grad } z|$.

1.47. Нехай $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Знайти grad u і його довжину.

1.48. Знайти похідну функції $u=x^2+y^2+z^2$ у точці $(1;1;1)$ за напрямом $\vec{l}\{\cos 45^\circ;\cos 60^\circ;\cos 60^\circ\}$, знайти grad u в цій же точці та його довжину.

Для заданої функції знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт у точці M_0:

1.49. $u=\ln\sqrt{2x^2+2y^2}$, $\vec{l}\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$, $M_0(1;\,-1)$.

1.50. $z=x^3+y^3-3xy$, $\vec{l}\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, $M_0(2;1)$.

1.51. Обсяг витрат на продаж нового продукту x

залежить від часу t (у тижнях) та витрат A (у гривнях) підприємства на рекламу і характеризується залежністю:

$$x = 200(5 - e^{-0,002A})(1 - e^{-t}).$$

Знайти $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial x}{\partial A}$ і вказати економічний зміст цих похідних при $t = 1$, $A = 400$.

1.52. Відкритий циліндр радіусом r і висотою h виготовлено з матеріалу вартістю 20 грн. за м^2. Встановити можливу вартість циліндра V як функцію r і h. З якою швидкістю змінюється вартість r або h?

1.53. Закономірність втрати теплоти внаслідок конвекції має вигляд $y = C(T - T_0)V^{\frac{1}{3}}$, де T – температура тіла, T_0 – температура зовнішнього середовища, V – швидкість вітру, C – довільна стала. Знайти: y'_T, y'_{T_0}, y'_V і вказати їх зміст.

1.54. Задана функція попиту на товар A:

$$X_A = 500 + 3P_B - 6P_A^2,$$

де P_A і P_B – вартість одиниці товарів A і B відповідно. Визначити еластичність функції попиту відносно P_A і P_B, коли $P_A = 5$, $P_B = 30$.

1.55.Нехай виробнича функція визначається функцією Кобба-Дугласа.

З метою збільшення випуску продукції на $a\%$, необхідно збільшити фонди на $b\%$, або чисельність працівників на $c\%$.
В 2006 році один працівник протягом місяця виготовляв продукції на $M = 3000$*грн*, а всього робітників L. Основні фонди оцінюються в K *млн.грн.* Записати виробничу функцію y, величину середньої фондовіддачі і середньої продуктивності праці, еластичність випуску по праці $E_L(y)$ і по фондах $E_K(y)$.
а) $a = 23\%, b = 46\%, c = 69\%, L = 125, K = 5$*млн.грн.*

б) $a = \dfrac{47}{2}\%, b = 47\%, c = \dfrac{148}{2}\%, L = 250, K = 9$ *млн.грн.*

в) $a = 24\%, b = 48\%, c = 72\%, L = 375, K = 9$ *млн.грн.*

г) $a = \dfrac{49}{2}\%, b = 49\%, c = \dfrac{147}{2}\%, L = 500, K = 9$ *млн.грн.*

д) $a = 25\%, b = 50\%, c = 75\%, L = 625, K = 9$ *млн.грн.*

1.56.Економіка країни характеризується показниками: а) реально-товарна маса рівна 8000 млрд.грн.; ,) час обороту гривні 6 місяців; в) рівень дефляції 3 %. Визначити обсяг грошової маси.

§ 2. Екстремум функції

1. *Необхідні умови існування екстремуму.*

Якщо функція $f = (x, y)$ має екстремум у точці $M_0(x_0; y_0)$, то її частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

або не існують.

2. *Достатні умови існування екстремуму.*

Нехай у точці $M_0(x_0, y_0)$ виконуються необхідні умови існування екстремуму та існують неперервні частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2} = C.$$

Розглянемо число $D = AC - B^2$.

Тоді:

1) функція $z = f(x, y)$ має максимум, якщо $D > 0, \ A < 0$;

2) функція $z = f(x, y)$ має мінімум, якщо $D > 0, \ A > 0$;

3) функція $z = f(x, y)$ не має екстремуму, якщо $D < 0$;

4) якщо $D = 0$, тоді екстремум в точці $M_0(x_0; y_0)$ може існувати, а може і не існувати.

3. *Умовним екстремумом* функції $z = f(x, y)$ називається екстремум цієї функції, досягнутий при умові, коли змінні x і y пов'язані рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ (рівняння зв'язки).

Для знаходження умовного екстремуму методом Лагранжа потрібно:

1) записати функцію Лагранжа:

$$U(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y);$$

2) знайти критичні точки $M_k(x_k, y_k, \lambda_k)$ функції Лагранжа, використовуючи необхідні умови існування екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases};$$

3) перевірити в кожній критичній точці достатні умови існування екстремуму:

а) якщо в точці $M_k(x_k, y_k, \lambda_k)$ визначник третього порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \varphi'_x(M_k) & \varphi'_y(M_k) \\ \varphi'_x(M_k) & U''_{xx}(M_k) & U''_{xy}(M_k) \\ \varphi'_y(M_k) & U''_{xy}(M_k) & U''_{yy}(M_k) \end{vmatrix}$ додатний, то точка M_k є точкою максимуму:

$$z_{\max} = f(M_k) = f(x_k, y_k);$$

б) якщо визначник $\Delta < 0$, тоді точка M_k є точкою мінімуму:

$$z_{\min} = f(M_k) = f(x_k, y_k).$$

а) лінійна залежність: $y = ax + b,$ де a і b знаходять із нормальної системи рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Невідомі a і b можна знайти також використовуючи метод найменших квадратів у матричній формі, який полягає у виконанні наступних кроків:

1-й крок – знаходження добутку матриць $X'X$,

де $X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ і $X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$;

2-й крок – знаходження оберненої матриці $[X'X]^{-1}$;

3-й крок – знаходження добутку матриці X' і вектора Y,

де $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$;

4-й крок – знаходження добутку результатів кроку 2 і кроку 3

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = [X'X]^{-1} \cdot (X'Y).$$

б) параболічна залежність: $y = ax^2 + bx + c,$ де $a,$ $b,$ c знаходять із нормальної системи рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

* *

*

∢ **Задача 1**. Дослідити на екстремум функцію

$$z = -x^2 - y^2 + 4x + 2y - 2.$$

Розв'язування. Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x + 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 2.$$

Прирівнюючи їх до нуля, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -2x + 4 = 0 \\ -2y + 2 = 0 \end{cases}, \quad \text{звідки} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Частинні похідні другого порядку будуть:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 .$$

Оскільки $D = AC - B^2 = 4 - 0 > 0$ і $A = -2 < 0$, то в точці $(2;1)$ функція z має максимум $z_{\max} = -4 - 1 + 8 + 2 - 2 = 3.$

∢ **Задача 2**. Знайти екстремум функції $z = xy$ при умові, що $x^2 + y^2 = 2$.

Розв'язування. Умовний екстремум шукаємо за допомогою функції Лагранжа: $U(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2).$

Використаємо необхідні умови існування екстремуму:

$$\begin{cases} U'_x = y + 2\lambda x \\ U'_y = x + 2\lambda y \\ U'_\lambda = x^2 + y^2 - 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язуючи цю систему, одержимо:

$$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x} \\ x + 2y(-\dfrac{y}{2x}) = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x} \\ x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x} \\ x^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}.$$

Отже, критичними точками будуть:

$$M_1(-1; -1),\ M_2(-1; 1),\ M_3(1; -1),\ M_4(1;1).$$

Знайдемо:

$$\varphi'_x = (x^2 + y^2 - 2)'_x = 2x, \qquad \varphi'_y = (x^2 + y^2 - 2)'_y = 2y,$$

$$U''_{xx} = 2\lambda = -\frac{y}{x}, \qquad U''_{yy} = -\frac{y}{x}, \qquad U''_{xy} = 1.$$

Перевіримо достатні умови існування екстремуму в довільній точці $M(x, y)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 2y \\ 2x & -\dfrac{y}{x} & 1 \\ 2y & 1 & -\dfrac{y}{x} \end{vmatrix} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 12xy + 4\frac{y^3}{x} - 1.$$

Знайдемо значення цього визначника в кожній критичній точці:

$$\Delta(M_1) = \left(\frac{-1}{-1}\right)^2 + 12(-1)(-1) + 4\frac{(-1)^3}{-1} - 1 = 1 + 12 + 4 - 1 = 16 > 0,$$

$$z_{\max} = z(M_1) = (-1)(-1) = 1.$$

$$\Delta(M_2) = \left(\frac{1}{-1}\right)^2 + 12(-1)\cdot 1 + 4\frac{1^3}{-1} - 1 = 1 - 12 - 4 - 1 = -16 < 0,$$

$$z_{\min} = z(M_2) = (-1)\cdot 1 = -1.$$

$$\Delta(M_3) = \left(\frac{-1}{1}\right)^2 + 12\cdot 1(-1) + 4\frac{(-1)^3}{-1} - 1 = 1 - 12 - 4 - 1 = -16 < 0,$$

$$z_{\min} = z(M_3) = (-1)\cdot 1 = -1.$$

$$\Delta(M_4) = 1 + 12 + 4 - 1 = 16 > 0,$$

$$z_{\max} = z(M_4) = 1\cdot 1 = 1.$$

∢ **Задача 3**. Величина товарообміну x (тисяч гривень) і витрати на обіг y (гривень) подані у таблиці

x	60	80	140	160	240	320
y	551	576	628,5	673	788,5	863

Знайти аналітичну залежність між y та x.

Розв'язування. Спочатку побудуємо у прямокутній системі координат задані таблицею точки.

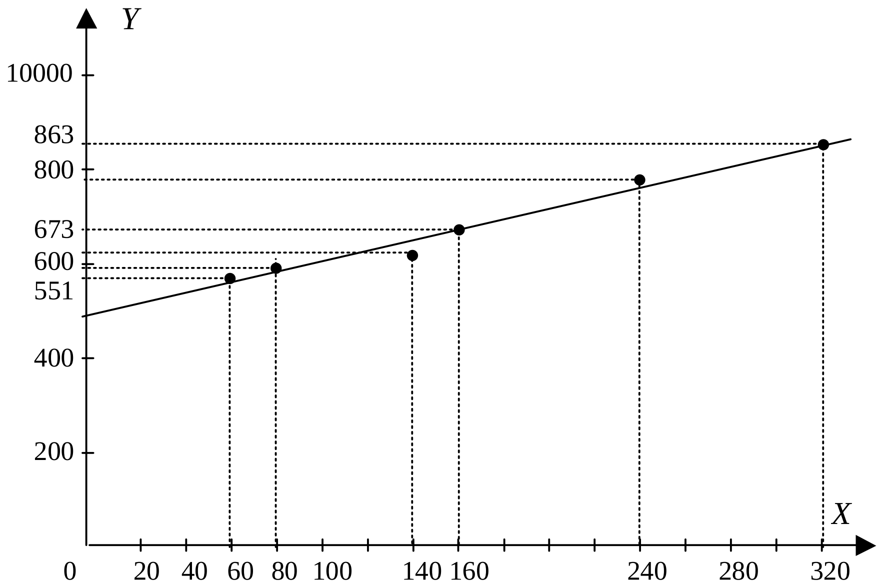


Рисунок дає змогу зробити висновок про існування лінійної залежності між y і x, тобто у вигляді $y = ax + b.$ Параметри $a,\ b$ знаходимо із системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Будуємо розширену таблицю:

	x_i	y_i	$x_i y_i$	$x_i^{\ 2}$
	60	551	33060	3600
	80	576	46080	6400
	140	628,5	87990	19600
	160	673	107680	25600
	240	788,5	184440	57600
	320	863	276160	102400
$\sum$	1000	4080	735410	215200

За таблицею складаємо систему рівнянь при $n = 6$:

$$\begin{cases} 215200a + 1000b = 735410 \\ 1000a + 6b = 4080 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 215{,}2a + b = 735{,}1 \\ 166{,}67a + b = 680 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему, маємо $a \approx 1{,}13,\ \ b \approx 489{,}71.$ Одержали функціональну залежність вигляду $y = 1{,}13x + 489{,}71.$

⊀ **Задача 4**. Бюро економічного аналізу фабрики "Світоч" оцінює ефективність відділу маркетингу з продажу цукерок. Для такої оцінки вони мають досвід праці у 5 географічних зонах з майже однаковими умовами (потенційні клієнти, ставлення до товарого знака і т. ін.). У цих зонах вони зафіксували протягом однакового періоду обсяги продажів (y, млн. коробок), витрати (x, млн. грн.) фірми, наведені в таблиці. Припустивши, що між y і x існує лінійна залежність $y = ax + b$, знайти її вигляд методом найменших квадратів у матричній формі.

y_i	25	30	35	45	65
x_i	5	6	9	12	18

Розв'язування.

1) Знаходимо добуток матриць

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 12 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 9 \\ 1 & 12 \\ 1 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 50 \\ 50 & 610 \end{bmatrix}.$$

2) Знаходимо обернену матрицю

$$[X'X]^{-1} = \frac{1}{550} \cdot \begin{bmatrix} 610 & -50 \\ -50 & 5 \end{bmatrix}.$$

3) Знаходимо добуток матриці X' і вектора Y:

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 12 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 35 \\ 45 \\ 65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 2330 \end{bmatrix}.$$

4) Знаходимо добуток

$$\frac{1}{550} \cdot \begin{bmatrix} 610 & -50 \\ -50 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 2330 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Одержали функціональну залежість вигляду $y = 3x + 10$.

∢ **Задача 5**. Мале підприємство виробляє товари *A* і *B*. Загальні щоденні витрати *V* (у гривнях) на виробництво *x* одиниць товару *A* та *y* одиниць товару *B* відомі: $V=320 - 14x-10y+ 0,2x^2+ 0,1y^2$. 1)Визначити кількість одиниць товарів *A* і *B*, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

Розв'язування. Загальна функція витрат відома: $V=320–14x–10y+0,2x^2+0,1y^2$. Щоб знайти кількість одиниць товарів *x* товару *A* і *y* товару *B*, необхідно дослідити цю функцію на екстремум.

Знайдемо частинні похідні I-го порядку $\begin{cases} V'_x = -14 + 0{,}4x \\ V'_y = -10 + 0{,}2y. \end{cases}$

Прирівнюючи їх до нуля, одержимо систему рівнянь $\begin{cases} -14 + 0{,}4x = 0 \\ -10 + 0{,}2y = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 50. \end{cases}$

Знайдемо частинні похідні II порядку: $A = V''_{xx} = 0{,}4,$ $B = V''_{xy} = 0$, $C = V''_{yy} = 0{,}2.$

Обчислимо $D=AC-B^2=0,4\cdot 0,2-0=0,08>0$ і $A=0,4>0$

Отже, функція витрат при $x=35$, $y=50$ досягає мінімуму. Це означає, що для того, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними, необхідно виробити 35 одиниць товару *A* і 50 одиниць товару *B*.

*   *

*

ВПРАВИ

Знайти екстремуми функцій:

2.1. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

2.2. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

2.3. $z = 2xy - 4x - 2y$.

2.4. $z = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$.

2.5. $z = x^2 + 6y^2 - 4xy + 3$.

2.6. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

2.7. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

2.8. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

2.9. $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$.

2.10. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

Знайти умовні екстремуми функцій:

2.11. $z = x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$.

2.12. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y - 2 = 0$.

2.13. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.

2.14. $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$.

2.15. $z = x^2 + y^2$ при $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

2.16. $z = xy$ при $2x + 3y - 5 = 0$.

2.17. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі:

а) $V = 1500 - 7{,}5x - 15y - 0{,}3xy + 0{,}3x^2 + 0{,}2y^2$;

б) $V = 250 - 4x - 7y + 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2$;

в) $V = 2454 - 21x - 20y + 0{,}7x^2 + 0{,}2y^2$;

г) $V = 3000 - 15x - 12y + 0{,}3x^2 + 0{,}6y^2$

д) $V = 1999 - 20x - 4y + 0{,}5x^2 + 0{,}2y^2$.

Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2.18. Використовуючи x одиниць праці та y одиниць капіталу (тис. гривень), підприємство виробляє продукцію, загальна вартість V якої (у тисячах гривень) має вигляд $V = 40 - 50y - 3x - 2xy + 1{,}5y^2 + x^2$.

Знайти кількість одиниць праці та капіталу, при яких підприємство матиме оптимальну загальну вартість продукції. Чому дорівнює значення оптимальної загальної вартості?

2.19. Прибуток фірми визначається наступною формулою
$$PR(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2,$$
де $f(x_1, x_2)$ – виробнича функція фірми,

p_0 – ринкова ціна продукції, яку випускає фірма,

p_1, p_2 – ринкова ціна 1-го і 2-го ресурсів,

x_1, x_2 – кількість 1-го і 2-го ресурсів, які затрачає фірма.

Визначити оптимальну кількість ресурсів, при якій фірма отримає найбільший прибуток, і максимальний прибуток, якщо
$f(x_1, x_2) = 0{,}5\sqrt{x_1}x_2 - 0{,}5x_2^2 + 3{,}5x_2$, $p_0 = 2$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$.

2.20. У таблиці задані величини товарного обігу x (тис. гривень) і витрати обігу y (гривень).

x	60	80	120	160	240	320
y	5510	5760	6235	6750	7685	8635

Обрати вигляд залежності між y та x і визначити її параметри.

2.21. У таблиці вказано кількість внесених добрив на 1 га (x) та урожай пшениці (y) у центнерах.

x	1	2	3	5	7	9	11	12
y	24	26,5	28	37	40	46	49	50,5

Обрати вигляд залежності між y та x і визначити параметри цієї залежності, використовуючи метод найменших квадратів через систему нормальних рівнянь і у матричному вигляді.

2.22. У таблиці наведені дані, що характеризують зв'язок між висотою дерева h і його діаметром d на фіксованому рівні:

Діаметр (у см)	8	12	16	20	24	28	32	36
Висота (у м)	10,5	12,0	15,0	16,4	17,0	22,0	23,0	35,0

Припустивши, що залежність лінійна, встановити її аналітичну форму.

2.23. Методом найменших квадратів знайти лінійну залежність між живою вагою свиней і їх віком за такими даними:

Вік (у тижн.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Жива вага (у кг)	1,3	2,5	3,9	5,2	5,3	7,5	9,0	10,8	13,1

2.24. Експлуатаційні витрати на утримання автоматичних телефонних станцій залежно від потужності АТС подані у таблиці:

Потужність АТС (у тис. абонентів)	1	2	3	4	5	6	7	8
Експлуат. витрати на рік (у тис. грн.)	330	340	350	359	364	371	378	383

Вивести емпіричну формулу, що відповідає цій залежності.

2.25. В “Основах хімії” Д. І. Менделєєв приводить дані розчинності азотно-натрієвої солі на 100 г води залежно від температури:

t°, C	0	4	10	15	21	29	36	51	68
Розчинність	66,7	71	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

і вказує, що цю залежність можна виразити формулою $y = 0,87t + 67,5$. Перевірити це.

2.26. У таблиці задані витрати пального на 100 км (y) залежно від пробігу автомобіля (x) тис. км.

x	1	5	15	30	50	60	70	100	120	150
y	23,026	27,57	22,275	23,18	22,5	22,6	22,9	25	27,4	32,5

Обрати вигляд залежності між x та y і визначити параметри цієї залежності.

2.27. Виробництво цементу x_i (у сотнях тонн) і витрати електроенергії y_i (на 1 тонну цементу в рік) за визначений період роботи цементної промисловості склали величини, які зведені у наступній таблиці:

x_i	8	10	12	13,5
y_i	80	72	65	70

Знайти пряму, яка відображає залежність y від величини x, використовуючи метод найменших квадратів через систему нормальних рівнянь і у матричному вигляді.

2.28. Середній урожай люцерни (за один укіс) в залежності від глибини зрошення характеризується таблицею:

Глибина зрошення (в дюймах)	0	12	18	24	30	36	48	60
Середній урожай (в т/акр)	3,9	5,6	6,8	7,9	9,0	9,3	9,0	8,4

Побудувати квадратичну інтерполяційну формулу для цієї залежності (1 дюйм = 25,4 мм, 1 акр = 4046,86 м^2 = 0,404686 га – неметричні одиниці англомовних країн).

2.29. Продуктивність праці робітника фабрики меблів „Нова” за певну годину робочого дня характеризується табл.:

Година робочого дня (x)	1	2	3	4	5	6	7
Продуктивність праці (y)	3,9	5,6	6,8	7,9	9,0	9,3	9,0

Знайти залежність між змінними y та x та обчислити продуктивність праці робітника y при x=8.

РОЗДІЛ 8. **НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ**

§ 1. Метод безпосереднього інтегрування

1. Функція $F(x)$ називається *первісною функцією* для заданої функції $f(x)$, якщо для довільного x з області визначення $f(x)$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx.$

2. Сукупність усіх первісних $F(x)+C$ для заданої функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* і позначається $\int f(x)dx.$ Отже $\int f(x)dx = F(x)+C.$

Таблиця основних інтегралів:

1) $\int u^{\alpha}du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$;

2) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$;

3) $\int a^{u}du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C$;

4) $\int \sin u du = -\cos u + C$;

5) $\int \cos u du = \sin u + C$;

6) $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$;

7) $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$;

8) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C, \quad (-\arccos\dfrac{u}{a} + C)$;

9) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$;

10) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C, \quad (-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + C)$;

11) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$;

12) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$;

13) $\int e^u du = e^u + C$;

14) $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$;

15) $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$;

16) $d\int f(u)du = f(u)du$;

17) $\int dF(u) = F(u) + C$;

18) $\int kf(u)du = k\int f(u)du$;

19) $\int [f_1(u) \pm f_2(u)]du = \int f_1(u)du \pm \int f_2(u)du$.

* *

*

∢ **Задача 1**. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (4x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 5\sqrt[3]{x^2})dx.$$

Розв'язування. Використовуючи формули (1), (16) і (17) таблиці, одержимо:

$$\int (4x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 5\sqrt[3]{x^2})dx = \int 4x^3 dx + \int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx - \int 5\sqrt[3]{x^2}dx = 4\int x^3 dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx - 5\int x^{\frac{2}{3}}dx = 4\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 5\cdot\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = x^4 + \sqrt{x} - 3x\sqrt[3]{x^2} + C$$

.

∢ **Задача 2**. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{xdx}{x^2-5}$.

Розв'язування. Оскільки $xdx = \frac{1}{2}d(x^2-5)$, то привівши інтеграл до табличного, маємо $\int \frac{xdx}{x^2-5} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-5)}{x^2-5} =$ $= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-5\right| + C.$

* * *

ВПРАВИ

Знайти невизначені інтеграли:

1.1. $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx.$

1.2. $\int \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{\sin^2 x}dx.$

1.3. $\int \sqrt{1-\cos 2x}dx.$

1.4. $\int (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^3 dx.$

1.5. $\int \left(2e^x + \frac{1}{1+x^2}\right)dx.$

1.6. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx.$

1.7. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx.$

1.8. $\int \frac{3-2\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx.$

1.9. $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx.$

1.10. $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx.$

1.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}.$

1.12. $\int (4x+3)^{17}dx.$

1.13. $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx.$

1.14. $\int \frac{\mathrm{tg}^3 x dx}{\cos^2 x}.$

1.15. $\int \frac{\mathrm{ctg}\, xdx}{\sin^2 x}.$

1.16. $\int \left(9+7x^2\right)^5 xdx.$

1.17. $\int \sqrt{1-x}\,dx.$

1.18. $\int \frac{x^2dx}{(4x^3+9)^4}.$

1.19. $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx.$

1.20. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$

§ 2. Метод підстановки (заміна змінної)

1. Інтеграл $\int f(x)dx$ обчислюється за допомогою підстановки $x=\varphi(t)$, тобто має місце рівність:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Тут $x=\varphi(t)$ – диференційована функція нової змінної t має обернену $t=\varphi(x)$.

2. При заміні $t=\varphi(x)$ отримуємо формулу:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt.$$

*　　*

*

∢ **Задача1**. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Розв'язування. Зробимо підстановку $x=3\sin t$, тоді $dx=3\cos t dt,\quad t=\arcsin\frac{x}{3},$

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\cos t.$$

Тому

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{9\sin^2 t\cdot 3\cos t dt}{3\cos t} = 9\int \sin^2 t dt = \frac{9}{2}\int (1-\cos 2t)dt =$$

$$=\frac{9}{2}\int dt-\frac{9}{2}\int \cos 2tdt=\frac{9}{2}t-\frac{9}{4}\sin 2t+C=$$

$$=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{9}{4}\cdot\frac{2x}{9}\sqrt{9-x^2}+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+C.$$

Тут зроблено перетворення:

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2\cdot\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}=\frac{2}{9}x\sqrt{9-x^2}.$$

∢ **Задача 2.** Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{(2\ln x+1)^4}{x}dx.$$

Розв'язування. У підінтегральній функції одна частина є степеневою функцією з основою $2\ln x+1$, а друга частина – диференціал цієї функції з точністю до постійного множника. Тому зробимо підстановку: $2\ln x+1=t$, тоді $2\frac{dx}{x}=dt$, $\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}dt.$

Отже,

$$\int\frac{(2\ln x+1)^4}{x}dx=\int(2\ln x+1)^4\cdot\frac{dx}{x}=\int t^4\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^4dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{10}(2\ln x+1)^5+C.$$

∢ **Задача 3**. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

Розв'язування. Зробимо підстановку: $e^x=t,\ x=\ln t,$ $dx=\frac{dt}{t}$. Тому

$$\int\frac{e^{2x}dx}{e^x+1}=\int\frac{t^2\cdot\frac{dt}{t}}{t+1}=\int\frac{t}{t+1}dt=\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\int dt-\int\frac{dt}{t+1}=t-\ln|t+1|+C=e^x-\ln|e^x+1|+C.$$

*   *

*

ВПРАВИ

Знайти невизначені інтеграли:

2.1. $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{7-x^6}}$.

2.2. $\int\frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$.

2.3. $\int\frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arctg}^2 x}$.

2.4. $\int\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos 2x}}dx$.

2.5. $\int\sqrt[3]{x^3-8}\,x^2dx$.

2.6. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

2.7. $\int\frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}dx$.

2.8. $\int\frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}dx$.

2.9. $\int e^{x^3}\cdot x^2dx$.

2.10. $\int\sqrt{2-\cos 4x}\sin 4xdx$.

2.11. $\int\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$.

2.12. $\int\frac{\ln x-1}{x\sqrt{\ln x}}dx$.

2.13. $\int 3^{x^3}\cdot x^2dx$.

2.14. $\int e^{-\arccos x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2.15. $\int\frac{\sin xdx}{\cos^4 x}$.

2.16. $\int\frac{x^2dx}{4+x^6}$.

2.17. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^8-1}}$.

2.18. $\int\frac{5x-2}{x^2+4}dx$.

2.19. $\int\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$.

2.20. $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

2.21. $\int\frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}dx$.

2.22. $\int\frac{e^{2x}dx}{e^x-1}$.

2.23. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx.$ 2.24. $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x}-1}.$

§ 3. Метод інтегрування частинами

1. Формула інтегрування частинами

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du.$$

Тут за u беруть функцію, що при диференціюванні спрощується, а за dv – ту частину підінтегрального виразу, що має множник $dx,$ інтеграл від якої відомий або може бути знайдений.

2. В інтегралах вигляду:

$$\int P(x)e^x dx,\ \int P(x)\sin xdx,\ \int P(x)\cos xdx$$

доцільно брати многочлен $P(x)=u,$ а залишок підінтегрального виразу позначати $dv.$

В інтегралах вигляду:

$$\int P(x)\ln xdx,\ \int P(x)\mathrm{arctg} xdx,\ \int P(x)\arcsin xdx$$

доцільно брати $P(x)dx = dv,$ а залишену частину підінтегрального виразу прирівнювати до $u.$

В інтегралах вигляду:

$$\int e^x \sin xdx,\ \int e^x \cos xdx$$

за u можна брати довільний множник $e^x,$ або $\sin x,$ або $\cos x.$ Залишена частина позначається через $dv.$

*   *

*

∢ **Задача 1**. Знайти невизначений інтеграл $\int (x+2)e^{4x}dx$.

Розв'язування. Заданий інтеграл знайдемо методом інтегрування частинами. Нехай $u = x+2,\ dv = e^{4x}dx$.

Тоді $du = dx,\ v = \int e^{4x}dx = \frac{1}{4}\int e^{4x}d(4\cdot x) = \frac{1}{4}e^{4x}$.

Підставивши ці значення у формулу

$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$, одержимо:

$$\int (x+2)e^{4x}dx = (x+2)\frac{1}{4}e^{4x} - \int \frac{1}{4}e^{4x}dx = \frac{1}{4}(x+2)e^{4x} -$$

$$-\frac{1}{16}e^{4x} + C = \frac{1}{4}e^{4x}(x+\frac{7}{4}) + C.$$

∢ **Задача 2**. Знайти невизначений інтеграл $\int x^2 \cos x dx$.

Розв'язування. Тут формулу інтегрування частинами використаємо двічі:

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\cos xdx}_{dv} =$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2xdx \end{array}\right| \begin{array}{l} dv = \cos xdx \\ v = \int \cos xdx = \sin x \end{array}$$

$$= x^2 \sin x - 2\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin xdx}_{dv} =$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array}\right| \begin{array}{l} dv = \sin xdx, \\ v = \int \sin xdx = -\cos x \end{array}$$

$$= x^2 \sin x - 2(x(-\cos x) - \int (-\cos x)dx) = x^2 \sin x - 2(-x\cos x +$$

$$+\int \cos xdx) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

∢ **Задача 3**. Знайти невизначений інтеграл $\int e^x \sin\frac{x}{2}dx$.

Розв'язування. Застосувавши формулу інтегрування частинами двічі, отримаємо вихідний інтеграл.

Позначимо

$$\left.\begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x dx \end{array}\right| \begin{array}{l} dv = \sin\frac{x}{2}dx \\ v = \int \sin\frac{x}{2}dx = 2\int \sin\frac{x}{2}d(\frac{x}{2}) = -2\cos\frac{x}{2} \end{array}.$$

Тоді

$$\int e^x \sin\frac{x}{2}dx = -2e^x\cos\frac{x}{2} + 2\int e^x\cos\frac{x}{2}dx\,.$$

Проінтегруємо ще раз частинами, позначивши

$$\left.\begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x dx \end{array}\right| \begin{array}{l} dv = \cos\frac{x}{2}dx \\ v = \int \cos\frac{x}{2}dx = 2\int \cos\frac{x}{2}d(\frac{x}{2}) = 2\sin\frac{x}{2} \end{array},$$

одержимо

$$\int e^x \sin\frac{x}{2}dx = -2e^x\cos\frac{x}{2} + 2\left(2e^x\sin\frac{x}{2} - 2\int e^x\sin\frac{x}{2}dx\right).$$

Тоді

$$\int e^x \sin\frac{x}{2}dx = -2e^x\cos\frac{x}{2} + 4e^x\sin\frac{x}{2} - 4\int e^x\sin\frac{x}{2}dx.$$

Застосовуючи два рази операцію інтегрування частинами, ми в правій стороні знову одержали вихідний інтеграл з коефіцієнтом -4. Таким чином, отримали рівняння з невідомим $\int e^x \sin\frac{x}{2}dx$. Перенесемо його в ліву сторону:

$$5\int e^x \sin\frac{x}{2}dx = -2e^x\cos\frac{x}{2} + 4e^x\sin\frac{x}{2} = 2e^x(2\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})\,.$$

Звідси

$$\int e^x \sin\frac{x}{2}dx = \frac{2}{5}e^x(2\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}) + C\,.$$

У кінцевому результаті ми додали до знайденої первісної функції довільну сталу.

ВПРАВИ

Знайти невизначені інтеграли:

3.1. $\int xe^{2x}dx.$

3.2. $\int \sqrt{x}\ln x dx.$

3.3. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x dx.$

3.4. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx.$

3.5. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}dx.$

3.6. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}dx.$

3.7. $\int \ln(x^2+1)dx.$

3.8. $\int \ln x dx.$

3.9. $\int \mathrm{arctg}\,x dx.$

3.10. $\int x\sin x dx.$

3.11. $\int \arcsin x dx.$

3.12. $\int (x+1)e^x dx.$

3.13. $\int (x^2+2x+3)\cos x dx.$

3.14. $\int x^2\,\mathrm{arctg}\,x dx.$

3.15. $\int x^2 \sin x dx.$

3.16. $\int (\ln x)^2 dx.$

3.17. $\int x\ln^2 x dx.$

3.18. $\int e^{2x}\cos 3x dx.$

3.19. $\int e^{2x}\cos x dx.$

3.20. $\int \sin(\ln x)dx.$

3.21. $\int \sin\sqrt{x}dx.$

3.22. $\int x^5 e^{x^2}dx.$

§ 4. Інтегрування раціональних дробів

1. Дріб називається *раціональним*, якщо його чисельник і знаменник є многочленами, тобто дріб має такий вигляд:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x\ +a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+...+b_{m-1}x\ +b_m},$$

де a_i та b_j – коефіцієнти многочленів, $i=0,1,2,...,n$; $j=0,1,2,...,m$.

Раціональний дріб називається *правильним*, якщо найвищий показник степеня чисельника n менший від відповідного степеня m знаменника. Дріб називається *неправильним*, якщо $n\ge m$.

Усякий неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу, тобто

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=M_{n-m}(x)+\frac{R(x)}{Q_m(x)}.$$

2. *Найпростішими раціональними дробами* I, II, III, і IV типів називають дроби вигляду:

I. $\dfrac{A}{x-\alpha}$, II. $\dfrac{B}{(x-\beta)^k}$ $(k\ge 2,$ ціле$)$,

III. $\dfrac{Cx+D}{x^2+px+q}$ $(\dfrac{p^2}{4}-q<0)$,

IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n\ge 2,$ ціле, $\dfrac{p^2}{4}-q<0)$.

3. Будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму найпростіших раціональних дробів, коефіцієнти яких можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

1) Корені знаменника дійсні та різні, тобто

$$Q_m(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_m).$$

Дріб $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів І-го типу: $\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + ... + \frac{A_m}{x-\alpha_m}$.

2) Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, а саме: $Q_m(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^k$.

Дріб $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів І і ІІ-го типів:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + ... + \frac{B_k}{(x-\beta)^k}.$$

3) Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, крім цього знаменник має квадратний тричлен, який не розкладається на множники, тобто:

$$Q_m(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^k(x^2 + px + q).$$

В цьому випадку дріб $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів І, ІІ і ІІІ-го типів:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + ... + \frac{B_k}{(x-\beta)^k} + \frac{Cx+D}{x^2+px+q}.$$

*   *

*

∢ **Задача 1**.Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$.

Розв'язування. Виділимо повний квадрат у знаменнику дробу:

$$2x^2 - 2x + 3 = 2(x^2 - x + \frac{3}{2}) = 2(x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}) =$$

$$=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\right], \text{ тоді}$$

$$\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

∢ **Задача 2.** Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{3x+4}{x^2+7x+14}dx\,.$$

Розв'язування. У чисельнику підінтегральної функції із $3x+4$ виділимо похідну від знаменника $2x+7$ при умові, щоб величина чисельника не змінилась:

$$3x+4=(2x+7)\cdot\frac{3}{2}+4-\frac{21}{2}=(2x+7)\cdot\frac{3}{2}-\frac{13}{2}.$$

Матимемо

$$\int\frac{3x+4}{x^2+7x+14}dx=\int\frac{(2x+7)\frac{3}{2}-\frac{13}{2}}{x^2+7x+14}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+7)}{x^2+7x+14}dx-$$

(у другому інтегралі в знаменнику виділимо повний квадрат)

$$-\frac{13}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+14}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+7x+14\right|-$$

$$-\frac{13}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{7}{4}}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+7x+14\right|-\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C=$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2 + 7x + 14\right| - \frac{13}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{7}} + C.$$

∢ **Задача 3**. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 7x + 12}\,dx\,.$$

Розв'язування. Дріб підінтегральної функції неправильний, оскільки степінь чисельника (три) більший від степеня знаменника (два). Тому, насамперед, виділимо цілу частину. Для цього чисельник $x^3 + x + 2$ поділимо на знаменник $x^2 - 7x + 12$:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 + x + 2 & \underline{x^2 - 7x + 12} \\ \underline{x^3 - 7x^2 + 12x} & x + 7 + \dfrac{38x - 82}{x^2 - 7x + 12} \\ -\,7x^2 - 11x + 2 & \\ \underline{7x^2 - 49x + 84} & \\ 38x - 82 & \end{array}$$

Тому

$$\int \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 7x + 12}\,dx = \int \left(x + 7 + \frac{38x - 82}{x^2 - 7x + 12} \right) dx = \int x\,dx + \int 7\,dx +$$

$$+ \int \frac{38x - 82}{x^2 - 7x + 12}\,dx = \frac{x^2}{2} + 7x + \int \frac{38x - 82}{(x-3)(x-4)}\,dx.$$

Підінтегральну функцію зобразимо у вигляді суми простих дробів:

$$\frac{38x - 82}{(x-3)(x-4)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-4}\,.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $(x-3)(x-4)$:

$$38x - 82 = A_1(x-4) + A_2(x-3).$$

Дійсними коренями знаменника є числа 3 і 4.

При $x = 3$ маємо $32 = -A_1$, тобто $A_1 = -32$.

При $x = 4$ маємо $70 = A_2$, або $A_2 = 70$.

Дріб $\dfrac{38x-82}{(x-3)(x-4)}=-\dfrac{32}{x-3}+\dfrac{70}{x-4}$.

Врахувавши знайдене, матимемо:

$$\int\frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}dx=\frac{x^2}{2}+7x+\int\left(-\frac{32}{x-3}+\frac{70}{x-4}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+7x-32\int\frac{dx}{x-3}+70\int\frac{dx}{x-4}=\frac{x^2}{2}+7x-32\ln|x-3|+$$

$$+70\ln|x-4|+C.$$

∢ **Задача 4**. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{x^2+1}{(x+3)(x-1)^3}dx.$$

Розв'язування. Множнику $x+3$ відповідає дріб $\dfrac{A}{x+3}$, а множнику $(x-1)^3$ відповідають три елементарні дроби:

$$\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3}\text{, тому}$$

$$\frac{x^2+1}{(x+3)(x-1)^3}=\frac{A}{x+3}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3}.$$

Помножимо обидві частини рівності на $(x+3)(x-1)^3$:

$$x^2+1=A(x-1)^3+B_1(x-1)^2(x+3)+B_2(x-1)(x+3)+B_3(x+3).$$

Дійсними коренями знаменника є числа 1 і –3

При x=1 маємо $2=4B_3$, тобто $B_3=\dfrac{1}{2}$.

При x=–3 маємо $10=-64A$, тобто $A=-\dfrac{5}{32}$.

Для визначення коефіцієнтів B_1 і B_2 прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$x^2+1=Ax^3-3Ax^2+3Ax-A+B_1x^3+3B_1x^2-2B_1x^2+3B_1+$$

$$+B_1x-6B_1x+B_2x^2+3B_2x-B_2x-3B_2+B_3x+3B_3;$$

$$\begin{cases} 0=A+B_1 \\ 1=-3A+B_1+B_2 \\ 0=3A-5B_1+2B_2+B_3 \\ 1=-A+3B_1-3B_2+3B_3. \end{cases}$$

З першого рівняння знаходимо $B_1=-A=\dfrac{5}{32}$.

З другого рівняння маємо:

$$B_2=1+3A-B_1=1-\frac{15}{32}-\frac{5}{32}=\frac{32-15-5}{32}=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}.$$

Кінцевий розклад заданого дробу на найпростіші має вигляд:

$$\frac{x^2+1}{(x+3)(x-1)^3}=\frac{-5}{32(x+3)}+\frac{5}{32(x-1)}+\frac{3}{8(x-1)^2}+\frac{1}{2(x-1)^3}.$$

Таким чином, одержимо:

$$\int\frac{x^2+1}{(x+3)(x-1)^3}dx=-\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}=\frac{-5}{32}\ln|x+3|+\frac{5}{32}\ln|x-1|-\frac{3}{8(x-1)}-\frac{1}{4(x-1)^2}+C=$$

$$=\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|-\frac{3}{8(x-1)}-\frac{1}{4(x-1)^2}+C.$$

∢ **Задача 5**. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Розв'язування. Підінтегральна функція – це правильний раціональний дріб, знаменник якого має один дійсний корінь $x=1$ і квадратний двочлен, що не розкладається на множники. Тому заданий дріб розкладається на суму найпростіших дробів:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Невідомі коефіцієнти *A*, *B* і *C* шукаємо методом невизначених коефіцієнтів. Помноживши ліву і праву частину на $(x-1)(x^2+1)$, одержимо: $x = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$, або $x = (A+B)x^2 + (-B+C)x + A - C.$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності, одержимо:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=1 \\ A-C=0, \quad A=C=\dfrac{1}{2}, B=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отже, дріб розкладається так:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}.$$

Тому

$$\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C.$$

*   *

*

ВПРАВИ

Знайти невизначені інтеграли:

4.1. $\int\frac{dx}{x^2+4x+5}.$

4.2. $\int\frac{dx}{x^2+3x+3}.$

4.3. $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}.$

4.4. $\int\frac{dx}{x^2+4x+29}.$

4.5. $\int\frac{dx}{x^2-6x+18}.$

4.6. $\int\frac{xdx}{x^2+x+1}.$

4.7. $\int\frac{5x+3}{x^2+10x+29}dx.$

4.8. $\int\frac{x+1}{5x^2+2x+1}dx.$

4.9. $\int \frac{3x-11}{x^2+8x+18}dx.$ 4.10. $\int \frac{x-3}{x^2-9x+23}dx.$

4.11. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx.$ 4.12. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx.$

4.13. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx.$ 4.14. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx.$

4.15. $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}dx.$ 4.16. $\int \frac{dx}{x^3-8}.$

4.17. $\int \frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx.$ 4.18. $\int \frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}dx.$

4.19. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx.$ 4.20. $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}dx.$

4.21. $\int \frac{x^3-2}{x^2-5x+4}dx.$ 4.22. $\int \frac{3x^2+4x-1}{x^2+2x-3}dx.$

4.23. $\int \frac{x^3}{x^2-x-2}dx.$ 4.24. $\int \frac{x^3+4x}{x^2+x-6}dx.$

4.25. $\int \frac{x^5+1}{x^2-x}dx.$

§ 5. Інтегрування тригонометричних функцій

1. Інтеграли вигляду:

$\int \sin mx \cdot \cos nx dx,\ \int \cos mx \cdot \cos nx dx,\ \int \sin mx \cdot \sin nx dx$.

Тут добутки тригонометричних функцій, що знаходяться під знаками інтегралів, перетворюються в суми за допомогою формул:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

2. Інтеграли вигляду:

$$\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx.$$

1. Якщо m – непарне додатне число, то використовується підстановка $\sin x=t$; якщо n – непарне додатне число – підстановка $\cos x=t$.

2. Якщо показники степеня m і n – парні додатні числа, то їх понижують за допомогою формул:

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha,$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha).$$

В окремих випадках один із показників (m або n) може дорівнювати нулю.

3. Інтеграли вигляду:

$$\int R(\sin x,\cos x)dx,$$

де $R(\sin x,\cos x)$ – раціональна функція синуса і косинуса.

Інтеграли такого вигляду зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою *універсальної тригонометричної підстановки*: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ $(-\pi<x<\pi)$. Тоді одержуємо:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2\mathrm{arctg}t, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

4. Інтеграли вигляду $R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$ доцільно знаходити за допомогою підстановки $\mathrm{tg}x = t.$ Тоді матимемо

$$x = \mathrm{arctg}t, \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}.$$

5. Інтеграли вигляду

а) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx,$

б) $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$

зводяться до інтегралів від раціональної функції відносно $\sin t$ і $\cos t$ за допомогою тригонометричної підстановки:

для інтеграла а) – $x = a \sin t$ (або $x = a \cos t$),

для інтеграла б) – $x = a\,\mathrm{tg}t$ (або $x = a\,\mathrm{ctg}t$).

*   *

*

∢ **Задача 1**. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \sin 2x \cos 3x dx.$$

Розв'язування. Оскільки

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$, то

$$\int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin(-x) + \sin 5x)dx = -\frac{1}{2}\int \sin x dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \sin 5x dx = -\frac{1}{2}(-\cos x) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{5}\cos 5x) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C.$$

∢ **Задача 2**. Знайти невизначений інтеграл
$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx.$$

Розв'язування. Запишемо, що $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x$ і зробимо підстановку $\sin x = t$, а звідси $\cos x dx = dt$.

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 \cos x \cdot \sin^2 x dx = \int (1 - \sin^2 x)\sin^2 x \cos x dx =$$

$$= \int (1 - t^2)t^2 dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

∢ **Задача 3**. Знайти невизначений інтеграл
$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$

Розв'язування. Маємо:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\frac{1}{2}\sin 2x)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx +$$

$$+ \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16}x -$$

$$- \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

∢ **Задача 4**. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x}$.

Розв'язування. Зробивши підстановку

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \ x = 2\operatorname{arctg} t, \ dx = \frac{2dt}{1 + t^2}, \ \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

матимемо:

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{3+5\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{3(1+t^2)+5(1-t^2)}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{3+3t^2+5-5t^2} = \int \frac{2dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\right| + C.$$

∢ **Задача 5.** Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{1+8\cos^2 x}$.

Розв'язування. Підінтегральна функція раціонально залежить від $\cos^2 x$, тому доцільно застосувати підстановку $\operatorname{tg}x = t$, тоді:

$x = \operatorname{arctg}t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, а отже,

$$\int \frac{dx}{1+8\cos^2 x} = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{1+8\dfrac{dt}{1+t^2}} = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{1+t^2+8}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{9+t^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{3}\right) + C.$$

∢ **Задача 6.** Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Розв'язування. Нехай $x = \sin t$, тоді $dx = \cos t dt$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$.

Тому

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C,$$

оскільки $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2x\sqrt{1-x^2}$.

* *

*

ВПРАВИ

Знайти невизначені інтеграли:

5.1. $\int \sin 3x\cos x dx.$

5.2. $\int \sin 3x\sin 5x dx.$

5.3. $\int \sin(5x - \frac{\pi}{4})\cos(x + \frac{\pi}{4})dx.$

5.4. $\int \sin 3x\sin x dx.$

5.5. $\int \sin(x + \frac{\pi}{6})\cos x dx.$

5.6. $\int \sin^5 x dx.$

5.7. $\int \sin^2 x\cos^3 x dx.$

5.8. $\int \sin^3 x\cos^3 x dx.$

5.9. $\int \cos^7 x dx.$

5.10. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}.$

5.11. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}.$

5.12. $\int \cos^5 x dx.$

5.13. $\int \sin^3 x\cos^2 x dx.$

5.14. $\int (1 + 2\cos x)^2 dx.$

5.15. $\int (1 - \sin 2x)^2 dx.$

5.16. $\int \cos^4 x dx.$

5.17. $\int \sin^2 x\cos^2 x dx.$

5.18. $\int \sin^4 x\cos^4 x dx.$

5.19. $\int \sin^2 x\cos^4 x dx.$

5.20. $\int (1 + 3\cos 2x)^2 dx.$

5.21. $\int \sin^4 x dx.$

5.22. $\int \sin^4 x\cos^2 x dx.$

5.23. $\int \frac{dx}{\sin x}.$

5.24. $\int \frac{dx}{5 + 3\cos x}.$

5.25. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}.$

5.26. $\int \frac{dx}{3 + \cos x}.$

5.27. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

5.28. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

5.29. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

5.30. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$.

5.31. $\int \mathrm{tg}^4 x dx$.

5.32. $\int \mathrm{tg}^5 x dx$.

5.33. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

5.34. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

5.35. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$.

5.36. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

§ 6. *Інтегрування ірраціональних функцій*

1. Інтеграл вигляду

$$\int R(x,\sqrt[n]{x})dx$$

за допомогою підстановки $t=\sqrt[n]{x}$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції від t. Тут $R(x,\sqrt[n]{x})$ – раціональна функція від x і $\sqrt[n]{x}$, а n – натуральне число.

2. Інтеграл вигляду

$$\int R(x,\sqrt[n]{x},\sqrt[m]{x},...,\sqrt[k]{x})dx$$

обчислюється за допомогою підстановки $t=\sqrt[N]{x}$. Тут N – найменше спільне кратне чисел $n, m, ..., k$.

3. Інтеграл вигляду

$$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx$$

обчислюється за допомогою підстановки $t=\sqrt[n]{ax+b}$.

*   *

*

∢ **Задача 1.** Знайти невизначений інтеграл
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}.$$

Розв'язування. Виділимо в підкореневому виразі повний квадрат:

$$x^2-5x+6=[x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2]-\left(\frac{5}{2}\right)^2+6=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$$

Зробивши підстановку $x-\frac{5}{2}=t,\ dx=dt,$ одержимо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|+C=$$
$$=\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+6}\right|+C.$$

∢ **Задача 2.** Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}.$

Розв'язування. Показники коренів підінтегральної функції дорівнюють 2 і 3. Їх найменше спільне кратне – 6. Тому зробимо підстановку: $t=\sqrt[6]{x},$ або $x=t^6,$ $dx=6t^5dt.$

Отже,
$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=\int \frac{6t^5dt}{(1+t^2)t^3}=6\int \frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}dt=$$
$$=6\int (1-\frac{1}{1+t^2})dt=6\int dt-6\int \frac{dt}{1+t^2}=6t-6\operatorname{arctg} t+C=$$
$$=6(\sqrt[6]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x})+C.$$

∢ **Задача 3.** Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{x-5}}{x}dx.$

Розв'язування. Підставимо $t=\sqrt{x-5}$, звідси $x=t^2+5$, $dx=2tdt.$

Тому

$$\int \frac{\sqrt{x-5}}{x}dx=\int \frac{t}{t^2+5}\cdot 2tdt=2\int \frac{t^2}{t^2+5}dt=2\int \frac{t^2+5-5}{t^2+5}dt=$$

$$=2\int (1-\frac{5}{t^2+5})dt=2\int dt-10\int \frac{dt}{t^2+5}=2t-10\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+$$

$$+C=2\sqrt{x-5}-\frac{10}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{5}}+C.$$

∢ **Задача 4.** Заданий граничний дохід фірми $D'(x)=200-2x$, де x – кількість виробленої продукції.

Знайти функцію сумарного доходу фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий дохід.

Розв'язування. Функцію сумарного доходу можна знайти так:

$$D(x)=\int (200-2x)dx=200x-2\cdot\frac{x^2}{2}+C=200x-x^2+C.$$

Якщо врахувати, що $D(0)=0$, то $D(0)=0=$ $=200\cdot 0-0^2+C.$ Звідси $C=0.$

Отже, сумарний дохід фірми $D(x)=200x-x^2.$

∢ **Задача 5.** Маржинальний дохід фірми виражено функцією $D'(x)=12-0{,}04x.$

Знайти функцію доходу і визначити відношення між вартістю одиниці продукції та проданою її кількістю.

Розв'язування. Інтегруючи функцію маржинального доходу, знайдемо функцію доходу фірми:

$$D(x)=\int D'(x)dx=\int (12-0{,}04x)dx=12\int dx-0{,}04\int xdx=$$

$$=12x-0{,}04\frac{x^2}{2}+C=12x-0{,}02x^2+C.$$

З умови, що непродаж жодної одиниці продукції дає нульовий дохід, маємо: $0=12\cdot 0-0{,}02\cdot 0^2+C,\ C=0.$

Отже, функція доходу має вигляд: $D(x)=12x-0{,}02x^2$.

Оскільки дохід дорівнює добутку вартості кожної одиниці продукції (P) проданої фірмою на кількість (x) одиниць продукції, то $D(x)=P\cdot x=12x-0{,}02x^2$.

Звідси $P=12-0{,}02x$.

* *

*

ВПРАВИ

Знайти невизначені інтеграли:

6.1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}.$

6.2. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$

6.3. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$

6.4. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}.$

6.5. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+10x-15}}.$

6.6. $\int\frac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}}.$

6.7. $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x}}.$

6.8. $\int\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}dx.$

6.9. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}.$

6.10. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}.$

6.11. $\int\frac{(1-6\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}dx.$

6.12. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}.$

6.13. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$

6.14. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+9}}.$

6.15. $\int\frac{xdx}{\sqrt{5+2x}}.$

6.16. $\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx.$

6.17. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx.$ 6.18. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}.$

6.19. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx.$ 6.20. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}.$

Використовуючи невизначений інтеграл, розв'язати задачі економічного змісту:

6.21. Гранична ціна за продану продукцію виражена функцією $P'(x) = 2x + 50$, де x – кількість проданої продукції. Знайти загальну функцію ціни за продану продукцію, якщо ціна 10 одиниць продукції дорівнює 2000 гривень.

6.22. Граничні витрати фірми на виготовлення x одиниць продукції виражені функцією $V'(x) = 100 + 0{,}04x.$

Знайти загальні можливі витрати при виробництві 1000 одиниць продукції.

6.23. Маржинальний річний дохід фірми заданий рівністю $D'(x) = 80 - 0{,}04x.$

Знайти функцію річного прибутку цієї фірми.

6.24. Маржинальна функція доходу малого підприємства дорівнює $D'(x) = 6 - 0{,}03x.$

Після реалізації 100 одиниць продукції підприємство одержало дохід 30 тисяч гривень. Визначити функцію доходу цього підприємства. Який дохід одержить підприємство після реалізації 125 одиниць продукції?

6.25. Маржинальні витрати (у гривнях) взуттєвої фабрики характеризуються функцією $V'(x) = \frac{x}{100}\sqrt{x^2 + 360}$, де x – кількість пар виготовленого взуття.

Знайти функцію загальних витрат фабрики, якщо витрати 50 гривень на пару взуття фіксовані.

РОЗДІЛ 9. **ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ**

§ 1. Обчислення визначених інтегралів

1. *Визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя інтегральної суми при умові, що довжина найбільшого з елементарних відрізків прямує до нуля:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum f(\alpha_i)\Delta x_i.$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то границя інтегральної суми існує і не залежить від способу ділення відрізка $[a;b]$ на частини і від вибору точок α_i.

2. Основні властивості визначеного інтеграла:

2.1. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2.2. $$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

2.3. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a < c < b.$$

2.4. $$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

2.5. $$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

2.6. $$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \quad a < c < b.$$

2.7. Якщо m і M – найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

2.8. Якщо $f(x) \le \varphi(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$, $x \in [a; b]$.

3. Правила обчислення визначених інтегралів:

3.1. *Формула Ньютона – Лейбніца*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

3.2. *Заміна змінної*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

де $x = \varphi(t)$ – функція, неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $\alpha \le t \le \beta$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $f[\varphi(t)]$ – функція неперервна на $[\alpha; \beta]$.

3.3. *Інтегрування частинами*:

$$\int_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ – неперервно диференційовані функції на відрізку $[a; b]$.

3.4. Якщо $f(x)$ – непарна функція, тобто $f(-x) = -f(x)$, то:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0\,.$$

Якщо $f(x)$ – парна функція, тобто $f(-x) = f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

*　　　　*

*

∢ **Задача 1**. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{4dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язування. Використовуючи властивість 2.5, знайдемо первісну функції:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{4dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4\arcsin x \Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} -$$

$$-\arcsin\frac{1}{2}) = 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

∢ **Задача 2**. Обчислити визначений інтеграл

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx.$$

Розв'язування. Зробимо заміну змінної, підставимо $t = \cos x$. Тоді $dt = -\sin x dx$, а $\sin x dx = -dt$. Знайдемо нові межі інтегрування:

якщо $x = 0$, то $t = \cos 0 = 1$;

якщо $x = \frac{\pi}{2}$, то $t = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Таким чином,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx = -\int\limits_1^0 t^3 dt = -\frac{1}{4}t^4\Big|_1^0 = -\frac{1}{4}(0^4 - 1^4) = \frac{1}{4}.$$

∢ **Задача 3**. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx.$

Розв'язування. Використаємо метод інтегрування частинами. Підставимо $u = x,\ dv = e^{-x}dx$, тоді $du = dx,$ $v = \int e^{-x}dx = -\int e^{-x}dx = -e^{-x}.$

Отже,

$$\int\limits_0^1 xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 - \left(-\int\limits_0^1 e^{-x}dx\right) = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x}dx =$$

$$= -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}.$$

* * *

ВПРАВИ

Обчислити визначені інтеграли:

1.1. $\int\limits_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4})dx.$

1.2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$

1.3. $\int\limits_{-2}^{10} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}.$

1.4. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{\cos x}dx.$

1.5. $\int\limits_0^1 e^{5x}dx.$

1.6. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4xdx.$

1.7. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

1.8. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

1.9. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

1.10. $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

1.11. $\int\limits_6^{11} \sqrt{x-2}dx$.

1.12. $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{x^2+1}$.

1.13. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$.

1.14. $\int\limits_0^3 x\sqrt{x^2+16}dx$.

1.15. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.

1.16. $\int\limits_{-2}^1 x^2\sqrt{1-x^3}dx$.

1.17. $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

1.18. $\int\limits_{-12}^{-1} \sqrt{4-5x}dx$.

1.19. $\int\limits_0^{\pi/6} \sin 3xdx$.

1.20. $\int\limits_1^e \ln xdx$.

1.21. $\int\limits_0^2 x\ln(x+2)dx$.

1.22. $\int\limits_0^{\ln 2} xe^x dx$.

1.23. $\int\limits_0^e (2-x)e^{-\frac{x}{2}}dx$.

1.24. $\int\limits_0^1 x\mathrm{arctg}xdx$.

1.25. $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos xdx$.

1.26. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+10}$.

1.27. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x+2}$.

1.28. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^x dx}{e^{2x}-4}$.

§ 2. Невласні інтеграли

1. *Невласними інтегралами* називаються:

1) інтеграли з нескінченними межами;

2) інтеграли від розривної функції або від функції, необмеженої у точках відрізку інтегрування.

2. Невласні інтеграли від функції $f(x)$ з необмеженими межами розглядають так:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx.$$

Якщо вказані границі існують (будуть скінченними числами), то відповідний інтеграл називається *збіжним* і він дорівнює своїй границі.

Якщо якась границя не існує або дорівнює нескінченності, то інтеграл називається *розбіжним*.

3. У випадку необмеженої на $[a;b]$ функції $f(x)$ її точки розриву можуть бути на лівому кінці або на правому кінці, або всередині проміжку інтегрування $[a;b]$. Тоді невласні інтеграли визначають так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Якщо вказані границі існують, то відповідний інтеграл називається *збіжним*. У протилежному випадку інтеграл називається *розбіжним*.

*   *

*

∢ **Задача 1**. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Розв'язування. На основі означення невласного інтеграла знаходимо:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} x^{-2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b} - 1\right) = 1.$$

Оскільки границя існує і дорівнює 1, то заданий невласний інтеграл збігається і дорівнює 1.

∢ **Задача 2**. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{2-x}$.

Розв'язування. Якщо $x \to 2$, підінтегральна функція $\frac{1}{2-x} \to +\infty$. Точка $x = 2$ – точка розриву.

Тому

$$\int\limits_0^{2} \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to 0}[-\ln(2-x)]\Bigg|_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}[\ln(2-2+\varepsilon) - \ln 2] = -\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\varepsilon + \ln 2 = +\infty.$$

Заданий невласний інтеграл розбіжний.

*   *

*

ВПРАВИ

Обчислити невласні інтеграли з нескінченними межами (або встановити їх розбіжність):

2.1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}.$ 2.2. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

2.3. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}.$ 2.4. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}.$

2.5. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}dx.$ 2.6. $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

2.7. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx.$ 2.8. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2dx}{x^3+1}.$

2.9. $\int\limits_0^{\infty} \cos xdx.$ 2.10. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx.$

2.11. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}.$ 2.12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

2.13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

Обчислити невласні інтеграли від розривних функцій (або встановити їх розбіжність):

2.14. $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$ 2.15. $\int\limits_3^{5} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2-9}}.$

2.16. $\int\limits_0^{1} \ln xdx.$ 2.17. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2.18. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x}.$ 2.19. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}.$

2.20. $\int\limits_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$

§ 3. Застосування визначених інтегралів

1. *Площа криволінійної трапеції,* обмеженої кривою $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, двома ординатами $x = a$ і $x = b$ та відрізком $[a; b]$ на осі OX, обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2. *Площа фігури,* обмеженої двома кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ $(f_1(x) \leq f_2(x))$ та двома прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

3. Якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ на осі OX і прямими $x = a$ і $x = b$, обертається навколо осі OX, то *об'єм тіла обертання* обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Аналогічно, *об'єм тіла обертання* навколо осі OY знаходиться за формулою:

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d f^2(y) dy.$$

4. Якщо фігура, обмежена кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ $(0 \leq f_1(x) \leq f_2(x))$ та прямими $x = a$, $x = b$, обертається навколо осі OX, то *об'єм тіла обертання* обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_a^b [{y_2}^2 - {y_1}^2] dx = \pi \int_a^b [{f_2}^2(x) - {f_1}^2(x)] dx.$$

5. Якщо на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)$ неперервні, то *довжина дуги кривої* $y=f(x)$, обмеженої прямими $x=a$ та $x=b$, обчислюється за формулою:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

6. Графік функції $y=f(x)$, яка описує дійсний розподіл доходів населення держави, називається *кривою Лоренца*.

Коефіцієнтом нерівності розподілу доходів кривої Лоренца (*коефіцієнтом Джіні)* називають відношення площі фігури, обмеженої кривою Лоренца та прямою $y=x$ (на малюнку в задачі 5(§ 3) вона заштрихована) до площі фігури, яка лежить нижче прямої $y=x$ (на малюнку в задачі 5(§ 3) – це прямокутний трикутник: ($0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1;\ y=x$).

Коефіцієнт Джіні (k) завжди задовольняє співвідношення : $0\le k\le 1$. Коли $k=0$, доходи населення розподілено рівномірно, а коли $k=1$, нерівномірність розподілу доходів найбільша.

Аналогічні міркування і в задачі про розподіл прибуткового податку.

7. Приріст капіталу за період з моменту часу t_1 до t_2 знаходиться так:

$$\Delta K=K(t_2)-K(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt\,.$$

Тут $K(t)$ - капітал (ресурси, які використовуються в підприємницькій діяльності);

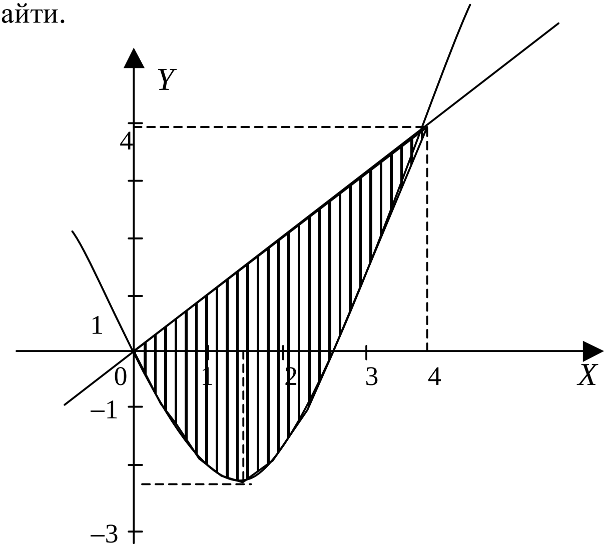
$I(t)=\dfrac{d}{dt}K(t)$ - капітальні інвестиції.

* *

*

∢ **Задача 1**. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 3x$ і $y = x$.

Розв'язування. Спочатку зобразимо фігуру, площу якої треба знайти.



Знайдемо абсциси точок перетину параболи і прямої. Для цього розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = x \end{cases}$,

$x^2 - 3x = x, \; x^2 - 4x = 0, \; x_1 = 0, \; x_2 = 4.$

Оскільки $x > x^2 - 3x$ на відрізку $[0; 4]$, то за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

знайдемо шукану площу:

$$S = \int_0^4 [x - (x^2 - 3x)]dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \int_0^4 4xdx - \int_0^4 x^2 dx =$$

$$= 4\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = 2(2^2 - 0) - \frac{1}{3}(2^3 - 0) = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \text{(кв. од.)}.$$

∢ **Задача 2**. Обчислити об'єм кулі радіусу 3.

Розв'язування. Кулю можна розглядати як результат обертання півкруга, обмеженого частиною кола $x^2 + y^2 = 3^2$, $y \geq 0$, навколо осі OX.

Використовуючи рівність $y = \sqrt{9 - x^2}$, симетричність кола відносно осі OY, одержимо

$$V = \pi \int_{-3}^{3} \left(\sqrt{9 - x^2} \right)^2 dx = 2\pi \int_{0}^{3} (9 - x^2) dx = 2\pi \int_{0}^{3} 9dx - 2\pi \int_{0}^{3} x^2 dx =$$

$$= 18\pi x \Big|_0^3 - 2\pi \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 18 \cdot \pi \cdot 3 - 2\pi \cdot \frac{3^3}{3} = 54\pi - 18\pi = 36\pi (\text{куб. од.}).$$

∢ **Задача 3**. Знайти довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ від $x = 0$ до $x = 1$ $(y \geq 0)$.

Розв'язування. Знайдемо похідну від функції $y^2 = x^3$ $(y = x^{3/2})$:

$$y' = (x^{3/2})' = \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{3}{2} \sqrt{x}.$$

Довжина дуги дорівнює:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4} x \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{8}{27} \left(\frac{13}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} =$$

$$= \frac{8}{27} \left(\frac{13}{8} \sqrt{13} - 1 \right).$$

∢ **Задача 4**. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами:

$$V'(t) = 5 + 2\sqrt[3]{t^2},\ D'(t) = 17 - \sqrt[3]{t^2}.$$

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

Розв'язування. Оптимальний час t для прибутку підприємства одержимо з умови $D'(t)=V'(t)$:

$$5+2\sqrt[3]{t^2}=17-\sqrt[3]{t^2},\ 3\sqrt[3]{t^2}=12,\ \sqrt[3]{t^2}=4,\ t=8.$$

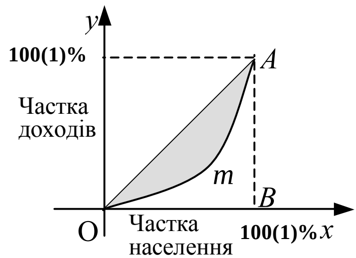
Отже, підприємство було прибутковим 8 років. За цей час одержано прибутку:

$$P=\int_0^8 [D'(t)-V'(t)]dt=\int_0^8\left(17-\sqrt[3]{t^2}-5-2\sqrt[3]{t^2}\right)dt=$$

$$=\int_0^8\left(12-3t^{2/3}\right)dt=\left(12t-3\cdot\frac{t^{5/3}}{5/3}\right)\Bigg|_0^8=96-\frac{9}{2}\cdot 32=38{,}9\,(\text{млн. грн.}).$$

∢ **Задача 5**. Нехай $y=2-\sqrt{4-x^2}$, крива Лоренца, визначена за дослідженнями розподілу доходів в якійсь країні, де ***x***-відсоток населення, у – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

Розв'язування. З малюнка видно, що $k=\dfrac{S_{OAm}}{S_{\Delta OAB}}$,



$$S_{OAm}=\int_0^1(x-2+\sqrt{4-x^2})dx=\int_0^1 xdx-2\int_0^1 dx+\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx.$$

Для знаходження $\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx$ введемо заміну $x=2\sin t$, тоді нижня межа *t=0*, а верхня $t=\dfrac{\pi}{6}$.

Обчислюємо

$$S_{oAm} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1-\sin^2 t}\, 2\cos t dt =$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} - 2 + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}41.$$

Тому $k = \dfrac{0{,}41}{0{,}5} = 0{,}82$. Великий коефіцієнт k показує нерівномірність розподілу доходів серед населення даної країни.

* *

*

ВПРАВИ

Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:

3.1. $y = x^2,\ y = 3x.$ 3.2. $y = \sqrt{x},\ y = x^2.$

3.3. $y = e^x,\ y = x^2,\ x = 0,\ x = 1.$ 3.4. $y = x^2,\ y = 2 - x^2.$

3.5. $y = x^3,\ y = x^2.$ 3.6. $y = -x^2,\ x + y + 2 = 0.$

3.7. $y = \sin x,\ y = \cos x,\ x = 0$. 3.8. $y = \frac{1}{4}x^2,\ y = 3x - \frac{1}{2}x^2.$

3.9. $y = x^2 - 2x + 3,\ \ x = 3,\ \ x = 0,\ \ y = 0$.

3.10. $xy = -1,\ y = -x^2,\ x = 2$. 3.11. $xy = 4,\ x + y - 5 = 0$.

3.12. $y^2 = 4x,\ x^2 = 4y.$ 3.13. $y = x^2 + 1,\ y = x + 3.$

3.14. $y = e^x,\ \ y = e^{-x},\ \ x = 1.$

3.15. $y = x^2 - 6x + 10,\ \ y = 2 + 4x - x^2$.

Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури навколо осі OX, обмеженої лініями:

3.16. $y = 2x,\ y = 0,\ x = 2.$ 3.17. $y = \frac{4}{x},\ x = 1,\ x = 4.$

3.18. $y^2 = (x-1)^3,\ x = 2.$

3.19. $y = x^2 + 1,\ x = 3,\ x = 0,\ y = 0.$

3.20. $y^2 = 4x, y = x.$ 3.21. $y^2 = x + 4, x = 0.$

3.22. $y^2 = x, x^2 = y.$ 3.23. $y = \dfrac{1}{4}x^2, y = \dfrac{1}{8}x^3.$

Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури навколо осі OY, обмеженої лініями:

3.24. $y = x^2,\ y = 1,\ y = 4,\ x = 0.$

3.25. $y = 5,\ y = x^2 + 1.$

3.26. $y = 3 - x^2,\ y = x^2 + 1.$

3.27. $y = x^2,\ y = \sqrt{x}.$

Знайти довжину дуги кривої:

3.28. $y^2 = \dfrac{x^3}{4}$, що відтинається прямою $x = 1.$

3.29. $y = \sqrt{x}$ від точки $x = 0$ до точки $x = 1.$

3.30. $y^2 = x^3$, що відтинається прямою $x = \dfrac{4}{3}$.

3.31. Знайти довжину кола, заданого рівнянням $x^2 + y^2 = 9.$

3.32. Знайти середнє значення витрат $K(x) = 3x^2 + 4x + 1,$ якщо об'єм продукції x змінюється від 0 до 3 одиниць, і вказати об'єм продукції, при якому витрати мають середнє значення.

3.33. Відомі закони зміни швидкості витрат $V'(t)$ і доходу $D'(t)$ підприємства. За який час підприємство одержить максимальний прибуток? Якою буде величина максимального прибутку?

а) $V'(t) = 2 + 3\sqrt{t},\ D'(t) = 14 - \sqrt{t};$

б) $V'(t) = 2 + 2\sqrt[3]{t},\ D'(t) = 10 - 2\sqrt[3]{t}.$

в) $V'(t) = 7 + \sqrt{t}, \quad D'(t) = 27 - 3\sqrt{t};$

г) $V'(t) = 7 + 5\sqrt[3]{t^2}; \quad D'(t) = 31 - \sqrt[3]{t^2};$

д) $V'(t) = 22 + 2\sqrt[4]{t^3}; \quad D'(t) = 27 - 3\sqrt[4]{t^3}$.

Тут t вимірюють у роках, а витрати $V(t)$ і дохід $D(t)$ – у млн. гривень.

3.34. Денна продуктивність праці (за 7 робочих годин) бригади робочих машинобудівного заводу виражена функцією $y = -0{,}0033t^2 - 0{,}08t + 20{,}96,$ де t – проміжок часу в годинах.

Визначити об'єм випуску продукції протягом року (за 240 робочих днів). Обчислити прибуток, якщо заводська оптова ціна одиниці продукції становить 200 гривень, її собівартість – 100 гривень, а кількість бригад – 10.

3.35. Витрати електроенергії (у кВт) міськими підприємствами і населенням міста з 8 до 18 год. наближено виражені функцією $y = 10000 - 8t + 15t^2$, де t – проміжок часу в годинах. Визначити вартість електроенергії, спожитої містом, якщо вартість 1кВт/год дорівнює 12 коп.

3.36.Надходження товару на склад виражене функцією $y_1 = 0{,}006t^2 - 0{,}3t + 75,$ а реалізація цих товарів – функцією $y_2 = 0{,}003t^2 - 0{,}4t + 56,$ де t – кількість днів. Визначити запас товару в умовних одиницях після закінчення 60 робочих днів, якщо вихідного товару на складі не було.

3.37. За даними дослідження в розподілі доходів в одній із країн крива Лоренца описана рівнянням $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$. Тут x відсоток населення, а y - відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

3.38. Нехай $y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$, крива Лоренца визначена дослідженням нерівномірного розподілу прибуткового податку.

Тут y - відсоток загального прибуткового податку; x - відсоток всього населення держави, яка сплачує цей податок. Обчислити коефіцієнт нерівномірності розподілу податку (коефіцієнт Джіні).

3.39. Капітальні інвестиції фірми "БІОС" характеризуються функцією $I(t) = 9000t^{1/2}$.

Знайдіть:

1) приріст капіталу за три роки;
2) проміжок часу, за який приріст становитиме 150000 у.о.

3.40. Функція маржинальних витрат має вигляд: $V'(x) = 23{,}5 - 0{,}01x$. Знайти зростання загальних витрат, якщо виробництво зростає з 1000 до 1500 одиниць.

РОЗДІЛ 10. **ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

§ 1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

1. Звичайним *диференціальним рівнянням* називається таке рівняння, що пов'язує незалежну змінну, її функцію і похідні (або диференціали) цієї функції.

Це означення можна записати так:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називається функція y, що залежить від аргументу x і n незалежних довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, тобто має вигляд $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, і яка при її підстановці у рівняння перетворює його у тотожність.

Загальним інтегралом диференціального рівняння називається такий його загальний розв'язок, який не розв'язаний відносно y, тобто $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$.

2. Звичайне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд:

$$F(x, y, y') = 0,$$

або в розв'язаному відносно похідної y':

$$y' = f(x, y).$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається така функція $y = \varphi(x, C)$, яка при довільному значенні сталої C є розв'язком заданого рівняння, тобто при підстановці в рівняння замість невідомої функції перетворює його в тотожність.

Розв'язок, одержаний із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні сталої C, називається *частковим*.

Задача знаходження часткового розв'язку, що задовольняє початкові умови $y = y_0$, $x = x_0$, називається *задачею Коші*.

Ця задача має вигляд:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y = y_0 \ \text{ при } \ x = x_0. \end{cases}$$

Побудований на площині XOY графік всякого рівняння $y = \varphi(x)$ заданого диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

3. Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$$

називається рівнянням з *відокремленими* змінними.

4. Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$f_1(x) \cdot \varphi_1(y)dx + f_2(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0$$

називається рівнянням з *відокремлюваними* змінними.

*   *

*

∢ **Задача 1.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0.$$

Розв'язування. У заданому рівнянні при dx і при dy записані функції, що залежать лише від x та y відповідно. Тому це рівняння з відокремленими змінними, і його загальний розв'язок знайдемо шляхом інтегрування:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = 0, \qquad \ln|x| + \ln|y| = \ln C.$$

Тут постійну інтегрування зручніше позначити через $\ln C$.

$$\ln|yx| = \ln C, \quad yx = C.$$

Загальний розв'язок буде $y = \dfrac{C}{x}$.

∢ **Задача 2.** Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння $y\sqrt{1+x^2}\cdot y' + x\cdot\sqrt{1+y^2} = 0$,
а також частковий інтеграл, що задовольняє початкові умови $y = 0$ при $x = \sqrt{3}$.

Розв'язування. Запишемо дане диференціальне рівняння у такому вигляді:

$$y\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{dy}{dx} + x\sqrt{1+y^2} = 0.$$

Помножимо обидві частини рівняння на dx:

$$y\sqrt{1+x^2}\cdot dy + x\cdot\sqrt{1+y^2}dx = 0.$$

Приведемо це рівняння з відокремлюваними змінними до рівняння з відокремленими змінними шляхом ділення його на $\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}$:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0.$$

Інтегруючи обидві частини цього рівняння, одержимо:

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = C.$$

Звідси загальним інтегралом даного рівняння буде:

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C.$$

Частковий інтеграл одержимо з умови $y = 0$ при $x = \sqrt{3}$. Підставивши ці значення x і y в знайдений загальний інтеграл, одержимо:

$$\sqrt{1+3} + \sqrt{1+0} = C,\ C = 3.$$

Частковим інтегралом буде:

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 3.$$

*   *

*

ВПРАВИ

У диференціальних рівняннях:

1) знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл);

2) побудувати декілька інтегральних кривих;

3) знайти частковий розв’язок (частковий інтеграл) за початковими умовами: $y=4$ при $x=-2$.

1.1. $xy'-y=0$. 1.2. $yy'+x=0$.

1.3. $y'=y$.

Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) і частковий розв’язок (частковий інтеграл) за початковими умовами:

1.4. $2y'\sqrt{x}=y,\ \ y=1$ при $x=4$.

1.5. $y'=(2y+1)\mathrm{ctg}x,\ \ y=1/2$ при $x=\pi/4$.

1.6. $x^2y'+y^2=0,\ \ y=1$ при $x=-1$.

1.7. $y'=2\sqrt{y}\ln x,\ \ y=1$ при $x=e$.

1.8. $(1+x^2)dy+ydx=0,\ \ y=1$ при $x=1$.

1.9. $y'(x^2+1)=2xy,\ \ y=1$ при $x=0$.

Розв’язати диференціальні рівняння:

1.10. $x^2y'+y=0$. 1.11. $x+xy+y'(y+xy)=0$.

1.12. $y'=\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y$.

1.13. $(1+y)dx+(1-x)dy=0$.

1.14. $\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$.

1.15. $x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0$.

1.16. $xydy-(1-y^2)dx=0$. 1.17. $(3x-1)dy+y^2dx=0$.

1.18. $3x^2ydx+2\sqrt{4-x^3}dy$. 1.19. $xyy'=1-x^2$.

1.20. $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$.

§ 2. Диференціальні рівняння першого порядку: однорідне, лінійне

1. *Однорідним* диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

якщо $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – однорідні функції одного виміру.

Функція $f(x, y)$ називається *однорідною виміру* m, якщо

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Однорідне диференціальне рівняння зводиться до рівняння вигляду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Підстановкою $y = u \cdot x$ це рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

2. *Лінійним* диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке містить шукану функцію y та її похідну y' в першому степені.

Таке рівняння має вигляд

$$y' + p(x) \cdot y = f(x)$$

і підстановкою $y = u(x) \cdot v(x)$ приводиться до інтегрування двох диференціальних рівнянь першого порядку з відокремлюваними змінними.

* *

*

∢ **Задача 1.** Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$.

Розв'язування. Рівняння є однорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Доведемо це:

$$P(x, y) = x^2 + 2xy, \qquad Q(x, y) = xy.$$

$$P(tx,ty)=(tx)^2+2(tx)(ty)=t^2x^2+2t^2xy=t^2(x^2+2xy)=$$
$$=t^2P(x,y);$$
$$Q(tx,ty)=(tx)(ty)=t^2(xy)=t^2Q(x,y).$$

При підстановці $y=u\cdot x$, $dy=xdu+udx$ маємо

$$(x^2+2x^2u)dx+ux^2(xdu+udx)=0,$$

або

$$(x^2+2x^2u+u^2x^2)dx+ux^3dx=0.$$

Це рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні та інтегруючи його, одержимо:

$$\frac{dx}{x}+\frac{udu}{(u+1)^2}=0,\quad \int\frac{dx}{x}+\int\frac{udu}{(u+1)^2}=C.$$

Перетворимо другий інтеграл:

$$\ln|x|+\int\frac{u+1-1}{(u+1)^2}du=C,$$

або

$$\ln|x|+\ln|u+1|+\frac{1}{u+1}=C.$$

Повернемось до старої змінної y $(u=\dfrac{y}{x})$:

$$\ln|x|+\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{\dfrac{y}{x}+1}=C,$$

$$\ln|x|+\ln\left|\frac{y+x}{x}\right|+\frac{x}{y+x}=C,\quad \ln|x+y|+\frac{x}{y+x}=C.$$

∢ **Задача 2.** Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y'-\dfrac{2x}{x^2+1}y=x\sqrt{x^2+1}$ і частковий розв’язок за початковими умовами: $y=2$ при $x=0$.

Розв’язування. Задане диференціальне рівняння першого порядку є лінійним. Тому розв’язок будемо шукати у вигляді

$y = u(x)\cdot v(x).$ Тоді $y' = u'v + uv'.$ Підставивши вирази для y' і y у вихідне рівняння і, погрупувавши його члени, одержимо:

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}v\right) = x\sqrt{x^2+1}. \qquad (*)$$

Визначимо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}v = 0.$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні, одержимо:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2x}{x^2+1}dx.$$

Почленне інтегрування дає:

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{2x}{x^2+1}dx, \quad \ln|v| = \ln(x^2+1).$$

Тут взято лише частковий розв'язок диференціального рівняння, якому відповідає довільна стала, що дорівнює нулю. Тоді $v = x^2+1.$

Підставляючи знайдене значення функції v у рівність (*), одержимо

$$(x^2+1)\frac{du}{dx} = x\sqrt{x^2+1}.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними для знаходження функції u. Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx, \quad u = \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння буде:

$$y = (\sqrt{x^2+1} + C)(x^2+1) = \sqrt{(x^2+1)^3} + C(x^2+1).$$

Тепер знайдемо частковий розв'язок, підставивши в загальний розв'язок початкові умови $x=0, y=2.$ Таким чином матимемо

$$2 = 1 + C, \; C = 1.$$

Частковий розв'язок запишемо так:

$$y = \sqrt{(x^2+1)^3} + x^2 + 1.$$

*　　　*

*

ВПРАВИ

Розв'язати однорідні диференціальні рівняння першого порядку:

2.1. $y' = \dfrac{x+y}{x}$.　　2.2. $y' = \dfrac{2y}{x}$.

2.3. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$.　　2.4. $y' = \dfrac{2yx + y^2}{x^2}$.

2.5. $y' = \dfrac{y^2}{xy - x^2}$.　　2.6. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$.

2.7. $xyy' = y^2 + 2x^2$.　　2.8. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

2.9. $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$, $y = \dfrac{\pi}{2}$ при $x = 1$.

2.10. $xy' - y = x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$, $y = \dfrac{\pi}{2}$ при $x = 1$.

Розв'язати лінійні диференціальні рівняння першого порядку:

2.11. $xy' - 2y = 2x^4$.　　2.12. $y' - y\operatorname{ctg}x = \sin x$.

2.13. $y' + 2y = 4x$.　　2.14. $(x^2+1)y' + 4xy = 3$.

2.15. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}$.　　2.16. $y' - 2y = e^{2x}$.

2.17. $y' - \dfrac{3y}{x} = x$.　　2.18. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$.

2.19. $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$.　　2.20. $xy' + y = \ln x + 1$.

2.21. $(2x+1)y' + y = x$.　　2.22. $y' + y\cos x = \sin 2x$.

2.23. $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = x^3$.

2.24. $x^2 y' = 2yx - 3,\ \ y = 1$ при $x = -1$.

2.25. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x},\ \ y = 1$ при $x = -1$.

§ 3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

1. Диференціальне рівняння другого порядку називається *лінійним однорідним рівнянням з постійними коефіцієнтами*, якщо воно має вигляд:

$$y'' + py' + gy = 0,$$

де p і g – сталі числа.

Відповідним *характеристичним* рівнянням називається таке рівняння:

$$k^2 + pk + g = 0.$$

Загальний розв’язок заданого диференціального рівняння залежить від значень коренів характеристичного рівняння.

1.1. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тобто $k_1 \neq k_2$, то загальний розв’язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

1.2. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тобто $k_1 = k_2 = k$, то

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x).$$

1.3. Якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені, тобто $k_1 = \alpha + i\beta,\ \ k_2 = \alpha - i\beta$, де $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = -\dfrac{p}{2},\ \beta = \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - g}$, то

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

2. Диференціальне рівняння другого порядку називається *лінійним неоднорідним* рівнянням з постійними коефіцієнтами, якщо воно має вигляд:

$$y'' + py' + gy = f(x),$$

де p і g – сталі числа.

Загальний розв'язок ($y_{з.н.}$) лінійного неоднорідного рівняння з постійними коефіцієнтами дорівнює сумі загального розв'язку ($y_{з.о.}$) відповідного однорідного рівняння і довільного його часткового розв'язку ($y_{ч.н.}$), тобто

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}.$$

Частковий розв'язок ($y_{ч.н.}$) підбирають подібної форми до функції $f(x)$.

2.1. Нехай $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня.

Тоді

а) $y_{ч.н.} = Q_n(x)e^{\alpha x}$, α – не є коренем характеристичного рівняння;

б) $y_{ч.н.} = x^r Q_n(x)e^{\alpha x}$, α – є коренем характеристичного рівняння кратності r (r =1 або r =2).

Тут $Q_n(x)$ – многочлен n-го степеня з неозначеними коефіцієнтами.

2.2. Нехай $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos \beta x + R_m(x)\sin \beta x)$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня, $R_m(x)$ – многочлен m-го степеня.

Тоді

а) $y_{ч.н.} = e^{\alpha x}(L_k(x)\cos \beta x + N_k(x)\sin \beta x)$, $\alpha + \beta i$ – не є коренем характеристичного рівняння;

б) $y_{ч.н.} = xe^{\alpha x}(L_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x)$, $\alpha + \beta i$ – є коренем характеристичного рівняння.

Тут $L_k(x)$, $N_k(x)$ – многочлени k-го степеня з неозначеними коефіцієнтами $(k = \max(m,n))$.

3. Для диференціального рівняння другого порядку задача Коші має вигляд:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'') = 0 \\ y = y_0 \;\; при \;\; x = x_0 \\ y' = y_0' \;\; при \;\; x = x_0 \end{cases}.$$

*　　*

*

∢ **Задача 1.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'' + 3y' - 10y = 0.$$

Розв’язування. Характеристичне рівняння для заданого диференціального має вигляд

$$k^2 + 3k - 10 = 0.$$

Його корені $k_1 = -2,\ k_2 = 5$ дійсні і різні. Тому загальний розв’язок рівняння запишеться у вигляді:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_1 e^{5x}.$$

∢ **Задача 2.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Розв’язування. Характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 9 = 0$ має дійсні та рівні корені $k_1 = k_2 = 3$. Тому загальний розв’язок заданого диференціального рівняння буде:

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2 x).$$

∢ **Задача 3.** Розв'язати диференціальне рівняння
$$y'' - 2y' + 10y = 0.$$

Розв'язування. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 10 = 0$ має комплексно-спряжені корені: $k_1 = 1 + 3i$, $k_2 = 1 - 3i$. Тут $\alpha = 1$, $\beta = 3$. Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння такий:
$$y = e^x (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x).$$

∢ **Задача 4.** Розв'язати диференціальне рівняння
$$y'' + 3y' - 4y = 4x^2 - 2x.$$

Розв'язування. Спочатку розв'яжемо однорідне рівняння $y'' + 3y' - 4y = 0$, яке відповідає заданому неоднорідному рівнянню. Характеристичне рівняння $k^2 + 3k - 4 = 0$ має дійсні та різні корені $k_1 = -4$, $k_2 = 1$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння буде:
$$y_{з.о.} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x .$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння запишемо у вигляді
$$y_{ч.н.} = Ax^2 + Bx + C,$$
оскільки в правій частині заданого рівняння є квадратний тричлен. Підставимо значення функції і її похідних у рівняння
$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2 - 2x;$$
$$-4Ax^2 + (6A - 4B)x + (2A + 3B - 4C) = 4x^2 - 2x.$$

Прирівняємо коефіцієнти біля однакового степеня x:
$$\begin{cases} -4A = 4 \\ 6A - 4B = -2 \\ 2A + 3B - 4C = 0. \end{cases}$$

Звідси $A = -1$, $B = -1$, $C = -\dfrac{5}{4}$.

Частковий розв’язок $y_{ч.н.} = -x^2 - x - \frac{5}{4}$, а загальний розв’язок заданого неоднорідного рівняння такий:

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x} - x^2 - x - \frac{5}{4}.$$

∢ **Задача 5.** Знайти частковий розв’язок диференціального рівняння

$$y'' + 4y' + 4y = \cos x - 2\sin x,$$

що задовольняє початкові умови:

$$y = 1,\ y' = 2,\ \text{при}\ \ x = 0.$$

Розв’язування. Характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 4 = 0$ для диференціального рівняння $y'' + 4y' + 4y = 0$ має дійсні та рівні корені $k_1 = k_2 = -2$, тому загальний розв’язок цього рівняння $y_{з.о.} = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$.

Частковий розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y_{ч.н.} = A\cos x + B\sin x$.

Разом з першою похідною $y' = -A\sin x + B\cos x$ і другою похідною $y'' = -A\cos x - B\sin x$ підставимо їх значення у задане неоднорідне диференціальне рівняння:

$$-A\cos x - B\sin x + 4(-A\sin x + B\cos x) + 4(A\cos x + B\sin x) =$$

$$= \cos x - 2\sin x,$$

$$(-A + 4B + 4A)\cos x + (-B - 4A + 4B)\sin x = \cos x - 2\sin x.$$

Таким чином, маємо систему

$$\begin{cases} 3A + 4B = 1 \\ -4A + 3B = -2 \end{cases},\ \text{тобто}\ \ A = \frac{33}{25},\ B = -\frac{2}{25}.$$

Отже, загальний розв’язок заданого лінійного неоднорідного рівняння такий:

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{33}{25}\cos x - \frac{2}{25}\sin x.$$

Знайдемо C_1 і C_2, використовуючи початкові умови:

$$\begin{cases} e^0(C_1 + C_2 \cdot 0) + \dfrac{33}{25}\cos 0 - \dfrac{2}{25}\sin 0 = 1 \\ -2e^0(C_1 + C_2 \cdot 0) + e^0 \cdot C_2 - \dfrac{33}{25}\sin 0 - \dfrac{2}{25}\cos 0 = 2 \end{cases}.$$

Тобто

$$\begin{cases} C_1 + \dfrac{33}{25} = 1 \\ -2C_1 + C_2 - \dfrac{2}{25} = 2 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} C_1 = -\dfrac{8}{25} \\ -2C_1 + C_2 = \dfrac{52}{25} \end{cases}.$$

Звідси $C_1 = -\dfrac{8}{25}$, $C_2 = \dfrac{36}{25}$.

Частковий розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y = e^{-2x}\left(-\frac{8}{25} + \frac{36}{25}x\right) + \frac{33}{25}\cos x - \frac{2}{25}\sin x.$$

*　　　*

*

ВПРАВИ

Розв'язати лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами:

3.1. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

3.2. $y'' - 8y' + 16y = 0$.

3.3. $y'' + 6y' + 13y = 0$.

3.4. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

3.5. $y'' - 6y' + 34y = 0$.

3.6. $y'' - 4y = 0$.

3.7. $y'' - 4y' + 4y = 0,\quad y = 3,\ y' = 1$ при $x = 0$.

3.8. $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y = 0,\ y' = 15$ при $x = 0$.

3.9. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.

3.10. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$.

3.11. $y'' + y' - 2y = 6x^2$.

3.12. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$.

3.13. $y'' + 2y' + y = e^x$.

3.14. $y'' - 2y' = x + 3$.

3.15. $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

3.16. $y'' + 2y' + 2y = \sin x$.

3.17. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$.

3.18. $y'' + 3y' = 9x$.

3.19. $y'' + y' - 2y = \cos 3x - 3\sin x$, $y = 1, y' = 2$ при $x = 0$.

3.20. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$, $y = 2, y' = -1$ при $x = 0$.

Розв’язати задачі економічного змісту:

3.21. Стосовно попиту кількості одиниць Q певного товару вартістю p за кожну одиницю відомо, що еластичність попиту, яку визначають формулою $E = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}$, постійна і дорівнює $-\frac{1}{2}$. Знайти функцію попиту на цей товар.

3.22. Еластичність попиту на певний товар постійна і дорівнює -2. Визначити функцію попиту вигляду $Q = f(p)$, якщо $p = \frac{1}{2}$, коли $Q = 4$.

3.23. Еластичність попиту на певні вироби змінюється разом зі зміною вартості кожного виробу за законом $E = \frac{p}{p-10}$. Визначити функцію попиту вигляду $Q = f(p)$, якщо $0 < p < 10$ і $p = 7$, коли $Q = 15$.

3.24. Еластичність попиту товару – $E = \dfrac{Q - 200}{Q}$. Визначити функцію попиту вигляду $Q = f(p)$, якщо $0 < Q < 200$ і $p = 5$, коли $Q = 190$.

3.25. Кількість населення певного міста $y(t)$ (t вимірюють у роках) задовольняє диференціальне рівняння $y' = 0{,}1y(1 - 10^{-6}y)$.

Через скільки років кількість населення цього міста збільшиться зі 100000 до 500000?

РОЗДІЛ 11. **РЯДИ**

§ 1. Числові ряди

1. Нехай задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$.

Вираз $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ називається нескінченним *числовим рядом* (або просто *рядом*), числа $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ – членами ряду, u_n – загальним членом ряду.

Частковою сумою числового ряду називається сума S_n перших n членів числового ряду, тобто $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$, ..., $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.

Сумою S числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається границя його часткової суми S_n при $n \to \infty$, тобто

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n .$$

Якщо границя часткової суми ряду є скінченне число, то ряд називається *збіжним* і позначається

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Якщо границя часткової суми не існує або дорівнює $\pm\infty$, то числовий ряд називається *розбіжним.*

2. Числовий ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$$

називається *рядом геометричної прогресії* зі знаменником q.

При $|q| < 1$ ряд геометричної прогресії збігається і його сума дорівнює $S = \dfrac{a}{1-q}$.

При $|q| \geq 1$ ряд розбігається.

3. Числовий ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

називається *гармонічним рядом*. Цей ряд розбігається.

4. *Необхідна ознака збіжності числового ряду*.

Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то його загальний член $u_n \to 0$ при $n \to \infty$, тобто $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

5. *Достатні ознаки збіжності числових рядів*.

1) *Ознака Даламбера*.

Нехай усі члени числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ додатні і при необмеженому зростанні номера n границя відношення $(n+1)$-го члена до n-го дорівнює числу d, тобто

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Якщо $d < 1$, тоді числовий ряд збігається. При $d > 1$ цей ряд розбігається. При $d = 1$ потрібно застосовувати іншу ознаку.

2) Нехай треба дослідити збіжність заданого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \; u_n > 0. \tag{A}$$

Візьмемо другий додатний числовий ряд, збіжність чи розбіжність якого відома:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n, \; \nu_n > 0. \tag{B}$$

Ознака порівняння.

Якщо ряд (B) збігається і, починаючи з деякого номера n, виконується співвідношення $u_n \leq \nu_n$, тоді й ряд (A) також збігається.

Якщо ряд (В) розбігається і, починаючи з деякого номера n, виконується співвідношення $u_n \geq \nu_n$, тоді й ряд (А) також розбігається.

3) *Інтегральна ознака Коші*.

Нехай $y = f(x)$ – неперервна, монотонно спадна і додатна в інтервалі $(0; +\infty)$ функція, значення якої $f(1), f(2), f(3), ..., f(n), ...$ дорівнюють відповідним додатним членам ряду $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$.

Тоді для збіжності ряду необхідно і достатньо, щоб невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ мав скінченну величину.

Якщо невласний інтеграл не існує (або дорівнює нескінченності), то числовий ряд розбігається.

6. Якщо члени числового ряду мають різні знаки, то ряд називається *знакозмінним.*

Ряд, члени якого почергово мають додатний та від'ємний знаки, називається *знакопереміжним*. Такий ряд можна записати, наприклад, у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1} u_n + ...$$

$$u_n > 0, n = 1, 2, 3, ...$$

Знакопереміжний ряд називається *збіжним абсолютно*, якщо збігається додатний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, складений з абсолютних величин цього знакопереміжного ряду.

Ознака Лейбніца. Якщо абсолютні величини знакопереміжного ряду монотонно спадають

$$u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...$$

і границя його загального члена дорівнює нулю при $n \to \infty$, тобто виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, тоді знакопереміжний ряд збігається, причому його часткова сума S_n обов'язково менша від першого члена ряду.

Якщо знакопереміжний ряд збігається, а ряд, складений з абсолютних величин, розбігається, то знакопереміжний ряд називається *неабсолютно* збіжним (або *умовно* збіжним).

*　　　*

*

∢ **Задача 1.** Дослідити збіжність ряду

$$\frac{2}{11}+\frac{4}{21}+\frac{6}{31}+\ldots+\frac{2n}{10n+1}+\ldots.$$

Розв'язування. Загальний член ряду $u_n=\dfrac{2n}{10n+1}$.

Знайдемо при $n\to\infty$ його границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{10n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)'}{(10n+1)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\neq 0.$$

Оскільки необхідна ознака збіжності числового ряду не виконується, то він розбіжний.

∢ **Задача 2.** Дослідити збіжність ряду

$$1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{n!}+\ldots.$$

Розв'язування. Оскільки $u_n=\dfrac{2^{n-1}}{n!}$, то $u_{n+1}=\dfrac{2^n}{(n+1)!}$. За ознакою Даламбера:

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}:\frac{2^{n-1}}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{2^{n-1}(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n!}{(n+1)n!}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Оскільки $d=0<1$, то заданий числовий ряд збігається.

∢ **Задача 3.** Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}+\frac{1}{4\cdot 4^4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 4^n}+\ldots.$$

Розв'язування. Порівняємо заданий ряд $\sum_{n\to 1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n}$ з рядом геометричної прогресії, знаменник якого $q=\frac{1}{4}$. Кожний член нашого ряду менший або дорівнює відповідному члену ряду геометричної прогресії, який збігається, тому що $|q|<1$:

$$\frac{1}{n\cdot 4^n}\le\frac{1}{4^n}\quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Отже, заданий ряд збігається.

∢ **Задача 4.** Дослідити збіжність ряду

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots.$$

Розв'язування. Функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ (вигляд її встановлюємо із загального члена ряду заміною n на x) набуває лише додатних значень, монотонно спадає на інтервалі $(0;\infty)$. Значення $f(1)=1$, $f(2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(3)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, …, $f(n)=\frac{1}{\sqrt{n}}$, … дорівнюють відповідним членам заданого ряду. Отже, функція $f(x)$ задовольняє умови інтегральної ознаки Коші.

Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_1^b=2\lim_{b\to\infty}\left.\sqrt{x}\right|_1^b=$$

$$=2\lim_{b\to\infty}(\sqrt{b}-1)=\infty.$$

Невласний інтеграл розбігається, отже, і заданий числовий ряд розбігається.

∢ **Задача 5.** Дослідити збіжність ряду

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots .$$

Розв'язування. Для заданого знакопереміжного ряду виконуються обидві умови ознаки Лейбніца:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Ряд, складений з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – розбіжний гармонічний ряд, тому заданий знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ збігається неабсолютно (умовно збіжний).

*　　　*

*

ВПРАВИ

Знайти вирази n-х членів рядів, заданих першими членами:

1.1. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots.$

1.2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots.$

1.3. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots.$

1.4. $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\ldots.$

1.5. $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{6}+\frac{7}{24}+\ldots.$

1.6. $\frac{1}{99}+\frac{2}{199}+\frac{3}{299}+\frac{4}{399}+\ldots.$

Перевірити виконання необхідної умови збіжності та вказати, які з рядів розбігаються:

1.7. $\frac{1}{5}+\frac{2}{8}+\frac{3}{11}+\frac{4}{14}+\ldots$. 1.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

1.9. $\frac{1}{4}+\frac{2}{6}+\frac{3}{10}+\frac{4}{18}+\ldots$. 1.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n}$.

1.11. $\frac{1}{1+2\ln 2}+\frac{1}{2+3\ln 3}+\frac{1}{3+4\ln 4}+\ldots$. 1.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

За допомогою ознаки Даламбера дослідити збіжність рядів:

1.13. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots$. 1.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

1.15. $1+\frac{4}{2!}+\frac{9}{3!}+\frac{16}{4!}+\ldots$. 1.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$.

1.17. $5+\frac{5^2}{1\cdot 2}+\frac{5^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{5^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$. 1.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$.

1.19. $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\ldots$. 1.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3 n}{n!}$.

За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити збіжність рядів:

1.21. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$. 1.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$.

1.23. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+3^2}+\frac{1}{1+4^2}+\ldots$. 1.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

1.25. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\frac{1}{4\ln^2 4}+\frac{1}{5\ln^2 5}+\ldots$. 1.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$.

1.27. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots$. 1.28. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$.

Використовуючи ознаку порівняння, дослідити збіжність рядів:

1.29. $1+\frac{1}{\sqrt[5]{2}}+\frac{1}{\sqrt[5]{3}}+\frac{1}{\sqrt[5]{4}}+\ldots$.

1.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

1.31. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\ldots$.

1.32. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

1.33. $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}+\ldots$.

1.34. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n}$.

1.35. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\ldots$.

1.36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^n}$.

Дослідити збіжність знакопереміжних рядів:

1.37. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$.

1.38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

1.39. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots$.

1.40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

1.41. $\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}-\frac{1}{5\ln 5}+\ldots$.

1.42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$.

1.43. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots$.

1.44. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

1.45. $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$.

§ 2. Степеневі ряди

1. *Степеневим рядом* називається ряд такого вигляду:

$$\sum_{n\to 0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

або

$$\sum_{n\to 0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \ldots +$$
$$+ a_n (x - x_0)^n + \ldots,$$

де a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ – дійсні числа, які називаються *коефіцієнтами* степеневого ряду; x_0 – деяке постійне число.

2. Число R називається *радіусом* збіжності степеневого ряду, якщо для $|x| < R$ ряд збігається, а для $|x| > R$ – розбігається.

Радіус збіжності знаходимо за формулою:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Інтервал $(-R; R)$ називається *інтервалом збіжності* степеневого ряду.

3. *Ряд Тейлора*:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \ldots .$$

4. *Ряд Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots .$$

*   *

*

➤ **Задача 1.** Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$$

і дослідити його на збіжність на кінцях інтервалу.

Розв'язування. Оскільки $a_n=\dfrac{1}{n^2}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^2}$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}:\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1.$$

Отже, інтервал збіжності степеневого ряду буде $(-1;1)$. Розглянемо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

При $x=1$ маємо числовий ряд:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots.$$

Для дослідження на збіжність використаємо інтегральну ознаку Коші. Для цього обчислимо інтеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b=-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{x}\Bigg|_1^b=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right)=1.$$

Невласний інтеграл збігається, отже, і числовий ряд теж збігається, тобто правий кінець входить в інтервал збіжності.

При $x=-1$ одержимо числовий знакопереміжний ряд:

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n^2}+\ldots,$$

який збігається абсолютно, тому що виконуються умови ознаки Лейбніца:

1) $1>\dfrac{1}{2^2}>\dfrac{1}{3^2}>\ldots>\dfrac{1}{n^2}>\ldots,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$

і збігається ряд, складений з абсолютних величин (ряд, який досліджений вище на правому кінці інтервалу).

Таким чином, заданий степеневий ряд абсолютно збігається в інтервалі $[-1;1]$.

∢ **Задача 2.** Розкласти в степеневий ряд функцію $f(x)=\sin^2 x$.

Розв'язування. Продиференціювавши функцію $f(x)$, маємо:

$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x,$ $\quad f''(x)=2\cos 2x,$

$f'''(x)=-4\sin 2x,$ $\quad f^{IV}(x)=-8\cos 2x,$

$f^{V}(x)=16\sin 2x,$ $\quad f^{VI}(x)=32\cos 2x.$

При $x=0$ одержимо:

$f(0)=0,$ $f'(0)=0,$ $f''(0)=8,$ $f'''(0)=0,$ $f^{IV}(0)=-8,$ $f^{V}(0)=0,$ $f^{VI}(0)=32.$

Підставивши ці значення у ряд Маклорена, одержимо шуканий розклад функції:

$$\sin^2 x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{8}{4!}x^4+\frac{32}{6!}x^6-\ldots .$$

*   *

*

ВПРАВИ

Знайти інтервал збіжності степеневих рядів і дослідити їх збіжність на кінцях цих інтервалів:

2.1. $1+x+x^2+x^3+\ldots .$

2.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n x^n$.

2.3. $1+\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x^2}{\sqrt{3}}+\frac{x^3}{\sqrt{4}}+\ldots .$

2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$.

2.5. $\frac{10x}{\sqrt{1}}+\frac{10^2x^2}{\sqrt{2}}+\frac{10^3x^3}{\sqrt{3}}+\frac{10^4x^4}{\sqrt{4}}+\ldots .$

2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

2.7. $\frac{100x}{1^2}+\frac{100^2x^2}{2^2}+\frac{100^3x^3}{3^2}+\frac{100^4x^4}{4^2}+\dots$. 2.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

2.9. $1+x+2!x^2+3!x^3+\dots$. 2.10. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(n+1)^2}$.

2.11. $1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$. 2.12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{2n-1}$.

2.13. $\frac{1}{2}-\frac{x}{2\cdot 3}+\frac{x^2}{2^2\cdot 4}-\frac{x^3}{2^3\cdot 5}+\dots$. 2.14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot n\cdot x^{n-1}$.

2.15. $(x+1)+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2}+\frac{(x+1)^4}{4\cdot 4^3}+\dots$.

2.16. $\frac{2x-3}{1}-\frac{(2x-3)^2}{3}+\frac{(2x-3)^3}{5}-\dots$.

Розкласти в степеневий ряд функції:

2.17. $f(x)=x\cdot e^x$. 2.18. $f(x)=\cos 2x$.

2.19. $f(x)=xe^{-x^2}$. 2.20. $f(x)=e^{x^2}$.

2.21. $f(x)=\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)$. 2.22. $f(x)=\ln\left(1+2x^2\right)$.

§ 3. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Розклад деяких функцій у ряд Маклорена:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots, \qquad x\in(-\infty;\infty);$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+\dots, \qquad x\in(-1;1);$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty;\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty;\infty);$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \qquad x \in (-1;1];$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \ldots, \qquad x \in (-1;1);$$

$$\mathrm{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \qquad x \in [-1;1].$$

*   *

*

⊀ **Задача 1.** Обчислити число e.

Розв'язування. Використаємо розклад функції e^x у ряд Маклорена і, підставивши $x=1$, одержимо

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots .$$

Якщо за наближене значення числа e взяти суму перших семи членів цього ряду:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720},$$

одержимо $e \approx 2{,}718$.

⊀ **Задача 2.** Обчислити $\sqrt[3]{130}$, обмежившись двома членами розкладу.

Розв'язування. Запишемо число $\sqrt[3]{130}$ у вигляді

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5\left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

У нашому випадку, поклавши в біноміальному ряді

$x = \frac{1}{25}$, $m = \frac{1}{3}$, матимемо $\sqrt[3]{130} = 5(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{25}) = 5\frac{1}{15}$.

∢ **Задача 3.** Обчислити $\cos 5^\circ$, обмежившись двома членами розкладу.

Розв'язування. Використаємо формулу розкладу $\cos x$ у ряд. Переведемо 5° у радіанну міру: $5^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 5^\circ = \frac{\pi}{36}$. Тоді $\cos 5^\circ \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{36}\right)^2$. Підставивши $\pi = 3{,}14159$, одержимо $\cos 5^\circ \approx 0{,}9962$.

∢ **Задача 4.** Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{0,3} e^{-x^2} dx$.

Розв'язування. Замінюючи в рівності

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

x на $-x^2$, одержимо

$$\int\limits_0^{0,3} e^{-x^2} dx = \int\limits_0^{0,3} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \ldots\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42}\right)\Bigg|_0^{0,3} \approx$$

$\approx 0{,}291.$

∢ **Задача 5.** Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Розв'язування. Врахувавши розклади функцій $\sin x$ і $\operatorname{arctg} x$ у ряди Маклорена, маємо:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\right)}{x^3} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)x^2+\ldots\right]=\frac{1}{6}.$$

*   *

*

ВПРАВИ

Використовуючи розклад функцій у ряди Маклорена, обчислити наближено з точністю до $0{,}001$:

3.1. $\sqrt{1{,}4}$.

3.2. $\sqrt[3]{0{,}991}$.

3.3. $\sqrt[4]{82}$.

3.4. $\sqrt[3]{30}$.

3.5. $\ln 1{,}04$.

3.6. $\ln 0{,}98$.

3.7. $\ln 1{,}5$.

3.8. $\ln 10$.

3.9. $\sin 18°$.

3.10. $\cos 9°$.

3.11. $\sin 12°$.

3.12. $\sqrt{e}$.

3.13. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e}}$.

3.14. $\mathrm{arctg}\,0{,}7$.

3.15. $\mathrm{arctg}\,0{,}9$.

Знайти границі функцій:

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\mathrm{arctg}x}{x^3}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x}$.

За допомогою рядів обчислити наближене значення інтегралів:

3.19. $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$.

3.20. $\displaystyle\int_0^{0{,}1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

3.21. $\int\limits_0^{0,2} \frac{\sin x}{x} dx$.

3.22. $\int\limits_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx$.

3.23. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt[3]{1 + x^3} dx$.

3.24. $\int\limits_0^{0,3} e^{-x^2/2} dx$.

3.25. $\int\limits_0^{0,5} \ln(1 + x^2) dx$.

Д О Д А Т К И

ДЕЯКІ ФОРМУЛИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Алгебра

Формули скороченого множення і розклад на множники

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,\ (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),\ \ a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2),$$

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}).$$

Для квадратного тричлена $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 - корені рівняння: $ax^2 + bx + c = 0$.

Степені й корені

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}.\ a^p \cdot a^q = a^{p+q},\ a^p : a^q = a^{p-q},\ (a^p)^q = a^{pq},$$

$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p,\ \sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}},\ a^p \cdot b^p = (ab)^p,\ a^0 = 1,\ a^1 = a,\ a^{-p} = \frac{1}{a^p},$$

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a,\ \sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab},\ \sqrt[pk]{a^{qk}} = \sqrt[p]{a^q},\ \sqrt[p]{a^q} = \left(\sqrt[p]{a}\right)^q,$$

$$a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a},\ \ \sqrt[p]{a^q} = a^{q/p}.$$

Квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0;\ (a \neq 0);\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ D = b^2 - 4ac.$$

$D > 0 \to x_1 \neq x_2$; $D = 0 \to x_1 = x_2$ $D < 0 \to$ немає коренів в R.

Теорема Вієта: якщо x_1 і x_2 - корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -b/a$; $x_1 \cdot x_2 = c/a$.

Зведене квадратне рівняння:

a**=1,** $x^2 + px + q = 0$, якщо x_1 і x_2 - корені, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Якщо $p = 2k$ (p - парне число) і $x^2 + 2kx + q = 0$, то $x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - q}$.

Логарифми

$log_a x = b \Rightarrow a^b = x$; $a > 0 \quad a \neq 1$; $a^{log_a x} = x$; $log_a a = 1$;

$log_a 1 = 0$, $log_a xy = log_a x + log_a y$, $log_a x^k = k\, log_a x$

$log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$, $(x > 0)\,(y > 0)$; $log_{a^k} x = \frac{1}{k} log_a x$; $(x > 0)$

$log_a x = \frac{log_c x}{log_c a}$; $(c > 0, c \neq 1)$ $log_{10} x = lg\, x$; $log_e x = ln\, x$

Прогресії

Арифметична $\{a_n\} \div$

$a_n = a_{n-1} + d$, $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$,

$a_n = a_1 + d(n-1)$, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$,

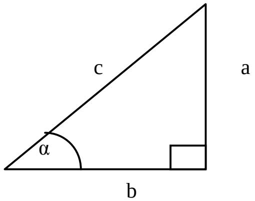
$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

Геометрична $\div \div \{b_n\}$

$b_n = b_{n-1} \cdot q$, $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$,

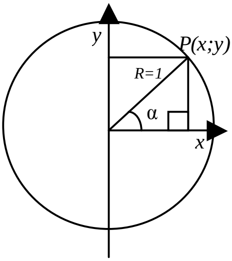
$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$, $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, якщо $|q| < 1$, $n \to \infty$, $S_n = \frac{b_1}{1 - q}$.

Тригонометрія



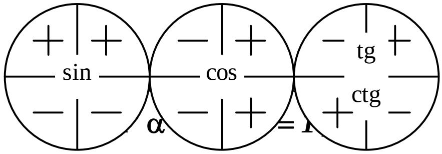
$sin\alpha = \frac{a}{c}$; $cos\alpha = \frac{b}{c}$;

$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$; $ctg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$;



$$\sin\alpha = y\,,$$

$$\cos\alpha = x$$



$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$;

$$1 + tg^2\alpha = sec^2\,\alpha\ ;\ \ 1 + ctg^2\alpha = cos\,sec^2\,\alpha\ ;$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\ ;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\ ;$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}\ ; ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\alpha \pm ctg\beta}\ ;$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha}\ ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}\ ;$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}\ ;\ \ ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}\ ;$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}\ ; \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}\ ;$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}\ ;$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\ ;$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\ ;$$

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\ ; ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\ ;$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right];$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\ \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

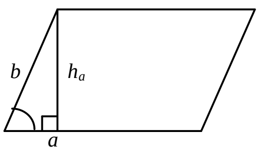
Тригонометричні рівняння

$\underline{\sin x=a}$;	$\lvert a\rvert\le 1;\ k\in z$	$\underline{\cos x=a}$;
$x=(-1)^k\times\arcsin a+k\pi$; $a=0\to x=k\pi$; $a=1\to x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $a=-1\to x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$; $\lvert a\rvert>1\to x\in\varnothing$		$x=\pm\arccos a+2k\pi$; $a=0\to x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $a=1\to x=2k\pi$; $a=-1\to x=\pi+2k\pi$; $\lvert a\rvert>1\to x\in\varnothing$
$\underline{tgx=a}$;	$m\in R;\ k\in z$	$\underline{ctgx=a}$;
$x=arctga+k\pi$; $a=0\to x=k\pi$; $a=\pm1\to x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$;		$x=arctga+k\pi$; $a=0\to x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $a=1\to x=\frac{\pi}{4}+k\pi$;

<u>Геометрія</u>

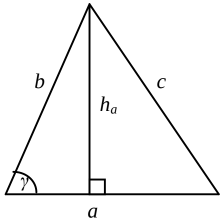
Формули площ фігур

Паралелограм



$S=ah_a$; $S=ab\sin\alpha$.
(для ромба ще і $S=d_1\times d_2/2$, де d_1 і d_2 - його діагоналі).

Трикутник



$S = ah_a / 2$; $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;

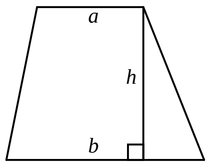
$S = abc / 4R$; $S = pr$;

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

;

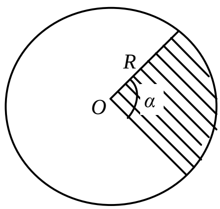
$p = \frac{a+b+c}{2}$.

Трапеція



$$S = \frac{a+b}{2} \times h$$

Круг

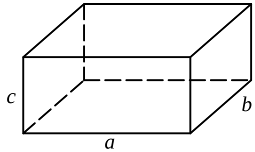


$S = \pi R^2$ - площа круга;

$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ - площа сектора.

Стереометрія

Паралелепіпед

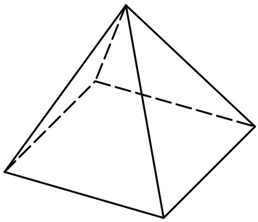


$V = S_{осн} \times H$;

прямокутний: $V = abc$;

$S_{повн} = 2(ab + bc + ac)$.

Піраміда



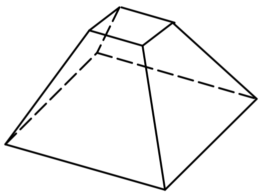
$$V = {}^{1}\!/_{3}\, S_{осн} \times H \;;$$

$$S_{повн} = S_{біч} + S_{осн} \;;$$

Правильна:

$$S_{біч} = p_{осн} \times A \;.$$

Зрізана піраміда



$$V = \frac{H}{3} \times \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right);$$

S_1, S_2 - площі основ;

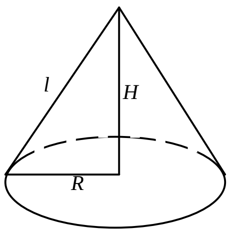
$$S_{повн} = S_{біч} + S_1 + S_2 \;.$$

Правильна:

$$S_{біч} = \left(P_1 + P_2\right) \times \frac{A}{2}\text{, де}$$

P_1, P_2 - параметри основи.

Конус

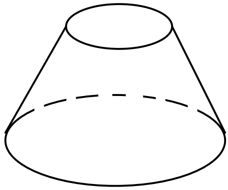


$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H \;;$$

$$S_{біч} = \pi R l \;;$$

$$S_{повн} = \pi R \left(R + l\right).$$

Зрізаний конус

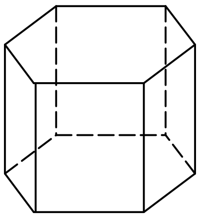


R_1 и R_2 - радіуси основ;

$S_{біч} = \pi l(R_1 + R_2)$;

$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2\right)$.

Призма



$V = S_{осн} \times H$;

пряма: $S_{біч} = P_{осн} \times H$;

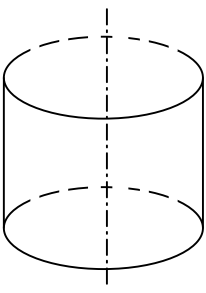
$S_{повн} = S_{біч} + 2S_{осн}$; похила:

$S_{біч} = P_{пп} \times a$;

$V = S_{пп} \times a$, де a - бічне ребро,

$P_{пп}$ - периметр, $S_{пп}$ - площа перпендикулярного перерізу.

Циліндр



$V = \pi R^2 H$;

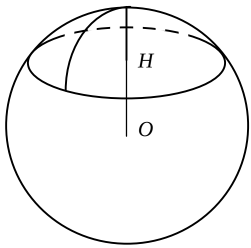
$S_{біч} = 2\pi RH$;

$S_{повн} = 2\pi R(H + R)$.

Сфера і куля

$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$ - об'єм кулі; $\boldsymbol{S = 4\pi R^2}$ - площа сфери.

Кульовий сегмент



$$V = \pi H^2\left(R - H/3\right)$$

Д1. Завдання для контролю навичок розв'язування задач з вищої математики

Контрольна робота 1

Варіант 1

1. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x_1+x_2-4x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1 \\ 2x_1+4x_2-5x_3=-2 \end{cases}.$$
2. Задані вершини $A(-1;1)$, $B(-5;4)$, $C(2;3)$ трикутника ABC. Знайти рівняння медіани CE.
3. Знайти границю функції
$$\lim_{x\to 0} \sin 3x \operatorname{ctg} 2x .$$
4. Знайти похідну функції
$$y=\ln^3\left(1+\sqrt{x}\right).$$
5. Знайти екстремум функції $y=\dfrac{x^3}{6}-x^2$ і побудувати ескіз графіка.

Варіант 2

1. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-x_3=-1 \\ x_1-3x_2+2x_3=1 \end{cases}.$$
2. Задані вершини $A(3;4)$, $B(2;-1)$, $C(-2;3)$ трикутника ABC. Знайти довжину висоти CD.
3. Знайти границю функції
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-3x+2}.$$
4. Знайти похідну функції
$$y=\arccos\sqrt{3x+1}.$$
5. Знайти екстремум функції $y=(x-1)^2(x+2)$ і побудувати ескіз графіка.

Варіант 3

1. Розв’язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8 \\ 3x_1+2x_2+x_3=10 \\ 4x_1+3x_2-2x_3=4 \end{cases}.$$
2. Задані вершини $A(5;1)$, $B(-3;7)$, $C(-2;2)$ трикутника ABC. Знайти величину кута A.
3. Знайти границю функції
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)^{3n+4}.$$
4. Знайти похідну функції
$$y=\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^4.$$
5. Знайти екстремум функції $y=x^3+\dfrac{x^4}{4}$ і побудувати ескіз графіка.

Контрольна робота 2

Варіант 1

1. Знайти невизначені інтеграли:
   а) $\int\sqrt[3]{5+e^{3x}}e^{3x}dx$; б) $\int x^3\ln x dx$; в) $\int\dfrac{x^3-5x}{x^2-5x+6}dx$.
2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=4-x^2$, $y=2x+4$.
3. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y'+2xy=e^{-x^2}$.
4. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(x)=xe^{x^2}$.

Варіант 2

1. Знайти невизначені інтеграли:

   а) $\int \cos^3 x dx$; б) $\int x^2 e^{4x} dx$; в) $\int \frac{x^3+7x-1}{x^2-2x-3}dx$.

2. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y^2 = x-2, \quad x = 6.$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x.$

4. Дослідити збіжність знакопереміжного ряду $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots.$

Варіант 3

1. Знайти невизначені інтеграли:

   а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-6x^2}}$; б) $\int \sqrt{x} \ln 2x dx$; в) $\int \frac{x^3-7}{x^2+x-6}dx$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=-x^2+4x-2$, $y=x^2-2$.

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $\left(x^2+1\right)y'+2xy=1$.

4. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n}$.

Д2. Деякі математичні позначення

Наближено дорівнює	$\approx$
Модуль (абсолютна величина) числа a	$\|a\|$
Рівносильно в обидві сторони	$\Leftrightarrow$
Рівносильно в одну сторону	$\Rightarrow$
Логарифм числа b за основою a	$\log_a b$
Десятковий логарифм числа b ($a = 10$)	$\lg b$
Натуральний логарифм числа b ($a = e =$ $=2{,}72\ldots$)	$\ln b$
Максимум	max
Мінімум	min
Квадратний корінь	$\sqrt{}$
Корінь n-го степеня	$\sqrt[n]{}$
Кут	$\angle$
Паралельність	$\|\,\|$
Перпендикулярність	$\perp$
Дуга з кінцями A і B	$\cup ACB$
Градус	$^\circ$
Мінута	$'$
Секунда	$''$
Синус α	$\sin\alpha$
Косинус α	$\cos\alpha$
Тангенс α	$\mathrm{tg}\alpha$
Котангенс α	$\mathrm{ctg}\alpha$
Секанс α	$\sec\alpha$
Косеканс α	$\cos ec\alpha$
Арксинус α	$\arcsin\alpha$
Арккосинус α	$\arccos\alpha$
Арктангенс α	$\mathrm{arctg}\alpha$
Арккотангенс α	$\mathrm{arcctg}\alpha$
Вектор	$\vec{a}$
Довжина вектора	$\|\vec{a}\|$

Точка M з абсцисою x_0 і ординатою y_0	$M(x_0; y_0)$
Множина натуральних чисел	N
Множина раціональних чисел	Q
Множина дійсних чисел	R
Множина цілих чисел	Z
Належить	$\in$
Не належить	$\notin$
Порожня множина	$\varnothing$
Об'єднання множин	$\bigcup$
Переріз множин	$\bigcap$
Еквівалентність, подібність	$\sim$
Закритий проміжок (відрізок): точки (числа) a і b належать проміжку	$[a;b]$
Напіввідкриті проміжки: точка a не належить проміжку, точка b належить проміжку; відповідно, точка a належить, а точка b не належить проміжку	$(a;b]$ і $[a;b)$
Відкритий проміжок (інтервал): точки a і b не належать проміжку	$(a;b)$
Більше, менше	$>, <$
Більше або дорівнює	$\geq$
Менше або дорівнює	$\leq$
Границя	$\lim$
Приріст аргументу	Δx
Приріст функції	Δy
Перша похідна функції $f(x)$	$f'(x)$, $\dfrac{df}{dx}$
n-на похідна функції $f(x)$	$f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^n f}{dx^n}$
Диференціал	d
Невизначений інтеграл	$\int$
Визначений інтеграл	$\int_a^b$
Добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ (читається n факторіал)	$n!$

Д3. Формули зведення функцій

Функ-ція	Аргументи								
	$-\alpha$	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$	$360°+\alpha$
	$-\alpha$	$\pi/2-\alpha$	$\pi/2+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$3\pi/2-\alpha$	$3\pi/2+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos x$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}x$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}x$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

Д4. Знаки тригонометричних функцій

Чверті	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\mathrm{cosec}\alpha$
I	+	+	+	+	+	+
II	+	–	–	–	–	+
III	–	–	+	+	–	–
IV	–	+	–	–	+	–

Д5. Таблиця точних значень тригонометричних функцій деяких кутів

Функ-ція	Аргументи									
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	360°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	$3\pi/4$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	–1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	не існує	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	не існує	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існує

Д6. Таблиця значень тригонометричних функцій

$\alpha°$	α, радіани	$\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\cos\alpha$		
0	0	0	0	∞	1	1,571	90
1	0,017	0,017	0,017	57,29	1,000	1,553	89
2	0,035	0,035	0,035	28,64	0,999	1,536	88
3	0,052	0,052	0,052	19,08	0,999	1,518	87
4	0,070	0,070	0,070	14,30	0,998	1,501	86
5	0,087	0,087	0,087	11,43	0,996	1,484	85
6	0,105	0,105	0,105	9,514	0,995	1,466	84
7	0,122	0,122	0,123	8,144	0,993	1,449	83
8	0,140	0,139	0,141	7,115	0,990	1,431	82
9	0,157	0,156	0,158	6,314	0,988	1,414	81
10	0,175	0,174	0,176	5,671	0,985	1,396	80
11	0,192	0,191	0,194	5,145	0,982	1,379	79
12	0,209	0,208	0,213	4,705	0,978	1,361	78
13	0,227	0,225	0,231	4,331	0,974	1,344	77
14	0,244	0,242	0,249	4,011	0,970	1,326	76
15	0,262	0,259	0,268	3,732	0,966	1,309	75
16	0,279	0,276	0,287	3,487	0,961	1,292	74
17	0,297	0,292	0,306	3,271	0,956	1,274	73
18	0,314	0,309	0,325	3,078	0,951	1,257	72
19	0,332	0,326	0,344	2,904	0,946	1,239	71
20	0,349	0,342	0,364	2,747	0,940	1,222	70
21	0,367	0,358	0,384	2,605	0,934	1,204	69
22	0,384	0,375	0,404	2,475	0,927	1,187	68
23	0,401	0,391	0,424	2,356	0,921	1,169	67
24	0,419	0,407	0,445	2,246	0,914	1,152	66
25	0,436	0,423	0,466	2,145	0,906	1,134	65
26	0,454	0,438	0,488	2,050	0,899	1,117	64
27	0,471	0,454	0,510	1,963	0,891	1,100	63
28	0,489	0,469	0,532	1,881	0,883	1,082	62
29	0,506	0,485	0,554	1,804	0,875	1,065	61
30	0,524	0,500	0,577	1,732	0,866	1,047	60
31	0,541	0,515	0,601	1,664	0,857	1,030	59
32	0,559	0,530	0,625	1,600	0,848	1,012	58
33	0,576	0,545	0,649	1,540	0,839	0,995	57
34	0,593	0,559	0,675	1,483	0,829	0,977	56
35	0,611	0,574	0,700	1,428	0,819	0,960	55
36	0,628	0,588	0,727	1,326	0,809	0,942	54
37	0,646	0,602	0,754	1,327	0,799	0,925	53
38	0,663	0,616	0,781	1,280	0,788	0,908	52
39	0,681	0,629	0,810	1,235	0,777	0,890	51
40	0,698	0,643	0,839	1,192	0,766	0,873	50
41	0,716	0,656	0,869	1,150	0,755	0,855	49
42	0,733	0,669	0,900	1,111	0,743	0,838	48
43	0,750	0,682	0,933	1,072	0,731	0,820	47
44	0,768	0,695	0,966	1,036	0,719	0,803	46
45	0,785	0,707	1,000	1,000	0,707	0,785	45
		$\cos\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\sin\alpha$	α, радіани	$\alpha°$

Д 7. Таблиця значень експоненціальних функцій

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0	1	1	1,7	5,4739	0,1827
0,02	1,0202	0,9802	1,8	5,0496	0,1653
0,04	1,0408	0,9608	1,9	6,6859	0,1496
0,06	1,0618	0,9418	2,0	7,3891	0,1353
0,08	1,0833	0,9231	2,1	8,1662	0,1225
0,1	1,1052	0,9048	2,2	9,0250	0,1108
0,2	1,2214	0,8187	2,3	9,9742	0,1003
0,3	1,3499	0,7408	2,4	11,023	0,0907
0,4	1,4918	0,6703	2,5	12,182	0,0821
0,5	1,6487	0,6065	2,6	13,464	0,0743
0,6	1,8221	0,5488	2,7	14,880	0,0672
0,65	1,9155	0,5220	2,8	16,445	0,0608
0,7	2,0138	3,4966	2,9	18,174	0,055
0,75	2,1170	0,4724	3,0	20,086	0,0498
0,8	2,2255	0,4493	3,25	25,79	0,0388
0,85	2,3396	0,4274	3,5	33,115	0,0302
0,9	2,4596	0,4066	3,75	42,521	3,0235
0,95	2,5857	0,3867	4,0	54,598	0,0183
1,0	2,7183	0,3679	4,5	90,017	0,0111
1,1	3,0042	0,3329	5,0	148,41	0,067
1,2	3,3201	0,3012	6,0	403,43	0,0025
1,3	3,6693	0,2725	7,0	1096,6	0,0009
1,4	4,0552	0,2466	8,0	2981,0	0,0001
1,5	4,4817	0,2231	9,0	8103,1	0,0001
1,6	4,9530	0,2019	10,0	22026	0,00005

Д8. Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \quad \text{та ренти} \quad a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

i=0,5%= 0,005				***i=1%= 0,01***			
n	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	***n***	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
1	1,005	0,99502	1,0	1	1,01	0,990099	1,0
2	1,0010025	1,98509	2,005	2	1,0201	1,970395	2,01
3	1,015075	2,97024	3,015025	3	1,030301	2,940985	3,0301
4	1,020151	3,95049	4,0301	4	1,040604	3,901966	4,060401
5	1,025251	4,925866	5,050251	5	1,05101	4,853431	5,101005
6	1,030378	5,896384	6,075502	6	1,06152	5,795476	6,152015
7	1,035529	6,862074	7,105879	7	1,072135	6,728195	7,2133535
8	1,040707	7,822959	8,141409	8	1,082857	7,651678	8,285671
9	1,045911	8,779064	9,182116	9	1,093368	8,566018	9,368527
10	1,05114	9,730412	10,228026	10	1,104622	9,471305	10,462213
11	1,0563396	10,677027	11,279167	11	1,115668	10,367628	11,566835
12	1,061678	11,061893	12,335562	12	1,126825	11,255077	12,682503
13	1,066986	12,556151	13,339724	13	1,138093	12,13374	13,809328
14	1,072321	13,488708	14,464226	14	1,149474	13,003703	14,947421
15	1,077683	14,416625	15,536548	15	1,160969	13,865053	16,096896
16	1,083071	15,339925	16,61423	16	1,172579	14,717874	17,257864
17	1,088487	16,258632	17,697301	17	1,184304	15,562251	18,430443
18	1,093929	17,172768	18,785788	18	1,196147	16,398269	19,614748
19	1,099399	18,082335	19,879717	19	1,208109	17,226008	20,810895
20	1,104896	18,987419	20,979113	20	1,22019	18,045553	22,019004
21	1,11042	19,887979	22,084011	21	1,232392	18,856983	23,239194
22	1,115972	20,784059	23.194431	22	1,244716	19,660379	24,471586
23	1,121552	21,675681	24,310403	23	1,257163	20,455821	25.716302
24	1,12716	22,562866	25,431955	24	1,269735	21,243387	26,973405

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \textit{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

(продовження)

i=2%= 0,02				***i=3%= 0,03***			
n	***$(1+i)^n$***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	***n***	***$(1+i)^n$***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
1	1,02	0,980392	1,0	1	1,03	0,970874	1,0
2	1,0404	1,941561	2,02	2	1 ,0609	1,91347	2,03
3	1,061208	2,883883	3,0604	3	1,092727	2,828611	3,0909
4	1,082432	3,807729	4,121608	4	1,125509	3,717098	4,183627
5	1,104081	4,7134	5,20404	5	1,192274	4,579707	5,309136
6	1,126162	5,601431	6,308121	6	1,194052	5,417191	5,46841
7	1,148686	6,471991	7,434283	7	1,229874	6,230283	7,662462
8	1,171659	7,325481	8,582969	8	1,26677	7,019692	8,892236
9	1,195093	8,1622337	9,754628	9	1,304773	7,786109	10,159106
10	1,218994	8,982585	10,949721	10	1,343916	8,530203	11,463879
11	1,243374	9,786848	12,168715	11	1,384234	9,252624	12,807796
12	1,268242	10,575341	13,41209	12	1,425761	9,954004	14,19203
13	1,293607	11,348374	14,680332	13	1,468534	10,634955	15,61779
14	1,319479	12,106249	15,973938	14	1,51259	11,296073	17,086324
15	1,345868	12,849264	17,293417	15	1,557967	11,937935	18,598914
16	1,372786	13,57770	18,639285	16	1,604706	12,561102	20,156881
17	1,400241	14,291872	20,012071	17	1,652848	13,166118	21,761588
18	1,428246	14,992031	21,412312	18	1,702433	13,753513	23,414435
19	1,456811	15,678462	22,840559	19	1,753506	14,323799	25,116868
20	1,485947	16,351433	24,29737	20	1,806111	14,877475	26,870374
21	1,515666	17,011209	25,783317	21	1,860295	15,415024	28,676486
22	1,54598	17,658048	27,298984	22	1,916103	15,936917	30,53678
23	1,576899	18,292204	28,844963	23	1,973587	16,443608	32,452884
24	1,608437	18,913926	30,421852	24	2,032794	16,935542	34,42647

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

(продовження)

i=5%= 0,05				*i=8%= 0,08*			
n	***(1+i)**^{n}*	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	***n***	***(1+i)**^{n}*	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
I	1,05	0,95238 1	1,0	1	1,08	0,925926	1,0
2	1,1025	1,85941	2,05	2	1,164	1,783265	2,08
3	1,157625	2,723248	3,1525	3	1,259712	2,577097	3,2464
4	1,215506	3,545951	4,310125	4	1,360489	3,312127	4,506112
5	1,276282	4,329477	5,525631	5	1,469328	3,99271	5,866601
6	1,340096	5,075692	6,801913	6	1,586874	4,62288	7,335929
7	1,4071	5,786373	8,142008	7	1,713824	5,20637	8,922803
8	1,477455	6,463213	9,549109	8	1,85093	5,746639	10,636628
9	1,551328	7,107822	11,026564	9	1,999005	6,246888	12,487558
10	1,628895	7,721735	12,577893	10	2,158925	6,710081	14,486562
11	1,710339	8,306414	14,206787	11	2,331639	7,138964	16,645487
12	1,795856	8,863252	15,917127	12	2,51817	7,536078	18,977126
13	1,885649	9,393573	17,712983	13	2,719624	7,903776	21,495297
14	1,979932	9,898641	19,598632	14	2,937194	8,244237	24,21 492
15	2,078928	10,379658	21,578564	15	3,172169	8,559479	27,152114
16	2,182875	10,83777	23,657492	16	3,425943	8,531369	30,324283
17	2,292018	11,274066	25,840366	17	3,700018	9,121638	33,750226
18	2,406619	11,689587	28,132385	18	3,996019	9,373887	37,450244
19	2.52695	12,085321	30,539004	19	4,315701	9,603599	41,446263
20	2,653298	12,46221	33,065954	20	4,660957	9,818147	45,761964
21	2,785963	12,821153	35,719252	21	5,033834	10,016803	50,422921
22	2,925261	13,163003	38,505214	22	5,43654	10,200744	55,456755
23	3,071524	13,488574	41,430475	23	5,871464	10,371059	60,893296
24	3,2251	13.798642	44,501999	24	6,341181	10,528758	66,764759

Д 9. Латинський алфавіт

Друковані букви	Рукописні букви	Назви букв	Друковані букви	Рукописні букви	Назви букв
Aa	*Aa*	а	Nn	*Nn*	ен
Bb	*Bb*	бе	Oo	*Oo*	о
Cc	*Cc*	це	Pp	*Pp*	пе
Dd	*Dd*	де	Qq	*Qq*	ку
Ee	*Ee*	е	Rr	*Rr*	ер
Ff	*Ff*	еф	Ss	*Ss*	ес
Gg	*Gg*	же(ге)	Tt	*Tt*	те
Hh	*Hh*	аш	Uu	*Uu*	у
Ii	*Ii*	і	Vv	*Vv*	ве(фау)
Jj	*Jj*	йот	Ww	*Ww*	ве
Kk	*Kk*	ка	Xx	*Xx*	ікс
Ll	*Ll*	ель	Yy	*Yy*	ігрек
Mm	*Mm*	ем	Zz	*Zz*	зет(цет)

Д 10. Грецький алфавіт

Букви	Назви букв	Букви	Назви букв
Αα	альфа	Νν	ні
Ββ	бета	Ξξ	ксі
Γγ	гама	Οο	омікрон
Δδ	дельта	Ππ	пі
Εε	епсілон	Ρρ	ро
Ζζ	дзета	Σσ	сигма
Ηη	ета	Ττ	тау
Θθ	тета	Υυ	іпсилон
Ιι	йота	Φφ	фі
Κκ	капа	Χχ	хі
Λλ	ламбда	Ψψ	псі
Μμ	мі	Ωω	омега

Д11. Графіки деяких елементарних функцій

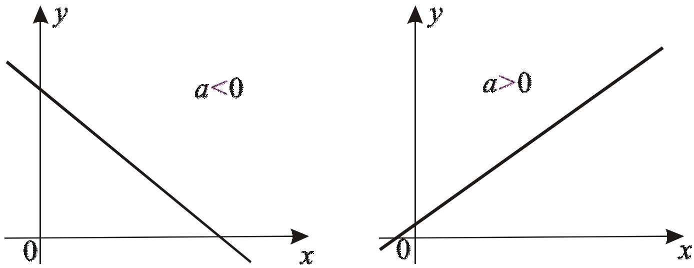


Рис. 1. Лінійні функції $y = ax + b$

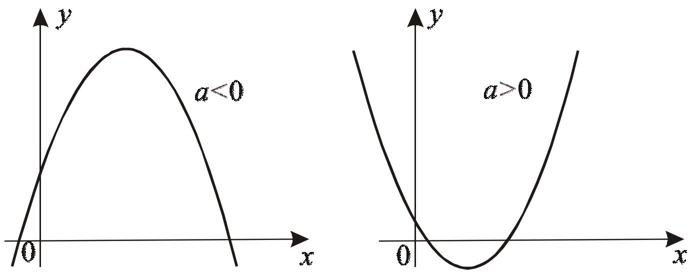


Рис. 2. Квадратичні функції $y = ax^2 + bx + c$

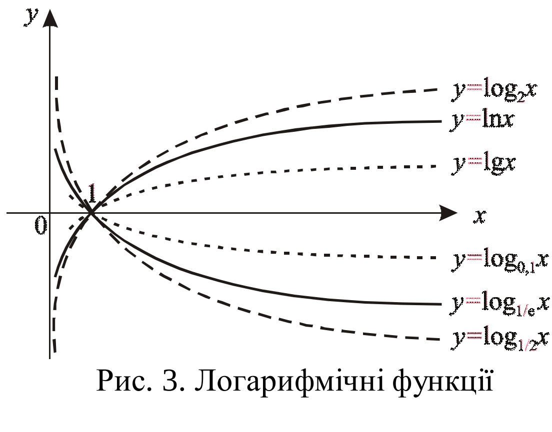


Рис. 3. Логарифмічні функції

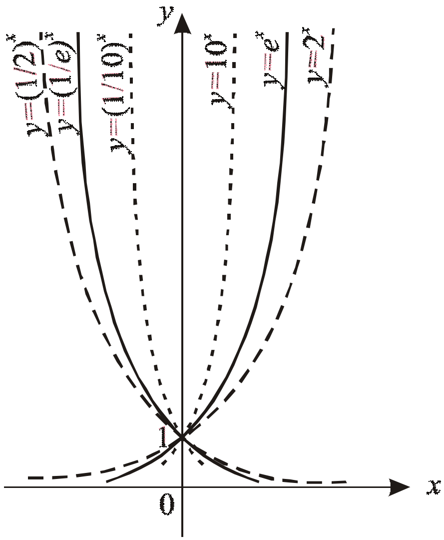


Рис. 4. Показникові функції

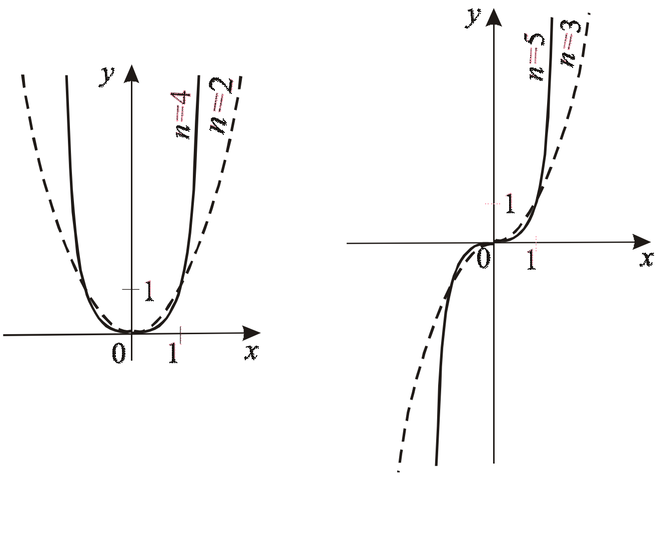


Рис. 5. Степеневі функції $y = x^n$

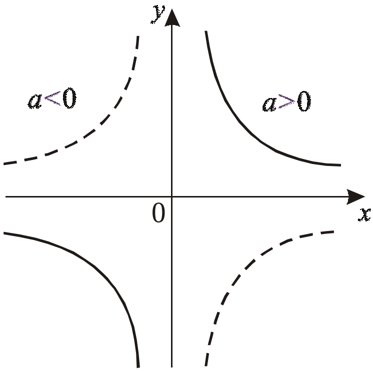
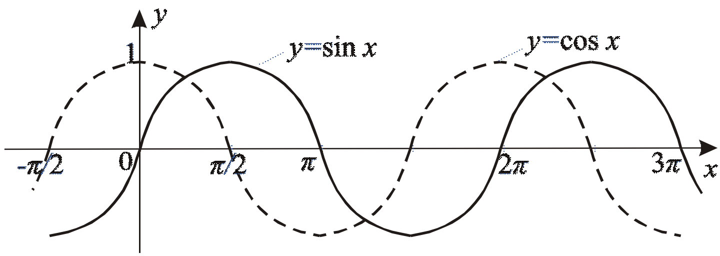
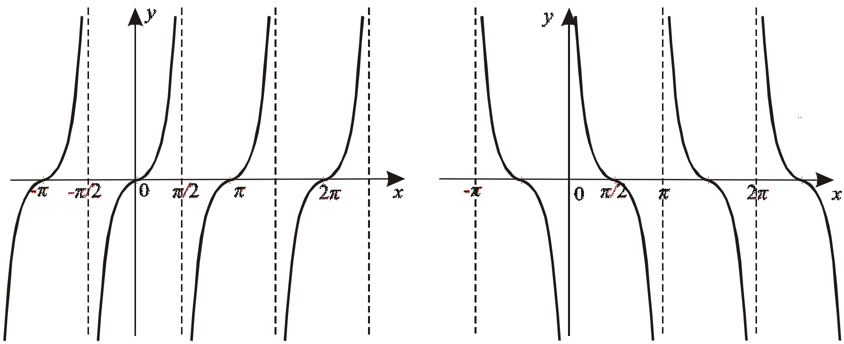


Рис. 6. Функція $y = \dfrac{a}{x}$, $a \neq 0$



а)



б) в)

Рис. 7. Тригонометричні функції: а) $y = \cos x$ і $y = \sin x$;
б) $y = \operatorname{tg} x$; в) $y = \operatorname{ctg} x$

ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ

Розділ 1. **Елементи лінійної алгебри**

§ 1. Визначники

1.1. 6. **1.2.** 7. **1.3.** –2. **1.4.** 23. **1.5.** 11. **1.6.** 5. **1.7.** –7. **1.8.** –5. **1.9.** 31. **1.10.** –252. **1.11.** 12. **1.12.** 48. **1.13.** –473. **1.14.** –1264. **1.15.** –8. **1.16.** 0. **1.17.** 30. **1.18.** –12. **1.19.** –28. **1.20.** 0. **1.21.** 14. **1.22.** –1872. **1.23.** –3168. **1.24.** 4950. **1.25.** 1. **1.26.** 0. **1.27.** –10. **1.28.** 4a. **1.29.** $-4a^3$. **1.30.** 144. **1.31.** $\sin(\beta-\alpha)$. **1.32.** $4\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **1.33.** $x=-2$. **1.34.** $x_1=3, x_2=-1, x_3=-3$. **1.35.** $x=0$. **1.36.** $x_1=3$, $x_2=5$. **1.37.** ax^2. **Вказівка**. Відняти останній стовпчик від перших двох. **1.38.** $(a-b)(b-c)(c-a)$. **Вказівка**. Відняти від першого рядка другий, від другого – третій. **1.39.** $\cos^2\beta-\cos^2\gamma$. **Вказівка**. До третього стовпчика додати другий. **1.40.** 0.

§ 2. Матриці

2.1. $A+B=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, $A-B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 5 & -1\end{bmatrix}$. **2.2.** $A+B=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $A-B=\begin{bmatrix}4 & -4\\ 1 & 1\\ -4 & 4\end{bmatrix}$. **2.3.** $A+B=\begin{bmatrix}4 & 3 & -1 & 7\end{bmatrix}$, $A-B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$.

2.4. $A+B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 6\\ 3 & 3 & 5\\ 0 & -1 & -3\end{bmatrix}$, $A-B=\begin{bmatrix}-2 & -2 & -2\\ 3 & 5 & 1\\ -2 & 1 & -3\end{bmatrix}$.

2.5. $\begin{bmatrix}-4 & 0 & -8 & 4\\ -16 & 0 & -4 & -8\end{bmatrix}$. **2.6.** $\begin{bmatrix}5 & 0 & 20\\ -5 & 10 & -15\\ 15 & 0 & 10\end{bmatrix}$. **2.7.** $\begin{bmatrix}-9 & 13\\ 15 & 4\end{bmatrix}$.

2.8. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$. **2.9.** $\begin{bmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{bmatrix}$. **2.10.** $\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

2.11. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **2.12.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$. **2.13.** $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$.

2.14. $\begin{bmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ 12 & -3 & 14 \end{bmatrix}$. **2.15.** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -15 \\ 7 & 8 & -45 \end{bmatrix}$. **2.16.** $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

2.17. $\begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 46 & 18 \end{bmatrix}$. **2.18.** $\begin{bmatrix} 15 \\ 50 \\ 27 \end{bmatrix}$. **2.19.** $\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$. **2.20.** $\begin{bmatrix} 11 & -15 \end{bmatrix}$. **2.21.** $\begin{bmatrix} 42 \end{bmatrix}$ – Матриця першого порядку. **2.22.** $AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

2.23. $AB = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 18 \\ 13 & 13 \end{bmatrix}$, BA – не існує. **2.24.** $AB = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 34 \end{bmatrix}$, BA – не існує.

2.25. $AB = BA = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$. **2.26.** $\begin{bmatrix} 51 & -66 \\ 165 & -213 \end{bmatrix}$.

2.27. $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. **2.28.** $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. **2.29.** $\begin{bmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$.

2.30. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **2.31.** $\begin{bmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{bmatrix}$. **2.32.** $\begin{bmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{bmatrix}$. **2.38.** 2. **2.39.** 1.

2.40. 2. **2.41.** 3. **2.42.** 3. **2.43.** 3. **2.44.** 3. **2.45.** 3. **2.46.** 2.

2.47. 3. **2.48.** 2. **2.49.** 3. **2.50.** 3. **2.51.** $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. **2.52.** $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

2.53. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. **2.54.** $\dfrac{1}{42}\begin{bmatrix} 14 & 6 & 4 \\ 14 & -9 & 1 \\ 14 & 3 & -5 \end{bmatrix}$.

2.55. $\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{bmatrix}$. **2.56.** $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$. **2.57.** $\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

2.58. $\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **2.59.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **2.60.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.62. $\begin{bmatrix} \frac{20}{100} & \frac{48}{120} & \frac{18}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{12}{120} & \frac{54}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{36}{120} & \frac{36}{180} \end{bmatrix}$. **2.63.** $\begin{bmatrix} 1100 \\ 752 \\ 1692 \\ 1412 \end{bmatrix}$. **2.64.** $\begin{bmatrix} 130 \\ 108 \\ 60 \end{bmatrix}$.

§ 3. Системи лінійних рівнянь

3.1. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2$. **3.2.** $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3$. **3.3.** $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = 1$. **3.4.** $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 2$. **3.5.** $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. **3.6.** $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 2$. **3.7.** $x = 0, y = 0, z = -2$. **3.8.** $x = 1, y = -2$, $z = -3$. **3.9.** $x = 3, y = -2, z = 2$. **3.10.** $x = y = z = 1$. **3.11.** $x = 1, y = 2$, $z = -1$. **3.12.** $x = 1, y = -1, z = 2$. **3.13.** Несумісна. **3.14.** Несумісна. **3.15.** Невизначена, $y = 7 - 3x, z = 18 - 7x$. **3.16.** $x_1 = x_2 = -1, x_3 = 0$, $x_4 = 1$. **3.17.** $x_1 = 2, x_2 = x_3 = x_4 = 0$. **3.18.** $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = x_4 = -1$.

§ 4. Довільні системи лінійних рівнянь

4.1. $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$. **4.2.** $x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2,\ x_4 = 1$. **4.3.** $x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4 + 2,\ x_3 = 5x_4 + 3$. **4.4.** Несумісна. **4.5.** $x_3 = 6 - 15x_1 + 10x_2,\ x_4 = -7 + 18x_1 - 12x_2$. **4.6.** $x_1 = \frac{1}{11}(x_2 - 9x_4 - 2),\ x_2 = \frac{1}{11}(5x_3 + x_4 + 10)$.

4.7. $x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11,\ x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8$. **4.8.** Несумісна. **4.9.** $x_1 = x_3 - 2x_4 + 1,\ x_2 = 2x_3 + x_4 + 2$. **4.10.** $x_1 = 2x_3 = 3x_4 - 5,\ x_2 = = 3x_3 - x_4 + 3$. **4.11.** $x_3 = 5x_1 - 7x_2 - 12,\ x_4 = x_1 + 2x_2 - 4$. **4.12.** Несумісна. **4.13.** Несумісна. **4.14.** $x_1 = 6x_4 - 11,\ x_2 = 13x_4 + 24,\ x_3 = 17x_4 - 29$. **4.15.** $x_3 = -8x_1 + 4x_2 - 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 2x_1 - x_2 + 1$. **4.16.** $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. **4.17.** $x = t,\ y = 2t,\ z = -3t$. **4.18.** $x_1 = 13t,\ y = 2t,\ z = 7t$ **4.19.** $x = 2t$, $y = -7t,\ z = -5t$. **4.20.** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. **4.21.** $x_1 = 20t,\ x_2 = -28t$, $x_3 = 4t$. **4.22.** $x_1 = -\frac{11}{7}x_3,\ x_2 = -\frac{x_3}{7}$. **4.23.** $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. **4.24.** $x_1 = = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. **4.25.** $x_3 = -\frac{5}{4}x_1 + 5x_2,\ x_2 = -\frac{1}{2}x_4,\ x_3 = -\frac{3}{4}x_4$.
4.26. $x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2,\ x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2$. **4.27.** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
4.28. $x_1 = \frac{7}{6}x_5 - x_3,\quad x_2 = \frac{5}{6}x_5 + x_3,\quad x_4 = \frac{1}{3}x_5.$ **4.29.** $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$. **4.30.** $x_1 = 3x_3 + 5x_5,\ x_2 = -2x_3 - 3x_5,\ x_4 = 0$.
4.31. $x_1 = 60, x_2 = -x_4 + 170, x_3 = 2x_4 - 220, x_4 \epsilon [110;170]$.**4.32.** $x_1 = -\frac{5}{6}x_4 + 40, x_2 = \frac{3}{2}x_4 + 40, x_3 = -\frac{7}{12}x_4 + 25, x_4 \epsilon \left[0; \frac{300}{7}\right]$.

4.33. $x_1 = -6x_4 + 10, x_2 = x_4 + 50, x_3 = x_4 + 20, x_4 \epsilon \left[0; \frac{5}{3}\right]$.

4.34. $x_1 = 2x_3 - 20, x_2 = 10, x_4 = -11x_3 + 220, x_3 \epsilon \left[\frac{20}{3}; 20\right]$.

4.35. $\begin{bmatrix} 753{,}7 & 571{,}6 & 772{,}1 \\ 287{,}3 & 566{,}1 & 528 \\ 330{,}6 & 522 & 608{,}7 \end{bmatrix}$. **4.36**. $\begin{bmatrix} 255 & 165{,}3 & 344{,}5 \\ 296{,}9 & 191{,}8 & 538{,}5 \\ 320{,}4 & 207{,}2 & 708 \end{bmatrix}$.

4.37. $\begin{bmatrix} 4366{,}9 & 1164{,}7 & 2310{,}9 \\ 4417{,}3 & 907{,}1 & 1750{,}9 \\ 7824 & 1556 & 3049{,}6 \end{bmatrix}$. **4.38**. $\begin{bmatrix} 73 & 767 & 174{,}5 \\ 191{,}5 & 165{,}5 & 508{,}5 \\ 175{,}4 & 114{,}6 & 573 \end{bmatrix}$

Розділ 2. **Векторна алгебра**

§ 1. Дії над векторами

1.1. $\sqrt{8+2\sqrt{3}}$. **1.3.** $6\sqrt{3}$. **1.4.** $\vec{c}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\vec{a}=2\vec{c}-\vec{b}$. **1.5.** $\vec{a}=3(\vec{c}-\vec{b})$.
1.11. $\left|\overrightarrow{OM}\right|=|\vec{r}|=5\sqrt{2}$, $\cos\alpha=0{,}5\sqrt{2}$, $\cos\beta=-0{,}3\sqrt{2}$, $\cos\gamma=0{,}4\sqrt{2}$.
1.12. $B(6;-4;5)$, $C(9;-6;10)$, $\overrightarrow{CA}\{-7;1;-7\}$. **1.13.** $\vec{r}_2-\vec{r}_1=\lambda(\vec{r}_3-\vec{r}_1)$.
1.14. $|\vec{r}|=7$, $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}$, $\cos\beta=\dfrac{-3}{7}$, $\cos\gamma=\dfrac{6}{7}$. **1.15.** $\cos\alpha=\cos\beta=$ $=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **1.16.** $M(3\sqrt{2};3;-3)$, $\vec{r}=3(\sqrt{2}\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$. **1.17.** $\vec{u}=2\vec{i}-$ $-6\vec{j}+3\vec{k}$, $|\vec{u}|=7$. **1.18.** $\overrightarrow{OC}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\left|\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{6}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{k}-4\vec{j}-\vec{i}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3\sqrt{2}$. **1.19.** $\vec{c}=2\vec{b}-2\vec{a}$. **1.20.** 1) $\{3;22;-3\}$, 2) $\{19;39;30\}$.

§ 2. Скалярний добуток двох векторів

2.1. $135°$. **2.2.** $\angle B=\angle C=45°$, $\angle A=90°$. **2.3.** $\cos\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=0{,}894$, $\varphi=26°37'$. **2.4.** $\vec{X}\{6;4\}$. **2.5.** $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, $\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}=\dfrac{4}{3}\sqrt{6}$. **2.6.** 2.
2.7. $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=0{,}316$; $\varphi\approx71°35'$. **2.8.** $90°$. **2.10.** 7. **2.11.** $\sqrt{7}$ і $\sqrt{13}$.
2.12. $\cos\varphi=0{,}26\sqrt{10}$, $\varphi\approx34°42'$. **2.13.** $Д(-1;1;1)$, $\varphi=120°$. **2.14.** $|\vec{c}|=$ $=\sqrt{217}\approx14{,}7$. **2.15.** 3165. **2.16.** 130 грн.

§ 3. Векторний добуток

3.1. $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює: 1) $-6\vec{j}$; 2) $-2\vec{k}$; 3) $6\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$. $S_1=6$, $S_2=2$, $S_3=2\sqrt{22}$. **3.2.** 24,5. **3.3.** $\sqrt{21}$, $h=\sqrt{4{,}2}$. **3.4.** $50\sqrt{2}$. **3.5.** $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$

$=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{5},\ S=\sqrt{6}$. **3.6.** 1,5. **3.7.** $\vec{a}\times\vec{b}=6\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$. **3.8.** $3\sqrt{5}$. **3.9.** $\vec{c}\{-12;-26;8\}$.

§ 4. Векторні простори

4.1. $(2;-1;3)$. **4.2.** (5 ;3; –2). **4.3.** (1; –3; –1). **4.4.** (4; –2; 1). **4.5.** (1; 3; 2).

Розділ 3. **Аналітична геометрія на площині**

§ 1.Найпростіші та основні задачі аналітичної геометрії

1.1. $8+\sqrt{10}$. **1.3.** 20. **1.4.** $\angle ABC$. **1.5.** (0;5) і (0;–1). **1.6.** (5;5), (5;–3). **1.7.** (5;0). **1.8.** (0;2,9). **1.9.** (4;0), (–8;0) **1.10.** $C(8;6), Д(4;2)$. **1.11.** а) 13; б) $\left(\frac{5}{3};-4\right)$. **1.12.** $(1;-4),(5;16),(7;0)$. **1.13.** 5, $\frac{1}{2}\sqrt{37}$, $\frac{7}{2}$. **1.14.** $АД=\frac{14\sqrt{2}}{3}$, $CM=\sqrt{2}$. **1.15.** $M(1;4)$. **1.16.** $\left(\frac{5}{2};6\right)$. **1.18.** 9. **1.19.** 13. **1.20.** $C_1(3;0),\ C_2(-7;0)$. **1.21.** $\left(1;-\frac{5}{4}\right)$. **1.22.** (5;–1). **1.23.** $x^2+y^2-16x=0$. **1.24.** $x+y-4=0$. **1.25.** $x^2+y^2=8$. **1.26.** $\frac{x^2}{5}+y^2=1$. **1.27.** $y=\pm 2x$. **1.28.** $y^2=8(x-2)$. **1.29.** $y=\frac{x^2}{4}+1$. **1.30.** $y=\frac{x^2}{4}-x+2$.

§ 2. Різновиди рівняння прямої лінії

2.2. $k=1,\ b=5$. **2.4.** $\frac{x}{5}\pm\frac{y}{3}=\pm 1$. **2.6.** $5x+2y+4=0,\ \ 5x+2y+25=0$.

2.7. $x-3y+2=0$, $5x-y-4=0$, $3x+y-12=0$, $BD=\frac{14}{\sqrt{10}}$.

2.8. $y=3x$ і $y=-\frac{1}{3}x$. **2.9.** $x-5y+6=0,\ 5x+y+4=0$. **2.10.** (3;–1),

$(3;3)$, $(-\frac{9}{5};\frac{3}{5})$, $45°$, $71°34'$, $63°26'$. **2.11.** AE: $2x-5y+4=0$; AD: $x-2y+2=0, AE=\sqrt{29}$, $AD=\frac{12}{\sqrt{5}}$. **2.12.** $3x+3y+11=0$. **2.13.** $\angle A=18°26'$, $\angle B=26°34'$, $\angle C=135°$. **2.14.** $A(2;4)$, $B(4;0)$, $C(0;2)$, $Д(-2;6)$.
2.15. $x+2y-11=0$. **2.16.** $7x+\ 7y-6=0$. **2.17.** $\text{tg}A=\frac{4}{3}$, $\text{tg}B=\text{tg}C=2$, $S=16$. **2.18.** $(1;-1),\left(\frac{8}{3};-2\right)$. **2.19.** AC: $3x+4y-1=0$; AB: $2x-y+3=0$; BC: $7x+2y-17=0$; $\angle A=100°$. **2.20.** 3. **2.21.** $\sqrt{\frac{13}{2}}$.
2.22. $8x-15y+6=0$, $8x-15y-130=0$. **2.23.** $12x+5y-46=0$, $12x+5y+32=0$. **2.24.** $h=\frac{18}{\sqrt{34}}$. **2.25.** $3x\ +4y-25=0$.
2.26. $31x+26y+21=0$. **2.27.** $x+3y-2=0$. **2.28.** $11x+\ 22y-74=0$.
2.29. а) Коли $x\in[0;10)$, тобто $x<100$ *км*, транспортні витрати y на перевезення автотранспортом менші від витрат на пере-везення залізничним транспортом; б) коли $x\in[10;\infty)$, тобто $x>100$ км, рентабельнішим буде залізничний транспорт. **2.30.** а) 500; б) 500.
2.31. $y=480000-25000x$. **2.32.** а) до 400 *км* – 1-м видом транспорту, більше 400 *км* – 2-м видом; б) завжди вигідніше 2-м видом; в) до 800 *км* – 1-м, більше 800 *км* – 3-м. **2.33.** До пункту B – водним; C – водним або автомобільним; $Д$ – автомобільним; E – автомобільним.
2.34. Якщо $x<\frac{b_1-b_2}{a_2-b_1}$ (км), дешевшими є автомобільні перевезення, а коли $x>\frac{b_1-b_2}{a_2-b_1}$ (км) – залізничні. **2.35.** $y=12+2x$; 22ц/га. **2.36.** $y=0{,}7x+2$; 6,9 млн. грн. **2.37.** а) $q_1=7$ млн. шт., $q_2=6{,}4$ млн. шт.; б) $p_1=7$ грош. од., $p_2=5$ грош. од. **2.38.** $p=30$.

§ 3. Криві лінії другого порядку

3.1. $x^2+y^2-4x+6y-23=0$. **3.2.** $R=\frac{3}{2}$, $\left(\frac{1}{2};-1\right)$. **3.3.** x^2+y^2+ $+4x-6y=0$. **3.5.** (0;0), $(-2{,}5;2{,}5)$. **3.6.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ або $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **3.7.** $x^2+y^2-6x+2y=0$, (0;0), (2;2), (4;–4). **3.8.** $a=2, b=3, F(0;\pm\sqrt{5}), e=\frac{\sqrt{5}}{3}$. **3.9.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **3.10.** 1) $\frac{x^2}{25}+$ $+\frac{y^2}{9}=1$, 2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$. **3.11.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_1=4-\sqrt{3}$, $r_2=4+\sqrt{3}$. **3.12.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$, $r_1=11$, $r_2=5$. **3.13.** $12;8$, $F_1(2\sqrt{5};0)$, $F_2(-2\sqrt{5};0)$, $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$. **3.14.** $\left(-\frac{15}{4};\pm\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$. **3.15.** $\left(\frac{5\sqrt{7}}{4};\frac{9}{4}\right)$, $\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4};-\frac{9}{4}\right)$, $\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4};\frac{9}{4}\right)$, $\left(\frac{5\sqrt{7}}{4};-\frac{9}{4}\right)$. **3.16.** $a=4$, $b=2$, $c=2\sqrt{3}$, $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.17.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$. **3.18.** $x^2+4y^2=16$. **3.19.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ або $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$. **3.20.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$, $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_1=3$, $r_2=9$. **3.21.** $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$, $e=\frac{5}{3}$, $y=\pm\frac{4}{3}x$. **3.22.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ або $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$. **3.23.** $r_1=1, r_2=9$. **3.24.** $x^2-y^2=1$. **3.25.** $y=\pm\frac{4}{3}(x+5)$. **3.26.** 2, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **3.27.** $F_1(-\sqrt{20};0)$, $F_2(\sqrt{20};0)$, $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $53°08'$. **3.28.** 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{4}=1$. **3.29.** $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$, $2\sqrt{3}$ і $6\sqrt{3}$. **3.30.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **3.31.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$. **3.33.** $(x-1)^2+y^2=4$, $(1;\pm2)$. **3.34.** $y=\frac{-x^2}{2}$. **3.35.** $y^2=7x$, $F\left(\frac{7}{4};0\right)$. **3.36.** $y^2=\frac{1}{4}x$. **3.37.** $y^2=16x$ і $y^2=-16x$.

3.38. $a = 150$ млн. км, $e = \dfrac{1}{60}$. **3.39.** $x^2 = -32y$. **3.40.** 6 або 134. **3.41.** $m = \dfrac{V^2}{80}$; 45л. **3.42.** $y = \dfrac{3000}{x+1} - 50$.

Розділ 4. **Аналітична геометрія у просторі**

§ 1. Площина

1.2. $\cos\alpha = \dfrac{2}{7}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{7}$, $\cos\gamma = \dfrac{6}{7}$. **1.3.** $x + 4y - 2z - 2 = 0$. **1.4.** $2y - 3z + 7 = 0$. **1.5.** $x + y = 4$. **1.6.** $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{2} = 1$. **1.7.** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{4} = 1$. **1.8.** 1) $45°$, 2) $78°30'$. **1.9.** $x - 2y - 3z - 4 = 0$. **1.10.** $2x + 3y + 4z - 3 = 0$. **1.11.** $2x - 2y + z - 2 = 0$. **1.12.** $3x - y = 0$ і $x + 3y = 0$. **1.13.** 3. **1.14.** $2\sqrt{5}$. **1.15.** $42x - 9y - 24z - 90 = 0$. **1.16.** $2x - y - 2z + 1 = 0$. **1.17.** $2x + 3y + 4z - 7 = 0$. **1.18.** $x + 2y - z - 1 = 0$. **1.19.** $x + y + z - 3 = 0$. **1.20.** $\cos\alpha = \dfrac{10}{15}, \cos\beta = \dfrac{2}{15}, \cos\gamma = \dfrac{11}{15}$.

§ 2. Пряма лінія

2.1. 1) (5; 4; 0) і (7; 0; 2); 2) (0; –4; 0) і (2; 0; 2). **2.2.** $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z}{-1}$. **2.3.** $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$. **2.4.** $\vec{p}\{0; 0; 1\}$. **2.5.** $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{-5}$; $\cos\alpha = 0{,}3\sqrt{2}$, $\cos\beta = 0{,}4\sqrt{2}$, $\cos\gamma = -0{,}5\sqrt{2}$. **2.6.** 1) $x = -2 + t$, $y = 1 - 2t$, $z = -1 + 3t$; 2) $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + t$. **2.7.** 1) $\dfrac{x-a}{0} = \dfrac{y-b}{0} = \dfrac{z-c}{1}$, що означає $x = a$, $y = b$; 2) $z = c$ і $\dfrac{x-a}{m} = \dfrac{y-b}{n}$. **2.8.** $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$. **2.9.** $\cos\alpha = \dfrac{6}{11}, \cos\beta = \dfrac{7}{11}, \cos\gamma = \dfrac{6}{11}$. **2.10.** $\cos\varphi = \dfrac{98}{195}$.

§ 3. Пряма і площина

3.1. $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}$. **3.2.** $x-2y+z+5=0$. **3.3.** $8x-5y+z-11=0$. **3.4.** $x+2y-2z-1=0$. **3.5.** (5;5;–2). **3.6.** (6;4;5). **3.7.** (5;5;5). **3.8.** (3;3;3). **3.9.** $x-8y+9z-21=0$. **3.10.** $7x+14y+24=0$.

Розділ 5. **Вступ до математичного аналізу**

§ 1. Поняття функції

1.2. $0 \le x < 1$. **1.3.** 1) $(-2;4)$; 2) $(-4;-2)$; 3) $x<-4$ і $x>2$. **1.8.** 1) Парна; 2) непарна; 3) парна; 4) непарна; 5) непарна; 6) і не парна, і не непарна. **1.9.** $x \ge -2$. **1.10.** $-3 \le x \le 3$. **1.11.** $0 \le x \le 4$. **1.12.** $-4 \le x \le 0$. **1.13.** $-1 \le x \le 3$. **1.14.** $x \ge 0$. **1.15.** $x \le 4$. **1.16.** $-\frac{\pi}{4}+k\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+k\pi$. **1.17.** $-4 \le x \le 4$. **1.18.** $-\infty < x < +\infty$. **1.19.** $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$. **1.20.** $-\infty < x < -1$ і $1 < x < +\infty$. **1.21.** $-\infty < x \le -3$ і $2 \le x < +\infty$. **1.22.** $5 < x < +\infty$. **1.23.** $x \ne (2k+1)\frac{\pi}{4}$. **1.24.** $\frac{5}{3} \le x \le \frac{7}{3}$. **1.25.** $\frac{3}{4} \le x \le 1$. **1.26.** $-2 \le x \le 15$. **1.27.** $-\infty < x < 2$ і $3 < x < +\infty$.

§ 2. Границя функції

2.1. $\frac{3}{2}$. **2.2.** $-3\frac{6}{7}$. **2.3.** –1. **2.4.** $\frac{1}{2}$. **2.5.** $\frac{2}{3}$. **2.6.** 2. **2.7.** $\frac{1}{3}$. **2.8.** $\frac{2}{3}$. **2.9.** $\frac{2}{3}$. **2.10.** $\frac{2}{3}$. **2.11.** $-\frac{5}{2}$. **2.12.** 0. **2.13.** ∞. **2.14.** –4. **2.15.** 9. **2.16.** 2. **2.17.** $\frac{5}{2}$. **2.18.** $6\sqrt{2}$. **2.19.** 1. **2.20.** $-\frac{1}{2}$. **2.21.** $\frac{1}{e^5}$. **2.22.** $e^{-\frac{1}{3}}$. **2.23.** e^4. **2.24.** e^2. **2.25.** e^{-4}. **2.26.** e^{-2}. **2.27.** e. **2.28.** $\frac{1}{4}$. **2.29.** 0. **2.30.** $\frac{1}{2}$. **2.31.** 16,1 тис. грн. **2.32.** 691,20 грн. **2.33.** 14,9%. **2.34.** 134392.

2.35. а) $10000\left(\frac{4}{5}\right)^t$; б) 6 років. **2.36.** 11972. **2.37.** $p \approx 6{,}2\%$. **2.38.** ≈ 14 років. **2.39.** $7{,}4 \cdot 10^4\,м^3$. **2.40.** 1196,2 грн. **2.41.** а) 8047,25 грн. б) 6706,04 грн. в) 7024,33 грн. г) 4682,89 грн. д) 4450,20 грн. **2.42.** а) 2708,60 грн. б) 5615,75 грн. в) 7721,74 грн. г) 5317,95 грн. д) 5991,64 грн. **2.43.** а) 2003,65 грн. б) 1566,13 грн. в) 1295,04 грн. г) 1241,08 грн. д) 1005,2 грн.

§ 3. Неперервність функції

3.3. 1) При $x=0$; 2) при $x=\frac{2n-1}{2}\pi$; 3) при $x=\pm 2$. **3.4.** 1) $x=0$ – точка розриву другого роду; 2) $x=-1$ – точка розриву другого роду; 3) $x=0$ – точка розриву першого роду. **3.5.** $x=0$ – точка розриву першого роду. **3.6.** $x=\pm 2$ – точки розриву другого роду. **3.7.** $x=1$ – точка розриву першого роду. **3.8.** $x=0$ – точка розриву першого роду. **3.9.** $x=1$; $x=5$ – точки розриву другого роду. **3.10.** $x=-3$ – точка розриву ліквідовна (усувна). Треба взяти $f(-3)=-6$. **3.11.** При $x=2$ не виконана остання умова.

Розділ 6. **Диференціальне числення функції однієї змінної**

§ 1. Диференціювання функцій

1.1. 1) $4x^3$; 2) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $-\sin x$; 4) $-\frac{1}{x^2}$; 5) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$; 6) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 7) $-\frac{2}{x^3}$; 8) $\frac{3}{2\sqrt{1+3x}}$; 9) $-\frac{2}{(2x+3)^2}$; 10) $\frac{1}{x}$. **1.2.** 75. **1.3.** 1) $\frac{5}{16}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{1}{16}$. **1.4.** 1) $(x-2)^2$; 2) x^3-2x; 3) $1-\sqrt{\frac{a}{x}}$; 4) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{6}{x^3}$; 5) $\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$; 6) $3x^2-4\cos x$; 7) $\frac{x(\sin 2x-x)}{\sin^2 x}$; 8) $1-7\sqrt[6]{x}+16\sqrt[3]{x}-$

$-12\sqrt{x}$; 9) $-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$; 10) $\frac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$; 11) $f'(0)=-1$, $f'(2)=-\frac{1}{9}$, $f'(-2)=\frac{1}{5}$. **1.5.** 1) $-2\sin\frac{x}{3}$; 2) $\frac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}$; 3) $3\sec^4 x$; 4) $\frac{3(1+\sin 3x)}{2\sqrt{3x-\cos 3x}}$;

5) $-\frac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$; 6) $\frac{-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{3}}{\sin^2\frac{x}{3}}$; 7) $\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$; 8) $3x^2\sin 2x^3$;

9) $\frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^3}$; 10) $\frac{3\cos 3x}{4\sqrt[4]{(1+\sin 3x)^3}}$. **1.6.** 1) $\frac{1}{1-x^2}$; 2) $\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$;

3) $\operatorname{ctg}x\cdot\cos^2 x$; 4) $-\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$; 5) $\frac{-2\operatorname{ctg}^2 x}{\sin x}$; 6) $\frac{\operatorname{ctg}2x}{1-\sin 2x}$; 7) $\frac{2}{e^{4x}+1}$;

8) $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. **1.7)** 1) $\frac{-1}{\sqrt{x-4x^2}}$; 2) $\frac{\sqrt{6x-9x^2}}{x(3x-2)}$; 3) $-\frac{1}{1+x^2}$; 4) $2e^x\sqrt{1-e^{2x}}$;

5) $\frac{4e^{2x}}{1-e^{8x}}$; 6) $\sqrt{\frac{2}{x}-4}$; 7) $-\frac{1}{2}$; 8) $-\sqrt{\frac{3}{\cos x\cdot\cos 3x}}$. **1.8.** 1) $-\frac{44}{(x+5)^3}$;

2) $\ln x$; 3) $x\sin 3x$; 4) $2e^{-x}(\sin x+\cos x)$; 5) $\frac{2}{x}$; 6) $x\sin x-3\cos x$.

1.9. 1) $-4(2x^2\cos 2x+6x\sin 2x-3\cos 2x)$; 2) $\frac{1}{(x+1)^4}$; 3) $\frac{2\ln x-3}{x^3}$;

4) $105\sqrt{2x+3}$. **1.10.** 1) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{-\frac{x}{2}}$; 2) $\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$; 3) $2^{n-1}\cdot\cos(2x+$ $+\frac{\pi}{2}n)$; 4) $\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$; 5) $\frac{n!(-2)^n}{(2x+1)^{n+1}}$. **1.11.** 1) $\frac{-3x^2y+6xy^2+3}{x^3-6x^2y+15y^2}$;

2) $\frac{2x^3y-2xy^3+y}{x^4+x^2y+x}$; 3) $-\frac{2x+y}{x+2y}$; 4) $-\frac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$; 5) $\frac{1}{y^2}+1$;

6) $\frac{y(2-xy)}{x(1+xy)}$; 7) $\frac{1}{3}$; 8) ± 2. **1.12.** 1) $-\frac{a^2}{y^3}$; 2) $\frac{2(y-a)}{(x-b)^2}$; 3) $-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$.

§ 2. *Диференціал функції*

2.1. 1) $\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$; 2) $\frac{dx}{2\sqrt{x(x+1)}}$; 3) $\frac{dt}{1+\cos t}$; 4) $8(2x-3)^3dx$; 5) $\frac{dx}{x^2-36}$; 6) $\frac{2e^{2x}dx}{1+e^{4x}}$. **2.2)** 1) $\frac{-a^3dx}{x^2(a^2+x^2)}$; 2) $-\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 3) $e^{x\sin 2x}\cdot\sin 2x(1+$ $+2x\operatorname{ctg}2x)dx$; 4) $\operatorname{tg}^2\alpha d\alpha$; 5) $\ln x dx$; 6) $\sqrt{49-x^2}dx$. **2.3.** 1) 12,16; 2) –0,04; 3) 0,61; 4) 0,494. **2.4.** 1) 1,15; 2) 0,996; 3) 4,0428; 4) 0,9995; 5) 1,0012; 6) 36,852; 7) 5,0015; 8) 2,003; 9) 4,997; 10) 50,2; 11) 2,889; 12) 1,9938; 13) 0,503; 14) 0,513; 15) 1,035; 16) 0,7754; 17) 0,9851; 18) 1,1653; 19) 2,01813; 20) 2,0087. **2.5.** 1,0864. **2.6.** 1,9494. **Вказівка**. $x_0=90,\ \Delta x=-1$. **2.7.** 0,478. **2.8.** $\approx -0{,}02$. **2.9.** 15 см^3. **2.10.** 12π см^2. **2.11.** 3 см^3. **2.12.** 16π см^3. **2.13.** $\approx 0{,}1$ см. **2.14.** $\approx 0{,}1$ см^2. **2.15.** ≈ 8 см^3. **2.16.** $\approx 8\pi$ см^3.

§ 3. *Застосування похідної*

3.1. $4x+y-8=0,\ x-4y-2=0$. **3.2.** $11x+y+9=0,\ x-11y+23=0$. **3.3.** $3x+y-6=0$. **3.4.** $y=x+\frac{2}{3}$. **3.5.** $y=\pi-x$. **3.6.** $y=4x$, $y=$ $=-4x+16$. **3.7.** $x+4y-8=0,\ x-4y-8=0$. **3.8.** $135°, 0°, 45°$. **3.9.** $k=$ $=\operatorname{tg}\alpha=\pm 4$. **3.10.** $\frac{4}{\sqrt{17}}$. **3.11.** 3. **3.12.** $\frac{1}{2}$. **3.13.** 1. **3.14.** $\frac{a^2}{b^2}$. **3.15.** $\frac{1}{2}$. **3.16.** $\frac{1}{6}$. **3.17.** –2. **3.18.** ∞. **3.19.** 0. **3.20.** $\frac{5}{3}$. **3.21.** 2. **3.22.** 0. **3.23.** $-\frac{1}{2}$. **3.24.** e^3. **3.25.** –2. **3.26.** $\frac{dx}{dt}=t^2-4t+3;\ t_1=1,\ t_2=3$. **3.27.** $2v\frac{dv}{dt}=$ $=2a\frac{dx}{dt}=2av$, звідси $w=\frac{dv}{dt}=a$. **3.28.** $v'(50)=17{,}5;\ v'(100)=10$; $v'(150)=17{,}5$. **3.29.** $v'(50)=35;\ v'(100)=90;\ v'(120)=120{,}4$. **3.30.** $D'(300)=4$. **3.31.** $500-x$. **3.32.** $P'(150)=30;\ P'(400)=-20$.

3.33. $\left(\dfrac{П}{P}\right)' = \dfrac{-20}{(60+t)^2}$ (частина з часом зменшується). **3.34.** 14 і 13.

3.35. 14. **3.36.** $f'(5)=200, \quad f'(10)=0, \quad f'(12)=-80$. **3.37.** $\dfrac{1}{2}$.

3.38. $\dfrac{5}{24\ln 2}$. **3.39.** $\approx 0{,}2$. **3.40.** $P'(1000)=2{,}679;\ P'(3000)=-0{,}502$ (при витратах на рекламу 3000 гривень прибутки зменшуються). **3.41.** $V'(90)=20, \quad V(90)=1425, \quad P(90)=1185.$ **3.42**. $V'(77)=16,$ $V(77)=11085, \ P(77)=662{,}5$. **3.43.** $V'(55)=22, \quad V(55)=1059,$ $P(55)=453{,}5.$ **3.44**. $V'(45)=13, \quad V(45)=750, \quad P(45)=37{,}5$.

3.45 а) $E_{p\approx 0{,}04}(Q)\approx -1{,}48, \quad E_{p\approx 0{,}04}(S)\approx 0{,}48.$

б) $E_{p\approx 0{,}06}(Q)\approx -2{,}68, \quad E_{p\approx 0{,}04}(S)\approx 0{,}42.$

в) $E_{p\approx 0{,}08}(Q)\approx -3{,}69, \quad E_{p\approx 0{,}08}(S)\approx 0{,}4$.

г) $E_{p\approx 0{,}09}(Q)\approx -8{,}47, \quad E_{p\approx 0{,}08}(S)\approx 1.$

§ 4. Екстремум функції

4.1. При $x=-2$ $y_{\min}=-\dfrac{16}{3}$; при $x=2$ $y_{\max}=\dfrac{16}{3}$. Точки перетину з OX: $x_1=0,\ x_{2,3}=\pm 2\sqrt{3}$. **4.2.** При $x=1$ $y_{\max}=-4$; при $x=5$ $y_{\min}=4$; асимптоти $x=3$ і $y=x-3$. **4.3.** При $x=4$ $y_{\max}=1$; при $y=0$, $x=3$ або $x=5$; при $y=-3$, $x=-4$ або $x=12$. **4.4.** При $x=\dfrac{\pi}{12}$ $y_{\max}=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 1{,}1$; при $x=\dfrac{5\pi}{12}$ $y_{\min}\approx 0{,}4$. **4.5.** При $x=\dfrac{1}{2}$ $y_{\min}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}\approx -0{,}28$; при $x=-\dfrac{1}{2}$ $y_{\max}\approx 0{,}28$. Асимптоти $y=x\pm\dfrac{\pi}{2}$.

4.6. Інтервали спадання: $(-\infty;-2), (-2;\infty)$, екстремуму немає.

4.7. Інтервали спадання: $(-\infty;-1), (0;2)$, інтервали зростання: $(-1;0)$, $(2;\infty)$, $y_{\min}=f(-1)=-\dfrac{9}{4}$; $y_{\min}=f(2)=-25$; $y_{\max}=f(0)=7$.

4.8. Інтервали спадання: $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, інтервали зростання: $\left(\frac{1}{2};\infty\right)$; $y_{\min} = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \ln 2$. **4.9.** Інтервали зростання: $(-\infty;-1), (1;\infty)$, інтервал спадання: $(-1;1)$; $y_{\min} = f(1) = 2$; $y_{\max} = f(-1) = 6$.
4.10. $y_{\min} = 0$ при $x = 0$; $y_{\max} = 1$ при $x = \pm 1$. **4.11.** При $x = 0$ $y_{\min} = 0$; при $x = -2$ $y_{\max} = \frac{4}{3}$; при $y = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = -3$. **4.12.** При $x = -1$ $y_{\min} = -4$, при $x = -3$ $y_{\max} = 0$. **4.13.** При $x = 0$ $y_{\max} = 0$, при $x = 2$ $y = \pm\infty$, при $x = 4$ $y_{\min} = 8$; асимптоти $x = 2$ і $y = x + 2$.
4.14.При $x = -3$ $y_{\min} = -6{,}75$, при $x = 0$ $y_{перег} = 0$; при $y = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = -4$. **4.15.** При $x = \pm 2$ $y_{\min} = -4$, при $x = 0$ $y_{\max} = 0$; при $y = 0$ $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{8} \approx \pm 2{,}8$. **4.16.** При $x = -3$ $y_{\min} = 6$, при $x = -2$ $y = \infty$ (розрив), при $x = -1$ $y_{\max} = 2$. Точки перетину з осями координат: $x = 0$, $y = 1{,}5$; $y = 0$, $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}7$. **4.17.** При $x = 1$ $y_{\min} = 2$, при $x = -1$ $y_{\max} = -2$, при $x = 0$ – розрив. Асимптоти $y = x$ і $x = 0$. **4.18.** При $x = 0$ $y_{\max} = 1$, при $x = 1$ $y_{\min} = 0$; при $y = 0$ $x = \pm 1$. **4.19.** При $x = \frac{\pi}{6}$ і $x = \frac{5\pi}{6}$ $y_{\max} = 1{,}5$, при $x = \frac{\pi}{2}$ $y_{\min} = 1$.
4.20. При $x = \frac{\pi}{4}$ $y_{\min} = \frac{\pi}{4} + 1 \approx 2{,}57$, при $x = \frac{3\pi}{4}$ $y_{\max} = 3{,}71$; асимптоти $x = 0$ і $x = \pi$. **4.21.** $x = 3$. **4.22.** $x = 0$. **4.23.** $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}x$.
4.24. Інтервал опуклості $(-\infty;-3)$, угнутості $(-3;\infty)$, точок перегину немає. **4.25.** Інтервал опуклості $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$, угнутості $\left(\frac{5}{3};\infty\right)$, $y_{перег} = f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{250}{27}$. **4.26.** Інтервал опуклості $(-\infty;1)$, угнутості $(1;\infty)$, $y_{перег} = f(1) = 2$. **4.27.** При $x = 1$ $y_{\max} = 2$, при $x = -1$ $y_{\min} = -2$, перетинається з OX при $x = \pm\sqrt{3}$, перегин при $x = \pm\sqrt{2}$ асимптоти – осі OX і OY. **4.28.** При $x = 0$ $y_{\min} = 2$, асимптоти $x = -2$ і $x - y = 0$. **4.29.** При $x = 0$ $y_{\max} = 0$, при $x = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$

$y_{\min} \approx 2{,}1$, при $x = -\sqrt[3]{2} \approx -1{,}3$ $y_{перег} \approx -0{,}8$, асимптоти $x=1$ і $y = x$.
4.33. $y_{найб} = 17$ при $x = 4$; $y_{найм} = -3$ при $x = -1$. **4.34.** $y_{найб} = 9$ при $x = 2$; $y_{найм} = 0$ при $x = 1$. **4.35.** $y_{найб} = 1$ при $x = 0$; $y_{найм} = -\frac{5}{13}$ при $x = 3$. **4.36.** $y_{найб} = 266$ при $x = 5$; $y_{найм} = -6$ при $x = 1$.
4.37. $y_{найб} = \frac{1}{2}$ при $x = 1$; $y_{найм} = \frac{1}{38}$ при $x = -5$. **4.38.** $y_{найб} = \frac{3}{2}$ при $x = \frac{\pi}{6}$; $y_{найм} = 1$ при $x = 0$. **4.39.** $y_{найб} = 1 - \ln 2$ при $x = 1$; $y_{найм} = 0$ при $x = 0$. **4.40.** $y_{найб}$ – не існує; $y_{найм} = 0$ при $x = 0$. **4.41.** $50м \times 100м$.
4.42. $4м \times 4м \times 2м$. **4.43.** $\frac{18}{\pi + 4} \approx 2{,}5$. **4.44.** $\frac{a}{6}$. **4.45.** 10 см.
4.46. $300м \times 300м$. **4.47.** $16м$. **4.48.** $r=h=1$м. **4.49.** Висота повинна дорівнювати діаметру основи циліндра. **4.52.** $\frac{l}{4} \times \frac{l}{4}$. **4.53.** $2м \times 2м \times 1м$.
4.54. $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$. **4.55.** 32 м. **4.56.** 600 грн. **4.57.** $r = 5$ м, $h = 10$ м; 282 грн. 65 коп. **4.58.** $\frac{r}{h} = \frac{p_2}{p_1}$. **4.63.** $x \approx 38$, $p = 26{,}2$. **4.64.** $x = 1$, $p = 10$, $z = U - k = 6$. **4.65.** $k = 2$, $\pi = 6$. **4.66.** $x > 150$. **4.68.** 12 і 18 м.
4.69. Сторона, паралельна стіні, має бути вдвоє довшою за кожну з двох інших сторін. **4.70.** Діаметр дорівнює довжині котла. **4.71.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
4.72. 1) 2000 см^3; 2) $\frac{800}{\pi}$ см^3. **4.73.** $50м \times 25м$ **4.74.** $V = 10\sqrt{\frac{5}{\pi}}м^3$.
4.75. $125м$. **4.76.** $14см \times 10{,}5см \times 12см$. **4.77.** $12м \times 6м \times 4м$. **4.78.** $(2a + \sqrt{\frac{a}{в}S})см$, $(2в + \sqrt{\frac{в}{a}S})см$. **4.79.** $h = \frac{20}{3}\sqrt{3}см$.
4.80. $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}, h = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$. **4.81.** $V = \frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$.

Розділ 7. **Функції кількох змінних**

§ 1. Диференціювання функцій

1.2. Уся площина, крім прямої $y=-x$. **1.3.** Точки всередині еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ і на еліпсі. **1.4.** Уся площина. **1.5.** $x^2+y^2\le 16$. **1.6.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}>1$. **1.7.** Концентричні кола з центром у початку координат. **1.8.** Сім'я паралельних прямих $2x+y=c$. **1.9.** Сім'я парабол $Cy=\sqrt{x}$. **1.10.** Сім'я прямих, які проходять через початок координат: $x=Cy$. **1.11.** $3x(x+2y),\quad 3(x^2-y^2)$. **1.12.** $-\frac{y}{x^2},\ \frac{1}{x}$.

1.13. $\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}$. **1.14.** $\frac{-y^2}{(x-y)^2},\ \frac{x^2}{(x-y)^2}$. **1.15.** $\frac{3y}{(3y-2x)^2}$, $\frac{-3x}{(3y-2x)^2}$. **1.16.** $\mathrm{ctg}(x-2t),\ -2\mathrm{ctg}(x-2t)$. **1.17.** $6x^2(x^3+y^2)e^{(x^3+y^2)^2}$, $4y(x^3+y^2)e^{(x^3+y^2)^2}$. **1.18.** $\frac{2x}{y^2}-\frac{1}{y},\ \frac{x}{y^2}-\frac{2x^2}{y^3}$. **1.19.** $\frac{y}{\sqrt{x}},\ 2\sqrt{x}+$ $+6y\sqrt[3]{z^2}$, $\frac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}$. **1.20.** $\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$, $-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}+\frac{z}{y^2}e^{-\frac{z}{y}}$, $-\frac{1}{y}e^{-\frac{z}{y}}$. **1.26.** $dz=$ $=-\frac{1}{(x-y)^2}\left(y^2dx-x^2dy\right)$. **1.27.** $dz=-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy$. **1.28.** $dz=$ $=(3x^2-3ay)dx+(3y^2-3ax)dy$. **1.29.** $dz=-\sin(xy)(ydx+xdy)$. **1.30.** $dz=\frac{ydx-xdy}{x\sqrt{y^2-x^2}}$. **1.31.** $-0{,}1$. **1.32.** $1{,}2\pi$ дм^3. **1.33.** -30π см^3.

1.34. $1{,}08$. **1.35.** $-0{,}03$. **1.36.** $1{,}013$. **1.37.** $3{,}037$. **1.38.** $\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$. **1.39.** $\frac{2}{1-2y},\ \frac{4x}{(1-2y)^2},\ \frac{8x^2}{(1-2y)^3}$. **1.40.** 6; 2; 0; 6. **1.45.** $\mathrm{grad}z=-2x\vec{i}-2y\vec{j}$. **1.46.** $\mathrm{grad}z=0{,}32\vec{i}-0{,}64\vec{j}$,

$|\mathrm{grad} z| = 0{,}32\sqrt{5}$. **1.47.** $\mathrm{grad} u = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{u}$, $|\mathrm{grad} u| = 1$ у довільній точці. **1.48.** $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = 2 + \sqrt{2}$; $\mathrm{grad} u = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $|\mathrm{grad} u| = 2\sqrt{3}$. **1.49.** $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{4}$, $\mathrm{grad} u = \dfrac{1}{2}\vec{i} - \dfrac{1}{2}\vec{j}$. **1.50.** $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \dfrac{3}{2}(3 - \sqrt{3})$, $\mathrm{grad} u = 9\vec{i} - 3\vec{j}$.

1.51. $\dfrac{\partial x}{\partial t} \approx 335$; $\dfrac{\partial x}{\partial A} \approx 0{,}11$. **1.52.** $V_r' = 40\pi(r + h), V_h' = 40\pi r$. **1.53.** $y_T' = CV^{\frac{1}{3}}$, $y_{T_0}' = -CV^{\frac{1}{3}}$, $y_V' = \dfrac{C}{3}(T - T_0)V^{-\frac{2}{3}}$. **1.54.** $E_{P_A} = \dfrac{P_A}{X_A}\dfrac{\partial X_A}{\partial P_A}$**,** $E_{P_B} = \dfrac{P_B}{X_A}\dfrac{\partial X_A}{\partial P_B}$.**1.55.**

а)

$$y = 25K^{1/2}L^{1/3}, \quad k = \frac{3}{40}, \quad l = 3000, \quad E_L(y) = \beta = \frac{1}{3}, \quad E_L(y) = \alpha = \frac{1}{2};$$

б)

$$y = \frac{50}{\sqrt[3]{2}}K^{1/2}L^{1/3}, \quad k = \frac{1}{12}, \quad l = 3000, \quad E_L(y) = \beta = \frac{1}{3}, \quad E_L(y) = \alpha = \frac{1}{2}.$$

в)

$$y = \frac{75}{\sqrt[3]{3}}K^{1/2}L^{1/3}, \quad k = \frac{1}{8}, \quad l = 3000, \quad E_L(y) = \beta = \frac{1}{3}, \quad E_L(y) = \alpha = \frac{1}{2}.$$

г)

$$y = \frac{100}{\sqrt[3]{4}}K^{1/2}L^{1/3}, \quad k = \frac{1}{6}, \quad l = 3000, \quad E_L(y) = \beta = \frac{1}{3}, \quad E_L(y) = \alpha = \frac{1}{2}.$$

д)

$$y = \frac{125}{\sqrt[3]{5}}K^{1/2}L^{1/3}, \quad k = \frac{5}{24}, \quad l = 3000, \quad E_L(y) = \beta = \frac{1}{3}, \quad E_L(y) = \alpha = \frac{1}{2}.$$

1.56. $388 \cdot 10^9$ *грн.*

§ 2. Екстремум функції

2.1. $z_{\min}=-1$ при $x=-4,\ y=1$. **2.2.** $z_{\min}=0$ при $x=1,\ y=\frac{1}{2}$.

2.3. Немає екстремуму. **2.4.** $z_{\min}=7$ при $x=1,\ y=1$. **2.5.** $z_{\min}=5$ при $x=-4,\ y=1$. **2.6.** $z_{\max}=10$ при $x=y=0$. **2.7.** $z_{\max}=8$ при $x=2,\ y=-2$. **2.8.** $z_{\min}=-1$ при $x=1,\ y=1$. **2.9.** $z_{\max}=108$ при $x=3,\ y=2$. **2.10.** $z_{\min}=9$ при $x=0,\ y=3$. **2.11.** $z_{\min}=\ =z(2;2)=4$, $z_{\max}=z(-2,-2)=-4$. **2.12.** $z_{\min}=z(1;1)=2$. **2.13.** $z_{\min}=z\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)=$ $=-\frac{19}{4}$. **2.14.** $z_{\min}=z\left(\frac{1}{4};0\right)=0$, $z_{\max}=z\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$. **2.15.** $z_{\min}=$ $=z\left(\frac{36}{25};\frac{48}{25}\right)=\frac{144}{25}$. **2.16.** $z_{\max}=z\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)=\frac{25}{24}$. **2.17.** а) $x=50,\ y=75$; б) $x=0,\ y=35$. в) $x=15, y=50;$ г) $x=25, y=10;$ д) $x=20, y=10.$

2.18. $x=\frac{109}{2}, \quad y=53, \quad V_{опт}=3896250$ гривень.

2.19. $PR_{\max}=12,\ x_1=x_2=4.$ **2.20.** $y=12x+4800$. **2.21.** $y=2{,}5x+22$. **2.22.** $y=0{,}74x+2{,}62$. **2.23.** $y=1{,}41x+0{,}87$. **2.24.** $y=7{,}49x+325{,}64$. **2.26.** $y=0{,}001x^2-0{,}1x+2{,}5$. **2.27.** $y=-2{,}1x+94{,}61$.

Розділ 8. **Невизначений інтеграл**

§ 1. Метод безпосереднього інтегрування

1.1. $\sin x+C$. **1.2.** $-\mathrm{ctg}x+\mathrm{tg}x+C$. **1.3.** $-\sqrt{2}\cos x+C$. **1.4.** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+$ $+\frac{9}{7}x^2\sqrt[3]{x}+\frac{18}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{x^2}{2}+C$. **1.5.** $2e^x+\mathrm{arctg}x+C$. **1.6.** $\frac{1}{2}\mathrm{tg}x+\frac{1}{2}x+C$. **1.7.** $\frac{2x\sqrt{x}}{3}-3x+6\sqrt{x}-\ln|x|+C$. **1.8.** $3\mathrm{tg}x+2\mathrm{ctg}x+C$. **1.9.** $4\ln|x|-$ $-\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+C$. **1.10.** $x+\cos x+C$. **1.11.** $3\arcsin\frac{x}{3}+C$. **1.12.** $\frac{(4x+3)^{18}}{72}+$

$+C$. **1.13.** $\frac{\ln^5 x}{5}+C$. **1.14.** $\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4}+C$. **1.15.** $\frac{-\mathrm{ctg}^2 x}{2}+C$. **1.16.** $\frac{1}{84}(9+$ $+7x^2)^6+C$. **1.17.** $-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+C$. **1.18.** $-\frac{1}{36}\frac{1}{(4x^3+9)^3}+C$. **1.19.** $-\frac{1}{4}\frac{1}{\sin^4 x}+C$. **1.20.** $\sqrt{1+x^2}+C$.

§ 2. Метод підстановки (заміни змінної)

2.1. $-\frac{1}{3}\sqrt{7-x^6}+C$. **2.2.** $\frac{1}{2}\ln|1+2\sin x|+C$. **2.3.** $-\frac{1}{\mathrm{arctg}x}+C$.

2.4. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sin x|+C$. **2.5.** $\frac{\sqrt[3]{(x^3-8)^4}}{4}+C$. **2.6.** $\frac{2\sqrt{(1+\ln x)^3}}{3}+C$.

2.7. $\frac{\sin x-2}{\cos x}+C$. **2.28.** $2\ln|\sin x|-\mathrm{ctg}x+C$. **2.9.** $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$. **2.10.** $\frac{1}{6}(2-$ $-\cos 4x)\sqrt{2-\cos 4x}+C$. **2.11.** $\frac{2}{3}\sqrt{(\mathrm{arctg}x)^3}+C$. **2.12.** $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}-$ $-2\sqrt{\ln x}+C$. **2.13.** $\frac{3^{x^3}}{3\ln 3}+C$. **2.14.** $e^{-\arccos x}+C$. **2.15.** $\frac{1}{3\cos^3 x}+C$.

2.16. $\frac{1}{6}\mathrm{arctg}\frac{x^3}{2}+C$. **2.17.** $\frac{1}{4}\ln\left|x^4+\sqrt{x^8-1}\right|+C$. **2.18.** $2{,}5\ln(x^2+4)-$ $-\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C$. **2.19.** $-\arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}+C$. **2.20.** $\arcsin(e^x)+C$.

2.21. $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-2\mathrm{arctg}(e^x)+C$. **2.22.** $e^x+\ln|e^x-1|+C$. **2.23.** $2\ln|e^x-$ $-1|-x+C$. **2.24.** $e^x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$.

§ 3. Метод інтегрування частинами

3.1. $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)+C$. **3.2.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln|x|-\frac{2}{3}\right)+C$. **3.3.** $\frac{x^2+1}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{x}{2}+$

$+C$. **3.4.** $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg}x\right)+C$. **3.5.** $4\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\arcsin\dfrac{x}{2}+C$.

3.6. $x\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}-\dfrac{\sqrt{2x-1}}{2}+C$. **3.7.** $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$.

3.8. $x(\ln x-1)+C$. **3.9.** $x\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. **3.10.** $-x\cos x+\sin x+$ $+C$. **3.11.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **3.12.** xe^x+C. **3.13.** $(x+1)^2\sin x+$ $+2(x+1)\cos x+C$. **3.14.** $\dfrac{x^2}{3}\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{6}\ln(x^2+1)+C$. **3.15.** $-x^2\times$ $\times\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$. **3.16.** $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$.

3.17. $\dfrac{1}{2}x^2\ln^2|x|-\dfrac{1}{2}x^2\ln|x|+\dfrac{1}{4}x^2+C$. **3.18.** $\dfrac{e^{2x}}{13}(2\cos 3x+3\sin 3x)+C$.

3.19. $\dfrac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C$. **3.20.** $\dfrac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$. **3.21. Вказівка.** Підставити $\sqrt{x}=t$. $-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$. **3.22. Вказівка.** Підставити $x^2=t$. $\dfrac{1}{2}e^{x^2}(x^4-2x^2+2)+C$.

§ 4. Інтегрування раціональних дробів

4.1. $\operatorname{arctg}(x+2)+C$. **4.2.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+3}{\sqrt{3}}+C$. **4.3.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{2}+C$.

4.4. $0{,}2\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{5}+C$. **4.5.** $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{3}+C$. **4.6.** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-$ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **4.7.** $\dfrac{5}{2}\ln(x^2+10x+29)-11\operatorname{arctg}\dfrac{x+5}{2}+C$.

4.8. $\dfrac{1}{10}\ln(5x^2+2x+1)+\dfrac{2}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{5x+1}{2}+C$. **4.9.** $\dfrac{3}{2}\ln(x^2+8x+18)-$ $-\dfrac{23}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+4}{\sqrt{2}}+C$. **4.10.** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-9x+23)+\dfrac{3}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-9}{\sqrt{11}}+C$.

4.11. $\ln\dfrac{C(x-2)^2}{x-3}$. **4.12.** $\ln\left|\dfrac{(x-1)^3}{x+2}\right|+C$. **4.13.** $\ln\dfrac{Cx^3(x-1)}{x+1}$. **4.14.** $\dfrac{x^2}{2}+$

$+4x+\ln\frac{(x-1)^8}{|x|}+C$. **4.15.** $3\ln\frac{C(x-1)}{x+2}-\frac{2}{x+2}$. **4.16.** $\frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4}-$
$-\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$. **4.17.** $\ln\frac{(x-4)^{11}}{(x-3)^9}+C$. **4.18.** $-\frac{5}{6}\ln|x|+$
$+\frac{11}{15}\ln|x+3|+\frac{11}{10}\ln|x-2|+C$. **4.19.** $5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C$.
4.20. $\frac{3}{20}\ln|x|-\frac{27}{4}\ln|x-4|+\frac{38}{5}\ln|x-5|+C$. **4.21.** $\frac{x^2}{2}+5x+\frac{1}{3}\ln|x-1|+$
$+\frac{62}{3}\ln|x-4|+C$. **4.22.** $3x+\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{7}{2}\ln|x+3|+C$. **4.23.** $\frac{x^2}{2}+x+$
$+\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{8}{3}\ln|x-2|+C$. **4.24.** $\frac{x^2}{2}-x+\frac{39}{5}\ln|x+3|+\frac{16}{5}\ln|x-2|+C$.
4.25. $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-\ln|x|+2\ln|x-1|+C$.

§ 5. Інтегрування тригонометричних функцій

5.1. $-\frac{1}{8}(\cos 4x+2\cos 2x)+C$. **5.2.** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$.
5.3. $-\frac{1}{12}\cos 6x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$. **5.4.** $\frac{1}{8}(2\sin 2x-\sin 4x)+C$.
5.5. $-\frac{1}{4}\cos(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{4}x+C$. **5.6.** $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}+C$.
5.7. $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$. **5.8.** $\frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x+C$. **5.9.** $\sin x-$
$-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$. **5.10.** $-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C$. **5.11.** $\frac{1}{\cos x}+$
$+\cos x+C$. **5.12.** $\sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C$. **5.13.** $\frac{\cos^5 x}{5}-$
$-\frac{\cos^3 x}{3}+C$. **5.14.** $3x+4\sin x+\sin 2x+C$. **5.15.** $\frac{3x}{2}+\cos 2x-$
$-\frac{\sin 4x}{8}+C$. **5.16.** $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$. **5.17.** $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$.

5.18. $\frac{3x}{128}-\frac{\sin 4x}{128}+\frac{\sin 8x}{1024}+C$. **5.19.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C$.
5.20. $\frac{11x}{2}+3\sin 2x+\frac{9}{8}\sin 4x+C$. **5.21.** $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$.
5.22. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C$. **5.23.** $\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **5.24.** $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+$
$+C$. **5.25.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2}\right|+C$. **5.26.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)+C$. **5.27.** $-\frac{\mathrm{ctg}^3 x}{3}-$
$-\mathrm{ctg}x+C$. **5.28.** $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}x}{2}\right)+C$. **5.29.** $\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}+\mathrm{tg}x+C$.
5.30. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2\mathrm{tg}x)+C$. **5.31.** $\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x-\mathrm{tg}x+x+C$. **5.32.** $\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4}-$
$-\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C$. **5.33.** $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{4}(2-x^2)\sqrt{4-x^2}+C$.
5.34. $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$. **5.35.** $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}+C$. **5.36.** $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

§ 6. Інтегрування ірраціональних функцій

6.1. $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$. **6.2.** $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.
6.3. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$. **6.4.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+3}\right|+C$.
6.5. $\ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x-15}\right|+C$. **6.6.** $\arcsin\frac{x-5}{6}+C$. **6.7.** $2\ln|\sqrt{x}-$
$-1|+C$. **6.8.** $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$. **6.9.** $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$.
6.10. $2\ln\left|\sqrt{x}-4\right|+C$. **6.11.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-\frac{18}{5}\sqrt[6]{x^5}+3x-\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+C$.
6.12. $6\left[\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln(1+\sqrt[6]{x})\right]+C$. **6.13.** $2\sqrt{x+1}-2\ln|1+$

$+\sqrt{x+1}\,|+C$. **6.14.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right|+C$. **6.15.** $\frac{x-5}{3}\sqrt{5+2x}+C$.

6.16. $2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C$. **6.17.** $\frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C$.

6.18. $\frac{2x+1}{12}(2\sqrt{2x+1}-3)+C$. **6.19.** $\frac{(x-2)\sqrt{2x-1}}{3}+C$.

6.20. $\frac{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{2}+\sqrt[3]{3x+1}+\ln\left|\sqrt[3]{3x+1}-1\right|+C$. **6.21.** $P(x)=x^2+$ $+50x+1400$. **6.22.** $V(x)=100x-0{,}02x^2$, $V(1000)=12\cdot 10^4$.

6.23. $D(x)=80x-0{,}02x^2$. **6.24.** $D(x)=6x\text{-}0{,}015x^2-420$, $P(125)=95625$ гривень. **6.25.** $V(x)=\frac{\sqrt{(x^2+360)^3}}{3000}+143141$.

Розділ 9. **Визначений інтеграл**

§ 1. Обчислення визначених інтегралів

1.1. $\frac{21}{8}$. **1.2.** $\frac{\pi}{6}$. **1.3.** 4. **1.4.** $\frac{2}{3}$. **1.5.** $\frac{e^5-1}{5}$. **1.6.** $\frac{1}{2}$. **1.7.** $2-\ln 2$.

1.8. $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.9.** $\frac{1}{3}$. **1.10.** $2(1+\ln 2)$. **1.11.** $12\frac{2}{3}$. **1.12.** $\frac{1}{2}\ln 2{,}5$.

1.13. $7+2\ln 2$. **1.14.** $\frac{61}{3}$. **1.15.** 2. **1.16.** 6. **1.17.** $\frac{1}{3}$. **1.18.** $\frac{194}{3}$.

1.19. $\frac{1}{3}$. **1.20.** $\frac{e^2+1}{4}$. **1.21.** $2\ln 2+1$. **1.22.** $2\ln 2-1$. **1.23.** $4e^{-1}$.

1.24. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **1.25.** $\frac{(\pi^2-8)}{4}$. **1.26.** $\frac{\pi}{12}$. **1.27.** $0{,}2\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

1.28. $0{,}25\ln\left(\frac{5}{3}\right)$.

§ 2. Невласні інтеграли

2.1. $\frac{1}{4}$. **2.2.** Розбіжний. **2.3.** 1. **2.4.** Розбіжний. **2.5.** 1. **2.6.** $2e$.

2.7. 1. **2.8.** Розбіжний. **2.9.** Розбіжний. **2.10.** $\frac{\pi^2}{8}$. **2.11.** $\frac{\pi}{4}$.

2.12. π. **2.13.** π. **2.14.** 4. **2.15.** $3\sqrt[3]{4}$. **2.16.** -1. **2.17.** $\frac{\pi}{2}$.

2.18. Розбіжний. **2.19.** Розбіжний. **2.20.** $\frac{15}{2}$.

§ 3. Застосування визначених інтегралів

3.1. $\frac{9}{2}$. **3.2.** 12. **3.3.** $e-\frac{4}{3}$. **3.4.** $\frac{8}{3}$. **3.5.** $\frac{1}{12}$. **3.6.** $4{,}5$.

3.7. $\sqrt{2}-1$. **3.8.** 8. **3.9.** 9. **3.10.** $\frac{7}{3}-\ln 2$. **3.11.** $7{,}5-8\ln 2$.

3.12. $\frac{16}{3}$. **3.13.** $7{,}5$. **3.14.** $\frac{(e-1)^2}{e}$. **3.15.** 9. **3.16.** $\frac{32\pi}{3}$.

3.17. 12π. **3.18.** $\frac{\pi}{4}$. **3.19.** $\frac{348\pi}{5}$. **3.20.** $\frac{32\pi}{3}$. **3.21.** 8π. **3.22.** $0{,}3\pi$.

3.23. $\frac{4\pi}{35}$. **3.24.** $7{,}5\pi$. **3.25.** 8π. **3.26.** π. **3.27.** $0{,}3\pi$. **3.28.** $\frac{61}{54}$.

3.29. $\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})+\frac{\sqrt{5}}{2}$. **3.30.** $\frac{112}{27}$. **3.31.** 3π. **3.32.** Середні витрати дорівнюють 16; вони мають місце для $x=\frac{5}{3}$. **3.33.** а) 9 років, 36 млн. грн.; б) 8 років, 16 млн. грн. в) 25 років,166,67 млн.грн.; г) 8 років, 76,8 млн.грн.; д) 1рік, 15/7 млн.грн.. **3.34.** 346518 од., прибуток – 34651848 гривень. **3.35.** 15067 гривень 20 коп.

3.36. 1536 ум. од. **3.37.** $\approx 0{,}57$. **3.38**. $\approx 0{,}31$. **3.39**. 1) $6000\cdot 3^{3/2}$ у. о. 2) $\approx 8{,}55$ років.**3.40**. 5500 грн. **3.41**. $p=30$.

Розділ 10. **Диференціальні рівняння**

§ 1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

1.1. $y = Cx,\ y = -2x$. **1.2.** $x^2 + y^2 = C^2,\ x^2 + y^2 = 20$. **1.3.** $y = Ce^x$, $y = 4e^{x+2}$. **1.4.** $y = Ce^{\sqrt{x}},\ y = e^{\sqrt{x}-2}$. **1.5.** $y = \dfrac{C\sin^2 x - 1}{2}$, $y = 2\sin^2 x - \dfrac{1}{2}$. **1.6.** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = C$, $y = -x$. **1.7.** $\sqrt{y} = x\ln x - x + C$, $\sqrt{y} = x\ln x - x + 1$. **1.8.** $\ln|y| = -\operatorname{arctg} x + C$, $\ln|y| = -\operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{4}$.

1.9. $y = C(x^2+1)$, $y = x^2 + 1$. **1.10.** $y = Ce^{\frac{1}{x}}$. **1.11.** $x + y = \ln C(x+1)(y+1)$. **1.12.** $\sin y \cdot \cos x = C$. **1.13.** $\dfrac{1+y}{1-x} = C$. **1.14.** $\arcsin x - \sqrt{1-y^2} = C$. **1.15.** $(x^2-1)(y^2-1) = C$. **1.16.** $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} = Cx$. **1.17.** $e^{\frac{1}{y}} = C\sqrt[3]{3x-1}$. **1.18.** $y = C\cdot e^{\sqrt{4-x^3}}$. **1.19.** $x^2 + y^2 = \ln(Cx)^2$. **1.20.** $y^3 = 3x - 3x^2 + C$.

§ 2. Диференціальні рівняння першого порядку: однорідні, лінійні

2.1. $y = x\ln Cx$. **2.2.** $y = Cx^2$. **2.3.** $y = \dfrac{2x}{1-(Cx)^2}$. **2.4.** $y = \dfrac{Cx^2}{1-Cx}$.

2.5. $y = Ce^{\frac{y}{x}}$. **2.6.** $y^2 = x^2\ln Cx^2$. **2.7.** $y^2 = 4x^2\ln Cx$. **2.8.** $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}$. **2.9.** $y = 2x\operatorname{ctg} x$. **2.10.** $y = x\arcsin x$. **2.11.** $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$. **2.12.** $y = \sin x(C + x)$. **2.13.** $y = x^2(C + x^2)$. **2.14.** $y = \dfrac{1}{x^2+1}(C + x^3 + 3x)$. **2.15.** $y = x\ln|x| - 1 + Cx$. **2.16.** $y = Ce^{2x} + xe^{2x}$.

2.17. $y = Cx^3 - x^2$. **2.18.** $y = \dfrac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$. **2.19.** $y = \dfrac{C - \cos 2x}{2\cos x}$.

2.20. $y = \ln x + \dfrac{C}{x}$. **2.21.** $y = \dfrac{x-1}{3} + \dfrac{C}{\sqrt{2x+1}}$. **2.22.** $y = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}$. **2.23.** $y = Ce^{x^2} - 0{,}5(1+x^2)$. **2.24.** $y = 2x^2 + \dfrac{1}{x}$.

2.25. $y = \dfrac{2x}{1-3x^2}$.

§ 3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

3.1. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$. **3.2.** $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$. **3.3.** $y = e^{-3x} \times (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$. **3.4.** $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. **3.5.** $y = e^{3x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$. **3.6.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. **3.7.** $y = (-7x + 3)e^{2x}$. **3.8.** $y = 3e^{-2x} \sin 5x$. **3.9.** $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 - 8x + 7$. **3.10.** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - 0{,}5e^{-x}$. **3.11.** $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - 3(x^2 + x + 1{,}5)$. **3.12.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \dfrac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x)$.

3.13. $y = (C_1 x + C_2)e^{-x} + \dfrac{1}{4}e^{x}$. **3.14.** $y = C_1 + C_2 e^{2x} - 0{,}25x^2 - 1{,}75x$.

3.15. $y = C_1 e^{2x} + (C_2 - x)e^{x}$. **3.16** $y = (C_1 \sin x + C_2 \cos x)e^{-x} + 0{,}4\cos x - 0{,}2\sin x$. **3.17.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 0{,}25\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)$.

3.18. $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \dfrac{3}{2}x^2 - x$. **3.19.** $y = e^{x} + \sin x$. **3.20.** $y = \dfrac{9}{5}e^{-x} + \dfrac{1}{5}e^{4x}$. **3.21.** $Q = \dfrac{C}{\sqrt{p}}$. **3.22.** $p = \dfrac{1}{\sqrt{Q}}$. **3.23.** $p = 10 - \dfrac{Q}{5}$.

3.24. $p = 100 - 0{,}5Q$. **3.25.** $t = 20\ln 3$.

Розділ 11. **Ряди**

§ 1. Числові ряди

1.1. $u_n = \dfrac{1}{2n-1}$. **1.2.** $u_n = \dfrac{1}{2n}$. **1.3.** $u_n = \dfrac{1}{n^2}$. **1.4.** $u_n = \dfrac{n+2}{(n+1)^2}$.
1.5. $u_n = \dfrac{2n-1}{n!}$. **1.6.** $u_n = \dfrac{n}{100n-1}$. **1.7.** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$ – розбігається.
1.8. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. **1.9.** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. **1.10.** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ – розбігається.
1.11. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. **1.12.** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. **1.13.** Збігається. **1.14.** Збігається.
1.15. Розбігається. **1.16.** Збігається. **1.17.** Збігається. **1.18.** Розбігається. **1.19.** Ознака Даламбера не вирішує питання про збіжність ряду. **1.20.** Збігається. **1.21.** Збігається. **1.22.** Розбігається. **1.23.** Збігається. **1.24.** Розбігається. **1.25.** Збігається. **1.26.** Розбігається. **1.27.** Збігається. **1.28.** Збігається. **1.29.** Розбігається. **1.30.** Розбігається. **1.31.** Збігається. **1.32.** Розбігається. **1.33.** Збігається. **1.34.** Розбігається. **1.35.** Розбігається. **1.36.** Збігається. **1.37.** Збігається неабсолютно. **1.38.** Збігається неабсолютно. **1.39.** Збігається абсолютно. **1.40.** Збігається абсолютно. **1.41.** Збігається неабсолютно. **1.42.** Збігається абсолютно. **1.43.** Збігається абсолютно. **1.44.** Збігається неабсолютно. **1.45.** Збігається абсолютно.

§ 2. Степеневі ряди

2.1. $(-1;1)$. **2.2.** $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. **2.3.** $[-1;1)$. **2.4.** $[-3;3)$. **2.5.** $[-0{,}1;0{,}1)$.

2.6. $[-1;1]$. **2.7.** $[-0{,}01;0{,}01]$. **2.8.** $(-\infty;\infty)$. **2.9.** 0. **2.10.** $\left[-\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{5}\right]$.

2.11. $(-\infty;\infty)$. **2.12.** $(-1;1]$. **2.13.** $(-2;2]$. **2.14.** $(-1;1)$. **2.15.** $[-5;3)$.

2.16. $(1;2]$. **2.17.** $xe^x = x + \dfrac{x^2}{1!} + \dfrac{x^3}{2!} + \dfrac{x^4}{3!} + \ldots$. **2.18.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

2.19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$. **2.20.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$. **2.21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n3^n}$.

2.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2^{n+1}}{n} x^n$.

§ 3. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

3.1. $\approx 1{,}116$. **3.2.** $\approx 0{,}997$. **3.3.** $\approx 3{,}009$. **3.4.** $\approx 3{,}107$. **3.5.** $\approx 0{,}039$. **3.6.** $\approx -0{,}02$. **3.7.** $\approx 2{,}708$. **3.8.** $\approx 2{,}298$. **3.9.** $\approx 0{,}309$. **3.10.** $\approx 0{,}988$. **3.11.** $\approx 0{,}208$. **3.12.** $\approx 1{,}649$. **3.13.** $\approx 0{,}819$. **3.14.** $35°$. **3.15.** $42°$. **3.16.** 2. **3.17.** $\frac{1}{3}$. **3.18.** 1. **3.19.** $\approx 0{,}248$. **3.20.** $\approx 0{,}098$. **3.21.** $\approx 0{,}1996$. **3.22.** $\approx 0{,}102$. **3.23.** $\approx 0{,}505$. **3.24.** $\approx 0{,}255$. **3.25.** $\approx 0{,}039$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Апанасов П. Т., Апанасов Н. П. Сборник математических задач с практическим содержанием: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1987. – 110 с.
2. Барковський В. В., Барковська Н. В. Математика для економістів: Вища математика. – К.: Національна академія управління, 1997. – 397 с.
3. Белинский В. А., Калихман И. Л., Майстров Л. Е., Митькин А. М. Высшая математика с основами математической статистики. – М.: Высш. шк., 1965. – 516 с.
4. Бугір М. К. Математика для економістів: Навчальний посібник. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 192 с.
5. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: Навчальний посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2001. – Ч.1. – 546 с.;-К.: КНЕУ, 2002.-Ч.2.-451с.
6. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самостійного вивчення дисципліни / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. – К.: КНЕУ, 1999. – 396 с.
7. Вища математика. Підручник / Домбровський В. А., Крижанівський І. М., Мацьків Р. С. та ін.; за редакцією Шинкарика М. І. – Тернопіль: Вид-во Карп'юка, 2003. – 480 с.
8. Глаголев А. А., Солнцева Т. В. Курс высшей математики. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1971. – 656 с.
9. Гудименко Ф. С., Борисенко Д. М., Волкова В. О. та інші. Збірник задач з вищої математики: Учбовий посібник. – К.: Вид-во КДУ, 1967. – 352 с.
10. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие. – Изд. 2-е. – М.: Высш. шк., 1974.– Ч. І. – 416 с.

11. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие. – Изд. 2-е. – М.: Высш. шк., 1974.–Ч. II.– 464 с.
12. Доброжицкая И. Г., Доброжицкий М. Б. Краткое руководство к решению задач по высшей математике (для техникумов).– Минск: Вышейш. шк., 1972. – 200 с.
13. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике: Учеб. пособие. – Изд. 4-е.– Харьков: Изд-во ХГУ, 1970. – Ч. I, II.– 576 с.
14. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике: Учеб. пособие. – Изд. 3-е, стереотипное. Ч. III. – Изд. 2-е, стереотипное. – Ч. IV. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1971. – 500 с.
15. Карасев А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И. Курс высшей математики для економических вузов. – Ч. I. Основы высшей математики: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1982.– 272 с.
16. Клюева Л. А., Тальский Д. А. Практикум по математике для заочных техникумов: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1970.– 446 с.
17. Крыньский Х. Э. Математика для економистов: Пер. с польск. Меникера В. Д. Под ред. Баренгольца М. И. – М.: Статистика, 1970. – 584 с.
18. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
19. Неміш В. М., Процик А. І., Березька К. М. Вища математика (практикум): Навчальний посібник. – Тернопіль: Економічна думка, 2001. – 266 с.
20. Петров В. А. Математические задачи из сельскохозяйственной практики: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1980.– 64 с.

21. Сборник задач по курсу высшей математики: Учеб. пособие для втузов. / Кручкович Г. И., Гутарина Н. И., Дюбюк П. Е. и др. / Под ред. Крючковича Г. И. – Изд. 3-е, перераб. – М.: Высш. шк., 1973. – 576 с.
22. Справочное пособие по математическому анализу. Ч. I. Введение в анализ, производная, интеграл / Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г. – К.: Вища шк., 1978.– 696 с.
23. Типові індивідуальні розрахункові завдання з вищої математики: Навчальний посібник / Домбровський І.В., Лесик О.Ф., Мигович Ф.М. та ін.; за редакцією Шинкарика М.І. – Тернопіль: Вид-во “Збруч”, 2006.-213с.
24. Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика: Пер. с англ. со 2-го изд. – М.: “Дело ЛТД”, 1993. – 864 с.

Навчальне видання

Василь Миколайович Неміш,
Антоніна Іванівна Процик,
Катерина Миколаївна Березька

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Редактор *Легкий Б.С.*
Комп'ютерний макет *Шпак В. Б.*

Підписано до друку 01.08.2007 р.
Формат 60x84/16. Папір офсетний. Друк на дублікаторі.
Умов.-друк. арк. 15,8. Обл.-вид. Арк 16,5. Зам. № 1-01/08/07
Тираж 500 прим.

Віддруковано у видавництві "Економічна думка"
Тернопільського національного економічного університету
46000, Тернопіль, вул. Львівська, 3, тел. 43-22-18
E-mail: edition@tane.edu.ua