Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Тернопільський національний економічний університет

До 50-річчя
Тернопільського національного
економічного університету

А. М. Алілуйко, В. М. Неміш, М. І. Шинкарик

КОМПЛЕКСНІ ПРАКТИЧНІ ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Тернопіль
ТНЕУ
2013

УДК 51
ББК 22.11
Али 50

Рецензенти: *Олексій Григорович Мазко*, доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник, старший науковий співробітник Інституту математики НАН України;

Микола Олександрович Недашковський, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету ім. І. Пулюя;

Дмитро Ількович Боднар, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри економічної кібернетики та інформатики Тернопільського національного економічного університету.

Розглянуто на засіданні кафедри економіко-математичних методів (протокол № 2 від 18.09.2012 р.)

Алілуйко А. М.
Али 50 Комплексні практичні індивідуальні завдання з вищої математики : навч. Посіб. / А. М. Алілуйко, В. М. Неміш, М. І. Шинкарик. – Тернопіль : Екон. Думка ТНЕУ, 2013. – 158 с.
ISBN 978-966-654-297-0

Навчальний посібник містить орієнтовний план змістових модулів з курсу «Вища математика», рекомендованих типовою навчальною програмою Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України для студентів економічних спеціальностей. Він охоплює комплексні практичні індивідуальні завдання, вказівки до їх виконання, зразки розв’язування задач економічного та математичного характеру, короткі теоретичні відомості, список рекомендованої літератури.

Для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 51
ББК 22.11

ISBN 978-966-654-297-0

ВСТУП

Зростаючі вимоги до економістів як фахівців, здатних скласти економічний прогноз, прийняти оптимальне рішення у виборі правильної економічної політики, передбачають глибоке вивчення математичних дисциплін. З метою якісного засвоєння курсу математики, ефективного її застосування в практичній діяльності розроблено комплексні практичні індивідуальні завдання (КПІЗ). Вони включають:

- структуру залікових кредитів;
- варіанти завдань для виконання КПІЗ;
- критерії оцінювання КПІЗ;
- графік виконання та здачі КПІЗ;
- короткі теоретичні відомості;
- деякі економічні задачі і їх розв'язування;
- комплексне практичне індивідуальне завдання № 1;
- комплексне практичне індивідуальне завдання № 2;
- список рекомендованих джерел.

КПІЗ охоплюють всю програму курсу вищої математики (вищої та прикладної математики) вищих навчальних закладів економічного профілю. Студент виконує завдання КПІЗ №1 під час І семестру. Оформляє виконане завдання в зошиті з необхідними поясненнями, захищає його згідно з графіком, що є важливим компонентом здачі заліку. Аналогічно виконується завдання КПІЗ №2 у другому семестрі. При розв'язуванні економічних задач важливо пояснити економічний зміст отриманих результатів. Блок економічних завдань створює можливість творчої співпраці студента і викладача, перспективу науково-пошукової роботи студента-економіста із застосуванням математичного апарату.

КПІЗ № 1 має на меті закріпити засвоєння студентами таких розділів курсу «Вищої математики»:

- ЛІНІЙНА АЛГЕБРА;
- АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ;
- ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ;
- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ.

КПІЗ № 2 охоплює такі розділи курсу «Вища математика»:

- ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ;
- ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ;
- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ;
- РЯДИ.

Завдання складається з 35 варіантів однотипних завдань. До задач з економічним змістом є пояснення в зразках розв’язування задач. Студент може користуватися вказаною літературою, звертатися за консультацією до викладача.

Структура залікових кредитів дисципліни «Вища математика» І заліковий кредит

ТЕМА	Кількість годин		
	Лекції	Практичні заняття	Самост. робота студентів
Змістовий модуль 1. Елементи лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії			
Тема 1. Елементи теорії визначників	2	2	1
Тема 2. Елементи теорії матриць	2	2	1
Тема 3. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь	2	4	1
Тема 4. Елементи матричного аналізу	4	4	1
Тема 5. Елементи векторної алгебри	2	2	1
Тема 6. Елементи аналітичної геометрії	2	4	1
Тема 7. Канонічні лінії другого порядку	2	4	1
Тема 8. Побудова математичних моделей задач економічного змісту	2	4	
Змістовий модуль 2. Математичний аналіз функції однієї змінної			
Тема 9. Функції та їх графіки	2	2	
Тема 10. Елементи теорії границь	2	2	1
Тема 11. Дві визначні границі. Неперервність функції	2	2	1
Тема 12. Елементи фінансової математики та математичної економіки	2	2	1
Тема 13. Диференціальне числення функції однієї змінної. Похідна функції та основні правила диференціювання	2	2	1
Тема 14. Основні теореми про диференційовані функції	2	4	
Тема 15. Диференціал функції та його застосування	2	2	1
Тема 16. Дослідження функцій та побудова їх графіків. Екстремум функції	2	6	1
Тема 17. Повне дослідження функції	2	6	

II заліковий кредит

ТЕМА	Кількість годин		
	Лекції	Практичні заняття	Самост. робота студентів
Змістовий модуль 3. Функції багатьох змінних			
Тема 1. Основні поняття функції багатьох змінних та їх інтерпретації в економічній теорії	2	2	
Тема 2. Диференційованість та екстремум функції багатьох змінних	2	4	1
Тема 3. Побудова емпіричних формул	2	4	1
Змістовий модуль 4. Інтегральне числення			
Тема 4. Невизначений інтеграл	2	4	1
Тема 5. Інтегрування раціональних дробів	2	2	1
Тема 6. Інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій	2	6	1
Тема 7. Визначений інтеграл та його властивості	2	1	1
Тема 8. Зв'язок невизначеного і визначеного інтегралів	2	1	
Тема 9. Застосування визначених інтегралів. Невласні інтеграли	2	4	1
Змістовий модуль 5. Диференціальні та різницеві рівняння. Ряди			
Тема 10. Диференціальні рівняння I-го порядку	2	2	
Тема 11. Розв’язування диференціальних рівнянь I-го порядку	2	2	1
Тема 12. Лінійні диференціальні рівняння II-го порядку	2	2	
Тема 13. Лінійні диференціальні рівняння II-го порядку з постійними коефіцієнтами	2	2	1
Тема 14. Різницеві рівняння	2	4	
Тема 15. Числові ряди та їх збіжність	2	2	
Тема 16. Достатні умови збіжності числових рядів. Знакозмінні ряди	2	4	1
Тема 17. Степеневі ряди	2	4	1
Тема 18. Розклад функцій у степеневі ряди. Застосування степеневих рядів для наближених обчислень	2	4	1
Разом	72	108	25

Варіанти завдань для виконання комплексного практичного індивідуального завдання

Для виконання комплексного практичного індивідуального завдання студент обирає варіант згідно з своїм номером у списку групи, виконує і захищає усі завдання відповідно до графіка.

При розв'язуванні задач врахувати, що параметр k задається викладачем.

Варіант	**Терміни здачі КПІЗ (I семестр)**			
	тиждень 5	**тиждень 10**	**тиждень 14**	**тиждень 17**
1	1.1., 5.1., 6.1., 7.1.	8.1., 11.1., 12.1., 13.1.	14.1., 23.1., 24.1.	17.1., 25.1., 26.1., 27.1., 28.1., 29.1., 30.1.
2	1.2., 5.2., 6.2., 7.2.	8.2., 11.2., 12.2., 13.2. а)	14.2., 23.2., 24.2.	17.2., 25.2., 26.2., 27.2., 28.2., 29.2., 30.2.
3	1.3., 5.3., 6.3., 7.3.	8.3., 11.3., 12.3., 13.2. б)	14.3., 23.3., 24.3.	17.3., 25.3., 26.3., 27.3., 28.3., 29.3., 30.3.
4	1.4., 5.4., 6.4., 7.4.	8.4., 11.4., 12.4., 13.3.	14.4., 23.4., 24.4.	17.4., 25.4., 26.4., 27.4., 28.4., 29.4., 30.4.
5	2.1., 5.5., 6.5., 7.5.	8.5., 11.5., 12.5., 13.4. а)	15.1., 23.5., 24.5.а)	17.5., 25.5., 26.5., 27.5., 28.5., 29.5., 30.5.
6	2.2., 5.6., 6.6., 7.6.	8.6., 11.6., 12.6., 13.4. б)	15.2., 23.6., 24.5.б)	17.6., 25.6., 26.6., 27.6., 28.6., 29.6., 30.6.
7	2.3., 5.7., 6.7., 7.7.	8.7., 11.7., 12.7., 13.4. в)	15.3., 23.7., 24.6.	18.1., 25.7., 26.7., 27.7., 28.7., 29.7., 30.7.
8	2.4., 5.8., 6.8., 7.8.	9.1., 11.8., 12.8., 13.5.	15.4., 23.8., 24.7.	18.2., 25.8., 26.8., 27.8., 28.8., 29.8., 30.8.
9	3.1., 5.9., 6.9., 7.9.	9.2., 11.9., 12.9., 13.6.	15.5., 23.9., 24.8.	18.3., 25.9., 26.9., 27.9., 28.9., 29.9., 30.9.
10	3.2., 5.10., 6.10., 7.10.	9.3., 11.10., 12.10., 13.7.	15.6., 23.10., 24.9.	18.4., 25.10., 26.10., 27.10., 28.10., 29.10., 30.10.
11	3.3., 5.11., 6.11., 7.11.	9.4., 11.11., 12.11., 13.8.	16.1., 23.11., 24.10.	18.5., 25.11., 26.11., 27.11., 28.11., 29.11., 30.11.

12	3.4., 5.12., 6.12., 7.12.	9.5., 11.12., 12.12., 13.9. а)	16.2., 23.12., 24.11. а)	18.6., 25.12., 26.12., 27.12., 28.12., 29.12., 30.12.
13	3.7., 5.13., 6.13., 7.13.	9.6., 11.13., 12.13., 13.9 б)	16.3., 23.13., 24.11.б)	19.1., 25.13., 26.13., 27.13., 28.13., 29.13., 30.13.
14	3.8., 5.14., 6.14., 7.14.	10.1., 11.14., 12.14., 13.10.	16.4., 23.14., 24.11. в)	19.2., 25.14., 26.14., 27.14., 28.14., 29.14., 30.14.
15	3.7., 5.15., 6.15., 7.15.	10.2., 11.15., 12.15., 13.11.	16.5., 23.15., 24.11. г)	19.3., 25.15., 26.15., 27.15., 28.15., 29.15., 30.15.
16	3.8., 5.16., 6.16., 7.16.	10.3., 11.16., 12.16., 13.12.	16.6., 23.16., 24.11. д)	19.4., 25.16., 26.16., 27.16., 28.16., 29.16., 30.16.
17	3.9., 5.17., 6.17., 7.17.	10.4., 11.17., 12.17., 13.13.	16.7., 23.17., 24.12. а)	19.5., 25.17., 26.17., 27.17., 28.17., 29.17.а), 30.17.
18	1.4., 5.18., 6.18., 7.18.	8.1., 11.18., 12.18., 13.14.	14.1., 23.18., 24.12. б)	20.1., 25.18., 26.18., 27.18., 28.18., 29.17.б), 30.18.
19	2.1., 5.19., 6.19., 7.19.	8.2., 11.19., 12.19., 13.15.	14.2., 23.19., 24.12. в)	20.2., 25.19., 26.19., 27.19., 28.19., 29.17.в), 30.19.
20	2.2., 5.20., 6.20., 7.20.	8.3., 11.20., 12.20., 13.1.	14.3., 23.20., 24.12. г)	20.3., 25.20., 26.20., 27.20., 28.20., 29.17.г), 30.20.
21	2.3., 5.21., 6.21., 7.21.	8.4., 11.21., 12.21., 13.2. а)	14.4., 23.21., 24.12.д)	20.4., 25.21., 26.21., 27.21. 28.21., 29.18., 21.
22	2.4., 5.22., 6.22., 7.22.	8.5., 11.22., 12.22., 13.3.	15.1., 23.22., 24.13. а)	21.1., 25.22., 26.22., 27.22., 28.22., 29.19., 30.22.
23	3.1., 5.23., 6.23., 7.23.	8.6., 11.23., 12.23., 13.4. а)	15.2., 23.23., 24.13. б)	21.2., 25.23., 26.23., 27.23., 28.23., 29.20., 30.23.
24	3.2., 5.24., 6.24., 7.24.	8.7., 11.24., 12.24., 13.5.	15.3., 23.24., 24.13.в)	21.3., 25.24., 26.24., 27.24., 28.24., 29.21.в), 30.24.

25	3.3., 5.25., 6.25., 7.25.	9.1., 11.25., 12.25., 13.6.	15.4., 23.25., 24.13. г)	21.4., 25.25., 26.25., 27.25., 28.25., 29.21.а), 30.25.
26	3.4., 5.26., 6.26., 7.26.	9.2., 11.26., 12.26., 13.7.	15.5., 23.26., 24.13. д)	22.1., 25.26., 26.26., 27.26., 28.26., 29.21.б), 30.26.
27	3.5., 5.27., 6.27., 7.27.	9.3., 11.27., 12.27., 13.8.	15.6., 23.27., 24.1.	22.2., 25.27., 26.27., 27.1., 28.27., 29.22., 30.27.
28	3.6., 5.28., 6.28., 7.28.	9.4., 11.28., 12.28., 13.9. а)	16.1., 23.28., 24.2.	22.3., 25.28., 26.28., 27.2., 28.28., 29.23., 30.28.
29	1.1., 5.29., 6.29., 7.29.	9.5., 11.29., 12.29., 13.10. б)	16.2., 23.29., 24.3.	22.4., 25.29., 26.29., 27.3., 28.29., 29.24., 30.29.
30	1.2.,5.30., 6.30., 7.30.	9.6., 11.30., 12.30., 13.10.	16.3., 23.30., 24.4.	17.1., 25.30., 26.30., 27.4., 28.30., 29.25., 30.30.
31	1.3., 5.31., 6.31., 7.31.	10.1., 11.31., 12.31., 13.11.	16.4., 23.31., 24.5. а)	17.2., 25.31., 26.31., 27.5., 28.31., 29.26., 30.31.
32	1.4., 5.32., 6.32., 7.32.	10.2., 11.32., 12.32., 13.12	16.5., 23.32., 24.6.	17.3., 25.32., 26.32., 27.6., 28.32., 29.1., 30.32.
33	3.7., 5.33., 6.33., 7.33.	10.3., 11.33., 12.33., 13.13.	16.6., 23.33., 24.7.	17.4., 25.3., 26.33., 27.7., 28.33., 29.2., 30.33.
34	3.8., 5.34., 6.34., 7.34.	10.4., 11.34., 12.34., 13.14.	16.7., 23.34., 24.8.	17.5., 25.34., 26.34., 27.8., 28.34., 29.3., 30.34.
35	3.9., 5.35., 6.10., 7.35.	8.2., 11.35., 12.35., 13.15.	15.4., 23.35., 24.9.	17.6., 25.35., 26.35., 27.9., 28.35., 29.4., 30.35.

Варіант	Терміни здачі КПІЗ (ІІ семестр)			
	тиждень 4	**тиждень 8**	**тиждень 13**	**тиждень 17**
1	1.1., 4.1., 5.1., 6.1.	7.1., 10.1., 11.1., 14.1., 15.1., 16.1., 17.1.	18.1., 22.1., 23.1.	24.1,2., 27.1., 28.1.
2	1.2., 4.2., 5.2., 6.2.	7.2., 10.2., 11.2., 14.2., 15.2., 16.2., 17.2.	18.2., 22.2., 23.2.	24.3., 25.2., 26.2., 27.2., 28.2.
3	1.3., 4.3., 5.3., 6.3.	7.4., 10.3., 11.3., 14.3., 15.3., 16.3., 17.3.	18.3., 22.3., 23.3.	24.4., 27.3., 28.3.
4	1.4., 4.4., 5.4., 6.4.	7.5., 10.4., 11.4., 14.4., 15.4., 16.4., 17.4.	18.4., 22.4., 23.4.	24.5., 25.4., 26.4., 27.4., 28.4.
5	1.5., 4.5., 5.5., 6.5.	7.6., 10.5., 12.,1., 14.5., 15.5., 16.5., 17.5.	18.5., 22.5., 23.5.	24.6., 27.5., 28.5.
6	2.1., 4.6., 5.6., 6.6.	8.1., 10.6., 12.2., 14.6., 15.6., 16.6., 17.6.	18.6.а), 22.6., 23.6.	24.7., 27.6., 28.6.
7	2.2., 4.7., 5.7., 6.7.	8.2., 10.7., 12.3., 14.7., 15.7., 16.7., 17.7.	18.6.б), 22.7., 23.7.	24.8., 25.7., 26.7., 27.7., 28.7.
8	2.3., 4.8., 5.8., 6.8.	8.3., 10.8., 13.1., 14.8., 15.8., 16.8., 17.8.	18.6.в), 22.8., 23.8.	25.1., 27.8., 28.8.
9	2.4., 4.9., 5.9., 6.9.	9.1., 10.9., 13.2., 14.9., 15.9., 16.9., 17.9.	18.6.г), 22.9., 23.9.	25.2., 27.9., 28.9.
10	3.1., 4.10., 5.10., 6.10.	9.2., 10..10., 13.3., 14.10., 15.10., 16.10., 17.10.	18.6.д), 22.10., 23.10.	25.3., 27.10., 28.10.
11	3.2., 4.11., 5.11., 6.11.	9.3., 10.11., 13.4., 14.11., 15.11., 16.11., 17.11.	19.3., 22.11., 23.11.	25.5., 25.11., 26.11., 27.11., 28.11.
12	1.1., 4.12., 5.12., 6.12.	7.1., 10.12., 13.5., 14.12., 15.12., 16.12., 17.12.	19.5., 22.12., 23.12.	25.6., 27.12., 28.12.
13	1.2., 4.13., 5.13., 6.13.	7.2., 10.13., 13.6., 14.13., 15.13., 16.13., 17.1.	20.1., 22.13., 23.13.	25.7., 27.13., 28.13.
14	1.3., 4.14., 5.14., 6.14.	7.4., 10.14., 11.1., 14.14., 15.14., 16.14., 17.2.	20.2., 22.14., 23.14.	26.1., 27.14., 28.14.
15	1.4., 4.15., 5.15., 6.15.	7.5., 10.15., 11.2., 14.15., 15.15., 16.15., 17.3.	21.1., 22.15., 23.15.	26.2., 27.15., 28.15.

16	1.5., 4.16., 5.16., 6.16.	7.6., 10.16., 11.3., 14.16., 15.16., 16.16., 17.4.	21.2., 22.16., 23.16.	26.3., 27.16., 28.16.
17	2.1., 4.17., 5.17., 6.17.	8.1., 10.17., 11.4., 14.17., 15.17., 16.17., 17.5.	21.3., 22.17., 23.17.	26.4., 27.17., 28.17.
18	2.2., 4.18., 5.18., 6.18.	8.2., 10.18., 12.1., 14.18., 15.18., 16.18., 17.6.	21.4., 22.18., 23.18.	26.5., 27.18., 28.18.
19	2.3., 4.19., 5.19., 6.19.	8.3., 10.19., 12.2., 14.19., 15.19., 16.19., 17.7.	18.1., 22.19., 23.19.	26.6., 27.19., 28.19.
20	2.4., 4.20., 5.20., 6.20.	9.1., 10.20., 12.3., 14.20., 15.20., 16.20., 17.8.	18.2., 22.20., 23.20.	26.7., 27.20., 28.20.
21	3.1., 4.21., 5.21., 6.21.	9.2., 10..21., 13.1., 14.21., 15.21., 16.21., 17.9.	18.3., 22.21., 23.21.	26.8., 27.21. 28.21.
22	3.2., 4.22., 5.22., 6.22.	9.3., 10.22., 13.2., 14.22., 15.22., 16.22., 17.10.	18.4., 22.22., 23.22.	26.9., 27.22., 28.22.
23	1.1., 4.23., 5.23., 6.23.	7.1., 10.23., 13.3., 14.23., 15.23., 16.23., 17.11.	18.5., 22.23., 23.23.	26.10., 27.23., 28.23.
24	1.2., 4.24., 5.24., 6.24.	7.2., 10.24., 13.4., 14.24., 15.24., 16.24., 17.12.	18.6.а), 22.24., 23.24.	24.1,2., 27.24., 28.24.
25	1.3., 4.25., 5.25., 6.25.	7.4., 10.25., 13.5., 14.25., 15.25., 16.25., 17.1.	18.6.б), 22.25., 23.25.	24.3., 27.25., 28.25.
26	1.4., 4.26., 5.26., 6.26.	7.5., 10.26., 13.6., 14.26., 15.26., 16.26., 17.2.	18.6.в), 22.26., 23.26.	24.4., 27.26., 28.26.
27	1.5., 4.27., 5.27., 6.27.	7.6., 10.27., 11.1., 14.27., 15.27., 16.27., 17.3.	18.6.г), 22.27., 23.27.	24.5., 27.1., 28.27.
28	2.1., 4.28., 5.28., 6.28.	8.1., 10.28., 11.2., 14.28., 15.28., 16.28., 17.4.	18.6.д), 22.28., 23.28.	24.6., 27.2., 28.28.
29	2.2., 4.29., 5.29., 6.29.	8.2., 10.29., 11.3., 14.29., 15.29., 16.29., 17.5.	19.3., 22.29., 23.29.	24.7., 27.3., 28.29.
30	2.3., 4.30., 5.30., 6.30.	8.3., 10.30., 11.4., 14.30., 15.30., 16.30., 17.6.	19.5., 22.30., 23.30.	24.8., 27.4., 28.30.
31	2.4., 4.31., 5.31., 6.31.	9.1., 10.31., 12.1., 14.31., 15.31., 16.31., 17.7.	20.1., 22.31., 23.31.	25.1., 27.5., 28.31.
32	3.1., 4.32., 5.32., 6.32.	9.2., 10..32., 12.2., 14.32., 15.32., 16.32., 17.8.	20.2., 22.32., 23.32.	25.2., 27.6., 28.32.

33	3.2., 4.3., 5.33., 6.33.	9.3., 10.33., 12.3., 14.33., 15.33., 16.33., 17.9.	21.1., 22.33., 23.33.	25.3., 27.7., 28.33.
34	1.1., 4.34., 5.34., 6.34.	7.1., 10.34., 13.1., 14.34., 15.34., 16.34., 17.10.	21.2., 22.34., 23.34.	25.5., 27.8., 28.34.
35	1.2., 4.35., 5.35., 6.35.	7.2., 10.35., 13.2., 14.35., 15.35., 16.35., 17.11.	21.3., 22.35., 23.35.	25.6., 27.9., 28.35.

Критерії оцінювання
комплексного практичного індивідуального завдання

Комплексне практичне індивідуальне завдання оцінюється за стобальною шкалою і складає 15–20% підсумкового бала з дисципліни «Вища математика».

- «відмінно» (90–100 балів) виставляється, якщо студент повністю виконав КПІЗ (дав відповіді на теоретичні питання і розв’язав усі задачі, може обґрунтувати їх розв’язування);
- «добре» (75–89 балів) виставляється, якщо студент повністю виконав КПІЗ, але при висвітленні теоретичних питань або при розв’язуванні окремих завдань допустив помилки;
- «задовільно» (60–74 бали) виставляється, якщо студент виконав КПІЗ, але не може без сторонньої допомоги зробити відповідні обґрунтування теоретичних та практичних завдань, не може зробити правильних висновків при розв’язуванні економічних задач;
- «незадовільно» (менше 60 балів) виставляється у випадку, якщо студент виконав письмовий варіант КПІЗ на задовільному рівні, але не знає відповідей на теоретичні питання, не вміє пояснити розв’язування виконаних ним практичних завдань, не може зробити жодних висновків при розв’язуванні економічних задач.

У випадку отримання незадовільної оцінки студент доопрацьовує КПІЗ і належно готується до повторного захисту.

Графік виконання та здачі комплексного практичного індивідуального завдання

Тема	Термін здачі КПІЗ
І семестр	
Змістовий модуль 1. Елементи лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії. Теми 1–4	тиждень 5
Теми 5–8	тиждень10
Змістовий модуль 2. Математичний аналіз функції однієї змінної. Теми 9–12	тиждень 14
Теми 13–17	тиждень 17
ІІ семестр	
Змістовий модуль 3. Функції багатьох змінних. Теми 1–3	тиждень 4
Змістовий модуль 4. Інтегральне числення. Теми 4–9	тиждень 8
Змістовий модуль 5. Диференціальні та різницеві рівняння. Ряди. Теми 10–14	тиждень 13
Теми 15–17	тиждень 17

Комплексне практичне індивідуальне завдання № 1

з курсу «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

І СЕМЕСТР

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.

Елементи лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії

1. <u>ВИЗНАЧНИКИ</u>.

1. Обчислення визначників II та III порядку та їх властивості.
2. Поняття про мінори та алгебраїчні доповнення.
3. Розклад визначника за елементами його стрічки (стовпчика).
4. Поняття про визначники вищих порядків та їх обчислення.

2. <u>МАТРИЦІ.</u>

1. Визначення матриці, їх види.
2. Дії над матрицями.
3. Обернена матриця та її знаходження.
4. Поняття про ранг матриці та його обчислення.

3. <u>РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ</u>.

1. Системи лінійних рівнянь та їх розв'язки.
2. Правило Крамера.
3. Метод Гаусса та Жордана–Гаусса.
4. Матричний спосіб розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
5. Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність.
6. Теорема Кронекера–Капеллі. Однорідні системи лінійних рівнянь.
7. Задача міжгалузевого балансу.
8. Задача знаходження витрат сировини, палива та трудових ресурсів.
9. Задача про раціональний розподіл сировини.

4. <u>ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ</u>.

1. Види систем координат на площині і в просторі.
2. Поняття вектора. Дії над векторами в геометричній формі.
3. Проекція вектора на вісь та її властивості. Розклад вектора на компоненти.
4. Дії над векторами, заданими в координатній формі. Модуль вектора.
5. Віддаль між двома точками. Поділ відрізка в заданому відношенні.
6. Визначення скалярного добутку двох векторів та його властивості.
7. Скалярний добуток векторів у координатній формі.

8. Кут між двома векторами. Умови паралельності і перпендикулярності векторів.
9. Лінійна залежність і незалежність векторів.
10. Базис. Розклад вектора по базису. Перехід від одного базису до іншого.
11. Поняття власних чисел та власних векторів матриці. Методи їх знаходження.

5. Обчислити визначники двома способами: а) за допомогою елементарних перетворень; б) розклавши за елементами рядка (стовпця).

1. $\begin{vmatrix} k & k+1 & k+1 & k-9 \\ 2 & 3 & 0 & k+2 \\ -k & k+2 & -k-1 & 9-k \\ -1 & 2 & k+4 & 1 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} k+2 & 1 & 0 & k+3 \\ k-3 & k & 3 & 3-k \\ k+3 & k-2 & 4 & -k-3 \\ k-1 & 2 & k+2 & 1-k \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} k-2 & 4 & -k & k-1 \\ k & k+2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & k-2 \\ 2-k & -6 & k & 1-k \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} k+2 & k & 0 & k+2 \\ k & k+4 & -1 & 4 \\ 5-k & 0 & -3 & 5-k \\ k+3 & 3 & -k & k+3 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} k-1 & 1 & k & k+2 \\ k-1 & 4 & k+1 & -3 \\ k+2 & -1 & -k & -k-2 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; 6. $\begin{vmatrix} k+2 & k-2 & k & 3 \\ k+1 & 4 & 0 & 1+k \\ 0 & 2-k & -k & -3 \\ k & 3+k & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

7. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ k+1 & k+2 & k-2 & k+1 \\ -k-1 & 0 & 2-k & -1-k \\ k+1 & k & 1 & -1 \end{vmatrix}$; 8. $\begin{vmatrix} k+2 & k-1 & 3 & 0 \\ -2 & k+1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ -2-k & 1-k & -3 & k \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} k-1 & k+2 & 1 & k-2 \\ k & 3 & 0 & 4 \\ 1-k & -k-2 & k+1 & 2-k \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; 10. $\begin{vmatrix} k & 1 & k-7 & -k \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ k-1 & -1 & 7-k & k \\ 3 & k & k+1 & 1 \end{vmatrix}$;

11. $\begin{vmatrix} 1 & k+3 & 4 & 1 \\ k & k-2 & 0 & k+5 \\ 1 & k-1 & 4 & 3 \\ -1 & k & -4 & -1 \end{vmatrix}$; 12. $\begin{vmatrix} 1 & k+2 & k+3 & -1 \\ -k-2 & 0 & -1 & k+4 \\ k & 1 & k+3 & -2 \\ k+2 & 7 & 1 & -k-4 \end{vmatrix}$;

13. $\begin{vmatrix} k & k+1 & 1 & k-2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & k \\ -k & -k-1 & k-1 & 2-k \end{vmatrix}$; 14. $\begin{vmatrix} k+1 & 3 & 4 & -k-1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -k-1 & -3 & 7 & k+1 \\ 4 & 1 & 4 & k \end{vmatrix}$;

15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & k \\ -3 & k+1 & -2 & k-1 \\ -1 & -2 & 2 & k+1 \\ -1 & -1 & 1 & k+2 \end{vmatrix}$; 16. $\begin{vmatrix} -k & 1 & k+2 & 4-k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ k-1 & k+1 & 3 & -1 \\ k & -1 & 1 & k-4 \end{vmatrix}$;

17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & k+3 & -k \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ k+1 & k-1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -k-3 & 4 \end{vmatrix}$; 18. $\begin{vmatrix} k+2 & -k-1 & 1 & -k-2 \\ -k+3 & 3 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 1 & k \\ -k-2 & k & -1 & k+2 \end{vmatrix}$;

19. $\begin{vmatrix} k+1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ -k-1 & 1 & -1 & 3 \\ -12-1 & -2 & -3 & k \end{vmatrix}$; 20. $\begin{vmatrix} 2 & -k-1 & -k & -k-1 \\ -1 & k+2 & -k-3 & 2 \\ -2 & k+1 & k+1 & k+1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

21. $\begin{vmatrix} k & 1 & k+2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2k \\ -k & k & -k-2 & -3 \\ -1 & k+1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; 22. $\begin{vmatrix} k-1 & k & -5 & k+1 \\ k+6 & -1 & 2 & -6 \\ -k & k & 3 & 2 \\ 1-k & -k & 5 & 2 \end{vmatrix}$;

23. $\begin{vmatrix} k & -k & -k & 5 \\ k+6 & -4 & k-5 & k+1 \\ -k & k & 4 & -5 \\ 3 & -k-3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 24. $\begin{vmatrix} k & k+1 & k+2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -k & k+2 & -k-2 & 0 \\ 4 & 4 & k & 1 \end{vmatrix}$;

25. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & k \\ k+1 & k+2 & -k & -k \\ 1 & 2 & k+1 & -k \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$; 26. $\begin{vmatrix} k & k+1 & k+1 & -k-1 \\ 2 & -2 & 3 & k \\ -k & -k-1 & 4 & k+1 \\ -1 & 0 & 2 & k+2 \end{vmatrix}$;

27. $\begin{vmatrix} k+3 & k+2 & k+1 & k \\ 2+k & -k-1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ -k-3 & 5 & -k-1 & -k \end{vmatrix}$; 28. $\begin{vmatrix} -6 & -k-5 & -3 & -k-8 \\ -k-1 & -3 & -2 & -5 \\ 6 & k+5 & 5 & k+8 \\ k+1 & k-1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$;

29. $\begin{vmatrix} 1 & k & -1 & k-2 \\ -k & 5 & 3 & 4 \\ k+1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -k & k & 2-k \end{vmatrix}$; 30. $\begin{vmatrix} k+3 & k+1 & 1 & k+3 \\ k+1 & 0 & k & 1 \\ -k-3 & 3 & -1 & -k-3 \\ 2 & 1 & 0 & -k \end{vmatrix}$;

31. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2+k \\ -k-1 & -k-2 & 1 & -1 \\ k & k+1 & k & 1 \\ k+1 & k+2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; 32. $\begin{vmatrix} k+1 & 0 & k & -k \\ 4 & 3 & 2 & 1+k \\ 3 & 2 & 1 & 1-k \\ -k-1 & k & -k & k \end{vmatrix}$;

33. $\begin{vmatrix} k & -2 & -1 & -k \\ -k-1 & k+1 & k & k+1 \\ 2 & -k-3 & -2 & k+3 \\ k+1 & -k-1 & 5 & -k-1 \end{vmatrix}$; 34. $\begin{vmatrix} k+2 & 4 & -k-2 & 3 \\ k-2 & 0 & 2-k & k \\ k & 2 & -k & 0 \\ 4 & k-1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

35. $\begin{vmatrix} -k & -k-1 & -1 & k+2 \\ 3 & -4 & -1 & k-2 \\ k & k+1 & k & -k-2 \\ -k-1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

6. Розв’язати системи рівнянь трьома методами: а) за правилом Крамера; б) методом Гаусса; в) матричним способом.

1. $\begin{cases} (k-4)x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ kx_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + (k-1)x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3x_1 + (k+1)x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + kx_2 - x_3 = -7, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + (k+10)x_3 = 6, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + (k+1)x_2 + x_3 = 4, \\ -3x_1 + kx_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -6, \\ 5x_1 + (k-2)x_2 + 2x_3 = -23, \\ 2x_1 + kx_2 + 4x_3 = -6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x_1+(k-1)x_2+x_3=-4, \\ 2x_1+kx_2+2x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} -x_1-(k-2)x_2+2x_3=-5, \\ x_1+(k+1)x_2+x_3=2, \\ 3x_1-x_2+4x_3=5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1-kx_2+x_3=7, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=24, \\ 2x_1-(k-1)x_2-3x_3=4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+(k-2)x_2+x_3=5, \\ x_1+kx_2+2x_3=6, \\ 3x_1+x_2+x_3=13. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-1, \\ -x_1+(k+2)x_2+4x_3=16, \\ 2x_1-kx_2-x_3=-11. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1-(k+1)x_2+3x_3=9, \\ x_1-x_2-2x_3=8, \\ 3x_1+kx_2+x_3=17. \end{cases}$

13. $\begin{cases} kx_1-2x_2+x_3=11, \\ x_1+x_2+2x_3=2, \\ (k+2)x_1+3x_2+x_3=-9. \end{cases}$

14. $\begin{cases} (k+2)x_1-x_2-3x_3=-6, \\ kx_1-3x_2-2x_3=3, \\ x_1+x_2-4x_3=-15. \end{cases}$

15. $\begin{cases} (k+3)x_1+3x_2+2x_3=14, \\ (k+1)x_1+2x_2-8x_3=0, \\ x_1-x+3x_3=-1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3=-32, \\ (k+2)x_1-3x_2+x_3=-16, \\ (k+3)x_1-x_2-2x_3=4. \end{cases}$

17. $\begin{cases} kx_1+4x_2+x_3=17, \\ (k+3)x_1-x_2+2x_3=-11, \\ 3x_1+2x_2+4x_3=-2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} -x_1-(k+1)x_2-2x_3=-9, \\ 2x_1+(k+2)x_2-4x_3=2, \\ 3x_1-x_2+x_3=17. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1-kx_2-x_3=9, \\ x_1+(k+6)x_2+2x_3=12, \\ 4x_1-x_2+3x_3=33. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1+x_2-4x_3=17, \\ 5x_1+kx_2-x_3=34, \\ x_1-(k-4)x_2+3x_3=10. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 6x_1-kx_2+2x_3=30, \\ 2x_1-(k+2)x_2+4x_3=0, \\ x_1+3x_2+x_3=3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1+x_2+5x_3=22, \\ 2x_1+kx_2+x_3=17, \\ -3x_1(k+3)x_2+2x_3=-15. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x_1+(k+3)x_2-4x_3=-8, \\ -x_1+(k+1)x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+2x_3=-14. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1+x_2+(k+1)x_3=7, \\ x_1-3x_2+kx_3=14, \\ 5x_1+x_2+x_3=22. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=10, \\ -x_1+5x_2+kx_3=-16, \\ 2x_1+x_2+(k+1)x_3=10. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1-3x_2+kx_3=4, \\ 4x_1+x_2-(k-2)x_3=29, \\ 3x_1+2x_2+(k+4)x_3=23. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1+4x_2+kx_3=18, \\ 3x_1+5x_2-3x_3=25, \\ x_1+x_2-(k-2)x_3=7. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1+3x_2+(k+4)x_3=18, \\ 7x_1-x_2+kx_3=16, \\ 3x_1-3x_2+2x_3=-6. \end{cases}$

29. $\begin{cases} kx_1+3x_2-2x_3=13, \\ 3x_1-2x_2+x_3=-9, \\ (k+4)x_1+x_2+3x_3=8. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5, \\ kx_1+2x_2-2x_3=2, \\ (k+1)x_1+3x_2+5x_3=19. \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=8, \\ (k+1)x_1+x_2-3x_3=11, \\ kx_1+2x_2+5x_3=-11. \end{cases}$

32. $\begin{cases} 2x_1+(k+1)x_2+x_3=3, \\ 2x_1-kx_2-x_3=0, \\ x_1+x_2-3x_3=-5. \end{cases}$

33. $\begin{cases} (k-2)x_1+2x_2+x_3=3, \\ (k+1)x_1+x_2-x_3=3, \\ x_1+3x_2-4x_3=10. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x_1-3x_2+kx_3=4, \\ x_1+x_2-(k-3)x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=3. \end{cases}$

35. $\begin{cases} -4x_1+(k+2)x_2-x_3=17, \\ x_1-kx_2+x_3=-5, \\ -x_1+x_2+3x_3=1. \end{cases}$

7. Для виготовлення чотирьох видів продукції $\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{P_2}$, $\boldsymbol{P_3}$, $\boldsymbol{P_4}$ використовують три види сировини $\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{S_2}$ і $\boldsymbol{S_3}$. Визначити кількість одиниць продукції $\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{P_2}$, $\boldsymbol{P_3}$, $\boldsymbol{P_4}$, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблицях:

1.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***60***	**2**	**2**	**1**	**3**
S_2	***80***	**1**	**3**	**2**	**1**
S_3	***100***	**3**	**1**	**3**	***k***

2.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***50***	**1**	**1**	**2**	**1**
S_2	***80***	**3**	**2**	**2**	**3**
S_3	***100***	**1**	**3**	**4**	***k***

3.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**67**	**1**	**1**	**3**	k
S_2	**82**	**2**	**3**	**1**	**3**
S_3	**74**	**2**	**1**	**3**	**1**

4.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**130**	**2**	**3**	**3**	**1**
S_2	**85**	**1**	**2**	**2**	**3**
S_3	**115**	**3**	**1**	**3**	k

5.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**105**	**1**	**2**	**1**	**3**
S_2	**100**	**3**	**1**	**2**	k
S_3	**170**	**2**	**3**	**2**	**1**

6.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**110**	**1**	**4**	**2**	**1**
S_2	**80**	**2**	**1**	**3**	**2**
S_3	**94**	**3**	**2**	**2**	k

7.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**80**	**2**	**3**	**2**	k
S_2	**80**	**1**	**4**	**2**	**3**
S_3	**120**	**3**	**2**	**4**	**2**

8.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**80**	**3**	**2**	**2**	**3**
S_2	**89**	**2**	**1**	**4**	**1**
S_3	**107**	**1**	**3**	**4**	k

9.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**100**	**1**	**3**	**2**	k
S_2	**90**	**3**	**1**	**1**	**3**
S_3	**110**	**2**	**2**	**3**	**2**

10.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***87***	***2***	***1***	***3***	***1***
S_2	***91***	***3***	***2***	***2***	***k***
S_3	***55***	***1***	***1***	***2***	***2***

11.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***90***	***1***	***2***	***4***	***2***
S_2	***82***	***3***	***2***	***2***	***1***
S_3	***72***	***1***	***4***	***1***	***k***

12.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***65***	***1***	***3***	***1***	***2***
S_2	***98***	***2***	***1***	***3***	***1***
S_3	***110***	***3***	***1***	***2***	***k***

13.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***105***	***1***	***4***	***2***	***1***
S_2	***125***	***3***	***2***	***4***	***k***
S_3	***80***	***2***	***1***	***3***	***1***

14.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***135***	***2***	***3***	***2***	***1***
S_2	***150***	***3***	***2***	***2***	***3***
S_3	***105***	***1***	***1***	***4***	***k***

15.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***79***	***1***	***3***	***2***	***1***
S_2	***73***	***3***	***1***	***2***	***k***
S_3	***100***	***3***	***2***	***4***	***2***

16.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***76***	***1***	***2***	***3***	***1***
S_2	***68***	***3***	***2***	***1***	***k***
S_3	***107***	***2***	***4***	***3***	***2***

17.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**61**	**1**	**1**	**3**	**2**
S_2	**88**	**2**	**3**	**2**	**1**
S_3	**71**	**3**	**1**	**2**	**k**

18.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**75**	**1**	**3**	**2**	**k**
S_2	**90**	**2**	**1**	**4**	**3**
S_3	**81**	**3**	**2**	**2**	**3**

19.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**65**	**1**	**1**	**2**	**3**
S_2	**90**	**2**	**1**	**3**	**2**
S_3	**140**	**2**	**3**	**4**	**k**

20.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**72**	**2**	**3**	**1**	**3**
S_2	**50**	**1**	**1**	**2**	**k**
S_3	**106**	**3**	**2**	**3**	**1**

21.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**80**	**1**	**2**	**2**	**3**
S_2	**70**	**2**	**1**	**1**	**k**
S_3	**115**	**2**	**2**	**3**	**2**

22.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**70**	**2**	**2**	**1**	**3**
S_2	**131**	**1**	**4**	**3**	**k**
S_3	**94**	**3**	**2**	**2**	**1**

23.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**110**	**1**	**2**	**1**	**1**
S_2	**150**	**3**	**2**	**1**	**k**
S_3	**230**	**2**	**4**	**3**	**2**

24.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**90**	**2**	**1**	**2**	**k**
S_2	**140**	**1**	**3**	**4**	**2**
S_3	**114**	**3**	**2**	**2**	**1**

25.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**60**	**1**	**2**	**1**	**3**
S_2	**108**	**2**	**4**	**1**	**1**
S_3	**140**	**3**	**2**	**3**	**k**

26.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**78**	**1**	**2**	**2**	**1**
S_2	**96**	**2**	**2**	**3**	**2**
S_3	**134**	**3**	**4**	**1**	**k**

27.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**76**	**2**	**2**	**1**	**k**
S_2	**107**	**1**	**4**	**2**	**2**
S_3	**97**	**3**	**2**	**2**	**1**

28.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**67**	**1**	**2**	**2**	**1**
S_2	**81**	**3**	**2**	**2**	**k**
S_3	**124**	**2**	**4**	**3**	**1**

29.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**56**	**1**	**2**	**3**	**k**
S_2	**62**	**2**	**4**	**1**	**3**
S_3	**66**	**3**	**2**	**2**	**3**

30.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	**90**	**2**	**1**	**2**	**k**
S_2	**134**	**3**	**2**	**2**	**4**
S_3	**136**	**1**	**3**	**2**	**2**

31.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	77	1	3	2	4
S_2	109	2	1	4	2
S_3	117	3	3	2	k

32.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	70	1	3	2	2
S_2	90	2	1	4	k
S_3	80	2	3	2	4

33.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	108	2	2	3	k
S_2	90	1	4	1	2
S_3	102	3	2	2	3

34.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	98	1	3	2	2
S_2	116	2	1	4	3
S_3	98	3	3	2	k

35.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	72	1	3	2	k
S_2	67	2	1	1	3
S_3	100	3	1	2	4

8. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ.

1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих на площині.
3. Рівняння прямої, що проходить через задану точку.
4. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
5. Рівняння прямої у відрізках.
6. Рівняння прямої, що проходить через задану точку, перпендикулярно до заданого вектора.
7. Загальне рівняння прямої та його дослідження.

9. <u>ПЛОЩИНА І ПРЯМА ЛІНІЯ В ПРОСТОРІ</u>.

1. Векторне рівняння площини.
2. Рівняння площини, що проходить через задану точку, перпендикулярно до вектора.
3. Загальне рівняння площини та його дослідження.
4. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності площин.
5. Різні види рівнянь прямої в просторі.
6. Кут між двома прямими.

10. <u>КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ЛІНІЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ.</u>

1. Коло. Виведення рівняння кола. Нормальне і загальне рівняння кола.
2. Канонічне рівняння еліпса, дослідження його форми.
3. Канонічне рівняння гіперболи, дослідження його форми.
4. Канонічне рівняння параболи, дослідження його форми.

11. Задані координати вершин A, B, C трикутника ABC. Знайти: а) рівняння висоти AD; б) довжину висоти AD; в) рівняння медіани CE; г) значення кута B; д) площу трикутника ABC. Зробити малюнок.

1. $A(k+5;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+7)$; $C(k+2;\ k+3)$.
2. $A(k+9;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+3)$; $C(k+6;\ k+1)$.
3. $A(k+1;\ k+7)$; $B(k+2;\ k)$; $C(k+2;\ k+1)$.
4. $A(k+3;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+4)$; $C(k+1;\ k+3)$.
5. $A(k+5;\ k+1)$; $B(k;\ k+3)$; $C(k+1;\ k+4)$.
6. $A(k+3;\ k+3)$; $B(k+1;\ k+1)$; $C(k+2;\ k+5)$.
7. $A(k+1;\ k+1)$, $\mathrm{B}(k+2;\ k+5)$, $\mathrm{C}(k+4;\ k+4)$.
8. $A(k+1;\ k+2)$; $B(k+5;\ k+3)$; $C(k+6;\ k+4)$.
9. $A(k+2;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+5)$; $C(k+4;\ k+1)$.
10. $A(k;\ k)$; $B(k+2;\ k+2)$; $C(k+4;\ k+4)$.
11. $A(k+2;\ k)$; $B(k+4;\ k+5)$; $C(k+5;\ k+3)$.
12. $A(k+1;\ k)$; $B(k+7;\ k+3)$; $C(k+4;\ k+4)$.
13. $A(k+5;\ k)$; $B(k+1;\ k+2)$; $C(k+4;\ k+5)$.
14. $A(k+3;\ k+3)$; $B(k;\ k+6)$; $C(k+6;\ k+6)$.
15. $A(k+2;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+4)$; $C(k;\ k+6)$.
16. $A(k+1;\ k)$; $B(k+4;\ k+6)$; $C(k+2;\ k+2)$.
17. $A(k+3;\ k)$; $B(2+k;\ k+3)$; $C(k+1;\ k+3)$.
18. $A(k;\ k+2)$; $B(k+4;\ k+8)$; $C(k+4;\ k)$.
19. $A(k+1;\ k+1)$; $B(k+4;\ k+4)$; $C(k+3;\ k+3)$.
20. $A(k+6;\ k+2)$; $B(k+2;\ k+5)$; $C(k+3;\ k+1)$.
21. $A(k+1;\ k+1)$; $B(k+1;\ k+2)$; $\mathrm{C}(k+5;\ k+4)$.
22. $A(k+2;\ k+4)$; $B(k+4;\ k+2)$; $\mathrm{C}(k;\ k+8)$.
23. $A(k+4;\ k+2)$; $B(k+1;\ k+6)$; $\mathrm{C}(k+1;\ k+5)$.

24. $A(k+3;\ k+8)$; $B(k+6;\ k\ 0)$; $C(k+4;\ k+2)$.
25. $A(k+2;\ k+3)$; $B(k+1;\ k+6)$; $C(k;\ k+1)$.
26. $A(k+7;\ k+3)$; $B(k+5;\ k+2)$; $C(k+8;\ k+1)$.
27. $A(k+7;\ k+4)$; $B(k+3;\ k+7)$; $C(k+2;\ k+5)$.
28. $A(k+1;\ k+2)$; $B(k+7;\ k+2)$; $C(k+4;\ k+5)$.
29. $A(k+8;\ k+4)$; $B(k+4;\ k+1)$; $C(k+7;\ k+3)$.
30. $A(k;\ k+1)$; $B(k+1;\ k+2)$; $C(k+3;\ k+4)$.
31. $A(k+6;\ k+5)$; $B(k+2;\ k+3)$; $C(k;\ k+1)$.
32. $A(k+6;\ k+5)$; $B(k;\ k)$; $C(k+9;\ k+4)$.
33. $A(k+9;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+3)$; $C(k+6;\ k+1)$.
34. $A(k+5;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+6)$; $C(k+1;\ k+1)$.
35. $A(k;\ k+1)$; $B(k+2;\ k+7)$, $C(k+4;\ k+4)$.

12. Розв’яжіть задачі:

1. Еліпс проходить через точку $M(\sqrt{8};\ \frac{3}{\sqrt{2}})$ і має ексцентриситет $e=\frac{4}{\sqrt{7}}$. Скласти рівняння еліпса. Зробити малюнок.

2. Скласти рівняння гіперболи, яка проходить через т. $M\ (8\sqrt{2};6)$, якщо асимптоти гіперболи задані рівнянням $y=\pm\frac{3}{4}x$.

3. Скласти рівняння гіперболи, вершини і фокуси якої знаходяться у відповідних фокусах і вершинах еліпса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$.

4. Скласти рівняння геометричного місця точок, відстань яких від заданої точки $A(0;\ 2)$ в два рази менша від відстані до прямої $y = 8$.

5. Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет дорівнює 3 і фокуси співпадають з фокусами еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

6. Скласти найпростіше рівняння параболи, якщо відомо, що її фокус знаходиться в точці перетину прямої $8x - 5y - 2 = 0$ з віссю Ox.

7. Еліпс, симетричний відносно осей координат, проходить через точки $M(2\sqrt{3};\sqrt{6})$ і $A(6;\ 0)$. Написати його рівняння, знайти ексцентриситет і відстань від точки M до фокусів.

8. Знайти координати центра і радіус кола $x^2 + y^2 + 6x - y + 37/4 = 0$. Зробити малюнок.

9. Дано еліпс $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{16}=1$. Скласти рівняння гіперболи, вершини якої містяться у фокусах, а фокуси – у вершинах даного еліпса.

10. Знайти траєкторію точки *M*, яка під час руху залишається вдвічі ближчою до точки $A(-1;\ 0)$, ніж до прямої $x = -3$.

11. Знайти координати центра і радіус кола $x^2+y^2-4x+2y-76=0$. Зробити малюнок.

12. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M\ (5/2; \sqrt{6}/4)$ і $N\ (-2;\ \sqrt{15}/5)$. Зробити малюнок.

13. Точка $M\ (6;\ -2)$ лежить на гіперболі, рівняння асимптот якої $y = \pm\frac{2}{3}x$. Скласти рівняння гіперболи. Зробити малюнок.

14. Скласти рівняння геометричного місця точок, однаково віддалених від початку координат і прямої $y = 5$.

15. Знайти координати центра і радіус кола $x^2+y^2+10x-4y+29 = 0$.

16. Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої сума відстаней від точок $F_1(2;\ 0)$ і $F_2\ (-2;\ 0)$ дорівнює $2\sqrt{5}$.

17. Написати рівняння прямих, які проходять через точку $M(-5;\ 2)$ і паралельні асимптотам гіперболи $9x^2-4y^2=36$.

18. На гіперболі $x^2-4y^2 = 16$ взята т. *M* з ординатою, яка дорівнює 1. Знайти відстань від неї до фокусів.

19. Задана рівностороння гіпербола $x^2-y^2 = 8$. Знайти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться у фокусах гіперболи, якщо відомо, що еліпс проходить через точку $A(4;\ 6)$.

20. Скласти рівняння гіперболи, яка проходить через точку $M(8\sqrt{2};6)$, якщо асимптоти гіперболи задані рівнянням $y=\pm\frac{3}{4}x$.

21. Знайти координати центра і радіус кола $x^2+y^2-4x+2y-76 = 0$. Зробити малюнок.

22. Побудувати коло $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$.

23. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M\ (-5;\ -4)$ і $N\ \left(5\sqrt{0{,}5}; 2\sqrt{6}\right)$.

24. Ексцентриситет гіперболи дорівнює $\frac{\sqrt{17}}{3}$. Скласти рівняння гіперболи, яка проходить через точку $A\left(3\sqrt{2};\,2\sqrt{2}\right)$.

25. Скласти рівняння прямих, які проходять через фокуси гіперболи $7x^2 - 5y^2 = 35$ і утворюють з віссю OX кут 60^0. Зробити малюнок.

26. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо його осі відносяться як 13 : 5.

27. Еліпс проходить через точку $M(1;\ 1)$ і має ексцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$. Скласти рівняння еліпса.

28. Побудувати коло $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}\,x - 2y - 6 = 0$.

29. Скласти рівняння і знайти довжину спільної хорди параболи $y^2 = 36x$ і кола $(x + 12)^2 + y^2 = 400$.

30. Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(2;\ 2)$, $B(-4;\ 2)$, якщо його центр лежить на прямій $y + x + 2 = 0$.

13. Розв’яжіть задачі економічного змісту:

1. Транспортні витрати на перевезення одиниці вантажу y залізничним і автомобільним транспортом на відстань x знаходять за формулами:

$$y = \frac{1}{2}x + 10 \quad \text{і} \quad y = x + 5,$$

де x вимірюється десятками кілометрів. Визначити, коли транспортні витрати на перевезення автотранспортом менші від витрат на перевезення залізничним транспортом і коли більш рентабельним буде залізничний транспорт.

2. Знайти точки рівноваги та області прибутків і збитків компанії, що виготовляє щомісяця x виробів вартістю p гривень кожен, а сума загальних щомісячних витрат $y_в$ має таку закономірність:

а) $p = 4,\ y_в = 2{,}8x + 600$;

б) $p = 7,\ y_в = 1000 + 5x$.

3. Вартість обладнання авторемонтної майстерні 480000 гривень, а річна амортизація – 25000 гривень. Виразити вартість обладнання залежно від часу (x років) роботи майстерні, якщо амортизаційне відрахування залишається постійною величиною.

4. Витрати при перевезенні вантажу трьома видами транспорту відповідно обчислюють за формулами:

$$y_1 = 150 + 50x, \quad y_2 = 250 + 25x, \quad y_3 = 350 + 25x,$$

де x – відстань у сотнях кілометрів, y_1, y_2, y_3 – вартість перевезення у гривнях. Графічно визначити, на які відстані і яким видом транспорту перевозити вантаж економніше:

а) при використанні всіх видів транспорту;

б) при використанні другого і третього видів транспорту;

в) при використанні першого і третього видів транспорту.

5. Із пункту A в пункти B, C, D, E вантаж можна доставити трьома видами транспорту: водним, залізничним і автомобільним. Витрати при перевезенні вантажу відповідно обчислюють за формулами:

$$y_в = 25 + 25x, \quad y_з = 50 + 25x, \quad y_а = 75 + \frac{8}{3}x,$$

де x – відстань у сотнях кілометрів, y – вартість перевезення вантажу в гривнях. Обчислити графічно, яким видом транспорту економніше доставити вантаж у пункти A, B, C, D і E, якщо відстані від пункту A до цих пунктів відповідно дорівнюють 200, 300, 500 і 900 км.

6. Повні витрати з перевезення вантажу залізничним і автомобільним транспортом подаються відповідно залежностями:

$$y_1 = a_1x + b_1 \text{ і } y_2 = a_2x + b_2,$$

де x – відстань у кілометрах, на яку здійснюється перевезення; y – транспортні витрати.

Знаючи, що $0 < a_1 < a_2$ і $0 < b_1 < b_2$, встановити, яким видом транспорту і на яку відстань дешевше перевозити вантаж.

7. Початкова врожайність деякої зернової культури на малопридатних для землеробства землях становила 12 ц/га. Завдяки застосуванню інтенсивної технології передбачається щорічне її зростання на 2 ц/га. Записати закон зміни врожайності y як функції часу x. Обчислити її значення для п’ятого року застосування зазначеної технології ($x = 5$).

8. Повні витрати на виготовлення 5 умовних одиниць деякої продукції становлять 5,5 млн. грн., а для виготовлення 10 таких одиниць – 9 млн. грн. Знайти функцію витрат виробництва, вважаючи її лінійною. Визначити витрати на виготовлення 7 умовних одиниць продукції.

9. Монополіст, знаючи з маркетингових досліджень функцію попиту на свій товар $Q = 10 - 0{,}6p$, вирішує, скільки йому виробляти товару. Допоможіть монополісту:

а) розрахувати кількість товару при ціні $p_1 = 5$ грош. од., $p_2 = 6$ грош. од.

б) розрахувати ціну товару, якщо він хоче виробити товару у кількості $Q_1 = 5{,}8$ млн. шт., $Q_2 = 7$ млн. шт.

Задачу зобразіть графічно.

10. Попит (Q) та пропозиція (S) на товар залежно від ціни (p) на ринку задаються формулами:

$$Q = 500 - 10p; \quad S = 50 + 5p.$$

Показати графічно лінії попиту та пропозиції і знайти рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиція врівноважуються.

11. Земля рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце. Найменша відстань від Землі до Сонця дорівнює $\approx 147{,}5$ мільйона кілометрів, а найбільша – $\approx 152{,}5$ мільйона кілометрів. Знайти більшу піввісь і ексцентриситет орбіти Землі.

12. Верхня дуга залізничного мосту має вигляд параболи. Написати рівняння параболи, якщо відстань між кінцями мосту дорівнює 32 метри, а найбільша висота дуги – 8 метрів.

13. Знайти точки рівноваги та області прибутків і збитків заводу, що виготовляє щомісяця x виробів вартістю 10 гривень кожен, а сума загальних щомісячних витрат $y_в$ має таку закономірність: $y_в = 80 - 4x + 0{,}1x^2$.

14. Витрати палива для судна на підводних крилах зростають пропорційно до квадрата швидкості судна. Знайти аналітичну залежність між витратами m і швидкістю V судна, враховуючи, що при $V = 40$ км/год витрачається 20 л палива за годину, а також визначити витрати палива за годину при швидкості 60 км/год.

15. Бригада, яка складається з x робітників-ремонтників і бригадира, виконуючи певне замовлення, щомісяця одержувала загалом 3000 грн. заробітної плати. Подати заробітну плату члена бригади виразом, коли відомо, що вона в усіх однакова і 50 грн. з належної кожному суми становлять різні відрахування.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.
Математичний аналіз функції однієї змінної

14. ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІКИ. ЧИСЛОВА ПОСЛІДОВНІСТЬ.

1. Абсолютна величина числа та її властивість. Окіл точки.
2. Поняття функції. Область визначення і область значень функції.
3. Класифікація функцій. Основні елементарні функції та їх графіки.
4. Криві попиту і пропозиції.

15. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЕЛЕМЕНТИ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ.

1. Числова послідовність.
2. Арифметична та геометрична прогресії. Обчислення простих і складних відсотків.
3. Задачі про розрахунки ренти та погашення боргу.
4. Павутинна модель ринку.
5. Використання показникової функції при обчисленні неперервних процентів.
6. Границя числової послідовності. Основні теореми про границі числових послідовностей.

16. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ.

1. Границя функції в точці. Односторонні границі.
2. Основні теореми про границі функцій.
3. Перша і друга визначна границі.
4. Використання показникової функції при обчисленні неперервних процентів.
5. Поняття про натуральний логарифм.
6. Визначення неперервної функції в точці та відрізку. Класифікація точок розриву.
7. Властивості неперервних функцій на відрізку.

17. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ТА ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ.

1. Визначення похідної функції в точці.
2. Геометричний зміст похідної.
3. Фізичний зміст похідної.
4. Економічний зміст похідної.
5. Правила диференціювання суми, добутку і частки функцій.
6. Похідні елементарних функцій.
7. Таблиця похідних елементарних функцій.

18. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІ ФУНКЦІЇ.

1. Похідна складної і оберненої функції.
2. Похідна неявнозаданої функції.

3. Похідні вищих порядків.
4. Теореми Ролля.
5. Теореми Лагранжа.
6. Правило Лопіталя та його застосування.

19. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ.
1. Визначення диференціала та його геометричний зміст.
2. Диференціал суми, добутку і частки функцій.
3. Диференціал складної функції.
4. Таблиця диференціалів основних елементарних функцій.
5. Застосування диференціалів для наближених обчислень.

20. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЙ.
1. Умови зростання і спадання функції.
2. Необхідні умови екстремуму.
3. Достатні умови екстремуму.
4. Найбільше і найменше значення функцій на відрізку.

21. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ.
1. Приклади задач оптимізації з економічним змістом.
2. Еластичність функції, її властивості.
3. Еластичність попиту відносно ціни.
4. Еластичність пропозиції відносно ціни.

22. ПОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ. ПОБУДОВА ГРАФІКА.
1. Випуклість і вгнутість графіка функцій.
2. Необхідна і достатня умова існування точки перегину графіка функції.
3. Асимптоти плоских кривих та їх знаходження.
4. Повне дослідження функції та побудова графіка.

23. Знайти границі функції:

1. а) $\lim\limits_{x\to-(k+1)}\dfrac{x^2+x(k-4)-5(k+1)}{x^2+(k-1)x-2(k+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+10}\dfrac{\sqrt{x-k+15}-5}{\sqrt{x-k+26}-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^2+(k+4)x-6k}{(k+1)x^2-9k}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{x}{5}}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{1+5x}\right)^x$.

2. а) $\lim\limits_{x\to-(k+2)}\dfrac{x^2+kx-2(k+2)}{x^2+(1+k)x-k-2}$; б) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{\sqrt{x-k+24}-5}{\sqrt{x-k+48}-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{kx^5+(k+4)x^4+7k}{(k+3)x^6+kx^4+2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-1}\right)^{-2n}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to-(k+3)}\dfrac{x^2+(2+k)x-k-3}{x^2+(k-1)x-4(k+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{\sqrt{x-k+2}-2}{\sqrt{x-k+14}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^2-(k+5)x+4k}{(k+7)x^6+k}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tg\ 3(x-\pi)}{\sin\ 2(\pi-x)}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^x$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 2k+1}\dfrac{x^2-2kx-2k-1}{x^2+(1-2k)x-2(2k+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{\sqrt{x-k+22}-5}{\sqrt{x-k+46}-7}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^3-3k}{(k+5)x^3+(k+2)x^2+5k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\cdot ctg 5x$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 2k+3}\dfrac{x^2-2x(1+k)-2k-3}{x^2+(1-2k)x-4(2k+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{\sqrt{x-k+5}-3}{\sqrt{x-k+12}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{kx^2+(k+5)x+k+1}{(k+3)x^5-k-4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2ctg\ 2x^2}{\cos\ 3x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{5n}\right)^n$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 2k-1}\dfrac{x^2+2(1-k)x-2k+1}{x^2+(3-2k)x-2(2k-1)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{\sqrt{x-k+44}-7}{\sqrt{x-k+20}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2+(k+1)x-k+3}{(k+5)x^2+(k+10)x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ 2x^2}{\sin\ 3x^2}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 2k}\dfrac{x^2+x(3-2k)-6k}{x^2+2(1-k)x-4k}$; б) $\lim\limits_{x\to k+7}\dfrac{\sqrt{x-k+29}-6}{\sqrt{x-k+42}-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+1)x^2-(k+2)x}{(k+2)x^2-(k+2)x+4k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{arc\ \sin\ 6x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{x^2-(k+6)x+k+5}{x^2-(k-1)x-6(k+5)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+8}\dfrac{\sqrt{x-k+17}-5}{\sqrt{x-k+41}-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+7)x^3-kx^2+k-2}{(k+5)x^3+(k+1)x^2+9k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x}\right)^{x/2}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{x^2-(4+k)x-2(k+6)}{x^2-(3+k)x-3(k+6)}$; б) $\lim\limits_{n\to k+10}\dfrac{\sqrt{x-k+15}-5}{\sqrt{x-k+26}-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^3-(k+3)x+k}{2k+(k+4)x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\ \pi x}{\sin\ 5\pi x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+1}\right)^{5x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{x^2-(10+k)x+6(k+4)}{x^2-x(3+k)-k-4}$; б) $\lim\limits_{x\to k+11}\dfrac{\sqrt{x-k+38}-7}{\sqrt{x-k+14}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2k-(k+7)x^2}{k+(k+1)x-(k+2)x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctg\,4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^{3x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{x^2-x(4+k)-k-5}{x^2-(2+k)x-3(k+5)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+12}\dfrac{\sqrt{x-k+24}-6}{\sqrt{x-k+13}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+5)x^2+3k}{4k+(k+1)x-(k+4)x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ 6x}{tg\ 3x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-6}\right)^{2n}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{x^2-(5+k)x-k-6}{x^2+(3-k)x-9(k+6)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{\sqrt{x-k+3}-2}{\sqrt{x-k+80}-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+6)x^4+kx+2k}{(k+2)x^2+kx^5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{8x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x+3}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{x^2-(2+k)x+k+1}{x^2+(7-k)x-8(k+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{\sqrt{x-k+14}-4}{\sqrt{x-k+34}-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+4)x^2+(k+2)x}{(k+3)x+10k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{tg2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+5}\right)^{-5x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{x^2-(1+k)x-k-2}{x^2+(5-k)x-7(k+2)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{\sqrt{x-k+6}-3}{\sqrt{x-k+46}-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^4+(k+3)x^3+2k}{kx^4+(k+1)x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} tg\,2x\,ctg3x$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\ln(1+x)}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{x^2-(2+k)x-k-3}{x^2+(3-k)x-6(k+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{\sqrt{x-k+12}-4}{\sqrt{x-k+21}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+7)x^2-(k+2)x+5k}{(k+3)x^3+(k+1)x}-k$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ 3x}{\sin\ 2x}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-5}{2n+6}\right)^{n+4}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{x^2-(3+k)x-k-4}{x^2+(1-k)x-5(k+4)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{\sqrt{x-k+44}-7}{\sqrt{x-k+31}-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-(k+2)x+3k}{(k+1)x^5+k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5tg\ 2x}{\sin\ 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{3x+4}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x^2-(2+k)x+2k}{x^2+(3-k)x-3k}$; б) $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{\sqrt{x-k+10}-4}{\sqrt{x-k+43}-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+1)x^4-(k+2)x^2+3k}{(k+2)x^3-(k+3)x^2-2k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\ 7x}{3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x-7}\right)^{2x+1}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{x^2+(2-k)x-3(k+1)}{x^2-kx-k-1}$; б) $\lim\limits_{x\to k+7}\dfrac{\sqrt{x-k+29}-6}{\sqrt{x-k+9}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2-(k+2)x+k}{(k+4)x^2+(k+5)x+3k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg\ \ 2x}{ctg\ \ 4x}$; д) $\left(\dfrac{n+4}{n-1}\right)^{2n-5}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to -k}\dfrac{x^2+(k+2)x+2k}{x^2+(k-1)x-k}$; б) $\lim\limits_{x\to k+8}\dfrac{\sqrt{x-k+17}-5}{\sqrt{x-k+41}-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+4)x^5+(k+7)x+2k}{(k+1)x^7-(k+3)x^5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\ 2x-1}{3x^2}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{3n}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{x^2-kx-k-1}{x^2+(1-k)x-2(k+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+9}\dfrac{\sqrt{x-k+7}-4}{\sqrt{x-k+16}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+7)x^3+(k+2)x-k}{(k+4)x^4+kx+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\cdot ctg\ 2x$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-6}\right)^{2n-4}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{x^2+(1-k)x-3(k+2)}{x^2-(4+k)x+2(k+2)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+10}\dfrac{\sqrt{x-k+26}-6}{\sqrt{x-k+39}-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+8)x^3+(k+2)x-3k}{(k+2)x^4+(k+9)x+k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{5x}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{x^2-(2+k)x-k-3}{x^2-(6+k)x+3(k+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+11}\dfrac{\sqrt{x-k+53}-8}{\sqrt{x-k+14}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^3+(k+2)x}{(k+9)x^3+8k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 9x\cdot ctg\,5x$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-5}{2n+6}\right)^{n+4}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{x^2-(2+k)x-2(k+4)}{x^2+(1-k)x-5(k+4)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+12}\dfrac{\sqrt{x-k+37}-7}{\sqrt{x-k+52}-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+5)x^3-(k+1)x^2+4k}{(k+7)x^4-(k+8)x^2+16k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\sin 2x}{6x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{10}{x}}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{x^2+(1-k)x-3(k+2)}{x^2-(1+k)x-k-2}$; б) $\lim\limits_{x\to k+13}\dfrac{\sqrt{x-k+23}-6}{\sqrt{x-k+12}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2-(k+2)x+2k}{3k+(k+3)x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,6x}{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{5x+4}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{x^2-(2+k)x-k-3}{x^2+(1-k)x-4(k+3)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+14}\dfrac{\sqrt{x-k+35}-7}{\sqrt{x-k+22}-6}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2-(k+6)x}{2k+(k+5)x-2k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to-(k+1)}\dfrac{x^2+(k-1)x-2(k+1)}{x^2+(k-4)x-5(k+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{\sqrt{x-k+80}-9}{\sqrt{x-k+3}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+4)x^3+(k+3)x^2+(k+2)x+2k}{(k+2)x^4+(k+1)x^2-2k}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to-(k+2)}\dfrac{x^2+(1+k)x-k-2}{x^2+kx-2(k+2)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{\sqrt{x-k+62}-8}{\sqrt{x-k+23}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+5)x^3-(k+1)x^2}{2k+(k+7)x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+1}\right)^{3x}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to-(k+3)}\dfrac{x^2+(k-1)x-4(k+3)}{x^2+(2+k)x-k-3}$; б) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{\sqrt{x-k+78}-9}{\sqrt{x-k+33}-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^6+(k+2)x-k-5}{(k+2)x+x^3-(k+1)x^5}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to2k+1}\dfrac{x^2+(1-2k)x-2(2k+1)}{x^2-2kx-2k-1}$; б) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{\sqrt{x-k+12}-4}{\sqrt{x-k+60}-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+9)x-7k}{3k+(k+7)x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to2k+3}\dfrac{x^2+(1-2k)x-4(2k+3)}{x^2-2(1+k)x-2k-3}$; б) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{\sqrt{x-k+4}-3}{\sqrt{x-k+76}-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+1)x^2-(k+2)x-2k}{(k+3)x^2+(k+4)x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\sin 4x\,ctg\,2x$;

д) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{4}{x}}$.

31. а) $\lim\limits_{x\to2k-1}\dfrac{x^2+(3-2k)x-4k+2}{x^2+2(1-k)x-2k+1}$; б) $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{\sqrt{x-k+19}-5}{\sqrt{x-k+43}-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+6)x^4+(k+2)x}{(k+1)x^2+(k+5)x-3k}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\ 2x}{\sin\ x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+1}{5n-2}\right)^{5n+1}$.

32. а) $\lim\limits_{x\to 2k}\dfrac{x^2+2(1-k)x-4k}{x^2+(3-2k)x-6k}$; б) $\lim\limits_{x\to k+7}\dfrac{\sqrt{x-k+2}-3}{\sqrt{x-k+74}-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^3+(k+3)x^5}{(k+7)x^3-(k+1)x+5k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ 2x}{10x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{5}{\sin x}}$.

33. а) $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{x^2-(3+k)x-3(k+6)}{x^2-(4+k)x-2(k+6)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+8}\dfrac{\sqrt{x-k+56}-8}{\sqrt{x-k+28}-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2-(k+5)x+10k}{k-kx+(k+7)x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2ctg\ 3x^2-3}{\cos\ 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{8+x}{x}}$.

34. а) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{x^2+(1-k)x-6(k+5)}{x^2-(3+k)x-2(k+5)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+9}\dfrac{\sqrt{x-k+72}-9}{\sqrt{x-k+7}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{kx^2-(k+2)x-3k}{5k+(k+1)x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ tg\ 3x}{1-\cos 6x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{4n-1}\right)^{-3n}$.

35. а) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{x^2-(k+3)x-k-4}{x^2+(2-k)x-6(k+4)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+10}\dfrac{\sqrt{x-k+15}-5}{\sqrt{x-k+71}-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+1)x^3+(k+5)x-2k}{2k+(k+1)x^2-(k+3)x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg 5x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-2}\right)^{3n+1}$.

24. Розв’яжіть задачі економічного змісту:

1. У банк на терміновий внесок під 10% річних вкладена сума 10 тис. грн. Яку суму отримає клієнт через 5 років?

2. У страховій компанії були куплені чотири акції вартістю 100 грн., кожна з яких дає 20% приросту річних. Яку суму отримає клієнт через 3 роки?

3. За п’ять років обсяг продукції повинен зрости на 100%. Яким повинен бути середній темп зростання щорічно?

4. В ощадну касу зроблено внесок на 10 років у сумі 100000 грн. Яку суму виплатить ощадна каса після закінчення цього терміну при процентній ставці 3%?

5. Обладнання вартістю 10 тис. гривень внаслідок експлуа-

тації втрачає кожного року 20% своєї вартості. Знайти:

а) вираз для вартості цього обладнання через t років;

б) кількість років його доцільного використання, якщо при вартості 3000 гривень обладнання використовувати недоцільно.

6. Обчислити кінцеву суму для початкової суми $K_0 = 100000$ грн., вкладеної під складні проценти із $p = 6\%$, що нараховуються неперервно протягом 3 років.

7. Яким повинен бути середній темп випуску синтетичної смоли і пластмас за 5 років, якщо загальний обсяг випуску повинен зрости на 35%?

8. Населення міста зростає щорічно на 3% порівняно з попереднім роком. Через скільки років населення цього міста збільшиться у 1,5 разу?

9. Ділянка лісу містить $1{,}44 \cdot 10^5$ м^3 деревини. Обчислити, на скільки кубометрів збільшиться кількість деревини за 15 років, якщо середній щорічний приріст деревини становить 2,8%.

10. Сума $K_0 = 1000$ гривень вкладена під складні проценти з $p = 6\%$ річних терміном на 3 роки. Обчислити кінцеву суму, якщо проценти нараховуються в кінці кожного місяця.

11. Кожного року батьки вносять P гривень на свій рахунок накопичення із щорічним прибутковим зростанням рахунка на R відсотків. Обчислити суму коштів, накопичених за n років.

а) $P = 600,\ R = 2\%,\ n = 12;$ б) $P = 500,\ R = 2\%,\ n = 12;$

в) $P = 300,\ R = 3\%,\ n = 18;$ г) $P = 200,\ R = 3\%,\ n = 18;$

д) $P = 100;\ R = 5\%,\ n = 24.$

12. Батьки бажають відкрити рахунок на ім’я сина у страховій компанії “ОРАНТА”, яка сплачує R щорічних прибуткових відсотків. Його умова – сплачувати на початку кожного року P гривень протягом n років, починаючи з наступного року. Яку суму коштів він повинен внести на рахунок ренти?

а) $P = 500,\ R = 3\%,\ n = 6;$ б) $P = 800,\ R = 3\%,\ n = 8;$

в) $P = 1000,\ R = 5\%,\ n = 10;$ г) $P = 600,\ R = 5\%,\ n = 12;$

д) $P = 700,\ R = 8\%,\ n = 15.$

13. На час навчання студент університету отримав з фонду навчання в борг A гривень. Цей кредит йому надано із R % щорічного зростання і умовою щорічного повернення боргу в кінці кожного року після закінчення університету протягом n років. Скільки коштів повинен повертати студент кожного року після закінчення університету?

а) $A=8000,\ R=8\%,\ n=5;$ б) $A=9000,\ R=8\%,\ n=8;$

в) $A=10000,\ R=5\%,\ n=10;$ г) $A=11000,\ R=5\%;\ n=12;$

д) $A=12000,\ R=3\%,\ n=15.$

25. Знайти похідні функцій:

1. а) $y=2ktg\sqrt{x}-kx^3$; б) $y=\ln\dfrac{k+3x}{k-2x}$; в) $y=(kx^4-3x+4)^{k+2}$;

г) $y=arctg\dfrac{k}{x}$; д) $y=e^{2x}\cos\dfrac{2x}{3k}$.

2. а) $y=arc\sin e^{3xk}$; б) $y=\ln\dfrac{ktgx+1}{tgx-2}$; в) $y=x^{2k}e^{x^3}$;

г) $y=(x^5-kx^3+3)^{k+3}$; д) $y=\sin\dfrac{x}{k}e^{kx^2}$.

3. а) $y=tgx\cdot\cos 3kx$; б) $y=\ln\dfrac{k+x^2}{x^{2k}-1}$; в) $y=(x^6-kx^4+3x+5)^{2k}$;

г) $y=\dfrac{1}{x}arctgkx^5$; д) $y=\sin\sqrt[3]{x+2k}$.

4. а) $y=\dfrac{\cos^2 x}{k+\cos x}$; б) $y=(kx^5-4x^2+3)^{3k}$; в) $y=\sqrt{x+k}\cdot tg2kx$;

г) $y=arctg\dfrac{5x+2}{k+3}$; д) $y=3^{kx}\cdot\ln\dfrac{4x+k}{4x-k}$.

5. а) $y=(2+kx)tg\,2x$; б) $y=arctg\dfrac{x+2k}{3x-k}$; в) $y=\ln\dfrac{x^2+3kx}{x+k}$;

г) $y=(kx^4-2kx^3+5)^3$; д) $y=e^{2x}\left(\sin kx+2k\cos x\right)$.

6. а) $y=e^{2kx}\cos\sqrt[k]{x}$; б) $y=\ln\dfrac{2+k\sin x}{1-\sin 3x}$; в) $y=(x+k)^2 3^{kx}$;

г) $y=arctg\dfrac{3x+k}{2x-1}$; д) $y=x^3\sin^{2k}3x$.

7. а) $y=\ln(1+5kx)^2$; б) $y=\dfrac{\cos\ 3x}{k^2+2kx^2}$; в) $y=3x\,tg\,(2kx-3)$;

г) $y=\dfrac{x}{3k}arctg\sqrt{x+k}$; д) $y=\sin(2x+k)\cos kx^2$.

8. а) $y=x^{2k}\cos\sqrt[3]{kx}$; б) $y=(kx^4-3x+7)^{2x}$; в) $y=\ln tg\dfrac{2kx}{3}$;

г) $y=4^{kx}\sin\dfrac{x+k}{2^{kx}}$; д) $y=\arcsin(3x^2+k)$.

9. а) $y=\ln^{2k}(1-2x)$; б) $y=x^5 ctg\ 3kx$; в) $y=\dfrac{x-e^{2kx}}{kx+e^{2x}}$;

г) $y=\sin(2x^k)\cos(k-x^2)$; д) $y=tg\dfrac{2x}{k}arc\,ctg(3kx+1)$.

10. а) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin kx}$; б) $y=\ln\sqrt[5]{5kx-1}$; в) $y=arctg\sqrt{kx-1}$;

г) $y=tg\dfrac{2x+k}{x^2-2}$; д) $y=\ln\sin(kx^2-4)$.

11. а) $y=5^x\ln 3kx$; б) $y=\ln 2kx\cdot e^{2\sin x}$; в) $y=tg^{3k}x$;

$y=arctg\ (k-3x^2)$; д) $y=xe^{2k\,tgx^4}$.

12. а) $y=e^{k\sin 2x}\sqrt{\cos kx}$; б) $y=\dfrac{e^{kx}}{(x+1)^3}$; в) $y=\ln\sqrt{(x+4k)^3}$;

г) $y=2x\,arctg(3x+x^k)$; д) $y=(x^2+1)^{3k}\cdot 4^{2x}$.

13. а) $y=x^6\cos 5kx$; б) $y=arctg(5-x^k)$; в) $y=\ln\left(1-\dfrac{k}{x}\right)$;

г) $y=e^{x^2+1}(x^{3k}+2^x)$; д) $y=\sin\left(\dfrac{x-2k}{kx^2-1}\right)$.

14. а) $y=\sin 2x\sqrt{4-3kx^2}$; б) $y=xtg5kx+3^{kx}$; в) $y=\ln\sqrt{x^{3k}-1}$;

г) $y=arctg\dfrac{k}{2x+3}$; д) $y=\dfrac{2x-2}{3x+k}\cos\dfrac{x-k}{2}$.

15. а) $y=\sin\dfrac{x}{2k}-\cos\dfrac{kx}{2}$; б) $y=\ln\dfrac{x+5}{\sqrt[k]{x^2+1}}$; в) $y=\sqrt{x}\cdot\sin 5kx$;

г) $y=arctg\ln(2x+1)$; д) $y=\sin^3(x+2k)+\sin^2(3kx)$.

16. а) $y=\dfrac{\cos 3x}{x^{2k}}$; б) $y=\sin\dfrac{2x-1}{kx+3}e^{-3x}$; в) $y=\arcsin(2kx^3)$;

г) $y=arctg\left(3x+\sqrt[k]{2x+4}\right)$; д) $y=x\ln(1+\sqrt[k]{x})$.

17. а) $y=2ktg\sqrt{x}-\sqrt{x}$; б) $y=\ln\sqrt[3]{(k-3x)^2}$; в) $y=arc\sin(3-kx)$;

г) $y=\cos\dfrac{x^5}{5k}$; д) $y=arctg\sqrt{kx+1}$.

18. а) $y=\dfrac{x-e^{2kx}}{e^{2x}}$; б) $y=x^5 ctg\,3kx$; в) $y=\ln^2(1-2kx)$;

г) $y=\sqrt{arctg\left(3\sqrt{x}+x^2\right)}$; д) $y=\sin^k(x+3)$.

19. а) $y=(x^4-2kx^2+3)^{k+1}$; б) $y=\ln\sqrt{1-\sin\dfrac{x}{k+1}}$; в) $y=x\arccos\dfrac{x}{2k}$;

г) $y=arctg\left(e^{kx}\right)+arcctg\left(e^{-kx}\right)$; д) $y=\left(\dfrac{k-2x}{3kx}\right)^2$.

20. а) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x+k}}$; б) $y=\ln\left(\dfrac{2x-3k}{kx^2}\right)$; в) $y=\left(\dfrac{1}{4}x^{3k}+7x^2\right)^2$;

г) $y=arctgx^{2k}$; д) $y=e^{x+k}\left(2\sin kx+3\right)$.

21. а) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+k}{\sin kx}}$; б) $y=\ln\sqrt{\dfrac{x^3-k}{3kx}}$; в) $y=xtgkx+3k^x$;

г) $y=arctg\dfrac{x}{k}+arcctgkx$; д) $y=(kx^3-6x+5)^4$.

22. а) $y=(3x^5-kx^3+5)^3$; б) $y=\left(\dfrac{x}{k-5x}\right)^2$; в) $y=\dfrac{1}{3k}\sin kx$;

г) $y=e^{kx}arctg\dfrac{x^2}{k}$; д) $y=\left(\cos kx+1\right)^2$.

23. а) $y=(kx^4-5x^2+3k)^6$; б) $y=\ln\left(\dfrac{e^{kx}}{5x-k}\right)$; в) $y=\sqrt{tg^k 3x}$;

г) $y=arctg^k\left(\sin x\right)$; д) $y=\cos kx\cdot e^{kx}$.

24. а) $y=(x^6-kx^3+2kx+3)^5$; б) $y=\sqrt{x+k}\left(\frac{1}{\sqrt{kx}}+1\right)$;

в) $y=\ln\left(1+e^{\frac{kx}{3}}\right)$; г) $y=arctg(\frac{k}{kx+3})^2$; д) $y=\cos^k(x-2)tgkx$.

25. а) $y=\sqrt{k+\sin(4x-k)}$; б) $y=\arccos\frac{kx}{3}$; в) $y=e^{k\sin x}$;

г) $y=(kx^5-3x+5)^{2k}$; д) $y=(x+2)\ln kx$.

26. а) $y=(9x^2+k)arctgkx$; б) $y=2^{kx}+x^{2k}$; в) $y=\cos\sqrt{2x+k}$;

г) $y=(x^7-kx^2+3)^4$; д) $y=tg^2\left(\sqrt{x+k}\right)$.

27. а) $y=(k+\ln\cos x)^k$; б) $y=\ln\sqrt{k+\sin x}$; в) $y=\frac{\cos kx}{x^{2k}}$;

г) $y=arctg^2(3x^k)$; д) $y=(x^5-3kx^4+2k)^6$.

28. а) $y=\sqrt{arctgkx}$; б) $y=\left(1-\frac{x^2}{3k}\right)^k$; в) $y=k^{\sin x}-\sqrt[3]{3kx}$;

г) $y=\ln(x^3-kx^2+k)$; д) $y=\sin^k(7x+3)$.

29. а) $y=\ln tg\frac{x}{k}$; б) $y=(x^4-kx^3+2)^{k+1}$; в) $y=(3+k)tgkx$;

г) $y=arctg\sqrt{x-3k}$; д) $y=\sqrt{\sin 3x}\ln(kx)$.

30. а) $y=arc\ tg\sqrt{5+kx}$; б) $y=\ln\frac{\sin x}{\cos kx}$; в) $y=\sqrt[5]{(x+\cos kx)^k}$;

г) $y=(kx^5-3x^2+2k)^6$; д) $y=7^{kx}+\ln 7x$.

31. а) $y=\ln\sqrt{k+tgx}$; б) $y=\frac{\sin kx}{\cos^2 x}$; в) $y=(x^6-2kx^2+5)^{2k}$;

г) $y=(x^k+1)arctgkx$; д) $y=(x+k)^3 tg(2x+k)$.

32. а) $y=\ln^2\left(\frac{x+k}{x-1}\right)$; б) $y=5^{x^2+\sin kx}$; в) $y=\sqrt{\frac{x+k}{2x}}$; г) $y=arctg(2x+k)$;

д) $y=\sin^k(x+2)$.

33. а) $y=\dfrac{2^{4x}}{kx^3+5x^2-1}$; б) $y=\dfrac{\arcsin 3x}{kx-2}$; в) $y=arctg^{k+1}(x+3)$;

г) $y=\ln(\sqrt{2x+k})$; д) $y=e^{\sin kx}tg(5x+k)$.

34. а) $y=(x^5+k)^{5k+1}$; б) $y=\sqrt{arctg(x^k-1)}$; в) $y=\sqrt{x^3-2x+3k}$;

г) $y=e^{k-tg3x}$; д) $y=\sin^3(kx-3)\cos 2x$.

35. а) $y=\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{k}$; б) $y=\dfrac{x^k}{x+5k}$; в) $y=\sqrt{x+k}\cdot\sin kx$;

г) $y=3arctg\left(\frac{x}{5}-k\right)$; д) $y=\left(x^2-k\right)\cos(kx-1)$.

26. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V(x)$, а залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x - $p(x)$. Розрахувати, за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

1. $V(x)=\dfrac{1}{12}x^2+5x+300$, $p(x)=26-\dfrac{1}{16}x$.
2. $V(x)=\dfrac{1}{14}x^2+18x+100$, $p(x)=41-\dfrac{1}{8}x$.
3. $V(x)=\dfrac{1}{12}x^2+6x+100$, $p(x)=42-\dfrac{1}{12}x$.
4. $V(x)=\dfrac{1}{40}x^2+14x+200$, $p(x)=27-\dfrac{1}{12}x$.
5. $V(x)=\dfrac{1}{12}x^2+8x+100$, $p(x)=30-\dfrac{1}{10}x$.
6. $V(x)=\dfrac{1}{14}x^2+5x+200$, $p(x)=37-\dfrac{1}{18}x$.
7. $V(x)=\dfrac{1}{12}x^2+24x+300$, $p(x)=48-\dfrac{1}{24}x$.
8. $V(x)=\dfrac{1}{18}x^2+14x+400$, $p(x)=24-\dfrac{1}{12}x$.
9. $V(x)=\dfrac{1}{12}x^2+12x+200$, $p(x)=32-\dfrac{1}{8}x$.
10. $V(x)=\dfrac{1}{14}x^2+18x+400$, $p(x)=32-\dfrac{1}{10}x$.

11. $V(x)=\frac{1}{16}x^2+12x+150$, $p(x)=43-\frac{1}{15}x$.

12. $V(x)=\frac{1}{22}x^2+6x+300$, $p(x)=23-\frac{1}{12}x$.

13. $V(x)=\frac{1}{20}x^2+8x+200$, $p(x)=24-\frac{1}{12}x$.

14. $V(x)=\frac{1}{12}x^2+5x+400$, $p(x)=25-\frac{1}{8}x$.

15. $V(x)=\frac{1}{22}x^2+14x+200$, $p(x)=30-\frac{1}{10}x$.

16. $V(x)=\frac{1}{36}x^2+16x+300$, $p(x)=50-\frac{1}{22}x$.

17. $V(x)=\frac{1}{40}x^2+15x+300$, $p(x)=45-\frac{1}{20}x$.

18. $V(x)=\frac{1}{50}x^2+20x+600$, $p(x)=50-\frac{1}{10}x$.

19. $V(x)=\frac{1}{30}x^2+15x+200$, $p(x)=50-\frac{1}{5}x$.

20. $V(x)=\frac{1}{40}x^2+20x+400$, $p(x)=50-\frac{1}{20}x$.

21. $V(x)=\frac{1}{50}x^2+19x+200$, $p(x)=50-\frac{1}{12}x$.

22. $V(x)=\frac{1}{50}x^2+15x+300$, $p(x)=50-\frac{1}{20}x$.

23. $V(x)=\frac{1}{40}x^2+20x+400$, $p(x)=50-\frac{1}{20}x$.

24. $V(x)=\frac{1}{50}x^2+15x+200$, $p(x)=50-\frac{1}{20}x$.

25. $V(x)=\frac{1}{43}x^2+16x+400$, $p(x)=45-\frac{1}{15}x$.

26. $V(x)=\frac{1}{40}x^2+10x+200$, $p(x)=32-\frac{1}{15}x$.

27. $V(x)=\frac{1}{50}x^2+12x+400$, $p(x)=33-\frac{1}{12}x$.

28. $V(x)=\frac{1}{48}x^2+22x+300$, $p(x)=50-\frac{1}{10}x$.

29. $V(x)=\dfrac{1}{50}x^2+20x+400$, $p(x)=50-\dfrac{1}{10}x$.

30. $V(x)=\dfrac{1}{48}x^2+10x+200$, $p(x)=39-\dfrac{1}{10}x$.

31. $V(x)=\dfrac{1}{30}x^2+8x+300$, $p(x)=40-\dfrac{1}{10}x$.

32. $V(x)=\dfrac{1}{54}x^2+15x+800$, $p(x)=47-\dfrac{1}{10}x$.

33. $V(x)=\dfrac{1}{44}x^2+14x+200$, $p(x)=42-\dfrac{1}{12}x$.

34. $V(x)=\dfrac{1}{50}x^2+15x+400$, $p(x)=51-\dfrac{1}{10}x$.

35. $V(x)=\dfrac{1}{16}x^2+61x+500$, $p(x)=34-\dfrac{1}{12}x$.

27. Розв'яжіть задачі:

1. Із квадратного бляшаного листа 60×60 см^2 потрібно зробити прямокутну коробку без кришки, вирізаючи по кутах однакові квадратики і загинаючи полоски, що залишились. Які повинні бути розміри вирізаних квадратиків, щоб вийшла коробка найбільшого об'єму?

2. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу 18 м. За якого радіуса півкруга площа перерізу буде найбільшою?

3. Квітник прямокутної форми, який прилягає до будинку, потрібно огородити плитами (є 200 плит довжиною 0,5 м). Якими мають бути розміри квітника, щоб його площа була найбільшою?

4. Знайти такі розміри відкритого басейну з квадратним дном об'ємом 50 м^3, щоб на облицювання його стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.

5. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу дорівнює 40 м. За яких розмірів його сторін площа перерізу буде найбільшою?

6. Знайти найбільший об'єм циліндричної посудини, в якої повна поверхня дорівнює 30 м^2.

7. Потрібно обгородити парканом прямокутну ділянку землі площею $216\,\text{м}^2$, а далі поділити її на дві рівні частини стіною, загородкою, паралельною одній зі сторін цієї ділянки. Якої довжини слід узяти сторони ділянки, щоб на цю споруду пішла найменша кількість матеріалу?

8. Якими мають бути розміри ящика з кришкою місткістю $V = 1764$ см^3, якщо сторони основи відносяться як 3 : 4, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу?

9. Із трьох дощок однакової ширини збивають жолоб. При якому куті нахилу бічних стінок площа поперечного перерізу буде найбішьою?

10. Треба зробити конічну лійку з твірною, що дорівнює 20 см^2. Якою має бути висота лійки, щоб її об'єм був найбільшим?

11. Знайти розміри відкритого басейну з квадратним дном об'ємом 32м^3, за яких на облицювання його стін і дна пішла б найменша кількість матеріалу.

12. Із прямокутного листа заліза шириною 60 см і довжиною 90 см виготовляють ящик: по кутах вирізають квадрати і загинають краї, що залишились. Знайти розмір квадратів, які вирізають, щоб зробити ящик найбільшої місткості.

13. Бак об'ємом 4 м^2, який має форму паралелепіпеда з квадратною основою і відкритий зверху, потрібно покрити оловом. Якими мають бути розміри бака, щоб на його покриття пішла найменша кількість матеріалу?

14. Залізний стрижень довжиною 1 м зігнутий в прямокутник. Які розміри цього прямокутника, якщо його площа найбільша?

15. Сіткою довжиною 200 м потрібно огородити прилягаючу до будинку прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайти її розміри.

16. Сіткою довжиною 140 м потрібно огородити прилягаючу до будинку прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайти розміри прямокутної ділянки.

17. Потрібно виготовити закритий циліндричний бак, об'єм якого дорівнює 8 м^3. Якими мають бути його розміри, щоб на виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

18. Бічні сторони і менша сторона земельної ділянки трапецеїдальної форми становлять 16 м кожна. Знайти таку її більшу основу, щоб площа була найбільшою.

19. Бічні сторони і менша сторона земельної ділянки трапецеїдальної форми дорівнюють 10 м кожна. Знайти її більшу основу, щоб площа була найбільшою.

20. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу 60 м. За яких розмірів його сторін площа перерізу буде найбільшою?

21. Які розміри повинна мати циліндрична водонапірна башта з поверхнею S, щоб її об’єм був найбільшим?

22. Довести, що з усіх прямокутних земельних ділянок, які мають заданий периметр $2p$, найбільшу площу має квадратна.

23. На сторінці книжки друкований текст повинен займати S *см*^{2}. Верхнє і нижнє поля мають бути по a *см*, права і ліва – по b *см*. При яких розмірах сторінки на текст піде найменше паперу?

24. Із квадратного бляшаного листа, сторона якого a, треба зробити відкриту зверху скриньку найбільшої місткості, вирізавши рівні квадрати по кутах і відкидаючи їх, а потім згинаючи бляху так, щоб утворити боки скриньки. Яка повинна бути сторона вирізаного квадрата?

25. Потрібно виготовити бляшану посудину циліндричної форми місткістю 3 л, відкриту зверху. Які повинні бути розміри посудини, щоб на її виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

26. Бак для перевезення рідини має форму циліндра об’ємом V. Якими мають бути розміри циліндра, щоб кількість матеріалу, використаного для його виготовлення, була найменшою?

28. Відомі функції попиту $Q = Q(p)$ і пропозиції $S = S(p)$, де Q і S – кількість товару; p – ціна товару.

Знайти:

1) рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиція врівноважуються;
2) еластичність попиту і пропозиції для рівноважної ціни;
3) зміну доходу при підвищенні ціни на 7% від рівноважної.

1. $Q(p) = \dfrac{50p + k}{50p - k}, S(p) = 50p + 2k.$

2. $Q(p) = \dfrac{49p + k}{49p - k}, S(p) = 49p + 2k.$

3. $Q(p) = \dfrac{48p + k}{48p - k}, S(p) = 48p + 2k.$

4. $Q(p) = \dfrac{47p + k}{47p - k}, S(p) = 47p + 2k.$

5. $Q(p) = \dfrac{46p + k}{46p - k}, S(p) = 46p + 2k.$

6. $Q(p)=\dfrac{45p+k}{45p-k}, S(p)=45p+2k.$

7. $Q(p)=\dfrac{44p+k}{44p-k}, S(p)=44p+2k.$

8. $Q(p)=\dfrac{43p+k}{43p-k}, S(p)=43p+2k.$

9. $Q(p)=\dfrac{42p+k}{42p-k}, S(p)=42p+2k.$

10. $Q(p)=\dfrac{41p+k}{41p-k}, S(p)=41p+2k.$

11. $Q(p)=\dfrac{40p+k}{40p-k}, S(p)=40p+2k.$

12. $Q(p)=\dfrac{6p+k}{6p-k}, S(p)=6p+2k.$

13. $Q(p)=\dfrac{5p+k}{5p-k}, S(p)=5p+2k.$

14. $Q(p)=\dfrac{4p+k}{4p-k}, S(p)=4p+2k$

15. $Q(p)=\dfrac{3p+k}{3p-k}, S(p)=3p+2k.$

16. $Q(p)=\dfrac{2p+k}{2p-k}, S(p)=2p+2k$

17. $Q(p)=\dfrac{p+k}{p-k},\ \ S(p)=p+2k$

18. $Q(p)=\dfrac{39p+k}{39p-k}, S(p)=39p+2k.$

19. $Q(p)=\dfrac{38p+k}{38p-k}, S(p)=38p+2k.$

20. $Q(p)=\dfrac{37p+k}{37p-k},\ \ S(p)=37p+2k.$

21. $Q(p)=\dfrac{23p+k}{23p-k}, S(p)=23p+2k.$

22. $Q(p)=\dfrac{36p+k}{36p-k}, S(p)=36p+2k.$

23. $Q(p)=\dfrac{35p+k}{35p-k}, S(p)=35p+2k.$

24. $Q(p)=\dfrac{34p+k}{34p-k}, S(p)=34p+2k.$

25. $Q(p)=\dfrac{33p+k}{33p-k}, S(p)=33p+2k.$

26. $Q(p)=\dfrac{32p+k}{32p-k}, S(p)=32p+2k.$

27. $Q(p)=\dfrac{31p+k}{31p-k}, S(p)=31p+2k.$

28. $Q(p)=\dfrac{30p+k}{30p-k}, S(p)=30p+2k.$

29. $Q(p)=\dfrac{29p+k}{29p-k}, S(p)=29p+2k.$

30. $Q(p)=\dfrac{28p+k}{28p-k}, S(p)=28p+2k.$

31. $Q(p)=\dfrac{27p+k}{27p-k}, S(p)=27p+2k.$

32. $Q(p)=\dfrac{26p+k}{26p-k}, S(p)=26p+2k.$

33. $Q(p)=\dfrac{25p+k}{25p-k}, S(p)=25p+2k.$

34. $Q(p)=\dfrac{24p+k}{24p-k}, S(p)=24p+2k.$

35. $Q(p)=\dfrac{22p+k}{22p-k}, S(p)=22p+2k.$

29. Розв’яжіть задачі з економічним змістом:

1. Функція витрат підприємства має вигляд $V(x)=0{,}002x^3-0{,}1x^2+10x+2000$ (тисяч гривень). Знайти маржинальну вартість при $x_1=50$, $x_2=100$ і $x_3=120$.

2. Визначити маржинальний дохід виробництва 300 одиниць виробів, якщо кількість виготовлених виробів можна знайти за формулою $x = 1000 - 100p$, де p – роздрібна вартість одного виробу.

3. Знайти маржинальний дохід підприємства, якщо кількість виготовлених і проданих виробів x та роздрібна вартість кожного виробу p пов'язані рівністю $x = 4000 - 2p$.

4. Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з них $p = 80 - 0{,}1x$, а функція витрат $V(x) = 5000 + 20x$ (у гривнях). Знайти маржинальний прибуток, якщо виготовлено та продано 150 і 400 виробів.

5. Валовий продукт держави змінюється з часом t за формулою $\Pi = 100 + t$ (мільярдів гривень), а кількість населення змінюється за законом $P = 120 + 2t$ (мільйонів). Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

6. Витрати виробництва $K(x)$ залежать від обсягу продукції x: $K(x) = 15x - \frac{1}{10}x^2$. Визначити граничні витрати, якщо обсяг виробництва становить 5 і 10 одиниць.

7. Функцію ціни залежно від попиту на певний товар можна визначити за формулою $p = 20 - x$, де x – попит, p – ціна. Визначити граничну виручку, якщо попит становить 3 одиниці.

8. Функція прибутку фірми залежно від ціни p на одиницю виготовленої продукції характеризується формулою $f(p) = -20p^2 + 400p + 150$. Визначити граничний прибуток фірми залежно від ціни для значень $p = 5$, $p = 10$, $p = 12$.

9. Знайти еластичність попиту Q відносно ціни p, якщо $q = 30 - 4p$, $p = 5$.

10. Крива повних витрат має вигляд $K = \ln(3 + 5x)$. Визначити еластичність повних витрат для $x = -1$.

11. Функція пропозиції певного товару $S = \frac{10 + 4p^2}{1 + 12p}$. Визначити еластичність пропозицій, якщо ціна $p = 3$.

12. Мале підприємство може виготовити і продати кожну одиницю виробу з прибутком 10 гривень і витратити x гривень на рекламу. Кількість проданих товарів виражають функцією $f(x)=1000(1-e^{-0,001x})$. Знайти швидкість зміни прибутку відносно зміни витрат на рекламу при $x=1000$ і $x=3000$.

13. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{12}x^2+5x+300$, а $p=38-\frac{1}{10}x$ – залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати, за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

14. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{14}x^2+5x+300$, а $p=30-\frac{1}{11}x$ – залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати, за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

15. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{11}x^2+12x+124$, а $p=33-\frac{1}{10}x$ – залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати, за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

16. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{15}x^2+7x+300$, а $p=22-\frac{1}{10}x$ – залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати, за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

17. Відомі функції попиту $Q = Q(p)$ і пропозиції $S = S(p)$, де Q і S – кількість товару; p – ціна товару.

Знайти:

1) рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиція врівноважуються;

2) еластичність попиту і пропозиції для рівноважної ціни;

3) зміну доходу при підвищенні ціни на 7% від рівноважної.

а) $Q(p) = \dfrac{47p+1}{47p-1}$, $S(p) = 47p+2$;

б) $Q(p) = \dfrac{48p+2}{48p-2}$, $S(p) = 48p+4$;

в) $Q(p) = \dfrac{49p+3}{49p-3}$, $S(p) = 49p+6$;

г) $Q(p) = \dfrac{50p+4}{50p-4}$, $S(p) = 50p+8$.

18. Кількість хворих під час епідемії грипу в 2010 році змінювалась з часом t (вимірюється днями) з початку вакцинації населення за законом $P(t) = \dfrac{200t}{t^2+100}$. Знайти час максимуму захворювань, інтервали зростання і спадання епідемії.

19. Промислова продукція держави протягом t років після 2000 року змінювалась за законом $y = 500(1+215e^{-0,07t})^{-1}$. Коли випуск продукції зростав, а коли спадав?

20. Зміна населення держави з часом t здійснюється за законом $P(t) = \dfrac{A}{1+Be^{-t}}$, де A і B – постійні величини. Чому дорівнює максимальна швидкість зміни населення?

21. Знайти еластичність попиту і вказати стан доходу відповідного підприємства при $p = 5$ і $p = 15$, якщо дано рівняння кількості виготовлених і проданих виробів x з вартістю кожного виробу p.

а) $x = 100(5-p)$, б) $x = 50(4-\sqrt{p})$, в) $x = 200\sqrt{9-p}$.

22. Завод виробляє x одиниць продукції на місяць, а сумарні витрати виробництва становлять $K = \dfrac{1}{30}x^2 + 20x + 500$. Залежність між

питомою ціною p і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати за цією ціною, становить $p = 30 - \frac{1}{10}x$. За яких умов прибуток буде максимальним?

23. Функція середніх витрат – $П(x) = 4x$, а функція попиту – $p = 12 - 2x$. При якому обсязі виробництва прибуток буде найбільшим?

24. Крива повних витрат – $K = x^3 - 4x^2 + 10x$. При якому обсязі виробництва (x) середні витрати будуть мінімальними?

25. Витрати виробництва K залежать від обсягу продукції x за формулою $K(x) = -0{,}05x^3 + 3375x + 200$. При яких значеннях x витрати виробництва почнуть спадати?

26. Підводний телеграфний кабель складається із серцевини, виготовленої з мідного дроту, та оболонки, виготовленої з непровідного матеріалу. Нехай x – відношення радіуса серцевини до товщини оболонки. Тоді швидкість сигналізації пропорційна до $x^2 \ln\frac{1}{x}$. Показати, що найбільша швидкість досягається, коли $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

30. Дослідити функції і побудувати ескізи графіків:

1. $y = \frac{-x^2+3}{x+2}$. 2. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2$. 3. $y = \frac{x}{(x-1)(x+2)}$.

4. $y = \frac{x^3}{x^2-4}$. 5. $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$. 6. $y = \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$.

7. $y = 3x^3 - 6x^2$. 8. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 1$. 9. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$.

10. $y = \frac{3-x^2}{2+x}$. 11. $y = 12x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 30x^2$. 12. $y = \frac{x^3}{x^2-4}$.

13. $y = 16x(x-1)^2$. 14. $y = \frac{x+1}{x+5}$. 15. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

16. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 14x + 4$. 17. $y = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$. 18. $y = \frac{4-x^2}{x+3}$.

19. $y=\dfrac{x^3}{x-1}$.   20. $y=x^5-x^3-x^2+1$.   21. $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}-6x$.

22. $y=\dfrac{x+3}{x^2-2}$.   23. $y=\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$.   24. $y=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^2}{2}+7$.

25. $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2-5x+12$.   26. $y=\dfrac{x^2+9}{x^2-9}$.   27. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

28. $y=\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$.   29. $y=\dfrac{x}{(x+2)^2}$.   30. $y=\dfrac{7}{x^2-5x+4}$.

31. $y=\dfrac{3x^4}{4}-x^3-9x^2+7$.   32. $y=\dfrac{1}{2x-x^2}$.   33. $y=\dfrac{5}{x^2-9}$.

34. $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+7$. 35. $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$.

Комплексне практичне індивідуальне завдання № 2
II семестр
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3. Функції багатьох змінних

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ПРО ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.

1. Визначення функції двох змінних та її графічне зображення.
2. Поняття про лінії та поверхні рівня.
3. Границя функції багатьох змінних. Неперервність функції.
4. Частинні похідні 1-го порядку. Повний диференціал. Градієнт функції.
5. Похідні вищих порядків.

2. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.

1. Екстремум функції багатьох змінних.
2. Необхідні умови екстремуму.
3. Достатні умови екстремуму.
4. Умовний екстремум функції багатьох змінних. Метод множників Лагранжа.

3. ПОБУДОВА ЕМПІРИЧНИХ ФОРМУЛ.

1. Побудова емпіричних формул методом найменших квадратів для лінійної залежності.
2. Параболічна та гіперболічна залежність.
3. Застосування емпіричних формул при розв'язуванні економічних задач.

4. Мале підприємство виробляє товари *A* і *B*. Загальні щоденні витрати *V(x)* (у гривнях) на виробництво *x* одиниць товару *A* та *y* одиниць товару *B* відомі. Визначити кількість одиниць товарів *A* і *B*, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

1. $V(x) = 250–4x–7y+0,2x^2+0,1y^2$; 2. $V(x) = 360–6x–8y+0,3x^2+0,4y^2$;
3. $V(x) = 450–5x–6y+0,1x^2+0,3y^2$; 4. $V(x) = 306–7x–4y+0,1x^2+0,2y^2$;
5. $V(x) = 386–3x–5y+0,1x^2+0,1y^2$; 6. $V(x) = 412–4x–6y+0,2x^2+0,3y^2$;
7. $V(x) = 501–5x–7y+0,1x^2+0,5y^2$; 8. $V(x) = 370–8x–6y+0,2x^2+0,3y^2$;
9. $V(x) = 390–2x–9y+0,1x^2+0,3y^2$; 10. $V(x) = 368–9x–7y+0,3x^2+0,1y^2$;
11. $V(x) = 505–10x–3y+0,2x^2+0,1y^2$; 12. $V(x) = 49–11x–2y+0,2x^2+0,1y^2$;
13. $V(x) = 398–12x–3y+0,5x^2+0,1y^2$; 14. $V(x) = 441–14x–4y+0,7x+0,1y$;
15. $V(x) = 299–2x–11y+0,1x^2+0,2y^2$; 16. $V(x) = 33–3x–12y+0,1x^2+0,5y^2$;
17. $V(x) = 432–4x–14y+0,2x^2+0,7y^2$; 18. $V(x) = 54–15x–5y+0,3x^2+0,1y^2$;
19. $V(x) = 654–16x–7y+0,4x^2+0,1y^2$; 20. $V(x) = 49–5x–15y+0,1x^2+0,3y^2$;
21. $V(x) = 401–7x–16y+0,1x^2+0,4y^2$; 22. $V(x) = 67–17x–8y+0,5x^2+0,2y^2$;
23. $V(x) = 597–13x–3y+0,5x^2+0,1y^2$; 24. $V(x) = 74–14x–5y+0,7x^2+0,1y^2$;
25. $V(x) = 637–8x–17y+0,2x^2+0,5y^2$; 26. $V(x) = 547-3x-13y+0,1x^2+0,5y^2$;
27. $V(x) = 699–5x–14y+0,1x^2+0,7y^2$; 28. $V(x) = 591-15x-6y+0,5x^2+0,3y^2$;

29. $V(x) = 679–16x–8y+0,2x^2+0,2y^2$; 30. $V(x) = 704\text{-}6x\text{-}15y+0,3x^2+0,5y^2$;
31. $V(x) = 800–8x–16y+0,2x^2+0,2y^2$; 32. $V(x) = 987\text{-}17x\text{-}9y+0,5x^2+0,3y^2$;
33. $V(x)=941–18x–10y+0,3x^2+0,5y^2$; 34. $V(x) = 112\text{-}19x\text{-}11y+0,5x^2+0,5y^2$;
35. $V(x) = 1500–18x–7y+0,2x^2+0,1y^2$.

5. Нехай виробнича функція визначається функцією Кобба–Дугласа. З метою збільшення випуску продукції на $a = \frac{N}{2}\%$, необхідно збільшити фонди на $b = N\%$ або чисельність працівників на $c = \frac{3N}{2}\%$. В 2012 році один працівник протягом місяця виготовляв продукції на $M = 3000$ (грн.), а всього робітників $L = 125 \cdot k$. Основні фонди оцінюються в $K = 9$ (млн. грн.) Записати виробничу функцію y, величину середньої фондовіддачі і середньої продуктивності праці, еластичність випуску по праці $E_L(y)$ і по фондах $E_K(y)$.

1. $a = \frac{37}{2}\%,\ b = 37\%,\ c = \frac{111}{2}\%.$ 2. $a = 19\%,\ b = 38\%,\ c = 57\%.$
3. $a = \frac{39}{2}\%,\ b = 39\%,\ c = \frac{117}{2}\%.$ 4. $a = 20\%,\ b = 40\%,\ c = 60\%.$
5. $a = 20\%,\ b = 40\%,\ c = 60\%.$ 6. $a = \frac{41}{2}\%, b = 41\%, c = \frac{123}{2}\%.$
7. $a = 21\%,\ b = 42\%,\ c = 63\%.$ 8. $a = \frac{43}{2}\%, b = 43\%, c = \frac{129}{2}\%.$
9. $a = 22\%,\ b = 44\%,\ c = 66\%.$ 10. $a = 23\%,\ b = 46\%,\ c = 69\%.$
11. $a = \frac{47}{2}\%,\ b = 47\%,\ c = \frac{141}{2}\%.$ 12. $a = 24\%,\ b = 48\%,\ c = 72\%.$
13. $a = \frac{49}{2}\%,\ b = 49\%,\ c = \frac{147}{2}\%.$ 14. $a = 25\%,\ b = 50\%,\ c = 75\%.$
15. $a = 1\%,\ b = 2\%,\ c = 3\%.$ 16. $a = \frac{3}{2}\%,\ b = 3\%,\ c = \frac{9}{2}\%.$
17. $a = 2\%,\ b = 2\%,\ c = 6\%.$ 18. $a = \frac{5}{2}\%,\ b = 5\%,\ c = \frac{15}{2}\%.$
19. $a = 3\%,\ b = 6\%,\ c = 9\%.$ 20. $a = \frac{7}{2}\%,\ b = 7\%,\ c = \frac{21}{2}\%.$
21. $a = 4\%,\ b = 8\%,\ c = 12\%.$ 22. $a = \frac{9}{2}\%,\ b = 9\%,\ c = \frac{27}{2}\%.$

23. $a = 5\%,\ b = 10\%,\ c = 15\%.$

24. $a = \dfrac{11}{2}\%,\ b = 11\%,\ c = \dfrac{33}{2}\%.$

25. $a = 6\%,\ b = 12\%,\ c = 18\%.$

26. $a = \dfrac{13}{2}\%,\ b = 13\%,\ c = \dfrac{39}{2}\%.$

27. $a = 7\%,\ b = 14\%,\ c = 21\%.$

28. $a = \dfrac{15}{2}\%,\ b = 15\%,\ c = \dfrac{45}{2}\%.$

29. $a = 8\%,\ b = 16\%,\ c = 24\%.$

30. $a = \dfrac{17}{2}\%,\ b = 17\%,\ c = 51\%.$

31. $a = 9\%,\ b = 18\%,\ c = 27\%.$

32. $a = \dfrac{19}{2}\%,\ b = 19\%,\ c = \dfrac{57}{2}\%.$

33. $a = 10\%,\ b = 20\%,\ c = 30\%.$

34. $a = \dfrac{21}{2}\%,\ b = 21\%,\ c = \dfrac{63}{2}\%.$

35. $a = 11\%,\ b = 22\%,\ c = 33\%.$

6. Маємо ціну X (грн./од.) на товар і попит на цей товар Y (од.)

X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
Y	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8

Знайти емпіричну формулу цієї залежності.

1.

X	60	62	65	70	72	80	85	90
Y	100	95	90	86	85	80	70	60

2.

X	30	35	40	50	52	55	60	70
Y	20	18	17	15	12	10	8	5

3.

X	200	205	210	220	230	240	250	260
Y	145	140	132	110	100	90	70	60

4.

X	110	115	120	130	145	150	160	180
Y	78	75	70	60	58	55	50	40

5.

X	5	7	9	13	16	17	19	20
Y	31	29	27	25	21	17	15	10

6.

X	13	17	20	23	25	27	29	30
Y	70	65	62	57	55	51	50	45

7.

X	150	153	156	160	163	166	169	170
Y	60	58	55	53	50	48	45	43

8.

X	112	115	120	123	126	128	130	135
Y	351	350	345	343	340	335	332	330

9.

X	115	117	120	123	125	127	130	133
Y	437	435	430	427	425	421	418	410

10.

X	97	100	103	107	109	113	115	120
Y	303	300	297	293	290	288	285	280

11.

X	82	80	74	70	66	60	58	55
Y	25	27	30	33	35	38	40	42

12.

X	33	35	37	40	46	50	52	55
Y	73	70	67	65	60	57	55	50

13.

X	70	72	75	76	79	80	83	85
Y	200	197	195	193	190	187	185	183

14.

X	40	42	47	50	55	58	62	65
Y	150	147	140	138	135	132	130	128

15.

X	60	63	67	72	75	80	82	87
Y	120	118	110	108	105	100	97	95

16.

X	150	152	155	170	175	180	190	200
Y	315	310	300	280	272	263	250	240

17.

X	520	525	530	540	550	560	580	600
Y	350	340	335	300	290	280	260	255

18.

X	130	132	140	150	155	170	180	190
Y	230	220	210	205	200	180	160	150

19.

X	320	325	330	332	340	350	360	370
Y	202	200	195	185	180	170	165	150

20.

X	210	215	218	230	232	235	245	260
Y	305	300	290	270	265	264	250	230

21.

X	50	52	55	60	62	70	75	80
Y	202	200	190	180	178	170	160	140

22.

X	420	425	430	450	455	470	480	500
Y	190	180	175	160	162	150	142	110

23.

X	180	182	190	195	200	220	230	240
Y	410	405	390	384	380	350	320	300

24.

X	450	455	460	470	480	485	490	500
Y	300	295	294	280	250	240	220	200

25.

X	500	505	510	520	525	540	545	550
Y	220	218	205	200	200	180	170	150

26.

X	90	92	95	100	110	112	120	125
Y	150	145	142	130	120	115	100	90

27.

X	80	84	90	95	100	110	120	140
Y	300	290	288	280	260	255	230	200

28.

X	220	225	230	240	250	255	260	280
Y	302	300	290	280	270	264	260	240

29.

X	410	415	425	440	450	450	455	470
Y	180	175	170	160	158	155	140	120

30.

X	70	75	80	82	85	90	95	100
Y	210	205	195	190	180	170	150	130

31.

X	95	100	102	110	120	125	130	140
Y	202	200	190	180	170	150	142	120

32.

X	200	205	210	240	245	250	270	280
Y	140	130	128	110	106	104	90	70

33.

X	110	120	125	135	140	150	160	170
Y	240	220	212	200	190	160	150	120

34.

X	350	355	360	365	375	380	400	410
Y	85	80	80	75	70	60	40	38

35.

X	240	245	250	260	275	285	290	310
Y	160	150	130	128	120	110	100	70

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4. Інтегральне числення

7. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА МЕТОДИ ЙОГО ЗНАХОДЖЕННЯ.

1. Первісна функція та її властивість.
2. Невизначений інтеграл та його властивості.
3. Таблиця невизначених інтегралів.
4. Безпосереднє інтегрування.
5. Метод підстановки.
6. Інтегрування частинами.

8. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ.

1. Поняття раціонального дробу. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.
2. Інтегрування правильних раціональних дробів.
3. Інтегрування неправильних раціональних дробів.

9. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ.

1. Інтегрування тригонометричних функцій вигляду:
   $\int \sin\alpha x\cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x\sin\beta x dx$, $\int \cos\alpha x\cos\beta x dx$,
   $\int \sin^m x\cos^n x dx$.
2. Універсальна тригонометрична підстановка.
3. Інтегрування найпростіших ірраціональностей. Тригонометричні підстановки.
4. Поняття про невизначений інтеграл, що не має первісних в елементарних функціях.

10. Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{x^{3k}dx}{x^{3k+1}+k}$; б) $\int (5kx+3k+1)e^{(k+1)x}dx$;

в) $\int \frac{x^3+(1-k)x^2+(k+3)x-2k+1)}{x^2+(1-k)x+k-2}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt{x+5}}$;

д) $\int \cos 4x\cos 2x dx$; е) $\int \frac{dx}{3+\cos x}$.

2. а) $\int \frac{\sin(2k+1)xdx}{\sqrt[3]{2k+3\cos(2k+1)x}}$; б) $\int (kx+3k-1)\sin(k+3)xdx$;

в) $\int \frac{3x^3+(12-6k)x^2+8(1-3k)x+4-14k}{x^2+(4-2k)x-8k}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt[4]{x-2}}dx$;

д) $\int \sin^2 2x dx$; е) $\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x}$.

3. а) $\int \frac{\ln^2(3k-1)}{kx} dx$; б) $\int (x+5k-2) arctgx dx$;

в) $\int \frac{4x^2 - 4(k+9)x + 35k + 10}{x^2 + (1+10k)x + 10k} dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+3}}$;

д) $\int \cos 9x \cos 2x dx$; е) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$.

4. а) $\int \sqrt[5]{4k - (k+2)\cos(k+4)x} \sin(k+4)x dx$;

б) $\int \left((k+3)x^2 + 4k\right)e^{kx} dx$; в) $\int \frac{x^3 - kx^2 + (2k-4)x - 3k + 7}{x^2 + (2-k)x + k - 3} dx$;

г) $\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$; д) $\int \sin^5 x dx$; е) $\int \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} + 1} dx$.

5. а) $\int \frac{dx}{(k+3)x\sqrt{4 - \ln(k+1)x}}$; б) $\int \frac{(k+7)x}{\cos^2(2k+5)x} dx$;

в) $\int \frac{3x^2 + (9-3k)x + 2(k-1)}{x^2 + (3-k)x + 2(k-5)} dx$; г) $\int \frac{1 + \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}} dx$;

д) $\int \sin^5 3x \cos^4 3x dx$; е) $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$.

6. а) $\int \sqrt[3]{k - \cos 2kx} \sin 2kx dx$; б) $\int (x+1)x \cdot \cos(k+3)x dx$;

в) $\int \frac{x^3 + (2-k)x^2 + 4(k-3)x - 7k + 37}{x^2 + (5-k)x + k - 6} dx$; г) $\int \frac{1 + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - 1} dx$;

д) $\int \sin^3 x dx$; е) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x + 1}$.

7. а) $\int \frac{\ln(3k-1)x - 1}{kx\sqrt{\ln(3k-1)x}} dx$; б) $\int \sqrt[k]{x^{3k-1}} \ln(2k+1)x dx$;

в) $\int \frac{2x^2 + (8-2k)x + k + 3}{x^2 + (5-k)x + k - 6} dx$; г) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$;

д) $\int \cos^6 x dx$; е) $\int \frac{dx}{2 + e^x}$.

8. а) $\int \frac{x^{2k}dx}{\sqrt{1-x^{2k+1}}}$; б) $\int (k+2)\arcsin x dx$; в) $\int \frac{4x^2-4kx-15(k+4)}{x^2-x(2+k)-3(k+5)}dx$;

г) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}$; д) $\int \cos 4x \cos 2x dx$; е) $\int \frac{xdx}{e^x+1}$.

9. а) $\int \frac{\cos(3k+1)xdx}{2\sin(3k+1)x-4k}$; б) $\int (3k+5)x \cdot \sin kx dx$;

в) $\int \frac{2x^3+(6-2k)x^2-18(k+5)x-8k+42}{x^2+x(3-k)-9(k+6)}dx$; г) $\int \frac{4\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$;

д) $\int \sin x \cos 3x dx$; е) $\int \frac{dx}{3x^2+75}$.

10. а) $\int \frac{5kx^{2k-1}dx}{\sqrt{1-x^{2k}}}$; б) $\int (x+k)^2 \ln(k+1)x dx$;

в) $\int \frac{2x^3-(3+2k)x^2+kx-4k+1}{x^2-(2+k)x+k+1}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

д) $\int \cos^5 x sin^2 x dx$; е) $\int e^x ctg e^x dx$.

11. а) $\int \frac{\cos(k-2)dx}{\sqrt[3]{\sin^5(k+2)x}}$; б) $\int ((k+3)x^2+k)\sin(2k+1)x dx$;

в) $\int \frac{x^3-(k+4)x^2-kx-2k-7}{x^2-x(4+k)-k-5}dx$; г) $\int \frac{5dx}{(x+1)+\sqrt{x+1}}$;

д) $\int \sin^5 x \cos^3 x dx$; е) $\int \frac{dx}{2\sin x+2}$.

12. а) $\int e^{\cos kx}\sin kx dx$; б) $\int (kx+3)^2 e^{(k+2)x}dx$;

в) $\int \frac{x^3+(k-1)x^2+(6k^2+k-5)x+6k^2}{x^2+kx-6k^2}dx$; г) $\int \frac{(2x-5)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$;

д) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$; е) $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$.

13. а) $\int x^{3k}\sqrt{5+x^{3k+1}}dx$; б) $\int (x+2k+3)^2 \sin 2x dx$;

в) $\int \frac{2x^3+4(1-k)x^2-(6k^2+8k-4)x-12k^2}{x^2-2kx-3k^2}dx$; г) $\int \frac{dx}{(\sqrt[5]{x}+4)\sqrt{x}}$;

д) $\int \cos^3 3x \sin^3 3x dx$; е) $\int \frac{5dx}{1+\cos x}$.

14. а) $\int \frac{\sin(5k-1)xdx}{\sqrt{k-(k+2)\cos(5k-1)x}}$; б) $\int \frac{x^{k+2}}{k+1}\ln(k+3)xdx$;

в) $\int \frac{3x^3+5(1-3k)x^2+(12k^2-25x-3)x+20k^2}{x^2-5kx+4k^2}dx$; г) $\int \frac{3\sqrt{x}dx}{4x+\sqrt[3]{x^2}}$;

д) $\int \cos^5 2xdx$; е) $\int \frac{3dx}{1+6\cos 2x}$.

15. а) $\int \frac{5kx^{5k-1}dx}{\sqrt[3]{1-x^{5k}}}$; б) $\int x^2 e^{(k+1)x}dx$; в) $\int \frac{3x^2+6x(1-k)-2k+10}{x^2+2x(1-k)-4k}dx$;

г) $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2-2x+6}}$; д) $\int \sin^4 3x \cos^3 3xdx$; е) $\int \frac{2dx}{\sin 3x+\cos 3x}$.

16. а) $\int \frac{(k+4)x^{3k-1}dx}{\sqrt{2k+x^{3k}}}$; б) $\int (kx+1)^2 \cos 3xdx$;

в) $\int \frac{x^3-(10+k)x^2+6(k+5)x-2k-16}{x^2-x(10+k)+6k+24}dx$; г) $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}dx}{4+\sqrt{x}}$;

д) $\int \sin^3 3x \cos^4 3xdx$; е) $\int \frac{dx}{e^{4x}+e^{2x}}$.

17. а) $\int \frac{dx}{kx\ln^3(k+1)x}$; б) $\int \sqrt[k+3]{x^{k+1}}\ln(5k-2)xdx$;

в) $\int \frac{5x^2+(26-5k)x+5k-27}{x^2+(4-k)x+2(k-6)}dx$; г) $\int \frac{2\sqrt{x}dx}{(\sqrt{x}-1)}$;

д) $\int \cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{5}dx$; е) $\int \frac{3dx}{\sin 2x+\cos 2x}$.

18. а) $\int \frac{\sin(2k+3)}{1-5k\cos(2k+3)x}dx$; б) $\int (x-2k)^2 e^{(k+3)x}dx$;

в) $\int \frac{2x^3-2(1+k)x^2+12(k-4)x-2k+50}{x^2-x(1+k)+6(k-5)}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x^3}dx}{4-\sqrt[3]{x}}$;

д) $\int \sin^2 x \cos^5 xdx$; е) $\int \frac{3dx}{4+\sin x}$.

19. а) $\int \frac{x^{k+4}}{1+x^{k+5}}dx$; б) $\int (x+k)^2 \sin xdx$; в) $\int \frac{2x^2-2(k-9)x+8}{x^2-(k-6)x-k+5}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+4}}$; д) $\int \cos^2 x \sin^2 xdx$; е) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

20. а) $\int \sqrt[5]{\sin 4kx} \cos 4kxdx$; б) $\int \frac{k+2}{k+5} x^{\frac{k+1}{k+2}} \ln kxdx$;

в) $\int \frac{4x^3+4(3-2k)x^2-24kx-6k-9}{x^2+x(3-2k)-6k}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx$;

д) $\int \sin 2x \sin 4xdx$; е) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

21. а) $\int (\cos x)^{3k-1} \sin xdx$; б) $\int (kx+1)^2 \cos kxdx$;

в) $\int \frac{2x^2-4kx-6(k+1)}{x^2-2x(1+k)-2k-3}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}$;

д) $\int \cos^4 x \sin^2 xdx$; е) $\int e^{2x} ctge^{2x} dx$.

22. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{k^2-\ln^2(k+3)x}}$; б) $\int (kx^2+3k-1)\cos 2xdx$;

в) $\int \frac{4x^2+4(2k+1)x-2k-23}{x^2-x(1-2k)-4(2k+3)}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

д) $\int \cos 9x \cos 2xdx$; е) $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$.

23. а) $\int \frac{dx}{(k+1)x(1+\ln kx)}$; б) $\int \sqrt[5]{x^{k+1}} \ln(3k+1)xdx$;

в) $\int \frac{x^3+(k-1)x^2-4kx++6(k-1)}{x^2+x(k-1)-4(k+3)}dx$; г) $\int \frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-1}dx$;

д) $\int \sin^2 x \cos^7 xdx$; е) $\int \frac{3dx}{4+\sin x}$.

24. а) $\int (\sin x)^{2k+1} \cos xdx$; б) $\int \frac{(k+2)xdx}{\cos^2(3k+2)x}$;

в) $\int \frac{5x^2+5(k+2)x-k+1}{x^2+x(2+k)-k-3}dx$; г) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$;

д) $\int \sin^5 x dx$;   е) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

25. а) $\int \frac{\cos(5k-2)xdx}{\sqrt[7]{2+\sin(5k-2)x}}$;   б) $\int e^{(k+3)x}\sin(7k-2)xdx$;

в) $\int \frac{4x^3+4(k+1)x^2-4kx+2k-2}{x^2+(1+k)x-k-2}dx$;   г) $\int \frac{dx}{3\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$;

д) $\int \sin^5 x dx$;   е) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

26. а) $\int \frac{e^{ctg(k+2)x}dx}{\sin^2(k+2)x}$; б) $\int (x+k)\arccos x dx$; в) $\int \frac{kx^3-4kx^2+5kx+1}{x^2-3x+2}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$; д) $\int \sin^5 x dx$;   е) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

27. а) $\int \sqrt[7]{3k+\sin(k+1)x}\cos(k+1)xdx$;   б) $\int x^{7k-3}\ln(3k+2)xdx$;

в) $\int \frac{2x^3+(2k+4)x^2-2kx-k+14}{x^2+(k+2)x-k-3}dx$;   г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x-2}}$;

д) $\int \sin^6 x dx$;   е) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

28. а) $\int (\cos x)^{3k+2}\sin x dx$;   б) $\int e^{3kx}(2k+1)xdx$;

в) $\int \frac{x^3-(6k-1)x^2+6k(x+1)}{x^2-3(2k+1)x+18k}dx$;   г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)}-\sqrt{x+1}}$;

д) $\int \sin^5 2xdx$;   е) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

29. а) $\int \frac{\ln^3(3k+2)xdx}{(k+1)x}$;   б) $\int (kx+3)^2\cos kxdx$;

в) $\int \frac{x^3+(1-k)x^2-3kx+3(1-k)}{x^2+(1-k)x-3(k+2)}dx$;   г) $\int \frac{7+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$;

д) $\int \sin^7 x cos^3 xdx$;   е) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

30. а) $\int\sqrt[3]{6k-\sin(k+5)x}\cos(k+5)xdx$; б) $\int\sqrt[k+1]{x^{k+2}}\ln(7k-2)xdx$;

в) $\int\frac{2x^3+(12k-2)x^2+4(1-3k)x+6k-3}{x^2+x(6k-1)-6k}dx$; г) $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{5x-1}}$;

д) $\int tg^3 2xdx$; е) $\int\frac{dx}{5+3\cos x}$.

31. а) $\int\sqrt[5]{k+\cos kx}\sin kxdx$; б) $\int(x^2+4k+1)e^{-\frac{x}{k+2}}dx$;

в) $\int\frac{2x^3-2(5k-2)x^2-20k(x-1)+8}{x^2-x(5k-2)-10k}dx$; г) $\int\frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$;

д) $\int\sin x\sin 3xdx$; е) $\int\frac{dx}{5+4\cos x}$.

32. а) $\int\sqrt[7]{\sin(k+1)x-2k}\cdot\cos(k+1)xdx$; б) $\int(x^2+6k-5)e^{(3k+1)x}dx$;

в) $\int\frac{x^2+(k+2)x-2}{x^2+x(k-1)-2(k+1)}dx$; г) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+3}}$;

д) $\int\sin 5x\cos 6xdx$; е) $\int\frac{dx}{5-4\cos x}$.

33. а) $\int\frac{\ln(k+5)x}{kx}dx$; б) $\int k\arcsin kxdx$; в) $\int\frac{x^2+(k+1)x+k+4}{x^2+(1+k)x-k-2}dx$;

г) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$; д) $\int\sin^3 xdx$; е) $\int\frac{dx}{3-5\cos x}$.

34. а) $\int\frac{\sqrt{\ln kx}}{3kx}dx$; б) $\int(2k+5)x^2\cos(7k-3)xdx$;

в) $\int\frac{5x^2+(35k-10)x+20}{x^2+(7k-2)x-14k}dx$; г) $\int\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$;

д) $\int\sin^3 x\cos^5 xdx$; е) $\int\frac{dx}{5+4\sin 3x}$.

35. а) $\int\frac{kdx}{x\sqrt{1-\ln kx}}$; б) $\int kxarctgxdx$; в) $\int\frac{2kx^3-3kx^2-29kx-30k+7}{x^2-3x-10}dx$;

г) $\int\frac{dx}{3\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$; д) $\int\cos^{10} x\sin^3 xdx$; е) $\int\frac{dx}{1+5\sin x}$.

11. <u>ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ.</u>

1. Задача про площу криволінійної трапеції.
2. Задача про об'єм виробництва із змінною продуктивністю праці.
3. Поняття визначеного інтеграла та його властивості.
4. Теорема про середнє значення визначеного інтеграла.

12. <u>ЗВ'ЯЗОК НЕВИЗНАЧЕНОГО І ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛІВ.</u>

1. Властивості визначеного інтеграла із змінною верхньою межею.
2. Формула Ньютона–Лейбніца.
3. Способи обчислення визначеного інтеграла.

13. <u>ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ</u>. <u>НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ</u>.

1. Застосування визначених інтегралів для обчислення площ плоских фігур.
2. Застосування визначеного інтеграла для обчислення об'ємів тіл обертання.
3. Задача про розподіл доходів населення.
4. Задача про максимізацію прибутку за часом.
5. Задача про витрати, дохід і прибуток.
6. Невласні інтеграли та їх знаходження. Інтеграл Пуассона.

14. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:

1. $y = x^3$, $x = k$.
2. $y = k^2x^2 + 4kx - 3$, $y = kx + 1$.
3. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2k}$, $y = 0$, $x = k^2$.
4. $y = k\sin x$, $y = k\cos x$, $x = 0$.
5. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{k}$, $y = 1$, $x = 2$.
6. $x = 2k^2 - y^2$, $x = -ky$.
7. $y = kx^2$, $kx + y = 2k$.
8. $y = x^2 + 4kx - 5k^2$, $y = 0$.
9. $y = \sqrt{-kx}$, $x = -3$, $y = 0$.
10. $x^2 = 2ky$, $y^2 = 2kx$.
11. $\dfrac{x^2}{k^2} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, $x = 2k$.
12. $y = x^2$, $y = (x-k)^2 - 9$, $y = 0$.
13. $y = kx^2$, $y = 10$.
14. $y = 2x^2$, $y = 2(x-k)^2$, $y = 0$.
15. $y = x^3$, $y = k^2x$.
16. $y^2 = kx$, $x^2 = ky$.
17. $y = x^3$, $y = \dfrac{k}{2}$, $x = 0$.
18. $y = x^2$, $y = k^2 - 2kx$, $y = 0$.
19. $y = \dfrac{1}{2}x^2$, $y = 3x - \dfrac{2}{k}x^2$.
20. $y = \dfrac{x^3}{k}$, $y = kx$.
21. $x^2 - y^2 = k^2$, $y = \pm k$.
22. $y^2 = 2kx + k^2$, $x - y - k = 0$.

23. $x^2+y^2=k^2$.

24. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{k^2}=1$.

25. $4k^2x^2+y^2=k^2$.

26. $xy=k$; $x=2$; $x=6$; $y=0$.

27. $y=kx^3$, $y=\pm 5$.

28. $x^2+y^2=k^2$, $x=\frac{k}{2}$.

29. $y=\pm\sqrt{-kx}$, $x=-3$.

30. $y=x^2-k^2$, $y=0$.

31. $x^2+y^2=k^2$, $y=\frac{k}{2}$.

32. $y=-kx^2+1$, $y=kx^2-1$.

33. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{k^2}=1$.

34. $xy=k$; $x=1$; $x=4$; $y=0$.

35. $y=\cos\frac{x}{k}$, $y=\sin\frac{x}{k}$ (в межах одного періоду).

15. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями:

1. $x^2-y^2=9$, $y=\pm 3$ навколо осі Oy.
2. $y^2=1-x$, $x=-3$ навколо осі Ox.
3. $xy=6$, $x+y-7=0$ навколо осі Ox.
4. $4y=x^2$, $y^2=4x$ навколо осі Ox.
5. $y=\sqrt{x-1}$, $x=5$, $y=0$ навколо осі Ox.
6. $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=x-x^2$ навколо осі Oy.
7. $xy=3$, $x=1$, $x=\frac{3}{2}$, $y=0$ навколо осі Ox.
8. $y=2x^3$, $x=0$, $y=2$ навколо осі Oy.
9. $y^2=2x$, $y=0$, $y=2$ навколо осі Ox.
10. $x^2+y^2=25$ навколо осі Oy.
11. $x^2-y^2=16$, $y=4$, $y=-4$ навколо осі Ox.
12. $y=-x^2+9$, $y=0$ навколо осі Ox.
13. $y=x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ навколо осі Oy.
14. $y^2-2x=0$, $x-y=0$ навколо осі Ox.

15. $y=\frac{5}{x}$, $x=1$, $x=5$, $y=0$ навколо осі Ox.

16. $y=x^2$, $y=6-x$, $y=0$ навколо осі Ox.

17. $y=x^3$, $y=5$, $x=0$ навколо осі Oy.

18. $y=-4x^2+1$, $y=0$ навколо осі Ox.

19. $y=\cos x$ (однією півхвилею), $y=0$ навколо осі Ox.

20. $y=x$, $y=-x^2+2$, $y=0$ навколо осі Ox.

21. $y=\sqrt{x}$, $y=-x+2$, $y=0$ навколо осі Ox.

22. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=0$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ навколо осі Oy.

23. $yx=5$, $y=-x+6$ навколо осі Ox.

24. $y=-x^2+25$, $y=0$ навколо осі Ox.

25. $y=x^2$, $y=4$ навколо осі Ox.

26. $y^2=8x$, $x=5$ навколо осі Oy.

27. $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ навколо осі Oy.

28. $y^2=4-x$, $x=0$ навколо осі Oy.

29. $y=\sin x$ (однією півхвилею), $y=0$ навколо осі Ox.

30. $x^2-y^2=4$, $y=\pm 2$ навколо осі Oy.

31. $y=x^3$, $x=0$, $y=8$ навколо осі Oy.

32. $y=x-x^2$, $y=0$ навколо осі Ox.

33. $y=4x$, $x=0, y=4$ навколо осі Oy.

34. $y=\sin x$ (однією півхвилею) і відрізком $0\le x\le\pi$ осі Ox навколо осі Ox.

35. $y=x^2$, $y=3$ навколо осі Ox.

16. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались функціями $V'(t), D'(t)$, які вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках**.** Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, який одержали за цей час:

1. $V'(t)=4+\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t)=16-2\sqrt[3]{t^2}$.

2. $V'(t)=1+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=17-2\sqrt[3]{t^2}$.

3. $V'(t)=2+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=10-2\sqrt[3]{t^2}$.

4. $V'(t)=3+3\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=23-2\sqrt[3]{t^2}$.

5. $V'(t)=4+3\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=24-2\sqrt[3]{t^2}$.

6. $V'(t)=2+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=22-3\sqrt[3]{t^2}$.

7. $V'(t)=5+2\sqrt[3]{t^2}, D(t)=10-3\sqrt[3]{t^2}$.

8. $V'(t)=6+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=11-3\sqrt[3]{t^2}$.

9. $V'(t)=7+\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=12-4\sqrt[3]{t^2}$.

10. $V'(t)=8+3\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=13-2\sqrt[3]{t^2}$.

11. $V'(t)=9+4\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=14-\sqrt[3]{t^2}$.

12. $V'(t)=2+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=18-2\sqrt[3]{t^2}$.

13. $V'(t)=13+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=18-3\sqrt[3]{t^2}$.

14. $V'(t)=9+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=29-3\sqrt[3]{t^2}$.

15. $V'(t)=8+3\sqrt[3]{t^2},\ D'(t)=28-2\sqrt[3]{t^2}$.

16. $V'(t)=10+\sqrt[4]{t^3},\ D'(t)=12-\sqrt[4]{t^3}$.

17. $V'(t)=12+\sqrt[4]{t^3},\ D'(t)=14-\sqrt[4]{t^3}$.

18. $V'(t)=10+2\sqrt[4]{t^3}, D'(t)=14-2\sqrt[4]{t^3}$.

19. $V'(t)=6+\sqrt[4]{t^3}, D'(t)=22-\sqrt[4]{t^3}$.

20. $V'(t)=5+\sqrt[4]{t^3}, D'(t)=21-\sqrt[4]{t^3}$.

21. $V'(t)=3+\sqrt[4]{t^3}, D'(t)=57-\sqrt[4]{t^3}$.

22. $V'(t)=1+4\sqrt[4]{t^3}, D'(t)=57-3\sqrt[4]{t^3}$.

23. $V'(t)=1+3\sqrt[4]{t^3}, D'(t)=57-4\sqrt[4]{t^3}$.

24. $V'(t)=2+3\sqrt[4]{t^3}, D'(t)=58-4\sqrt[4]{t^3}$.

25. $V'(t)=2+4\sqrt[4]{t^3}, D'(t)=58-3\sqrt[4]{t^3}$.

26. $V'(t)=1+2\sqrt{t},\ D'(t)=7-\sqrt{t}$.

27. $V'(t) = 4 + 3\sqrt{t}$, $D'(t) = 9 - 2\sqrt{t}$.

28. $V'(t) = 3 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 8 - 3\sqrt{t}$.

29. $V'(t) = 4 + \sqrt{t}$, $D'(t) = 7 - 2\sqrt{t}$.

30. $V'(t) = 3 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 11 - 2\sqrt{t}$.

31. $V'(t) = 4 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 19 - 3\sqrt{t}$.

32. $V'(t) = 3 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 21 - 4\sqrt{t}$.

33. $V'(t) = 8 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 20 - 4\sqrt{t}$.

34. $V'(t) = 5 + \sqrt{t}$, $D'(t) = 17 - 3\sqrt{t}$.

35. $V'(t) = 6 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 16 - 3\sqrt{t}$.

17. Розв'яжіть задачі з економічним змістом:

1. Гранична ціна за продану продукцію виражена функцією $P'(x) = 2x + 50,$ де x – кількість проданої продукції. Знайти загальну функцію ціни за продану продукцію, якщо ціна 10 одиниць продукції дорівнює 2000 гривень.

2. Граничні витрати фірми на виготовлення x одиниць продукції виражені функцією $V'(x) = 100 + 0{,}04x.$

Знайти загальні можливі витрати при виробництві 1000 одиниць продукції.

3. Маржинальний річний дохід фірми заданий рівністю $D'(x) = 80 - 0{,}04x.$

Знайти функцію річного прибутку цієї фірми.

4. Маржинальна функція доходу малого підприємства дорівнює $D'(x) = 6 - 0{,}03x.$ Після реалізації 100 одиниць продукції підприємство одержало дохід 30 тисяч гривень. Визначити функцію доходу цього підприємства. Який дохід одержить підприємство після реалізації 125 одиниць продукції?

5. Маржинальні витрати (у гривнях) взуттєвої фабрики характеризуються функцією $V'(x) = \dfrac{x}{100}\sqrt{x^2 + 360}$, де x – кількість пар виготовленого взуття. Знайти функцію загальних витрат фабрики, якщо витрати 50 гривень на пару взуття фіксовані.

6. Денна продуктивність праці (за 7 робочих годин) бригади робочих машинобудівного заводу виражена функцією

$$y = -0{,}0033t^2 - 0{,}08t + 20{,}96,$$

де t – проміжок часу в годинах. Визначити обсяг випуску продукції протягом року (за 240 робочих днів). Обчислити прибуток, якщо заводська оптова ціна одиниці продукції становить 200 гривень, її собівартість – 100 гривень, а кількість бригад – 10.

7. Витрати електроенергії (у кВт) міськими підприємствами і населенням міста з 8 до 18 год. наближено виражені функцією $y = 10000 - 8t + 15t^2$, де t – проміжок часу в годинах. Визначити вартість електроенергії, спожитої містом, якщо вартість 1кВт/год дорівнює 12 коп.

8. Надходження товару на склад виражене функцією $y_1 = 0{,}006t^2 - 0{,}3t + 75$, а реалізація цих товарів – функцією $y_2 = 0{,}003t^2 - 0{,}4t + 56$, де t – кількість днів. Визначити запас товару в умовних одиницях після закінчення 60 робочих днів, якщо вихідного товару на складі не було.

9. За даними дослідження в розподілі доходів в одній із країн крива Лоренца описана рівнянням $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, де x відсоток населення, а y – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

10. Нехай $y = \dfrac{15}{16}x^2 + \dfrac{1}{16}x$, крива Лоренца визначена дослідженням нерівномірного розподілу прибуткового податку.

Тут y – відсоток загального прибуткового податку; x – відсоток всього населення держави, яка сплачує цей податок. Обчислити коефіцієнт нерівномірності розподілу податку (коефіцієнт Джині).

11. Капітальні інвестиції фірми “БІОС” характеризуються функцією $I(t) = 9000t^{1/2}$. Знайдіть:

1) приріст капіталу за три роки;
2) проміжок часу, за який приріст становитиме 150000 у.о.

12. Функція маржинальних витрат має вигляд: $V'(x) = 23{,}5 - 0{,}01x$. Знайти зростання загальних витрат, якщо виробництво зростає з 1000 до 1500 одиниць.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 5.
Диференціальні та різницеві рівняння. Ряди

18. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І-го ПОРЯДКУ.

1. Основні поняття про диференціальні рівняння та їх розв'язки.
2. Геометричний зміст диференціальних рівнянь 1-го порядку. Задача Коші для диференціальних рівнянь 1-го порядку.
3. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними.
4. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку.
5. Однорідні диференціальні рівняння.
6. Економічні задачі, що приводять до диференціальних рівнянь 1-го порядку:
   а) задача про швидкість зростання затрат виробництва;
   б) задача про швидкість зміни кількості населення;
   в) задача про визначення вкладу в банк;
   г) задача про зростання інвестицій;
   д) задача про знаходження функції попиту.

19. ЛІНІЙНІ ДИФРІВНЯННЯ ІІ-го ПОРЯДКУ.

1. Лінійні однорідні диференціальних рівнянь ІІ-го порядку.
2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння ІІ-го порядку.
3. Основні теореми про розв'язки диференціальні рівняння ІІ-го порядку.
4. Задача Коші для диференціальні рівняння ІІ-го порядку.
5. Поняття про комплексні числа.

20. ЛІНІЙНІ ДИФРІВНЯННЯ ІІ-го ПОРЯДКУ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ.

1. Розв'язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь ІІ-го порядку з постійними коефіцієнтами.
2. Розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь ІІ-го порядку з постійними коефіцієнтами.

21. РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ.

1. Різницеві рівняння І порядку з сталими коефіцієнтами.
2. Різницеві рівняння ІІ порядку з сталими коефіцієнтами.
3. Застосування різницевих рівнянь в економіці (знаходження величини вкладу під складні проценти за визначений проміжок часу).
4. Застосування різницевих рівнянь в економіці (знаходження та аналіз функції рівноважної ціни).

22. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

1. а) $e^{ky}(y'+1)=1;$ б) $y'+kytgx=ctg^{k+1}x$; в) $y''-4y'k+4yk^2=0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=1$; г) $y''+(k+8)y'+8ky=(k+8)e^{-8x}$.

2. а) $(1+y)x^k dy+(1-x)y^k dx=0;$ $y=1$ при $x=1$; б) $y'+yk=\sin 2kx$;
в) $y''-2y'k+5yk^2=0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=3$;
г) $y''+(6-k)y'-5(k-1)y=(k+1)\cos(k-1)x$.

3. а) $e^{x-ky}y'=k;$ $y=0$ при $x=0$; б) $y'+(k+1)y=2kx+k+3$;
в) $y''-6y'k+9yk^2=0$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$;
г) $y''-3(1+2k)y'+18ky=(4k+1)e^{3x}$.

4. а) $ke^x tgydx+\dfrac{1+e^x}{\cos^2 y}dy=0$; б) $y'+\dfrac{y}{x+k}=k(x+k)^{k-2}$;
в) $y''+2y'k+yk^2=0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=1$;
г) $y''+(1-10k)y'-10ky=(k-3)\sin x.$

5. а) $\dfrac{e^{-y^2}}{x}dy+\dfrac{(x^2+9)^k}{y}dx=0$; б) $xy'-ky=kx^{k-1};$ $y=0$ при $x=1$;
в) $y''-4y'k+4yk^2=0$, $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=1$;
г) $y''-(1+9k)y'+9ky=(9k+1)x^2+3k.$

6. а) $x^k dy+ydx=y^2dx$; б) $y'\sin x-ky\cos x=x\sin^{k+1}x$;
в) $y''+y'k+2{,}5k^2=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=-1$;
г) $y''-2ky'+k^2y=(2k+3)e^{kx}$.

7. а) $(1-x^2)^{\frac{k}{2}}dy+x\sqrt{1-y^2}dx=0;$ $y=0$ при $x=0$;
б) $xy'+2y=\sin kx$; в) $y''-8y'k+16yk^2=0$, $y|_{x=1}=2$, $y'|_{x=1}=1$;
г) $y''-4ky'+4k^2y=(4k+1)\sin 2kx.$

8. а) $xy'-ky=x^{k+1}\cos kx;$ $y=\dfrac{\pi}{2}$ при $x=\dfrac{\pi}{2}$;
б) $y(1-x^2)^{\frac{k}{2}}dy+x(1-y^2)^{\frac{k}{2}}dx=0$; в) $y''+4y'k+4yk^2=0$, $y|_{x=0}=-1$, $y'|_{x=0}=3$; г) $y''+2ky'+k^2y=(k+1)x^2+(3k-1)x+k-5.$

9. а) $y'=y\sin kx\ln^k y;$ $y=e$ при $x=0$; б) $xy'+ky=(k+1)x^{2-k}$;

в) $3y'' - 2y'k - 8k^2y = 0$, $y|_{x=1} = 2$, $y'|_{x=1} = 3$;

г) $y'' + 4ky' + 4k^2y = (2k+3)e^{-2kx}$.

10. а) $(1+x^2)^{\frac{k}{2}}ydy + x(4+y^2)dx = 0$; б) $(kx+1)y' + ky = k+2$; $y = 2$ при $x = 0$; в) $4y'' + 4y'k + yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$;

г) $y'' - 6ky' + 9k^2y = (9k-3)\cos 3kx$.

11. а) $x\ln xy' + ky = (k+1)\ln x$; б) $y'tgx + y = k$; $y = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{6}$;

в) $5y'' - 6y'k + 5yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$;

г) $y'' + 8ky' + 16k^2y = 8kx^2 + 3$.

12. а) $(x+k+1)y' + y = -(x+k+1)e^{-x}$; б) $e^{kx-y}y' = k$; $y = 0$ при $x = 0$; в) $y'' - 4y'k + 3yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$;

г) $y'' + 6ky' + 9k^2y = (3k+2)e^x$.

13. а) $y'\sin x - (k+1)y\cos x = x\sin^{k+2}x$; б) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dx = kxdy$; $y = 4$ при $x = 1$; в) $y'' - 16y(k+1)^2 = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$;

г) $y'' + 2y' + 5y = (5k+1)x^2 + 4kx$.

14. а) $y'ctgx - y = k$; б) $(x+k+1)y' + y = k(x+k+1)x^{k-1}$;

в) $4y'' - 8y'k + 5yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = 1$;

г) $y'' + 2y' + 5y = (5k+1)x^2 + 4kx$.

15. а) $tgydx - x\ln^k xdy$; б) $y' + ky = e^{-kx}$; $y = 2$ при $x = 0$;

в) $4y'' + 16y'k + 15yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 1$;

г) $y'' + 4y' + 29y = (4k+3)e^{5x}$.

16. а) $y'tgx - y = k$; б) $(kx+2)y' + ky = x$; в) $y'' + 4y'k + 29yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 1$; г) $y'' + k^2y = (k^2+1)x^2 + (2k+1)x + k - 3$.

17. а) $y' + (k+1)x^ky = x^k$; б) $xy' - ky = x^{k+1}e^x$; $y = e$ при $x = 1$;

в) $2y'' + y'k - yk^2 = 0$, $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$;

г) $y'' - 4y' + 8y = (k+3)\sin 3x$.

18. а) $xy' + (k+1)y = x^{1-k}\cos x$; б) $xy^kdx + k(x+1)dy = 0$;

в) $4y'' - 20y'k + 25k^2 = 0$, $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = 1$;

г) $y'' + 4y = (5k-3)e^{4x}$.

19. а) $y'ctgx + ky = k+1$; б) $(k+1)xy^k(1+x^2) = (1+y^{k+1})y'$;

в) $y'' - 6y'k + 34yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$;

г) $y'' + 2y' + 10y = (2k+3)\cos kx$.

20. а) $x\ln xy' + (k+1)y = k\ln x$; б) $x^k ydy + k(y+1)dx = 0$;

в) $y'' - 5y'k + 6yk^2 = 0$, $y|_{x=1} = 2$, $y'|_{x=1} = 1$;

г) $y'' + 9y = (4k-1)x^2 + 2x$.

21. а) $y' = \dfrac{(k+1)xy + y^2}{x^2}$; б) $(kx+2)y' + ky = k+2$; $y = 1$ при $x = 1$;

в) $y'' - 5ky' + 6yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$;

г) $y'' + 2y' + 2y = (2k+3)e^{2x}$.

22. а) $(x^2+4)y' - 2kxy = x(x^2+4)^{k-1}$; б) $y^k y' + x = k$; $y = 1$ при $x = 0$; в) $y'' - 4k^2 y = 0$, $y|_{x=-1} = 2$, $y'|_{x=-1} = 2$;

г) $y'' - 4y' + 8y = (4k-1)x^2 + 31$.

23. а) $x^{k+1}\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$; б) $(x+k)y' + y = k(x+k)^{k-1}$;

в) $y'' - 5y'k + 4yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 5$, $y'|_{x=0} = 8$;

г) $y'' - (2k+1)y' + 2ky = (k+3)e^{kx}$.

24. а) $y' + y^{-k}tgx = 0$; б) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$; в) $y'' + 3y'k + 2yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = -1$; г) $y'' + (1-k)y' - 2(k+1)y = (1+k)e^{-2x}$.

25. а) $\sqrt[k+1]{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$; б) $k(x^2+1)y' - 2xy = kx(x^2+1)$;

в) $y'' + 4yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 2$;

г) $y'' + (3-k)y' - 3ky = (k+3)\sin kx$.

26. а) $tgx\sin^2 ydx + \cos^2 xctg^{k-1}ydy = 0$; б) $(x^2+1)y' + 4xy = k$;

в) $y'' + 2y'(k+1) = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$;

г) $y'' + (k-4)y' - 4ky = (k+1)x^2 + (k+2)x + k + 5$.

27. а) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy + y^k dx = 0$; б) $xy' + 2y = \cos kx$;

в) $y'' = \frac{y}{k^2}$, $y|_{x=0} = k$, $y'|_{x=0} = 0$;

г) $y'' - (k+5)y' + 3(k+2)y = (k+5)e^{3x}$.

28. а) $xy' = 2y^k$; б) $y' - ky\sin x = e^{-k\cos x}\sin kx$;

в) $y'' - 5ky' + 6yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 1$;

г) $y'' + 2(k+2)y' + 8ky = (5k-3)x^2 + (k+1)x + k - 1$.

29. а) $y'\sin^2 x = y\ln^k y$; б) $xy' + ky = \frac{k}{x}$; в) $y'' + 2ky' + yk^2 = 0$,

$y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 2$; г) $y'' + (1-k)y' + k - 2 = (7k-1)e^x$.

30. а) $ctg^k x\cos^2 y dx + \sin^2 x tg^k y dy = 0$; б) $ky' - 4xy = kx$;

в) $y'' - 9yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = 2$;

г) $y'' + (1-5k)y' - 5ky = (k+2)x^2 + kx + 5$.

31. а) $y'\cos^2 x - y\ln^k y = 0$; б) $y' + \frac{y}{\sqrt{x^2+k}} = 3x$;

в) $y'' - 4y'k + 3yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = -1$;

г) $y'' + 2(3k+1)y' + 12ky = k\sin x$.

32. а) $\frac{e^{-y^2}}{(x^2+4)^k}dy + \frac{x}{y}dx = 0$; б) $xy' - ky = x^k + 1$; в) $y'' - y'(k+1) = 0$,

$y|_{x=2} = 1$, $y'|_{x=2} = \frac{1}{2}$; г) $y'' + (3k-4)y' - 12ky = (3k+1)\cos 4x$.

33. а) $(1+y^3)^k x dx - (1+x^2)^k y^2 dy = 0$; б) $y'\cos x - ky\sin x = \frac{2}{\cos^{k-2} x}$;

в) $y'' - y(k+2)^2 = 0$, $y|_{x=1} = 2$, $y'|_{x=1} = 3$;

г) $y'' + (5-4k)y' - 20ky = (k+5)x^2 + 3kx - 2$.

34. а) $y' tgx = k^2 y$; б) $xy' + ky = \frac{2x^k}{1+x^2}$; в) $y'' + y(k+1)^2 = 0$,

$y|_{x=0} = \frac{1}{2}$, $y'|_{x=0} = 5$; г) $y'' - (7+k)y' + 7ky = (k+3)e^{7x}$.

35. а) $y - xy' = k(1 + x^2 y')$; б) $y' + ky = e^{-2kx}$; в) $y'' - 2ky' + 2yk^2 = 0$,

$y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = -1$; г) $y'' + (2-7k)y' - 14ky = (8k-3)x^2 + k$.

23. Еластичність попиту $E_p(Q)$ на певний товар є постійною величиною. Визначити функцію попиту $Q = f(p)$, якщо:

1. $E_p(Q) = -2$, $Q = 4$, $p = \frac{1}{2}$.
2. $E_p(Q) = -3$, $Q = 6$, $p = 1$.
3. $E_p(Q) = -\frac{1}{2}$, $Q = 3$, $p = 1$.
4. $E_p(Q) = -1$, $Q = 2$, $p = 1$.
5. $E_p(Q) = -\frac{1}{3}$, $Q = 5$, $p = 1$.
6. $E_p(Q) = -2$, $Q = 4$, $p = 1$.
7. $E_p(Q) = -\frac{1}{4}$, $Q = 3$, $p = 1$.
8. $E_p(Q) = -4$, $Q = 2$, $p = 1$.
9. $E_p(Q) = -\frac{1}{3}$, $Q = 2$, $p = 1$.
10. $E_p(Q) = -1$, $Q = 4$, $p = 1$.
11. $E_p(Q) = -\frac{1}{2}$, $Q = 4$, $p = 1$.
12. $E_p(Q) = -3$, $Q = 1$, $p = 1$.
13. $E_p(Q) = -\frac{1}{4}$, $Q = 6$, $p = 1$.
14. $E_p(Q) = -\frac{1}{2}$, $Q = 3$, $p = 1$.
15. $E_p(Q) = -1$, $Q = 2$, $p = 1$.
16. $E_p(Q) = -2$, $Q = 3$, $p = 1$.
17. $E_p(Q) = -\frac{1}{3}$, $Q = 1$, $p = 1$.
18. $E_p(Q) = -\frac{1}{4}$, $Q = 1$, $p = 1$.
19. $E_p(Q) = -4$, $Q = 1$, $p = 1$.
20. $E_p(Q) = -\frac{1}{3}$, $Q = 3$, $p = 1$.
21. $E_p(Q) = -1$, $Q = 6$, $p = 1$.
22. $E_p(Q) = -0{,}5$, $Q = 6$, $p = 1$.
23. $E_p(Q) = -3$, $Q = 2$, $p = 1$.
24. $E_p(Q) = -\frac{1}{4}$, $Q = 5$, $p = 1$.
25. $E_p(Q) = -\frac{1}{2}$, $Q = 5$, $p = 1$.
26. $E_p(Q) = -1$, $Q = 3$, $p = 1$.
27. $E_p(Q) = -2$, $Q = 5$, $p = 1$.
28. $E_p(Q) = -\frac{1}{3}$, $Q = 6$, $p = 1$.
29. $E_p(Q) = -\frac{1}{5}$, $Q = 3$, $p = 1$.
30. $E_p(Q) = -\frac{2}{3}$ $Q = 2$, $p = 1$.
31. $E_p(Q) = -\frac{3}{2}$, $Q = 3$, $p = 1$.
32. $E_p(Q) = -\frac{4}{3}$, $Q = 2$, $p = 1$.
33. $E_p(Q) = -\frac{3}{2}$, $Q = 1$, $p = 1$.
34. $E_p(Q) = -\frac{4}{3}$ $Q = 3$, $p = 1$.
35. $E_p(Q) = -\frac{3}{4}$, $Q = 3$, $p = 1$.

24. <u>ЧИСЛОВІ РЯДИ ТА ЇХ ЗБІЖНІСТЬ.</u>

1. Поняття числових рядів.
2. Сума ряду. Збіжність числового ряду.
3. Необхідна умова збіжності.
4. Ряд геометричної прогресії,
5. Гармонічні ряди.
6. Ознака порівняння рядів.
7. Ознака Даламбера.
8. Інтегральна ознака Коші.

25. <u>ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ.</u>

1. Поняття про знакозмінні і знакопереміжні ряди.
2. Ознака Лейбніца.
3. Абсолютна і умовна збіжність знакозмінних рядів.
4. Поняття про функціональні ряди та їх збіжність.
5. Степеневий ряд. Сума степеневого ряду. Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду.
6. Теорема Абеля.
7. Почленне диференціювання і інтегрування степеневого ряду.

26. <u>ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ.</u>

1. Ряд Тейлора.
2. Ряд Маклорена.
3. Розклад в степеневий ряд функції $f(x)=(1+x)^m$.
4. Розклад в степеневий ряд функції $f(x)=\sin x$.
5. Розклад в степеневий ряд функції $f(x)=\cos x$.
6. Розклад в степеневий ряд функції $f(x)=\ln(1+x)$.
7. Розклад в степеневий ряд функції $f(x)=arctgx$.
8. Розклад в степеневий ряд функції $f(x)=e^x$.
9. Застосування степеневих рядів для наближеного обчислення значень функцій.
10. Застосування степеневих рядів для обчислення визначених інтегралів та границь.

27. Дослідити на збіжність числові ряди: а) за ознакою Даламбера; б) за інтегральною ознакою Коші; в) за ознакою порівняння; г) з умовною та абсолютною ознаками.

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2k)^n}{n^{2k-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k}{2n+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(3k+2)n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n+k}}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{k^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+3}{(3n+3)^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+1}{n5^{n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{5+k}}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2k\,n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)^{-1}}{\ln^3(n+k)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+|tgkn|)}{\sqrt[3]{n}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4+kn+1}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3k)^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+2}{(n+2)^4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(0.5)^n}{(n+k)}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n kn}{n+3}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(k+2)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{1+n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3)^{2n}+k^2n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(k+1)n^2+3}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(k+2)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{9+n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1.3)^{2n}+k^2n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3n^2)}{(k+1)n^2+3}$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{n+k}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+2)n}{\sqrt{4n^2-3}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2k+3}{\sqrt{k\,n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+4k)^{1/3}}$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(k+1)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(kn^3-3)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{3n+2k}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3k+\sqrt[3]{n+1}}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+3)n!}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\sqrt{n^8+k^4}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+2}{n(2k)^{n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln^3(2n+3k)}$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(n+k)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(kn^2+1)^{3/2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^3+k^2)}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+kn^2}$.

11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n^2+k^2)^{3/4}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{n^5+kn^3}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(kn^3+6)^{1/2}}$.

12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(k+1)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+1)(n+1)}{\sqrt{n^2+2n+5}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+n}{n\sqrt{n^2+2^k}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[k]{n+2k}}$.

13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+3)^n n!}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+4}{n^2+9}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1+|\sin kn|}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{3n+k}}$.

14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+k)^4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+1}{(n+2)(n+k)}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n+3k)^{4/3}}$.

15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)^k\,\frac{1}{(k+1)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2k}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+n}{n^{3k}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n k}{n^2+1}$.

16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+1)^n\ln(n+2)}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{2n+2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{n+4}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+e^{kn}}$.

17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\,\frac{2k}{3^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k}{(n+2)\ln^3(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+1}{n\,5^{n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln\,(kn+3)}$.

18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\,(n)!}{n^{2k+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3k}{n^3+k}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2k}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(1+\frac{n}{2}\right)}{n+\frac{k}{2}}$.

19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{2k+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3k}{n^2+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2k}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(1+\frac{n}{2}\right)}{n+\frac{k}{2}}$.

20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n\,(n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+2n}{(n+1)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+4nk}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+k}$.

21. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!+(n+1)!}{k^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+k}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+2}{n^3+3n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{k^3}$.

22. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+1)^n}{(n)!+(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3k}{\sqrt[3]{n+4}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+k}{n(n+1)}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n}{(n+1)3^k}$.

23. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^k}{n!3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+k^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)\sqrt{n}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n^{k+1}}{2^n}$.

24. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k+1}}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^6+k^2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+2}{3n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{k^3\,(n+1)}$.

25. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{2k}}{(n+1)!n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k}{3n^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+2}{2^n+e^{k/n}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)!}{5+k\,n^2}$.

26. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3k)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+9k^2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\left|\cos\frac{k}{n}\right|}{\sqrt{n}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k}}$.

27. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k+3}}{(k+3)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2k+n}{n^2+9}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+2)(1+\frac{1}{n})}{3(n+k)}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[k]{n+1}}$.

28. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+k)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n+k)^3}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+k^2}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k^n}$.

29. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{(2k+1)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{(2n-1)^2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(k+1)^n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2k}$.

30. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+3)^n}{(2n+3)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2k}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{kn+1}$.

31. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k+1}}{2^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+k}{n^2+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+|k\sin 3n|}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2+\frac{k}{n+1}}$.

32. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{(3+k)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(kn+2)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+|\sin kn|}{n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n kn^2}{n^3+1}$.

33. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+1)^n}{n^4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{kn^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{kn}(n+1)}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+k}}$.

34. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)^3}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-k}{3n^4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+3)k^{3n}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k^{n+1}}$.

35. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{k\ln(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+1}{n^2+k}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3k}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k\,3^{2n}}$.

28. Знайти область збіжності степеневих рядів:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(3+k)^n\cdot(n+2)}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{n(k+1)}}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2k)x^n}{5^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{3^n\sqrt[3k]{n}}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2k)^n(n+1)}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(nk+4)}x^n$.

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{kn+1}{n+2k}\right)x^n$. 8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{kn}{n+2k}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^n$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n x^n}{6^{(k+1)n}\sqrt[3]{n}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot(2kn+1)}$. 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+2)x^n}{(4+k)^n\cdot\sqrt{n}}$. 12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n(n+4k)}$.

13.. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{k^2 n}$ 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{kn}(n+k)}$. 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt[7k]{n}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n(kn+2)}$.

17. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{(2+k)^n}$.

18. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3k)}{3^n}x^n$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{kn}(n+1)}x^n$.

20. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)x^n}{(kn+3)3^n}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{3^n(n+2k)}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(kn+1)x^n}{2n+3}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+k)x^{n-1}}{2^{n-1}3^n}$.

24. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(5k)^n(n+1)}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(kn+1)}$.

26. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k+3}{2^n}(n+2k)^2 x^n$.

27. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}3^{(k+1)n}\cdot x^n$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{\left(k/7\right)^n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(4+k)^n}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3k)^n\cdot x^n}{\sqrt{n}}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n\cdot\sqrt[4k]{n}}$.

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^nx^n}{(2k+1)n}$.

33. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^{kn}x^n}{\sqrt{n+1}}$.

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(2kn+1)}x^n$.

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^nx^n}{(3k-1)n}$.

Короткі теоретичні відомості

1. Визначники. Обчислення визначників

Визначником 2-го порядку називається число, яке знаходиться за формулою: $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначником 3-го порядку називається число, яке знаходиться за формулою: $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Визначник n-го порядку має вигляд: $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

де a_{ij} – елемент визначника, i – вказує стрічку розміщення, j – стовпець.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n\text{-}1)$-го порядку, одержаний з попереднього викреслюванням i-го рядка і j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається мінор цього елемента, взятий із знаком “+”, якщо число $(i+j)$ – парне, і зі знаком “–”, якщо воно непарне. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

***Визначник n-го порядку* – це число, яке дорівнює сумі попарних добутків елементів довільного рядка (або стовпця) на їх відповідні алгебраїчні доповнення.**

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \qquad (i = 1,2,\ldots,n);$$
$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \qquad (j = 1,2,\ldots,n).$$

2. Матриці та дії над ними

Прямокутна таблиця чисел, що містить m стрічок і n стовпців, взята в круглі або в квадратні дужки, називається матрицею розмірності $m \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо $n = m$, то матриця називається *квадратною* ***n-го*** порядку.

Сумою (різницею) матриць A і B однакової розмірності називається матриця C, для якої кожний елемент c_{ij} дорівнює сумі (різниці) відповідних елементів даних матриць: $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Добутком матриці A на число k називається матриця kA, всі елементи якої дорівнюють добуткам відповідних елементів матриці A на це число. Матричне множення AB можливе, якщо число стовпців матриці A збігається з числом рядків матриці B.

Добутком матриці A розмірності $n \times k$ на матрицю B розмірності $k \times l$ називається матриця $C = A \cdot B$ розмірності $n \times l$, для якої кожний елемент c_{ij} знаходиться за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj}, \qquad (i = 1,2,...n;\ j = 1,2,...,l).$$

Для квадратної матриці існує *обернена* матриця відносно множення.

Схема знаходження оберненої матриці:

1) Обчислити визначник матриці A.

2) Транспонувати матрицю A.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3) Знайти алгебраїчні доповнення кожного елемента транспонованої матриці A^T і записати їх у матрицю $A^П$ (приєднану):

$$A^П = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4) Поділити кожен елемент матриці $A^П$ на визначник матриці $|A|$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^П$$

Рангом матриці *А* називається найвищий порядок відмінних від нуля мінорів. Його позначають буквою r ($r(A)$).

3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Числа $a_{ij}(i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$ – коефіцієнти біля невідомих $x_j(j = 1,2,\ldots,n)$, а $b_i(i = 1,2,\ldots,m)$ – вільні члени.

Розв'язком системи (1) називається сукупність чисел $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$, яка при підстановці її в систему перетворює всі рівняння в правильні рівності (тотожності).

Якщо число рівнянь m дорівнює числу невідомих n, то для розв'язування системи рівнянь можна використати:

а) правило Крамера. Якщо основний визначник Δ системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (визначник складений із коефіцієнтів, що стоять біля невідомих) не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, k = 1,2,\ldots,n,$$

де Δ_k – допоміжний визначник, який одержується з основного визначника Δ шляхом заміни його ***k-го*** стовпчика стовпчиком вільних членів системи;

б) матричний метод. У матричній формі систему лінійних рівнянь запишемо так: $A \cdot X = B$. Звідси розв'язок: $X = A^{-1} \cdot B$.

Для довільних систем, лінійних алгебраїчних рівнянь використовують методи Гаусса, Жордана–Гаусса;

в) метод Гаусса полягає в послідовному виключенні невідомих з рівнянь системи і зведенні її до трикутного чи трапецевидного вигляду;

г) метод Жордана–Гаусса полягає в повному послідовному виключенні невідомих. При цьому коефіцієнти утворюють при основних (базисних) невідомих одиничну матрицю.

4. Елементи аналітичної геометрії і векторної алгебри

Дві взаємно перпендикулярні осі ***Ox*** і ***Oy*** з спільною точкою початку відліку ***O*** і однаковою масштабною одиницею утворюють декартову систему координат на площині.

Точка на площині задається впорядкованою парою чисел ***(x,y),*** які називаються координатами.

Віддаль ***d*** між точками $A(x_1, y_1)$ *і* $B(x_2, y_2)$ обчислюється за формулою: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Координати точки **C** $(x,\ y)$, яка ділить відрізок ***AB*** у відношенні **AC : CB=λ**, знаходяться за формулами: $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

В просторі три взаємно перпендикулярні осі ***Ox***, ***Oy, Oz*** з спільною точкою відліку ***O*** і однаковою масштабною одиницею утворюють декартову систему координат. Точка в просторі задається впорядкованою трійкою чисел – координатами $(x,\ y,\ z)$.

Направлений відрізок $\overline{AB}$, де точка ***A*** – точка початку, а ***B*** – точка кінця, називається вектором.

Вектор позначається або двома великими буквами з стрілкою над ними $\vec{AB}$, або одною малою буквою $\vec{a}$. Довжину вектора називають модулем і позначають $|\vec{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор на площині задають двома числами (його координатами): $\vec{AB}=\{x,y\}$, де $x=x_2-x_1$, $y=y_2-y_1$, які є проекціями вектора відповідно на осі ***Ox*** та ***Oy.*** Вектор в просторі задають трьома координатами: $\vec{AB}=\{x,y,z\}$.

Сумою (різницею) двох векторів $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ і $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ називають вектор $\vec{c}=\{x_2\pm x_1,y_2\pm y_1,z_2\pm z_1\}$.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, де φ – кут між векторами.

Якщо вектори задані своїми координатами, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Кут φ між векторами обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Умова паралельності векторів: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Умова перпендикулярності векторів: $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$

5. Пряма на площині

1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$, де $k = tg\alpha$ (α – кут нахилу прямої до додатного напряму осі Ox), b – довжина відрізка, який пряма відтинає на осі Oy.

2. Рівняння в'язки прямих, що проходять через точку $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

3. Рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

4. Рівняння прямої у відрізках на осях: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$ де a, b – відрізки, які пряма відсікає на осях координат.

5. Загальне рівняння прямої: $Ax + By + C = 0$.

Кут φ, відрахований проти годинникової стрілки від прямої $y = k_1x + b_1$ до прямої $y = k_2x + b_2$, знаходиться за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Умова паралельності цих прямих: $k_1 = k_2$,

Умова перпендикулярності: $k_2 = -\frac{1}{k_1}.$

Віддаль d точки $M_0(x_0, y_0)$ від прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюємо за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

6. Площина і пряма в просторі

Рівняння площини, що проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$ де $\vec{N} = \{A, B, C\}$ – вектор нормалі до площини.

Загальне рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0$. (1)

Кут φ між двома площинами, заданими рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, знаходимо за формулою: $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Віддаль d точки $M(x_0, y_0, z_0)$ від площини (1):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ паралельно до вектора $\vec{s}\{m, n, p\}$, має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (2)$$

Кут між прямою (2) та площиною (1) шукаємо за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

7. Канонічні рівняння ліній другого порядку

Рівняння кола з центром $C(a;b)$ і радіусом R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Рівняння еліпса: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, де a і b – півосі еліпса, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – відстань від центра до одного з фокусів, $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ – ексцентриситет еліпса.

Рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, де a – дійсна, b – уявна півосі, $c=\sqrt{a^2+b^2}$ – відстань від центра до одного з фокусів, $\varepsilon=\frac{c}{a}$ – ексцентриситет, $y=\pm\frac{b}{a}x$ – асимптоти гіперболи.

Рівняння параболи симетричної відносно осі $0x$: $y^2=2px$, її фокус: $F(\frac{p}{2};0)$, директриса: $x=-\frac{p}{2}$.

Рівняння параболи симетричної відносно осі $0y$: $x^2=2py$, її фокус: $F(0;\frac{p}{2})$, директриса: $y=-\frac{p}{2}$.

8. Вступ у математичний аналіз

Якщо кожному значенню змінної $x\in X$ поставлено у відповідність за певним правилом значення $y\in Y$, то говорять, що задана функція. Її позначають $y=f(x)$.

Множина X називається областю визначення функції, множина Y – областю значень функції.

Множина значень $x_1,x_2,...,x_n,...$, яка за певним правилом поставлена у відповідність натуральному ряду чисел $1,2,...,n,...$, називається числовою послідовністю.

Числа $x_1,x_2,...,x_n,...$ називаються членами послідовності, при цьому x_n – загальним членом.

Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого малого додатного числа ε знайдеться такий номер N, що для всіх $n>N$ виконується нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$. Це позначають $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

Якщо послідовність має скінченну границю, то її називають збіжною.

Важливим прикладом числової послідовності є геометрична прогресія.

Послідовність чисел називається геометричною прогресією, якщо кожний наступний її член дорівнює попередньому, помноженому на деяке стале число q – знаменник прогресії: $b_n=b_{n-1}q=b_0q^{n-1}$.

Число A називається границею функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності значень аргументу $x_1, x_2, ..., x_n...$ $(x_n \neq x_0)$ відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ збіжна до A. Це записують $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A.$

Основні теореми про границі функцій:

1. Границя сталої дорівнює цій сталій.
2. Границя алгебраїчної суми, добутку, частки двох функцій дорівнює відповідно алгебраїчній сумі, добутку та частці їх границь при умові, що границя функції в знаменнику не дорівнює 0.

Випадки, коли не можна знайти границі безпосередньо за цими теоремами, це невизначеності: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^{\infty}$. Для розкриття невизначеностей використовують визначні границі:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (e \approx 2{,}71828)$.

У фінансових розрахунках використовують формули нагромадження капіталу за складними відсотками, знайдені на основі геометричної прогресії: $K_t = K_0 (1 + i)^t$, де K_t – сума вкладу нагромадження через t років, K_0 – початкова сума вкладу, $t = \frac{p}{100}$ – коефіцієнт складних відсотків при p – щорічному відсотковому прирості.

Якщо відсотки нараховуються m разів за рік, то $K_t = K_0 (1 + \frac{i}{m})^{mt}$.

Якщо зростання за складними відсотками неперервне, то на основі другої визначної границі формула набуде вигляду $K_t = K_0 e^{it}$.

9. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx в цій точці, коли $\Delta x \to 0$.

Позначають похідну $y', \frac{dy}{dx}, f'(x)$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя скінченна, то функція називається диференційованою в точці x. Основні правила і формули диференціювання поміщені в таблиці:

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ			
$y = C$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = Cu$	$y' = Cu'$	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
$y = uv$	$y' = u'v + v'u$	$y = u^n$	$y = nu^{n-1}u'$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = a^u$	$y' = a^u \ln a u'$	$y = e^u$	$y' = e^u u'$
$y = \sin u$	$y' = \cos u\, u'$	$y = \cos u$	$y' = -\sin u\, u'$
$y = tgu$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$y = ctgu$	$y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = arctgu$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$	$y = arcctgu$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u \ln a}$	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
$y=f(u)$, $u=\varphi(x)$	$y' = f'_u u'_x$	$x=\varphi(y)$ *обернена до* $y=f(x)$	$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

Диференціал функції $y = f(x)$ обчислюється за формулою:

$$dy = f'(x)dx.$$

10. Застосування похідної

Правило Лопіталя. Для “невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$” границя відношення функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо вона існує.

Достатні умови зростання та спадання функції. Якщо похідна неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $y = f(x)$ додатна, то функція зростає, якщо похідна від'ємна, то функція спадна.

Необхідні умови екстремуму функції. Якщо в точці x_0 функція $y = f(x)$ має екстремум, то її похідна $f'(x)$ в цій точці дорівнює нулю або не існує.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними.

Достатні умови екстремуму (перше правило).

Якщо при переході через критичну точку x_0 зліва на право похідна $f'(x)$ змінює знак з “+” на “–”, то в цій точці функція має максимум, а при зміні знака з “–” на “+” – мінімум. Якщо знак не змінюється, то екстремуму немає.

Друге правило.

Якщо в критичній точці x_0 друга похідна $f''(x_0) \neq 0$, то в цій точці функція $f(x)$ має екстремум: максимум при $f''(x_0) < 0$, мінімум при $f''(x_0) > 0$.

Графік функції $y = f(x)$ опуклий на проміжку (a,b), якщо в кожній точці його $f''(x_0) < 0$, і вгнутий, якщо $f''(x_0) > 0$.

Точка x_0, в якій $f''(x_0) = 0$ і при переході через яку $f''(x)$ змінює знак, є точкою перегину.

В економічних дослідженнях використовують поняття еластичності функції $y = f(x)$, яке виражається через похідну

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

11. Повне дослідження функції

<u>Загальна схема дослідження функції і побудова її графіка</u>

1. Знаходимо область визначення функції $y = f(x)$.

2. Знаходимо точки перетину кривої $y = f(x)$ з осями координат, відкладаємо їх на рисунку.

3. Визначаємо, чи симетрична крива $y = f(x)$ відносно осей координат і початку координат (парність і непарність).
4. Досліджуємо функцію на неперервність. Якщо функція має у точці x_0 розрив, то визначаємо, якого він роду.
5. Досліджуємо функцію на періодичність.
6. Знаходимо асимптоти кривої, якщо вони існують.
7. Визначаємо інтервали монотонності, максимум і мінімум функції і позначаємо на рисунку точки кривої з максимальною і мінімальною ординатами.
8. Знаходимо точки перегину**,** інтервали опуклості і увігнутості.

12. Функції багатьох змінних

Якщо кожній парі чисел (x, y), де $x \in X$, $y \in Y$ поставлено у відповідність за певним правилом значення $z \in Z$, то говорять, що задана функція двох змінних, яку позначають $z = f(x, y)$.

Змінні x і y називають аргументами.

Якщо x надати приросту Δx, а y – приросту Δy, то z одержить приріст Δz. Частинний приріст $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, частинний приріст $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Їх знаходять як звичайні похідні, вважаючи при обчисленні z'_x змінну y сталою, а при обчисленні z'_y змінну x сталою. Оскільки частинні похідні першого порядку для функції двох змінних є функціями цих змінних, то можна знайти частинні похідні другого порядку: z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}.

Необхідні умови екстремуму функції двох змінних

Якщо в точці $M(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ досягає екстремуму, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} z'_x(x_o, y_0) = 0, \\ z'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Достатні умови екстремуму функції двох змінних

Нехай в точці $M_0(x_0, y_0)$ *виконується умова* $z'_x = z'_y = 0$ *і існують частинні похідні другого порядку* $z''_{xx}(x_0; y_0) = A$; $z''_{xy}(x_0; y_0) = B$; $z''_{yy}(x_0; y_0) = C$.

Визначимо: $D = AC - B^2$.

Якщо $D > 0$, *то в точці* $M_0(x_0, y_0)$ *функція* $z = f(x, y)$ *має екстремум; якщо* $D < 0$, *то екстремуму немає.*

Якщо $D > 0$ *і* $A > 0$ *(або* $D > 0$ *і* $C > 0$ *), то функція досягає мінімуму, якщо* $D > 0$ *і* $A < 0$ *(або* $D > 0$ *і* $C < 0$ *), то функція досягає максимуму.*

Градієнтом функції двох змінних називається вектор

$$g = grad\, z = z'_x \vec{i} + z'_y \vec{j}\ .$$

Для функції $u = f(x, y, z)$ градієнт має вигляд:

$$g = grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k}.$$

13. Невизначений інтеграл

Первісною функцією до заданої функції $f(x)$ називається функція $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$, а диференціал $f(x)dx$:

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF(x) = f(x)dx\ .$$

Множина всіх первісних $F(x) + C$ для даної функції $f(x)$, де C – довільна стала, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx$.

Отже, $\int f(x)dx = F(x) + C$.

У формулі $f(x)$ називається підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, а символ $\int$ – знаком невизначеного інтеграла.

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, а диференціал – підінтегральному виразу:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\int f(x)dx = f(x)dx\ .$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції з точністю до сталої:

$$\int dF(x)=F(x)+C\ .$$

3. Постійний множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx\ .$$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від кожного з цих доданків:

$$\int (f_1(x)+f_2(x)-f_3(x))dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx-\int f_3(x)dx\ .$$

ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ	
$\int du=u+C$	$\int Cdx=C\int dx$
$\int \sin u\,du=-\cos u+C$	$\int \cos u\,du=\sin u+C$
$\int tg(u)du=-\ln\lvert\cos u\rvert+C$	$\int ctg(u)du=\ln\lvert\sin u\rvert+C$
$\int e^u du=e^u+C$	$\int \frac{du}{u}=\ln\lvert u\rvert+C$
$\int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+C$	$\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert+C$
$\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left\lvert u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right\rvert+C$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C$
$\int \frac{du}{\cos^2 u}=tg(u)+C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u}=-ctg(u)+C$
$\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\alpha\neq 1$	$\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C$

14. Методи обчислення невизначених інтегралів

А. Метод *беспосереднього інтегрування* полягає в прямому застосуванні властивостей інтегралів і таблиці основних інтегралів.

Б. Метод *заміни змінної* застосовується для зведення $\int f(x)dx$ до табличного, введенням підстановки $x=\varphi(t)$ і використонням формули $\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

Інколи доцільно вводити заміну $t=\psi(x)$, щоб звести інтеграл до табличного.

В. Метод *інтегрування частинами* ґрунтується на використанні формули: $\int udv = uv - \int vdu$. Підінтегральний вираз подають у вигляді добутку множників u і dv. Якщо він містить добуток многочлена на тригонометричну або показникову функцію, то за u слід взяти многочлен, а все решту – за dv. Якщо підінтегральний вираз містить добуток многочлена на логарифмічну чи аркфункцію, то за u слід брати логарифмічну або аркфункцію, а решта – за dv.

Не всякий інтеграл можна виразити через відомі елементарні функції.

Завжди інтегруються раціональні функції, які мають вигляд

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x), \quad Q(x)$ – многочлени.

Якщо найвищий степінь многочлена $P(x)$ менший за найвищий степінь многочлена $Q(x)$, то дріб називають правильним, в іншому випадку неправильним.

З неправильного дробу виділяють цілу частину шляхом ділення двох многочленів і, таким чином, зводять інтегрування його до інтегрування цілої раціональної функції і правильного дробу.

Правильний дріб можна розкласти на суму найпростіших дробів чотирьох типів:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{B}{(x-a)^n}, n > 1$; 3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$,

кожен з яких інтегрується.

Інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x$, якщо $m = 2k+1$ непарне число, обчислюються підстановкою $t = \cos x$, якщо n непарне число – підстановкою $t = \sin x$. Якщо обидва показники парні, то, використовуючи формули пониження степеня тригонометричних функцій:

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, прийдемо до обчислення інтегралів, в яких хоч один із степенів буде непарним.

Інтеграли типу $\int \sin mx \cos nxdx$, $\int \sin mx \sin nxdx$, $\int \cos mx \cos nxdx$ перетворюють з використанням формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right),$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right),$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right).$$

Інтеграли типу $\int R(\sin x,\cos x)dx$, де $R(\sin x,\cos x)$ – раціональна функція від $\sin x,\cos x$, можна звести до інтегрування раціональних дробів за допомогою універсальної підстановки $t=tg\frac{x}{2}$, скориставшись формулами $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Інтеграли від ірраціональних функцій

1) $\int R(x,\sqrt[m]{ax+b},\sqrt[n]{ax+b},...)dx$, де підінтегральна функція раціональна відносно $x,\sqrt[m]{ax+b},\sqrt[n]{ax+b},...$ зводять до інтегралів від раціональних функцій підстановкою $ax+b=t^k$, де k – найменше спільне кратне чисел $m,n,...$;

2) для $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$ використовують підстановку $x=a\sin t$ $(x=a\cos t)$; для $\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})dx$ – $x=atgt$ ($x=actgt$).

15. Визначений інтеграл

Визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ – це число, яке знаходиться за формулою Ньютона–Лейбніца: $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$, де $F(x)$ – первісна до функції $f(x)$.

Якщо при обчисленні визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ застосовують заміну змінної: $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція, що має похідну $\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha,\beta]$, то використовується формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt,\text{ де } a=\varphi(\alpha),b=\varphi(\beta).$$

При обчисленні визначеного інтеграла не потрібно повертатись до попередньої змінної.

При методі інтегрування частинами формула має вигляд:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Площа S криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Oy та прямими $x = a, x = b$, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена зверху лінією $y = f_2(x)$, знизу лінією $y = f_1(x)$ та прямими $x = a, x = b$, то її площа обчислюється за формулою: $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$.

Об'єм V тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a, x = b$ навколо осі Ox, знаходимо за формулою:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Якщо фігура, обмежена лініями: $x = g(y)$, $x = 0$, $y = c, y = d$ обертається навколо осі Oy, то об'єм:

$$V = \pi\int_c^d g^2(y)dy.$$

16. Невласні інтеграли

За означенням невласні інтеграли з необмеженими межами:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx.$$

Якщо ці границі скінченні, то невласні інтеграли називаються збіжними, якщо нескінченні або не існують – розбіжними.

Якщо підінтегральна функція $f(x)$ в точці $x = a$ необмежена і має розрив, то $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Якщо $f(x)$ необмежена в точці $x = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Якщо $f(x)$ має розрив у внутрішній точці $x = c$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx .$$

Інтеграл Пуассона: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

17. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду $F(x, y, y') = 0$, яке, коли його можна розв'язати відносно y', набуває вигляду $y' = f(x, y)$ або $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Функція $y = \phi(x, C)$, де C – довільна стала, називається загальним розв'язком рівняння першого порядку, якщо при підстановці її в рівняння вона перетворює його в правильну рівність. Якщо цей розв'язок задає функцію y неявно: $\Phi(x, y, C) = 0$, то знайдено загальний інтеграл. При довільному C_0 одержимо частковий розв'язок (частковий інтеграл).

Задача знаходження розв'язку, який задовольняє початкові умови $y = y_0$ при $x = x_0$, називається задачею Коші для рівняння першого порядку.

Розглянемо деякі класи диференціальних рівнянь, які розв'язуються в квадратурах (розв'язки виражаються через інтеграли від заданих функцій).

Диференціальне рівняння вигляду $f(x)dx + \phi(y)dy = 0$ називається рівнянням з відокремленими змінними. Його загальний інтеграл:

$$\int f(x)dx + \int \phi(y)dy = C .$$

Диференціальне рівняння вигляду $f_1(x)\phi_1(y)dx + f_2(x)\phi_2(y)dy = 0$ називається рівнянням з відокремлюваними змінними.

В ньому змінні можна розділити і знайти загальний інтеграл

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\phi_2(y)}{\phi_1(y)}dy = C .$$

Зауваження. Часто для зручності спрощень C записують у вигляді $\ln C$.

Лінійним дифрінянням першого порядку називається рівняння, яке містить шукану функцію y та її похідну y' в першому степені і не містить їх добутків: $y' + p(x)\,y = q(x)$.

Підстановкою $y = u \cdot v$ за методом Бернулі воно приводиться до інтегрування двох дифрівнянь з відокремлюваними змінними.

Однорідним дифрівнянням першого порядку називається рівняння вигляду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, де $P(x, y), Q(x, y)$ – однорідні функції одного виміру. Функція $f(x, y)$ називається однорідною виміру m , якщо $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$.

Однорідне диференціальне рівняння зводиться до рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Підстановкою $y = x \cdot u$ воно зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

18. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами називається рівняння вигляду $y'' + p\,y' + q = 0$, де p, q – сталі числа.

Відповідним характеристичним рівнянням називається рівняння:

$k^2 + p\,k + q = 0$.

Загальний розв’язок заданого дифрівняння залежить від коренів цього характеристичного рівняння.

1. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні, $k_1 \neq k_2$, то загальний розв’язок диференціального рівняння має вигляд $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

2. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і рівні, тобто $k_1 = k_2 = k$, то загальний розв’язок $y = e^{kx}\left(C_1 + C_2\,x\right)$.

3. Якщо корені характеристичного рівняння комплексно спряжені, тобто $k_1 = \alpha + i\,\beta,\ k_2 = \alpha - i\,\beta$, де $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, то загальний розв’язок $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta\,x + C_2 \sin\beta\,x)$.

Неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами має вигляд $y'' + p\,y' + q = f(x)$, де p, q – сталі числа.

Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння ($y_{з.н.}$) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння ($y_{з.о.}$) і довільного часткового розв'язку ($y_{ч.н.}$) даного неоднорідного рівняння, тобто $y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$

Частковий розв'язок ($y_{ч.н.}$) підбирається для деяких функцій $f(x)$ подібним до неї.

1. Нехай $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, де многочлен $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$. Тоді частковий розв'язок шукаємо у вигляді

$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} Q_n(x)$, якщо α – не корінь характеристичного рівняння;

$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} x Q_n(x)$, якщо α – простий корінь характеристичного рівняння;

$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} x^2 Q_n(x)$, якщо α – подвійний корінь характеристичного рівняння, де $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_n$, $A_0, A_1, ..., A_n$ –невідомі сталі коефіцієнти, які знаходяться методом невизначених коефіцієнтів.

2. Нехай $f(x) = e^{\alpha x}(a\cos x + b\sin x)$, тоді частковий розв'язок

$y_{ч.н.} = e^{\alpha x}(A\cos x + B\sin x)$, якщо $\alpha + i\beta$ – не корінь характеристичного рівняння;

$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} x(A\cos x + B\sin x)$, якщо $\alpha + i\beta$ – корінь характеристичного рівняння.

Для дифрівняння другого порядку загальний розв'язок містить дві довільні сталі. Задача Коші ставиться так:

Знайти такий розв'язок, який би задовольняв умови $y = y_0$, $y' = y'_0$ при $x = x_0$.

19. Числові ряди

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, ..., u_n, ...$.

Вираз $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ називають нескінченним числовим рядом (або просто рядом), числа $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – членами ряду, u_n – загальним членом ряду.

Частковою сумою числового ряду називають суму S_n перших n членів числового ряду, тобто $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$,..., $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Сумою S числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називають границю його часткової суми S_n при $n \to \infty$, тобто $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Якщо границя часткової суми ряду є скінченним числом, то ряд називають збіжним і позначають $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Якщо границя часткової суми ряду не існує або дорівнює $\pm\infty$, то числовий ряд називають розбіжним.

Числовий ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1}$ називають рядом геометричної прогресії зі знаменником q.

При $|q| < 1$ ряд геометричної прогресії збігається і його сума дорівнює $S = \frac{a}{1-q}$. При $|q| \geq 1$ ряд розбігається.

Числовий ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ називають гармонічним рядом. Цей ряд розбігається.

<u>Необхідна ознака збіжності числового ряду</u>

Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то загальний член $u_n \to 0$ при $n \to \infty$, тобто $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

<u>Достатні ознаки збіжності числових рядів</u>

1. Ознака Даламбера

Нехай усі члени числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ додатні і при необмеженому зростанні номера n границя відношення $(n+1)$-го члена до n-го дорівнює числу d. Тобто $d = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Якщо $d < 1$, тоді числовий ряд збігається. При $d > 1$ цей ряд розбігається. При $d = 1$ потрібно застосовувати іншу ознаку.

2. Ознака порівняння

Нехай треба дослідити збіжність заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n > 0.$ Візьмемо другий додатний числовий ряд, збіжність чи розбіжність якого відома: $\sum_{n=1}^{\infty} v_n,\ v_n > 0.$ Тоді:

а) якщо $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ряд збігається і, починаючи з деякого номера n, виконується співвідношення $u_n \le v_n$, тоді й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ також збігається.

б) якщо $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ряд розбігається і, починаючи з деякого номера n, виконується співвідношення $u_n \ge v_n$, тоді й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ також розбігається.

3. Інтегральна ознака Коші

Нехай $y = f(x)$ – неперервна, монотонно спадна і додатна в інтервалі $(0\,;\infty)$ функція, значення якої $f(1), f(2), f(3), \ldots f(n), \ldots$ дорівнюють відповідним додатним членам ряду $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$.

Тоді для збіжності ряду необхідно і достатньо, щоб невласний інтеграл $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ мав скінченну величину.

Якщо члени числового ряду мають різні знаки, то ряд називають знакозмінним.

Ряд, члени якого почергово мають додатний та від’ємний знаки, називають знакопереміжним. Такий ряд можна записати у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots, \quad u_n > 0.$$

Знакопереміжний ряд називають збіжним абсолютно, якщо збігається додатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, складений з абсолютних величин цього знакопереміжного ряду.

4. Ознака Лейбніца

Якщо абсолютні величини знакопереміжного ряду монотонно спадають $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 \ldots > u_n > \ldots$ і границя загального члена дорівнює нулю при $n \to \infty$, тобто виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, тоді знакопереміжний ряд збігається, при чому його часткова сума S_n обов'язково менша від першого члена ряду.

Якщо знакопереміжний ряд збігається, а ряд, складений з абсолютних величин, розбігається, то знакопереміжний ряд називають неабсолютно збіжним (або умовно збіжним).

20. Степеневі ряди

Степеневим рядом називають ряд такого вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \text{ або}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_1 (x - x_0)^2 +$$

$$+ a_2 (x - x_0)^3 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots,$$

де a_n $(n = 1,2,3,\ldots)$ – дійсні числа, які називають коефіцієнтами степеневого ряду; x_0 – деяке постійне число.

Число R називають радіусом збіжності степеневого ряду, якщо для $|x| < R$ ряд збігається, а для $|x| > R$ – розбігається.

Радіус збіжності знаходимо за формулою: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

Інтервал $(-R, R)$ називають інтервалом збіжності степеневого ряду.

Ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots .$$

Ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots .$$

Деякі економічні задачі і їх розв'язування

Задача 1. Бюро економічного аналізу фабрики "Нова" встановило, що при виробництві x комплектів меблів щоквартальні витрати $V(x)$ виражаються формулою $V(x) = 2050 + 15x$ (гривень), а дохід $D(x)$, одержаний від продажу x комплектів меблів, визначається за формулою $D(x) = 25x - 0{,}1x^2$ (гривень).

Кожного кварталу фабрика виробляє 80 комплектів, але прагне збільшити випуск меблів до 110 одиниць. Обчислити приріст витрат, доходу та прибутку. Знайти середню величину приросту прибутку на одиницю приросту продукції.

Розв'язування. Запланований приріст продукції буде
$\Delta x = 110 - 80 = 30$ (одиниць продукції).

Приріст витрат:

$$\Delta V(x) = V(110) - V(80) = (2050 + 15 \cdot 110) - (2050 + 15 \cdot 80) =$$
$$= 3700 - 3250 = 450.$$

Приріст доходу:

$$\Delta D(x) = D(110) - D(80) = (25 \cdot 110 - 0{,}1 \cdot 110^2) - (25 \cdot 80 - 0{,}1 \cdot 80^2) =$$
$$= 1540 - 1360 = 180.$$

Позначимо прибуток $P(x)$.

Тоді

$$P(x) = D(x) - V(x) = 25x - 0{,}1x^2 - 2050 - 15x = -2050 + 10x - 0{,}1x^2.$$

Приріст прибутку буде:

$$\Delta P(x) = P(110) - P(80) = -2050 + 10 \cdot 110 - 0{,}1 \cdot 110^2 -$$
$$-(-2050 + 10 \cdot 80 - 0{,}1 \cdot 80^2) = 1100 - 1210 - 800 + 640 = -50,$$

тобто зменшиться на 50 гривень. Середня величина прибутку на одиницю приросту продукції буде $\dfrac{\Delta P(x)}{\Delta(x)} = \dfrac{-50}{30} = -1{,}67$.

Задача 2. В місті Тернополі в усіх вищих навчальних закладах навчається 35 тис. студентів. Щорічно кількість студентів збільшується на 3%. Яка кількість студентів буде в Тернополі через вісім років?

Розв'язування. Використаємо формулу зростання за складними відсотками: $K_8 = 35\left(1 + \dfrac{3}{100}\right)^8 = 35 \cdot (1 + 0{,}03)^8 \approx 44{,}34$.

Отже, через 8 років у місті буде 44, 34 тис. студентів.

Задача 3. Вкладник надає банку 2000 гривень під складні відсотки за умови їх неперервного зростання на 12% річних. Обчислити нагромадження капіталу за 4 роки.

Розв'язування. Використаємо формулу неперервного зростання за складними відсотками: $K_4 = 2000 \cdot e^{4 \cdot 0,12} \approx 3,2322$ **тис. грн.**

Задача 4. Сума $K_0 = 200$ тис. грн. вкладена під складні відсотки з розрахунку 12% річних терміном на 4 роки. Обчислити кінцеву суму, якщо відсотки нараховуються в кінці кожного місяця.

Розв'язування. Відомо, що $K_0 = 200$ тис. грн., $i = 0,12$, $m = 12$, $t = 4$.

Отже, $K_4 = 200\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12 \cdot 4} = 200 \cdot 1,01^{48} = 322,4$ **тис. грн.**

Задача 5. Закон Парето: число y осіб, котрі мають прибуток не менш ніж x, можна визначити за формулою $y = \frac{a}{x^n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$

Даний закон достатньо точно описує розподіл великих прибутків і не справджується для низьких.

Нехай у деякому капіталістичному суспільстві розподіл прибутків серед особливо багатих осіб визначається так: $y = \frac{6,4 \cdot 10^{16}}{x^3}$, де y – число осіб, прибуток яких не менший x.

Визначити:

а) число осіб, прибуток яких не менший від 100000 дол.

б) найменший прибуток серед 1000 особливо багатих осіб.

Розв'язування. Використовуючи дану формулу, знаходимо:

а) $y = \frac{6,4 \cdot 10^{16}}{10^{15}} = 64$.

Отже, 64 особи мають прибуток не менший 100000 дол.

б) з формули закону Парето одержуємо: $x^3 = \frac{64 \cdot 10^{15}}{y}$. Якщо $y = 1000$, то маємо: $x^3 = \frac{64 \cdot 10^{15}}{10^3} = 64 \cdot 10^{12}$,

$x = 4\sqrt[3]{10^{12}} = 4 \cdot 10^4 = 4 \cdot 10000 = 40000$ *дол.*

Отже, найменший прибуток серед 1000 особливо багатих людей становить 40000 дол.

Задача 6. Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з них дорівнює p, причому $p = 50 - 0{,}3x$, а функція витрат $V(x) = 1200 + 7x$ (у гривнях). Знайти маржинальний прибуток, якщо виготовлено і продано 30 і 120 виробів.

Розв'язування. У нашому випадку функцією доходу є:

$$D(x) = p \cdot x = (50 - 0{,}3x)x = 50x - 0{,}3x^2 .$$

Прибуток від виготовлення і продажу x виробів буде

$$P(x) = D(x) - V(x) = 50x - 0{,}3x^2 - (1200 + 7x) = -0{,}3x^2 + 43x - 1200.$$

Маржинальний прибуток для довільного x дорівнює

$$P'(x) = (-0{,}3x^2 + 43x - 1200)' = -0{,}6x + 43.$$

Звідси при $x = 30$ і $x = 120$ маємо:

$$P'(30) = -0{,}6 \cdot 30 + 43 = -18 + 43 = 25 ,$$

$$P'(120) = -0{,}6 \cdot 120 + 43 = -72 + 43 = -29 .$$

Отже, при зростанні і продажу кількості виробів підприємство матиме збитки у розмірі 29 гривень за кожен виріб.

Задача 7. Знайти еластичність попиту $Q = 25 - 3p$ щодо ціни $p = 8.$

Розв'язування. Знайдемо еластичність попиту:

$$Ep(Q) = \frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp} = \frac{p}{Q}(-3) = -\frac{3p}{Q} = -\frac{3p}{25 - 3p}.$$

При $p = 8$ маємо $E_8(Q) = -24.$ Це означає, що попит є еластичним. При ціні 8 грн. підвищення її на 1% призведе до зниження попиту на 24%.

Задача 8. Заданий граничний дохід підприємства $D'(x) = 100 - 4x,$ де x – кількість виробленої продукції. Знайти функцію сумарного доходу фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий дохід.

Розв'язування. Функцію сумарного доходу можна знайти так:

$$D(x) = \int (100 - 4x)dx = 100x - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + C = 100x - 2x^2 + C.$$

Якщо врахувати, що $D(0) = 0$, то $D(0) = C$. Звідси $C = 0.$

Отже, сумарний дохід підприємства $D(x) = 100x - 2x^2$.

Задача 9. Маржинальний дохід фірми задається функцією $D'(x) = 15 - 0{,}02x$.

Знайти функцію доходу і визначити відношення між вартістю одиниці продукції та проданою її кількістю.

Розв'язування. Інтегруючи функцію маржинального доходу, знайдемо функцію доходу фірми:

$$D(x) = \int D'(x)dx = \int (15 - 0{,}02x)dx = 15\int dx - 0{,}02\int xdx =$$

$$= 15x - 0{,}02\frac{x^2}{2} + C = 15x - 0{,}01x^2 + C.$$

З умови, що непродаж жодної одиниці продукції дає нульовий дохід, маємо: $0 = 15 \cdot 0 - 0{,}01 \cdot 0^2 + C,\ C = 0.$

Отже, функція доходу має вигляд: $D(x) = 15x - 0{,}01x^2$.

Оскільки дохід дорівнює добутку вартості кожної одиниці продукції p, проданої фірмою на кількість x одиниць продукції, то $D(x) = p \cdot x = 15x - 0{,}01x^2$.

Звідси $p = 15 - 0{,}01x$.

Вказівки та зразки відповідей до завдань КПІЗ

Теоретичне питання. Лінійна модель торгівлі.

Одним із прикладів економічних процесів, які приводять до поняття власного числа і власного вектора матриці, є процес взаємних закупок товарів. Ми будемо розглядати лінійну модель обміну або, як її називають, модель міжнародної торгівлі.

Нехай є n держав, $S_1, S_2, ..., S_n$, національний дохід яких дорівнює відповідно $x_1, x_2, ..., x_n$. Частку національного доходу, яку держава S_j витрачає на покупку товарів у держави S_i, позначимо коефіцієнтами a_{ij}. Будемо вважати, що весь національний дохід витрачається на закупку товарів або всередині держави, або на імпорт із інших держав, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

Розглянемо матрицю коефіцієнтів a_{ij}:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця A з властивістю, що сума елементів її довільного стовпчика дорівнює 1, називається структурною матрицею торгівлі.

Для будь-якої держави S_i $(i=1,2,...,n)$ загальна виручка від зовнішньої і внутрішньої торгівлі становить

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n.$$

Для збалансованості торгівлі необхідна бездефіцитність торгівлі кожної держави, тобто виручка від торгівлі кожної держави не має бути меншою від її національного доходу, тобто $p_i \geq x_i$ $(i=1,2,...,n)$ або $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq x_i$ $(i=1,2,...,n)$. В цій умові не може бути знака нерівності. Так, додавши ці нерівності, коли i змінюється від 1 до n, і згрупувавши, одержимо

$$x_1(a_{11}+a_{21}+...+a_{n1}) + x_2(a_{12}+a_{22}+...+a_{n2}) + ... +$$
$$+ x_n(a_{1n}+a_{2n}+...+a_{nn}) \geq x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Оскільки в дужках є суми елементів матриці A по стовпчиках, які дорівнюють 1, ми отримали суперечливу нерівність. Отже, можливий тільки знак рівності.

Введемо вектор національних доходів $\vec{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$ держав, одержимо матричне рівняння $AX = X$ або $(A-E)X = 0$, де X – матриця-стовпчик із координат вектора $\vec{\boldsymbol{x}}$.

Значить задача звелася до знаходження власного вектора матриці A, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

Задача 1. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Знайти співвідношення між національними доходами країн, при якому буде торгівля збалансована.

Розв’язування. Знаходимо власний вектор $\vec{x}$, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$, розв’язавши рівняння $(A - E)X = 0$ або систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо національні доходи відповідно x_1, x_2, x_3. Тоді будемо шукати власний вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, який відповідає власному значенню λ = 1, розв’язуючи рівняння $(A - E)X = 0$.

Оскільки ранг даної системи дорівнює 2, то одна із змінних, наприклад, $\mathbf{x_3 = C}$ є вільною невідомою. Решту невідомих виразимо через неї. Розв’язуючи дану систему, знаходимо, що $x_1 = \frac{2}{5}C$, $x_2 = \frac{9}{10}C$, $x_3 = C$, тобто $\vec{x} = (\frac{2}{5}C, \frac{9}{10}C, C)$.

Одержаний результат означає, що збалансованість торгівлі трьох країн досягається при векторі національного доходу $\vec{x} = (\frac{2}{5}C, \frac{9}{10}C, C)$, тобто при співвідношенні доходів $\frac{2}{5} : \frac{9}{10} : 1$ або $4 : 9 : 10$.

Задача 2. Обчислити визначники двома способами: а) за допомогою елементарних перетворень; б) розклавши за елементами рядка (стовпця).

I спосіб:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} + \\ \times(-2) \quad \times(-5) \\ + \\ + \end{array}$$

Другий рядок залишаємо без змін. Додамо до елементів першого рядка відповідні елементи другого. Додамо до елементів третього рядка відповідні елементи другого, помножені на (–2). Додамо до елементів четвертого рядка відповідні елементи другого, помножені на (–5). Одержаний визначник, скориставшись теоремою розкладу, розкладемо визначник за елементами першого стовпця.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -3 & -7 & -4 \\ -7 & -14 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -(4\cdot(-7)\cdot(-7) + 3\cdot(-4)\cdot(-7) + (-3)\cdot(-14)\cdot 3 - (-7)\cdot(-7)\cdot 3 -$$

$$- 4\cdot(-14)\cdot(-4) - (-3)\cdot 3\cdot(-7)) =$$

$$= -(196 + 84 + 126 - 147 - 224 - 63) = -(406 - 434) = 28.$$

II спосіб:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-3 + 0 - 2 - 4 - 0 + 9) - 3\cdot(-3 + 0 + 4 + 10 - 0 - 18) -$$

$$-1\cdot(-1 - 5 - 12 + 15 - 2 - 2) = (-1)\cdot 0 - 3\cdot(-7) - 1\cdot(-7) = 28.$$

Задача 3. Розв'язати системи рівнянь трьома методами: а) за правилом Крамера; б) методом Гаусса; в) матричним способом.

Розв'язати за правилом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}.$$

Розв'язування. Задана неоднорідна система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими. Основний визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 + 2 + 3 + 4 + 1 = 9 \neq 0.$$

Тому, згідно з правилом Крамера, задана система має єдиний розв’язок, який знайдемо за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Спочатку обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9 - 1 + 6 + 9 - 2 - 3 = 18,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 - 3 - 1 - 6 - 3 = -18,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 6 - 2 + 9 - 12 - 1 = 9.$$

Тепер знаходимо

$$x_1 = \frac{18}{9} = 2;\quad x_2 = \frac{-18}{9} = -2;\quad x_3 = \frac{9}{9} = 1.$$

Отже, розв’язком заданої системи буде (2; –2; 1).

Розв’язати матричним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}.$$

Розв’язування. Основною матрицею заданої системи буде матриця

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 8 - 27 - 12 - 3 + 24 = -6 \neq 0.$$

Для запису оберненої матриці A^{-1} знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{21} = 5; \qquad A_{22} = -4;$$

$$A_{23} = 1; \qquad A_{31} = -13; \qquad A_{32} = 8; \qquad A_{33} = 1.$$

Матриця, складена з алгебраїчних доповнень, має вигляд

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 14 & -10 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -13 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приєднана до матриці A буде

$$A^* = \begin{bmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок вихідної системи знаходимо за формулою $X = A^{-1}B$, тобто

$$X = -\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} 14\cdot 9 + 5\cdot 14 + (-13)\cdot 16 \\ (-10)\cdot 9 + (-4)\cdot 14 + 8\cdot 16 \\ (-2)\cdot 9 + 1\cdot 14 + 1\cdot 16 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язком системи буде: $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = -2.$

Задача 4. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	7	1	3	2	2
S_2	7	2	1	2	3
S_3	7	2	2	1	2

Визначити кількість продукції P_1, P_2, P_3 і P_4, яку можна виготовити, якщо сировину буде повністю вичерпано. Вказати базовий розв'язок.

Розв'язування. Якщо вважати, що x_1, x_2, x_3, x_4 – це кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, то дану задачу можна записати у вигляді системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases},$$

що представляє собою математичну модель даної економічної задачі.

Розв'яжемо її методом Жордана–Гаусса, використовуючи таблиці.

Табл. 1. У першому рядку за ключовий елемент вибираємо 1. Цей рядок називається ключовим рядком. Переписуємо його без змін першим рядком другої таблиці. До відповідних елементів другого і третього рядків додаємо елементи першого, помножені на "–2". Результати записуємо другим і третім рядком таблиці 2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	$в_i$
1	**1**	3	2	2	7
	2	1	2	3	7
	2	2	1	2	7
2	1	3	2	2	7
	0	**-5**	-2	-7	-7
	0	-4	-3	-2	-7
3	1	0	4/5	7/5	14/5
	0	1	2/5	1/5	7/5
	0	0	**-7/5**	-6/5	-7/5
4	**1**	0	0	5/7	2
	0	**1**	0	-1/7	1
	0	0	**1**	6/7	1

Табл. 2. Як ключовий елемент вибираємо “–5”. Результат ділення другого рядка на ключовий елемент записуємо другим рядком третьої таблиці. Помноживши другий рядок таблиці 3 на “–3”, а потім на ”4”, додаючи отримані рядки відповідно до першого і третього рядків другої таблиці, отримуємо перший і третій рядки третьої таблиці, в яких відбувся процес виключення невідомої x_2.

Табл. 3. В третьому рядку ключовий елемент (–7/5) є коефіцієнтом при невідомій x_3. Тому ділимо третій рядок третьої таблиці на ключовий елемент (–7/5) і записуємо отриманий рядок третім рядком четвертої таблиці. Нам залишається виключити невідому x_3 з перших двох рядків третьої таблиці. Для цього третій рядок множимо спочатку на (–4/5) і додаємо до першого рядка третьої таблиці, а потім множимо на (–2/5) і додаємо до другого рядка третьої таблиці. Результати дій записуємо першим і другим рядком четвертої таблиці. Таким чином, ми отримали результуючу четверту таблицю, в якій кожний рядок має лише дві із чотирьох невідомих. Ця таблиця є розширеною матрицею системи рівнянь: $\begin{cases} x_1 + 5/7x_4 = 2 \\ x_2 - 1/7x_4 = 1, \\ x_3 + 6/7x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 5/7x_4 \\ x_2 = 1 + 1/7x_4 \\ x_3 = 1 - 6/7x_4. \end{cases}$

В останній системі рівнянь x_1, x_2, x_3 називаються базисними змінними, оскільки матриця, складена з коефіцієнтів при них, є одиничною. Невідома x_4 називається вільною, тому що може набувати будь-яких значень. Але в нашій задачі невідомі x_i (i=1, 2, 3, 4) виражають кількість реалізованої продукції, тому вони мають бути невід’ємними, тобто $x_i \geq 0$. А значить

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 5/7x_4 \geq 0 \\ x_2 = 1 + 1/7x_4 \geq 0, \\ x_3 = 1 - 6/7x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 \leq 14/5 \\ x_4 \geq 0, \\ x_4 \leq 7/6 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x_4 \leq \min\{14/5; 7/6\} = 7/6.$$

Будь-якому значенню $x_4 \in [0; 7/6]$ відповідає невід'ємний розв’язок, який задовольняє умові задачі. Отже, для $x_4 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ – базовий розв’язок.

Задача 5. Знайти рівняння висоти AD трикутника ABC, якщо відомо, що $A(2; 6), B(-3; 1), C(6; 0)$.

Розв’язування. Запишемо рівняння сторони BC як рівняння прямої, що проходить через дві точки B і C, за формулою:

$$\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B},$$

тобто $\frac{y-1}{0-1}=\frac{x+3}{6+3}$, або $x+2y-6=0$. Тут $k_{BC}=-\frac{1}{9}$. З умови перпендикулярності двох прямих AD і BC $k_{AD}=-\frac{1}{k_{BC}}$, маємо $k_{AD}=9$. Отже, рівняння шуканої висоти буде: $y-6=9(x-2)$, або $9x-y-12=0$.

Задача 6. Написати канонічне рівняння гіперболи, що проходить через точки $A(2;1)$, $B(-4;\sqrt{7})$.

Розв'язування. Канонічне рівняння гіперболи знайдемо, використавши формулу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Оскільки точки $A(2;1)$ і $B(-4;\sqrt{7})$ лежать на гіперболі, то їх координати задовольняють це рівняння. Звідси:

$$\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1\\ \frac{16}{a^2}-\frac{7}{b^2}=1\end{cases},\qquad \begin{cases}4b^2-a^2=a^2b^2\\ 16b^2-7a^2=a^2b^2\end{cases}.$$

Після алгебраїчного віднімання одержимо $a^2=2b^2$. Із першого рівняння системи маємо:

$$\frac{2}{b^2}-\frac{1}{b^2}=1,\quad b^2=1,$$

Отже, $a^2=2$. Тоді шукане рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{1}=1.$$

Задача 7. Завод виробляє вироби A і продає їх по 2 гривні за кожний. Керівництво заводу встановило, що сума $y_в$ загальних щотижневих витрат (у гривнях) на виготовлення виробів A кількістю x (тисяч одиниць) має таку закономірність:

$$y_в=1000+1300x+100x^2.$$

Визначити щотижневу кількість виготовлення та продажу виробів A, що забезпечує рівновагу витрат і доходу.

Розв'язування. Дохід від продажу x тисяч виробів A вартістю 2 гривні за кожний буде: $y_\partial = 2000x$. Для рівноваги доходу та витрат треба, щоб виконувалась рівність: $y_в = y_\partial$, тобто

$$1000 + 1300x + 100x^2 = 2000x,$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 5.$$

Ця задача має дві точки рівноваги. Завод може виробляти 2000 ($x = 2$) виробів A з доходом і витратами 4000 гривень або 5000 ($x = 5$) виробів A з доходом і витратами 10 000 гривень.

Розглянемо на цьому прикладі можливості заводу. Позначимо щотижневий прибуток через P. Тоді:

$$P = y_\partial - y_в = 2000x - (1000 + 1300x + 100x^2) = -1000 + 700x -$$
$$-100x^2 = -100(x-2)(x-5).$$

Звідси випливає, що при $x = 2$ або $x = 5$ маємо $P = 0$, тобто ці значення x будуть точками рівноваги.

Якщо $2 < x < 5$, тоді при $x - 2 > 0$, $x - 5 < 0$ маємо $P > 0$, тобто завод одержить прибуток. При інших значеннях x, тобто коли $x \notin [2; 5]$, будемо мати $P < 0$ – завод зазнає збитків.

Задача 8. Знайти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x - 2}$.

Розв'язування. При $x \to 2$ чисельник і знаменник дробу мають границю, що дорівнює нулю. Перенесемо ірраціональність у знаменник, помноживши чисельник і знаменник на спряжений вираз до чисельника, тобто на $\sqrt{x^2+5} + 3$, одержимо:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x^2+5} - 3)(\sqrt{x^2+5} + 3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5 - 9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)}{(\sqrt{x^2+5} + 3)} = \frac{2+2}{3+3} = \frac{2}{3}.$$

Задача 9. У місті проживає 249 тис. мешканців. Щорічно народонаселення збільшується на 1,7%. Яка кількість жителів буде в цьому місті через 12 років?

Розв'язування. Використаємо формулу зростання за складними процентами:

$$K_{12} = 249\left(1 + \frac{1{,}7}{100}\right)^{12} \approx 305\,.$$

Отже, через 12 років у місті буде 305 тис. жителів.

Задача 10. Кожного місяця студент вносить 100 гривень на свій рахунок накопичення з одержанням прибутку 5% щомісячно. Обчислити величину його накопичення після здійснення 12 внеску.

Розв'язування. Оскільки табличне значення $S_{n/i}$ рівне $S_{n/i} = S_{12/0{,}05} = 15{,}917127$, то $S = 100 \cdot 15{,}917127 \approx 1591{,}71$ грн.

Задача 11. В день 55-річчя працівниця фірми “Остер” відкрила рахунок ренти в страховій компанії “УНІВЕРСАЛЬНА” за умови щорічного отримання у свій день народження 1000 грн. протягом 15 років. Яку суму внесено на рахунок ренти, якщо кошти прийнято з 5% щорічним зростанням?

Розв'язування. Використаємо формулу $A = P \cdot a_{n/i}$. В нашій задачі регулярні виплати $P = 1000$ грн. Коефіцієнт $a_{n/i}$ взято із таблиці Д6 і дорівнює $a_{15/0{,}05} = 10{,}379658$. Значить $A = 1000 \cdot 10{,}379658 \approx 10379{,}66$ грн.

Отже, працівниця фірми має покласти на рахунок ренти 10379,66 грн., щоб одержувати по 1000 грн. щорічно протягом 15 років.

Задача 12. На час навчання студент університету отримав з фонду навчання в борг 8000 грн. Цей кредит йому надано із 8% щорічного зростання і умовою щорічного повернення боргу в кінці кожного року після закінчення університету протягом 15 років.

Скільки коштів має повертати студент кожного року після закінчення університету?

Розв'язування. Шукана величина P щорічної сплати боргу студентом знаходимо за формулою $P = \dfrac{A}{a_{n/i}}$.

В даному випадку борг $A = 8000$ грн., час його повернення $n = 15$, відсоток зростання $R = 8$, $i = \dfrac{R}{100} = 0{,}08$. Із таблиці Д6 знаходимо $a_{15/0{,}08} = 8{,}559479$. Тому

$$P = \frac{8000}{a_{15/0{,}08}} = \frac{8000}{8{,}559479} \approx 934{,}64 \text{ грн.}$$

Отже, для погашення боргу студент має у кінці кожного року сплачувати фонду за навчання 934,64 грн.

Задача 13. Знайти похідні функцій:

а) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}$; б) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

Розв'язування.

а) Використаємо правило диференціювання для суми двох диференційованих функцій, а потім знайдемо похідні складних функцій:

$$y' = (\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1})' = (\sqrt{x^2+1})' + (\sqrt[3]{x^3+1})' = \left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)' +$$

$$+\left((x^3+1)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)' + \frac{1}{3}(x^3+1)^{-\frac{2}{3}}(x^3+1)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} \cdot 3x^2 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}.$$

б) Задану функцію прологарифмуємо, а тоді знайдемо похідну складної функції:

$$y = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(1-\sin x) - \frac{1}{2}\ln(1+\sin x);$$

$$y' = \left(\frac{1}{2}\ln(1-\sin x) - \frac{1}{2}\ln(1+\sin x)\right)' = \left(\frac{1}{2}\ln(1-\sin x)\right)' -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\ln(1+\sin x)\right)' = \frac{1}{2}\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x} - \frac{1}{2}\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x} = \frac{1}{2}\frac{-\cos x}{1-\sin x} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{-2\cos x}{2(1-\sin^2 x)} = -\frac{1}{\cos x}.$$

Задача 14. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$.

Розв'язування. Безпосередньою за допомогою підстановки можна переконатися, що маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}=-\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{2x(1-x)}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\sqrt{2x-x^2}=-1.$$

Задача 15. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$.

Розв'язування. У даному випадку використаємо правило Лопіталя два рази, оскільки дане відношення і відношення похідних приводить до невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$. Отже,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Задача 16. Знайти еластичність попиту $Q=15-2p$ щодо ціни $p=5$.

Розв'язування. Знайдемо еластичність попиту:

$$E_c=-\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}=-\frac{p}{Q}(-2)=\frac{2p}{Q}=\frac{2p}{15-2p}.$$

При $p=5$ маємо $E_c=2$. Це означає, що попит є еластичним. При ціні 5 грн. підвищення її на 1% приведе до зниження попиту на 2%.

Задача 17. Підприємство за місяць виготовляє *x* одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{30}x^2+8x+300$, $p=40-\frac{1}{10}x$ – залежність між питомою ціною і кількістю одиниць продукції *x*, яку можна продати за цією ціною. Розрахувати, за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, прибуток при цих умовах.

Розв'язування. Прибуток P визначається як різниця між доходами і сумарними витратами виробництва $P = D - V$.

В нас дохід – $D = p \cdot x = (40 - \frac{1}{10}x) \cdot x = 40x - \frac{1}{10}x^2$,

сумарні витрати – $V = \frac{1}{30}x^2 + 8x + 300$, прибуток –

$P = 40x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{30}x^2 - 8x - 300 = -\frac{2}{15}x^2 + 32x - 300.$

Знайдемо маржинальний прибуток – $P' = -4/15 \cdot x + 32$.

Максимальний прибуток буде тоді, коли $P' = 0$, оскільки $P'' = -4/15 < 0$.

При цьому $-4/15 \cdot x + 32 = 0$; $-4x + 480 = 0$; $x = 120$.

Отже, щоб прибуток був максимальним, треба випускати 120 од. продукції.

Маржинальні витрати $V'(120) = \frac{1}{15} \cdot 120 + 8 = 16$,

сумарні витрати

$V(120) = \frac{1}{30} \cdot 120^2 + 8 \cdot 120 + 300 = 480 + 960 + 300 = 1740$.

Максимальний прибуток

$P(120) = -\frac{2}{15} \cdot 120^2 + 32 \cdot 120 - 300 = 1620$.

Задача 18. Відомій функції попиту $Q = Q(p) = 7 - p$ і пропозиції $S = S(p) = p + 1$, де Q і S–кількість товару; p – ціна товару.

Знайти:

а) рівноважну ціну;

б) еластичність попиту і пропозиції для рівноважної ціни;

в) зміну доходу при підвищенні ціни на 5% від рівноважної.

Розв'язування.

А. Рівноважна ціна – ціна, при якій попит і пропозиція врівноважуються. Тому рівноважна ціна визначається з рівняння $Q(p) = S(p)$; $7 - p = p + 1$; $p = 3$ грн.

Б. Знаходимо еластичність попиту і пропозиції за формулами:

$$E_p(Q) = \frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}, \quad E_p(S) = \frac{p}{S}\frac{dS}{dp}.$$

В даному випадку

$$E_p(Q)=\frac{p}{7-p}\cdot(-1)=-\frac{p}{7-p};\ E_p(S)=\frac{p}{S}\cdot 1=\frac{p}{p+1}.$$

Для рівноважної ціни $p=3$ маємо $E_{p=3}(Q)=-0{,}75;\ E_{p=3}(S)=0{,}75.$

Знайдені значення еластичності за абсолютною величиною менші за 1, тоді і попит, і пропозиція даного товару при рівноважній ціні нееластичні відносно ціни, тобто зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту і пропозиції. Так, при підвищенні ціни на 1% попит зменшиться на 0,75%, а пропозиція підвищиться на 0,75%.

В. При підвищенні ціни p на 5% від рівноважної попит зменшиться на $5\cdot 0{,}75=3{,}75\%$, а дохід зросте на 3,75%.

Задача 19. Дослідити функцію $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язування. Задана функція є дробово-раціональною, тому визначена на всій числовій осі, крім точки $x=-1,$ в якій знаменник перетворюється в нуль, тобто

$$\mathrm{D}(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)\ .$$

Функція є неперервною у своїй області визначення, крім точки $x=-1,$ де вона має розрив другого роду.

Оскільки $f(-x)=\dfrac{-x^3}{2(-x+1)^2}$, то $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq -f(x),$

тобто функція не характеризується властивостями парності чи непарності: не є ні парною, ні непарною. Графік не буде симетричним ні відносно осей координат, ні відносно початку координат.

Задана функція не є періодичною, оскільки

$$f(x+T)=\frac{(x+T)^3}{2(x+T+1)^2}\neq f(x)\,.$$

Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат. При $x=0$ одержимо $y=0,$ тобто $O(0;0).$ У цій точці графік перетинає дві координатні осі.

Знайдемо асимптоти графіка функції. Однобічні границі функції в точці розриву будуть

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty\ ,\ \lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty\ .$$

Отже, пряма $x=-1$ є вертикальна асимптота. Горизонтальної асимптоти графік не має, оскільки

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \pm\infty .$$

Похилі асимптоти мають рівняння $y = kx + b$. Тут $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - kx \right]$.

У нашому випадку:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x^2+4x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{4x+4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} = -1.$$

Тобто $y = \frac{1}{2}x - 1$ є асимптотою кривої.

Знайдемо інтервали зростання, спадання і екстремум функції. Похідна функції буде

$$y' = \frac{3x^2 \cdot 2(x+1)^2 - 4(x+1)\cdot x^3}{4(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} .$$

Похідна не існує в точці $x = -1$ і дорівнює нулю, коли $x^2(x+3) = 0$, тобто при $x = -3$ і $x = 0$.

Отже, критичними точками першого роду будуть лише точки $x = -3$ і $x = 0$, бо $x = -1$ не належить до області визначення функції.

Складаємо таблицю з урахуванням точки розриву і критичних точок.

x	$(-\infty;-3)$	$x=-3$	$(-3;-1)$	$x=-1$	$(-1;0)$	$x=0$	$(0;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	не існує	+	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	не існує	↗	екстремуму немає	↗

Отже, на інтервалах $(-\infty; -3)$, $(-1; 0)$ і $(0; +\infty)$ функція зростає, а в інтервалі $(-3; -1)$ – спадає.

Екстремальним значенням функції буде $y_{\max} = f(-3) = -\frac{27}{8}$.

Знайдемо інтервали опуклості та угнутості графіка, точку перегину.

Друга похідна дорівнює

$$y'' = \left(\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} \right)' = \left(\frac{x^3+3x^2}{2(x+1)^3} \right)' =$$

$$= \frac{(3x^2+6x)\cdot 2(x+1)^3 - 6(x+1)^2(x^3+3x^2)}{4(x+1)^6} =$$

$$= \frac{2(x+1)^2[(x+2)(x+1)-(x^2+3x)]}{4(x+1)^6} = \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

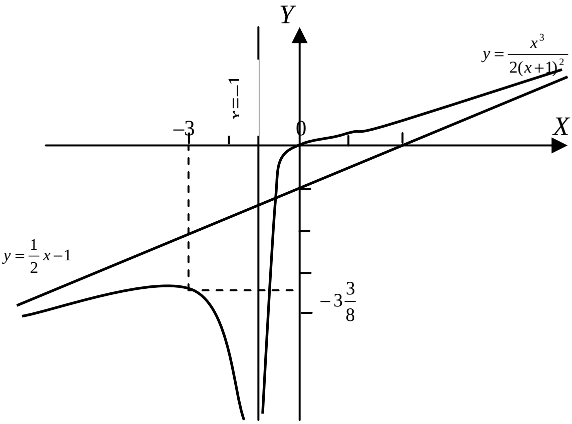
Усі можливі точки перегину знаходимо з рівняння $\frac{3x}{(x+1)^4} = 0$, тобто $x = 0$ є критичною точкою другого роду.

Складаємо таблицю з урахуванням точки розриву і $x = 0$.

x	$(-\infty;-1)$	$x=-1$	$(-1;0)$	$x=0$	$(0;+\infty)$
$f''(x)$	–	не існує	–	0	+
$f(x)$	$\cap$	не існує	$\cap$	точка перегину	$\cup$

Отже, на інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(-1;0)$ графік функції опуклий, а на інтервалі $(0;+\infty)$ – угнутий. Значення функції в точці перегину буде $y_{пер} = f(0) = 0$.

За одержаними результатами будуємо графік заданої функції.

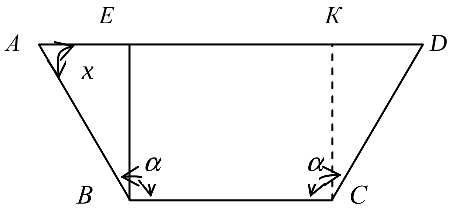


Задача 20. Знайти, під яким кутом α потрібно збити три однакових дошки, щоб одержати водонапійний жолоб найбільшої місткості.

Розв'язування. Найбільшу місткість буде мати жолоб тоді, коли поперечний переріз буде найбільшим. У цій задачі поперечний переріз має форму рівносторонньої трапеції.

Позначимо через $x = \angle BAD$ і врахуємо, що ширина кожної дошки дорівнює $a(AB = BC = CD = a)$. Тоді висота трапеції $BE = \alpha \sin x$. Окрім цього, $AE = a \cdot \cos x$, тому

$$AD = AE + EK + KD = a\cos x + a + a\cos x = a + 2a\cos x.$$



Площа трапеції дорівнює

$$S(x) = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE = \frac{a + a + 2a\cos x}{2} \cdot a\sin x = a^2(1 + \cos x)\sin x \quad (0 \le x \le \pi/2).$$

Похідна функції

$$S'(x) = a^2(-\sin^2 x + \cos x(1 + \cos x)) = a^2(-\sin^2 x +$$
$$+\cos x + \cos^2 x) = a^2(1 + \cos x)(2\cos x - 1).$$

Оскільки похідна на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ перетворюється в нуль тільки при $x = \frac{\pi}{3}$, а $S(0) = 0$, $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2$, $S(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, то S набуває найбільшого значення при $x = \frac{\pi}{3}$, тобто при $\alpha = 120^\circ$.

Крім цього,

$$S'' = a^2(-2\sin x\cos x - \sin x - 2\cos x\sin x) = -a^2\sin x(4\cos x + 1).$$

При $x = \frac{\pi}{3}$ маємо $S'' = -\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, тобто $S'' < 0$. Це означає, що при $x = \frac{\pi}{3}$ функція $S(x)$ досягає максимуму. Отже, якщо три дошки збити під кутом $\alpha = 120^\circ$, то водонапійний жолоб матиме найбільшу місткість.

Задача 21. Нехай виробнича функція визначається функцією Кобба–Дугласа. Щоб збільшити випуск продукції на 5%, треба збільшити фонди на 10% або чисельність робітників на 15%. В 2006 році один робітник за місяць виготовляв продукції на 2000 грн., а всього робітників було 1000. Основні фонди оцінювались в 4 млн. грн. Записати виробничу функцію, величину середньої фондовіддачі і середньої продуктивності праці, еластичність випуску по праці і по фондах.

Розв'язування. Еластичність випуску по праці $\beta = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, а по фондах $\alpha = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Отже, функція Кобба–Дугласа має вигляд: $y = AK^{1/2}L^{1/3}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$. Підставляючи інші величини, одержимо:

$2000 \cdot 1000 = A \cdot (4 \cdot 10^6)^{1/2}(1000)^{1/3}$, тобто $2000 \cdot 1000 = A \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10$;

$$A = \frac{2000 \cdot 1000}{2000 \cdot 10} = 100.$$

Отже, шукана виробнича функція $y = 100 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/3}$. Середня фондовіддача дорівнює $k = \frac{y}{K} = \frac{2000 \cdot 1000}{4000000} = \frac{1}{2}$, а середня продуктивність $l = \frac{y}{L} = \frac{2000 \cdot 1000}{1000} = 2000$, $E_K(y) = \alpha = 1/2$, $E_L(y) = \beta = \frac{1}{3}$.

Задача 22. Величина товарообміну x (тисяч гривень) і витрати на обіг y (гривень) подані у таблиці.

x	60	80	140	160	240	320
y	551	576	628,5	673	788,5	863

Знайти аналітичну залежність між y та x.

Розв'язування. Спочатку побудуємо у прямокутній системі координат задані таблицею точки.

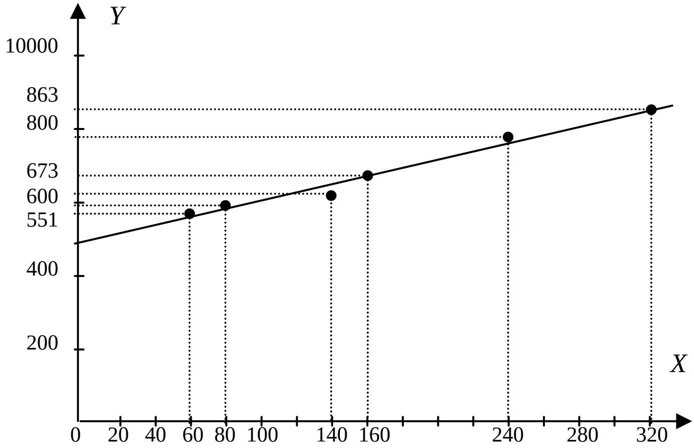


Рисунок дає змогу зробити висновок про існування лінійної залежності між y і x, тобто у вигляді $y = ax + b$. Параметри a, b знаходимо із системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Будуємо розширену таблицю:

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
	60	551	33060	3600
	80	576	46080	6400
	140	628,5	87990	19600
	160	673	107680	25600
	240	788,5	184440	57600
	320	863	276160	102400
$\sum$	1000	4080	735410	215200

За таблицею складаємо систему рівнянь при $n = 6$:

$$\begin{cases} 215200a + 1000b = 735410 \\ 1000a + 6b = 4080 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 215,2a + b = 735,1 \\ 166,67a + b = 680 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему, маємо $a \approx 1{,}13$, $b \approx 489{,}71$. Одержали функціональну залежність вигляду $y = 1{,}13x + 489{,}71$.

Задача 23. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V = 320 - 14x - 10y + 0,2x^2 + 0,1y^2$. 1) Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

Розв'язування. Загальна функція витрат відома: $V = 320 - 14x - 10y + 0,2x^2+0,1y^2$. Щоб знайти кількість одиниць товарів x товару A і y товару B, необхідно дослідити цю функцію на екстремум.

Знайдемо частинні похідні І-го порядку $\begin{cases} V'_x = -14 + 0,4x \\ V'_y = -10 + 0,2y. \end{cases}$

Прирівнюючи їх до нуля, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} -14 + 0,4x = 0 \\ -10 + 0,2y = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 50. \end{cases}$$

Знайдемо частинні похідні II порядку: $\begin{matrix} A = V''_{xx} = 0,4, \\ B = V''_{xy} = 0\ , \\ C = V''_{yy} = 0,2. \end{matrix}$

Обчислимо $D = AC - B^2 = 0,4 \cdot 0,2 - 0 = 0,08 > 0$ і $A = 0,4 > 0$.

Отже, функція витрат при $x = 35$, $y = 50$ досягає мінімуму. Це означає, що для того, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними, необхідно виробити 35 одиниць товару A і 50 одиниць товару B.

Задача 24. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}}$.

Розв'язування. Зробимо підстановку $x = 3\sin t$, тоді

$$dx = 3\cos t dt, \quad t = \arcsin\frac{x}{3},$$

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9\sin^2 t} = \sqrt{9(1 - \sin^2 t)} = 3\cos t.$$

Тому

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \int \frac{9\sin^2 t \cdot 3\cos t dt}{3\cos t} = 9\int \sin^2 t dt = \frac{9}{2}\int (1 - \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{9}{2}\int dt - \frac{9}{2}\int \cos 2t dt = \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{9}{4} \cdot \frac{2x}{9}\sqrt{9 - x^2} + C = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + C.$$

Тут зроблено перетворення:

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\cdot\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}} = \frac{2}{9}x\sqrt{9-x^2}.$$

Задача 25. Знайти невизначений інтеграл $\int x^2\cos x dx$.

Розв'язування. Формулу інтегрування частинами використаємо двічі:

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\cos x dx}_{dv} =$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2xdx \end{array}\right| \begin{array}{l} dv = \cos x dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array}$$

$$= x^2\sin x - 2\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin x dx}_{dv} =$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array}\right| \begin{array}{l} dv = \sin x dx, \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array}$$

$$= x^2\sin x - 2(x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx) = x^2\sin x - 2(-x\cos x +$$

$$+\int\cos x dx) = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

Задача 26. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}dx .$$

Розв'язування. Дріб підінтегральної функції неправильний, оскільки степінь чисельника (три) більший від степеня знаменника (два). Тому насамперед виділимо цілу частину. Для цього чисельник x^3+x+2 поділимо на знаменник $x^2-7x+12$:

$$\begin{array}{r|l} \_\,x^3 + x + 2 & \underline{x^2-7x+12} \\ \underline{x^3 - 7x^2 + 12x} & x+7+\dfrac{38x-82}{x^2-7x+12} \\ \_\,7x^2 - 11x + 2 & \\ \underline{7x^2 - 49x + 84} & \\ 38x - 82 & \end{array}$$

Тому

$$\int \frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}dx = \int\left(x+7+\frac{38x-82}{x^2-7x+12}\right)dx = \int xdx + \int 7dx +$$

$$+\int \frac{38x-82}{x^2-7x+12}dx = \frac{x^2}{2}+7x+\int \frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}dx.$$

Підінтегральну функцію зобразимо у вигляді суми простих дробів:

$$\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)} = \frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{x-4}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $(x-3)(x-4)$:

$$38x-82 = A_1(x-4)+A_2(x-3).$$

Дійсними коренями знаменника є числа 3 і 4.
При $x=3$ маємо $32=-A_1$, тобто $A_1=-32$.
При $x=4$ маємо $70=A_2$, або $A_2=70$.

Дріб $\dfrac{38x-82}{(x-3)(x-4)} = -\dfrac{32}{x-3}+\dfrac{70}{x-4}$.

Врахувавши знайдене, матимемо:

$$\int \frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}dx = \frac{x^2}{2}+7x+\int\left(-\frac{32}{x-3}+\frac{70}{x-4}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+7x-32\int\frac{dx}{x-3}+70\int\frac{dx}{x-4} = \frac{x^2}{2}+7x-32\ln|x-3|+70\ln|x-4|+C.$$

Задача 27. Знайти невизначений інтеграл $\int \cos^3 x\sin^2 xdx.$

Розв'язування. Запишемо, що $\cos^3 x=\cos^2 x\cos x$, і зробимо підстановку $\sin x=t$, а звідси $\cos xdx=dt$.

$$\int\cos^3 x\sin^2 xdx = \int\cos^2 \cos x\cdot\sin^2 xdx = \int(1-\sin^2 x)\sin^2 x\cos xdx =$$

$$= \int(1-t^2)t^2dt = \int t^2dt-\int t^4dt = \frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C = \frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

Задача 28. Знайти невизначений інтеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}.$

Розв'язування. Показники коренів підінтегральної функції дорівнюють 2 і 3. Їх найменше спільне кратне – 6. Тому зробимо підстановку: $t=\sqrt[6]{x}$, або $x=t^6$, $dx=6t^5dt$.

Отже,

$$\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=\int\frac{6t^5dt}{(1+t^2)t^3}=6\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int\frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}dt=6\int(1-\frac{1}{1+t^2})dt=$$

$$=6\int dt-6\int\frac{dt}{1+t^2}=6t-6arctgt+C=6(\sqrt[6]{x}-arctg\sqrt[6]{x})+C.$$

Задача 29. Маржинальний дохід фірми виражено функцією $D'(x)=12-0{,}04x.$

Знайти функцію доходу і визначити відношення між вартістю одиниці продукції та проданою її кількістю.

Розв'язування. Інтегруючи функцію маржинального доходу, знайдемо функцію доходу фірми:

$$D(x)=\int D'(x)dx=\int(12-0{,}04x)dx=12\int dx-0{,}04\int xdx=$$

$$=12x-0{,}04\frac{x^2}{2}+C=12x-0{,}02x^2+C.$$

З умови, що непродаж жодної одиниці продукції дає нульовий дохід, маємо: $0=12\cdot 0-0{,}02\cdot 0^2+C,\ C=0.$

Отже, функція доходу має вигляд: $D(x)=12x-0{,}02x^2.$

Оскільки дохід дорівнює добутку вартості кожної одиниці продукції (P), проданої фірмою на кількість (x) одиниць продукції, то $D(x)=P\cdot x=12x-0{,}02x^2.$

Звідси $P=12-0{,}02x$.

Задача 30. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin xdx.$

Розв'язування. Зробимо заміну змінної, підставимо $t=\cos x.$ Тоді $dt=-\sin xdx,$ а $\sin xdx=-dt.$ Знайдемо нові межі інтегрування:

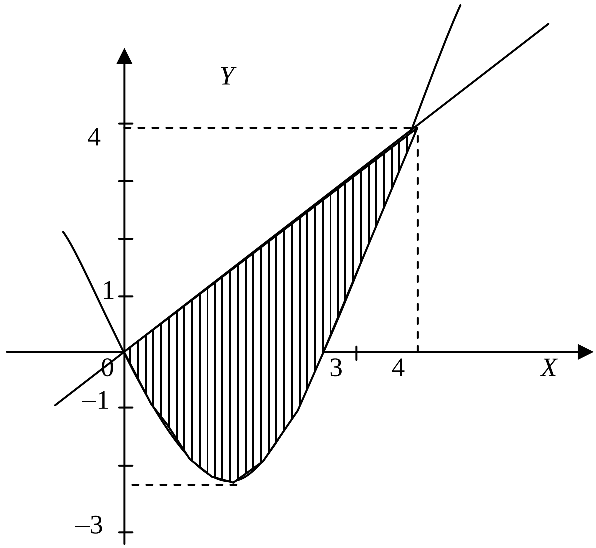
якщо $x=0$, то $t=\cos 0=1;$

якщо $x=\frac{\pi}{2}$, то $t=\cos\frac{\pi}{2}=0$.

Таким чином, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin xdx=-\int\limits_1^0 t^3dt=-\frac{1}{4}t^4\Big|_1^0=-\frac{1}{4}(0^4-1^4)=\frac{1}{4}.$

Задача 31. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 3x$ і $y = x$.

Розв'язування. Спочатку зобразимо фігуру, площу якої треба знайти.



Знайдемо абсциси точок перетину параболи і прямої. Для цього розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = x \end{cases}$,

$x^2 - 3x = x, \quad x^2 - 4x = 0, \quad x_1 = 0, \; x_2 = 4.$

Оскільки $x > x^2 - 3x$ на відрізку $[0; 4]$, то за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

знайдемо шукану площу:

$$S = \int_0^4 [x - (x^2 - 3x)]dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \int_0^4 4xdx - \int_0^4 x^2 dx =$$

$$= 4\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = 2(2^2 - 0) - \frac{1}{3}(2^3 - 0) = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} (кв. од.).$$

Задача 32. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами:

$$V'(t) = 5 + 2\sqrt[3]{t^2}, \; D'(t) = 17 - \sqrt[3]{t^2}.$$

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

Розв'язування. Оптимальний час t для прибутку підприємства одержимо з умови $D'(t) = V'(t)$:

$$5 + 2\sqrt[3]{t^2} = 17 - \sqrt[3]{t^2}, \; 3\sqrt[3]{t^2} = 12, \; \sqrt[3]{t^2} = 4, \; t = 8.$$

Отже, підприємство було прибутковим 8 років. За цей час одержано прибутку:

$$P = \int_0^8 [D'(t) - V'(t)]dt = \int_0^8 \left(17 - \sqrt[3]{t^2} - 5 - 2\sqrt[3]{t^2}\right)dt =$$

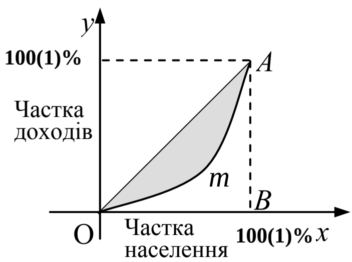
$$= \int_0^8 \left(12 - 3t^{2/3}\right)dt = \left(12t - 3 \cdot \frac{t^{5/3}}{5/3}\right)\Bigg|_0^8 = 96 - \frac{9}{5} \cdot 32 = 38{,}9\,(\text{млн. грн.}).$$

Задача 33. Нехай $y = 2 - \sqrt{4 - x^2}$, крива Лоренца, визначена за дослідженнями розподілу доходів в якійсь країні, де ***x***-відсоток населення, y – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

Розв'язування. З рисунка видно, що $k = \dfrac{S_{OAm}}{S_{\Delta OAB}}$,

$$S_{OAm} = \int_0^1 (x - 2 + \sqrt{4 - x^2})dx = \int_0^1 x dx - 2\int_0^1 dx + \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\, dx.$$

Для знаходження $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\, dx$ введемо заміну $x = 2\sin t$, тоді нижня межа $t = 0$, а верхня $t = \dfrac{\pi}{6}$.



Обчислюємо

$$S_{oAm}=\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1-\sin^2 t}\,2\cos t dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} - 2 + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}41.$$

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}$. Тому $k=\frac{0{,}41}{0{,}5}=0{,}82$.

Великий коефіцієнт k показує нерівномірність розподілу доходів серед населення даної країни.

Задача 34. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння $y\sqrt{1+x^2}\cdot y' + x\cdot\sqrt{1+y^2}=0,$ а також частковий інтеграл, що задовольняє початкові умови $y=0$ при $x=\sqrt{3}$.

Розв'язування. Запишемо дане диференціальне рівняння у такому вигляді:

$$y\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{dy}{dx}+x\sqrt{1+y^2}=0.$$

Помножимо обидві частини рівняння на dx:

$$y\sqrt{1+x^2}\cdot dy + x\cdot\sqrt{1+y^2}\,dx=0.$$

Приведемо це рівняння з відокремлюваними змінними до рівняння з відокремленими змінними шляхом ділення його на $\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}$:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=0.$$

Інтегруючи обидві частини цього рівняння, одержимо:

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=C.$$

Звідси загальним інтегралом даного рівняння буде:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C.$$

Частковий інтеграл одержимо з умови $y=0$ при $x=\sqrt{3}$. Підставивши ці значення x і y в знайдений загальний інтеграл, одержимо:

$$\sqrt{1+3}+\sqrt{1+0}=C,\ C=3.$$

Частковим інтегралом буде:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=3.$$

Задача 35. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' - \frac{2x}{x^2+1} y = x\sqrt{x^2+1}$ і частковий розв'язок за початковими умовами: $y = 2$ при $x = 0$.

Розв'язування. Задане диференціальне рівняння першого порядку є лінійним. Тому розв'язок будемо шукати у вигляді $y = u(x) \cdot v(x)$. Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставивши вирази для y' і y у вихідне рівняння і, погрупувавши його члени, одержимо:

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}v\right) = x\sqrt{x^2+1}. \qquad (*)$$

Визначимо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}v = 0.$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні, одержимо:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2x}{x^2+1}dx.$$

Почленне інтегрування дає:

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{2x}{x^2+1}dx, \quad \ln|v| = \ln(x^2+1).$$

Тут взято лише частковий розв'язок диференціального рівняння, якому відповідає довільна стала, що дорівнює нулю. Тоді $v = x^2 + 1$.

Підставляючи знайдене значення функції v у рівність (*), одержимо

$$(x^2+1)\frac{du}{dx} = x\sqrt{x^2+1}.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними для знаходження функції u. Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx, \quad u = \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння буде:

$$y = (\sqrt{x^2+1} + C)(x^2+1) = \sqrt{(x^2+1)^3} + C(x^2+1).$$

Тепер знайдемо частковий розв'язок, підставивши в загальний розв'язок початкові умови $x = 0, y = 2$. Таким чином, матимемо

$$2 = 1 + C, \ C = 1.$$

Частковий розв’язок запишемо так:

$$y = \sqrt{(x^2+1)^3} + x^2 + 1.$$

Задача 36. Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'' + 3y' - 10y = 0.$$

Розв’язування. Характеристичне рівняння для заданого диференціального має вигляд

$$k^2 + 3k - 10 = 0.$$

Його корені $k_1 = -2,\ k_2 = 5$ дійсні і різні. Тому загальний розв’язок рівняння запишемо у вигляді:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_1 e^{5x}\ .$$

Задача 37. Знайти частковий розв’язок диференціального рівняння $y'' + 4y' + 4y = \cos x - 2\sin x,$ що задовольняє початкові умови:

$y = 1,\ y' = 2,$ при $x = 0.$

Розв’язування. Характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 4 = 0$ для диференціального рівняння $y'' + 4y' + 4y = 0$ має дійсні та рівні корені $k_1 = k_2 = -2,$ тому загальний розв’язок цього рівняння $y_{з.о.} = e^{-2x}(C_1 + C_2 x).$

Частковий розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y_{ч.н.} = A\cos x + B\sin x.$

Разом з першою похідною $y' = -A\sin x + B\cos x$ і другою похідною $y'' = -A\cos x - B\sin x$ підставимо їх значення у задане неоднорідне диференціальне рівняння:

$-A\cos x - B\sin x + 4(-A\sin x + B\cos x) + 4(A\cos x + B\sin x) =$

$= \cos x - 2\sin x,$

$(-A + 4B + 4A)\cos x + (-B - 4A + 4B)\sin x = \cos x - 2\sin x.$

Таким чином, маємо систему

$$\begin{cases} 3A + 4B = 1 \\ -4A + 3B = -2 \end{cases},\ \text{тобто}\quad A = \frac{33}{25},\ B = -\frac{2}{25}.$$

Отже, загальний розв’язок заданого лінійного неоднорідного рівняння такий:

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{33}{25}\cos x - \frac{2}{25}\sin x.$$

Знайдемо C_1 і C_2, використовуючи початкові умови:

$$\begin{cases} e^0(C_1 + C_2 \cdot 0) + \dfrac{33}{25}\cos 0 - \dfrac{2}{25}\sin 0 = 1 \\ -2e^0(C_1 + C_2 \cdot 0) + e^0 \cdot C_2 - \dfrac{33}{25}\sin 0 - \dfrac{2}{25}\cos 0 = 2 \end{cases}.$$

Тобто

$$\begin{cases} C_1 + \dfrac{33}{25} = 1 \\ -2C_1 + C_2 - \dfrac{2}{25} = 2 \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} C_1 = -\dfrac{8}{25} \\ -2C_1 + C_2 = \dfrac{52}{25} \end{cases}.$$

Звідси $C_1 = -\dfrac{8}{25}$, $C_2 = \dfrac{36}{25}$.

Частковий розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y = e^{-2x}\left(-\frac{8}{25} + \frac{36}{25}x\right) + \frac{33}{25}\cos x - \frac{2}{25}\sin x.$$

Задача 38. Відомо, що еластичність попиту Q визначається за формулою $\eta = \dfrac{p}{Q} \cdot \dfrac{dQ}{dp}$, де x – кількість одиниць деякого товару вартістю p за кожну одиницю. Знайти функцію попиту на цей товар, якщо еластичність попиту постійна і дорівнює –1.

Розв'язування. За умовою задачі: $\dfrac{p}{Q} \cdot \dfrac{dQ}{dp} = -1$; $\dfrac{dQ}{Q} = -\dfrac{dp}{p}$;

$\ln|Q| = -\ln|p| + \ln|C|$; $\ln|Q| = \ln\left|\dfrac{C}{p}\right|$; $Q = \dfrac{C}{p}$; $p = \dfrac{C}{Q}$.

Знайшли залежність між кількістю товару та його вартістю, тобто функцію попиту.

Задача 39. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{2}{11} + \frac{4}{21} + \frac{6}{31} + \ldots + \frac{2n}{10n+1} + \ldots .$$

Розв'язування. Загальний член ряду $u_n = \dfrac{2n}{10n+1}$. Знайдемо при $n \to \infty$ його границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{10n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)'}{(10n+1)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\neq 0.$$

Оскільки необхідна ознака збіжності числового ряду не виконується, то він розбіжний.

Задача 40. Дослідити збіжність ряду

$$1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{n!}+\ldots .$$

Розв'язування. Оскільки $u_n=\dfrac{2^{n-1}}{n!}$, то $u_{n+1}=\dfrac{2^n}{(n+1)!}$. За ознакою Даламбера:

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}:\frac{2^{n-1}}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{2^{n-1}(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n!}{(n+1)n!}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Оскільки $d=0<1,$ то заданий числовий ряд збігається.

Задача 41. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}+\frac{1}{4\cdot 4^4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 4^n}+\ldots .$$

Розв'язування. Порівняємо заданий ряд $\sum\limits_{n\to 1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 4^n}$ з рядом геометричної прогресії, знаменник якого $q=\dfrac{1}{4}$. Кожний член нашого ряду менший або дорівнює відповідному члену ряду геометричної прогресії, який збігається, тому що $|q|<1$:

$$\frac{1}{n\cdot 4^n}\le\frac{1}{4^n}\quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Отже, заданий ряд збігається.

Задача 42. Дослідити збіжність ряду

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots .$$

Розв'язування. Функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ (вигляд її встановлюємо із загального члена ряду заміною n на x) набуває лише додатних значень, монотонно спадає на інтервалі $(0;\infty)$. Значення $f(1)=1$, $f(2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(3)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, …, $f(n)=\frac{1}{\sqrt{n}}$, … дорівнюють відповідним членам заданого ряду. Отже, функція $f(x)$ задовольняє умови інтегральної ознаки Коші.

Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}x^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_1^b=2\lim_{b\to\infty}\sqrt{x}\Big|_1^b=2\lim_{b\to\infty}(\sqrt{b}-1)=\infty.$$

Невласний інтеграл розбігається, отже, і заданий числовий ряд розбігається.

Задача 43. Дослідити збіжність ряду

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots.$$

Розв'язування. Для заданого знакопереміжного ряду виконуються обидві умови ознаки Лейбніца:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Ряд, складений з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – розбіжний гармонічний ряд, тому заданий знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ збігається неабсолютно (умовно збіжний).

Задача 44. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}=x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$$

і дослідити його на збіжність на кінцях інтервалу.

Розв'язування. Оскільки $a_n=\frac{1}{n^2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}:\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1.$$

Отже, інтервал збіжності степеневого ряду буде $(-1;1)$. Розглянемо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

При $x=1$ маємо числовий ряд:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots.$$

Для дослідження на збіжність використаємо інтегральну ознаку Коші. Для цього обчислимо інтеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b=-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{x}\Bigg|_1^b=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right)=1.$$

Невласний інтеграл збігається, отже, і числовий ряд теж збігається, тобто правий кінець входить в інтервал збіжності.

При $x=-1$ одержимо числовий знакопереміжний ряд:

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n^2}+\ldots,$$

який збігається абсолютно, тому що виконуються умови ознаки Лейбніца:

1) $1>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>\ldots>\frac{1}{n^2}>\ldots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

і збігається ряд, складений з абсолютних величин (ряд, який досліджений вище на правому кінці інтервалу).

Таким чином, заданий степеневий ряд абсолютно збігається в інтервалі $[-1;1]$.

ДОДАТКИ

Д1. Зразок титульної сторінки робочого зошита

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

кафедра економіко-математичних методів

Робочий зошит студента
для виконання
комплексного практичного індивідуального завдання
з вищої математики

Виконав студент
групи _____
____
(П.І.Б.)
Перевірив
____

Тернопіль – 2013

Д2. Деякі математичні позначення

Наближено дорівнює	$\approx$
Модуль (абсолютна величина) числа a	$\lvert a \rvert$
Рівносильно в обидві сторони	$\Leftrightarrow$
Рівносильно в одну сторону	$\Rightarrow$
Логарифм числа b за основою a	$\log_a b$
Десятковий логарифм числа b ($a = 10$)	$\lg b$
Натуральний логарифм числа b ($a = e = 2{,}72\ldots$)	$\ln b$
Максимум	max
Мінімум	min
Квадратний корінь	$\sqrt{}$
Корінь n-го степеня	$\sqrt[n]{}$
Кут	$\angle$
Паралельність	$\parallel$
Перпендикулярність	$\perp$
Дуга з кінцями A і B	$\cup ACB$
Градус	$^\circ$
Мінута	$'$
Секунда	$''$
Синус α	$\sin\alpha$
Косинус α	$\cos\alpha$
Тангенс α	$\mathrm{tg}\alpha$
Котангенс α	$\mathrm{ctg}\alpha$
Секанс α	$\sec\alpha$
Косеканс α	$\mathrm{cosec}\alpha$
Арксинус α	$\arcsin\alpha$
Арккосинус α	$\arccos\alpha$
Арктангенс α	$\mathrm{arctg}\alpha$
Арккотангенс α	$\mathrm{arcctg}\alpha$
Вектор	$\vec{a}$

Довжина вектора	$\vert\vec{a}\vert$
Точка M з абсцисою x_0 і ординатою y_0	$M(x_0; y_0)$
Множина натуральних чисел	N
Множина раціональних чисел	Q
Множина дійсних чисел	R
Множина цілих чисел	Z
Належить	$\in$
Не належить	$\notin$
Порожня множина	$\varnothing$
Об’єднання множин	$\bigcup$
Переріз множин	$\bigcap$
Еквівалентність, подібність	$\sim$
Закритий проміжок (відрізок): точки (числа) a і b належать проміжку	$[a; b]$
Напіввідкриті проміжки: точка a не належить проміжку, точка b належить проміжку; відповідно точка a належить проміжку, а точка b – не належить	$(a; b]$ і $[a; b)$
Відкритий проміжок (інтервал): точки a і b не належать проміжку	$(a; b)$
Більше, менше	$>, <$
Більше або дорівнює	$\geq$
Менше або дорівнює	$\leq$
Границя	$\lim$
Приріст аргументу	Δx
Приріст функції	Δy
Перша похідна функції $f(x)$	$f'(x),\ \dfrac{df}{dx}$
n-на похідна функції $f(x)$	$f^{(n)}(x),\ \dfrac{d^n f}{dx^n}$
Диференціал	d
Невизначений інтеграл	$\int$
Визначений інтеграл	$\int_a^b$
Добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ (читається n факторіал)	$n!$

Д3. Формули зведення функцій

Функція	Аргументи							
	90°–α	90°+α	180°–α	180°+α	270°–α	270°+α	360°–α	360°+α
	$\pi/2-\alpha$	$\pi/2+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$3\pi/2-\alpha$	$3\pi/2+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}x$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}x$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

Д4. Таблиця точних значень тригонометричних функцій деяких кутів

Функція	Аргументи									
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	360°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	$3\pi/4$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	—	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	—	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—

Д5. Таблиця значень тригонометричних функцій

α°	α, радіани	$\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\cos\alpha$		
0	0	0	0	∞	1	1,571	90
1	0,017	0,017	0,017	57,29	1,000	1,553	89
2	0,035	0,035	0,035	28,64	0,999	1,536	88
3	0,052	0,052	0,052	19,08	0,999	1,518	87
4	0,070	0,070	0,070	14,30	0,998	1,501	86
5	0,087	0,087	0,087	11,43	0,996	1,484	85
6	0,105	0,105	0,105	9,514	0,995	1,466	84
7	0,122	0,122	0,123	8,144	0,993	1,449	83
8	0,140	0,139	0,141	7,115	0,990	1,431	82
9	0,157	0,156	0,158	6,314	0,988	1,414	81
10	0,175	0,174	0,176	5,671	0,985	1,396	80
11	0,192	0,191	0,194	5,145	0,982	1,379	79
12	0,209	0,208	0,213	4,705	0,978	1,361	78
13	0,227	0,225	0,231	4,331	0,974	1,344	77
14	0,244	0,242	0,249	4,011	0,970	1,326	76
15	0,262	0,259	0,268	3,732	0,966	1,309	75
16	0,279	0,276	0,287	3,487	0,961	1,292	74
17	0,297	0,292	0,306	3,271	0,956	1,274	73
18	0,314	0,309	0,325	3,078	0,951	1,257	72
19	0,332	0,326	0,344	2,904	0,946	1,239	71
20	0,349	0,342	0,364	2,747	0,940	1,222	70
21	0,367	0,358	0,384	2,605	0,934	1,204	69
22	0,384	0,375	0,404	2,475	0,927	1,187	68
23	0,401	0,391	0,424	2,356	0,921	1,169	67
24	0,419	0,407	0,445	2,246	0,914	1,152	66
25	0,436	0,423	0,466	2,145	0,906	1,134	65
26	0,454	0,438	0,488	2,050	0,899	1,117	64
27	0,471	0,454	0,510	1,963	0,891	1,100	63
28	0,489	0,469	0,532	1,881	0,883	1,082	62
29	0,506	0,485	0,554	1,804	0,875	1,065	61
30	0,524	0,500	0,577	1,732	0,866	1,047	60
31	0,541	0,515	0,601	1,664	0,857	1,030	59
32	0,559	0,530	0,625	1,600	0,848	1,012	58
33	0,576	0,545	0,649	1,540	0,839	0,995	57
34	0,593	0,559	0,675	1,483	0,829	0,977	56
35	0,611	0,574	0,700	1,428	0,819	0,960	55
36	0,628	0,588	0,727	1,326	0,809	0,942	54
37	0,646	0,602	0,754	1,327	0,799	0,925	53
38	0,663	0,616	0,781	1,280	0,788	0,908	52
39	0,681	0,629	0,810	1,235	0,777	0,890	51
40	0,698	0,643	0,839	1,192	0,766	0,873	50
41	0,716	0,656	0,869	1,150	0,755	0,855	49
42	0,733	0,669	0,900	1,111	0,743	0,838	48
43	0,750	0,682	0,933	1,072	0,731	0,820	47
44	0,768	0,695	0,966	1,036	0,719	0,803	46
45	0,785	0,707	1,000	1,000	0,707	0,785	45
		$\cos\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\sin\alpha$	α, радіани	α°

Д6. Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^{n} - 1\right]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

i=0,5%= 0,005				*i=1%= 0,01*			
n	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	***n***	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
1	1,005	0,99502	1,0	1	1,01	0,990099	1,0
2	1,0010025	1,98509	2,005	2	1,0201	1,970395	2,01
3	1,015075	2,97024	3,015025	3	1,030301	2,940985	3,0301
4	1,020151	3,95049	4,0301	4	1,040604	3,901966	4,060401
5	1,025251	4,925866	5,050251	5	1,05101	4,853431	5,101005
6	1,030378	5,896384	6,075502	6	1,06152	5,795476	6,152015
7	1,035529	6,862074	7,105879	7	1,072135	6,728195	7,2133535
8	1,040707	7,822959	8,141409	8	1,082857	7,651678	8,285671
9	1,045911	8,779064	9,182116	9	1,093368	8,566018	9,368527
10	1,05114	9,730412	10,228026	100	1,104622	9,471305	10,462213
11	1,0563396	10,677027	11,279167	11	1,115668	10,367628	11,566835
12	1,061678	11,061893	12,335562	12	1,126825	11,255077	12,682503
13	1,066986	12,556151	13,339724	13	1,138093	12,13374	13,809328
14	1,072321	13,488708	14,464226	14	1,149474	13,003703	14,947421
15	1,077683	14,416625	15,536548	15	1,160969	13,865053	16,096896
16	1,083071	15,339925	16,61423	16	1,172579	14,717874	17,257864
17	1,088487	16,258632	17,697301	17	1,184304	15,562251	18,430443
18	1,093929	17,172768	18,785788	18	1,196147	16,398269	19,614748
19	1,099399	18,082335	19,879717	19	1,208109	17,226008	20,810895
20	1,104896	18,987419	20,979113	20	1,22019	18,045553	22,019004
21	1,11042	19,887979	22,084011	21	1,232392	18,856983	23,239194
22	1,115972	20,784059	23.194431	22	1,244716	19,660379	24,471586
23	1,121552	21,675681	24,310403	23	1,257163	20,455821	25.716302
24	1,12716	22,562866	25,431955	24	1,269735	21,243387	26,973405

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

(продовження)

i=2%= 0,02				*i=3%= 0,03*			
n	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	***n***	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
1	1,02	0,980392	1,0	1	1,03	0,970874	1,0
2	1,0404	1,941561	2,02	2	1 ,0609	1,91347	2,03
3	1,061208	2,883883	3,0604	3	1,092727	2,828611	3,0909
4	1,082432	3,807729	4,121608	4	1,125509	3,717098	4,183627
5	1,104081	4,7134	5,20404	5	1,192274	4,579707	5,309136
6	1,126162	5,601431	6,308121	6	1,194052	5,417191	5,46841
7	1,148686	6,471991	7,434283	7	1,229874	6,230283	7,662462
8	1,171659	7,325481	8,582969	8	1,26677	7,019692	8,892236
9	1,195093	8,1622337	9,754628	9	1,304773	7,786109	10,159106
10	1,218994	8,982585	10,949721	10	1,343916	8,530203	11,463879
11	1,243374	9,786848	12,168715	11	1,384234	9,252624	12,807796
12	1,268242	10,575341	13,41209	12	1,425761	9,954004	14,19203
13	1,293607	11,348374	14,680332	13	1,468534	10,634955	15,61779
14	1,319479	12,106249	15,973938	14	1,51259	11,296073	17,086324
15	1,345868	12,849264	17,293417	15	1,557967	11,937935	18,598914
16	1,372786	13,57770	18,639285	16	1,604706	12,561102	20,156881
17	1,400241	14,291872	20,012071	17	1,652848	13,166118	21,761588
18	1,428246	14,992031	21,412312	18	1,702433	13,753513	23,414435
19	1,456811	15,678462	22,840559	19	1,753506	14,323799	25,116868
20	1,485947	16,351433	24,29737	20	1,806111	14,877475-	26,870374
21	1,515666	17,011209	25,783317	21	1,860295	15,415024	28,676486
22	1,54598	17,658048	27,298984	22	1,916103	15,936917	30,53678
23	1,576899	18,292204	28,844963	23	1,973587	16,443608	32,452884
24	1,608437	18,913926	30,421852	24	2,032794	16,935542	34,42647

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

(продовження)

i=5%= 0,05				***i=8%= 0,08***			
n	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	***n***	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{\imath}{i}}$
I	1,05	0,95238 1	1,0	1	1,08	0,925926	1,0
2	1,1025	1,85941	2,05	2	1,164	1,783265	2,08
3	1,157625	2,723248	3,1525	3	1,259712	2,577097	3,2464
4	1,215506	3,545951	4,310125	4	1,360489	3,312127	4,506112
5	1,276282	4,329477	5,525631	5	1,469328	3,99271	5,866601
6	1,340096	5,075692	6,801913	6	1,586874	4,62288	7,335929
7	1,4071	5,786373	8,142008	7	1,713824	5,20637	8,922803
8	1,477455	6,463213	9,549109	8	1,85093	5,746639	10,636628
9	1,551328	7,107822	11,026564	9	1,999005	6,246888	12,487558
10	1,628895	7,721735	12,577893	10	2,158925	6,710081	14,486562
11	1,710339	8,306414	14,206787	11	2,331639	7,138964	16,645487
12	1,795856	8,863252	15,917127	12	2,51817	7,536078	18,977126
13	1,885649	9,393573	17,712983	13	2,719624	7,903776	21,495297
14	1,979932	9,898641	19,598632	14	2,937194	8,244237	24,21 492
15	2,078928	10,379658	21,578564	15	3,172169	8,559479	27,152114
16	2,182875	10,83777	23,657492	16	3,425943	8,531369	30,324283
17	2,292018	11,274066	25,840366	17	3,700018	9,121638	33,750226
18	2,406619	11,689587	28,132385	18	3,996019	9,373887	37,450244
19	2.52695	12,085321	30,539004	19	4,315701	9,603599	41,446263
20	2,653298	12,46221	33,065954	20	4,660957	9,818147	45,761964
21	2,785963	12,821153	35,719252	21	5,033834	10,016803	50,422921
22	2,925261	13,163003	38,505214	22	5,43654	10,200744	55,456755
23	3,071524	13,488574	41,430475	23	5,871464	10,371059	60,893296
24	3,2251	13.798642	44,501999	24	6,341181	10,528758	66,764759

Д7. Графіки деяких елементарних функцій

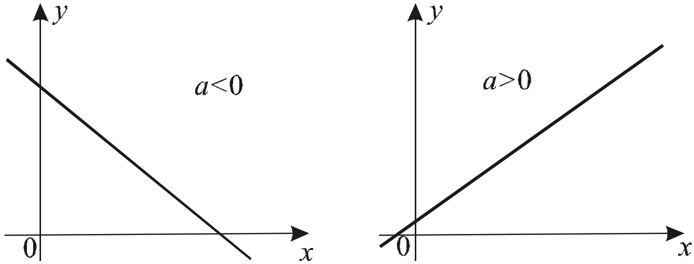


Рис. 1. Лінійні функції $y = ax + b$

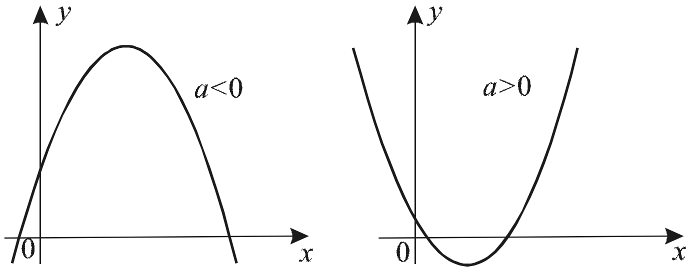


Рис. 2. Квадратичні функції $y = ax^2 + bx + c$

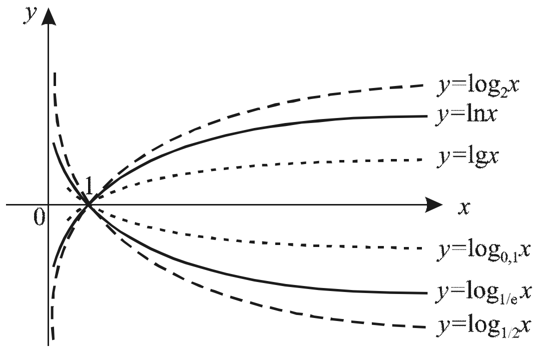


Рис. 3. Логарифмічні функції

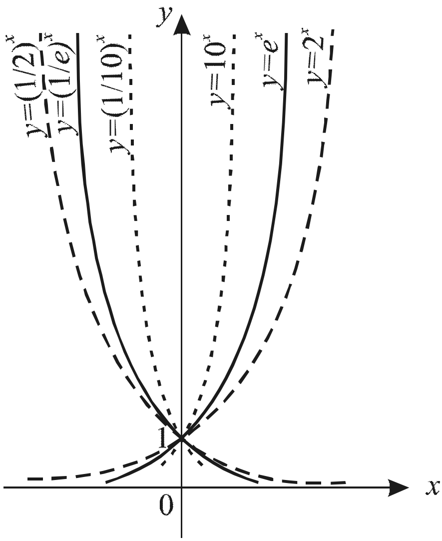


Рис. 4. Показникові функції

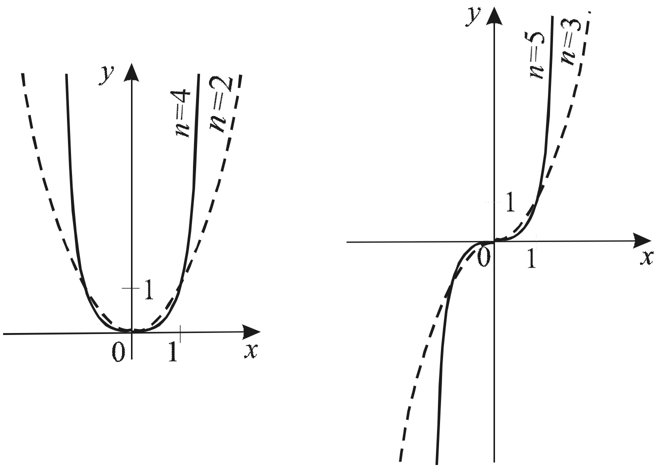


Рис. 5. Степеневі функції $y = x^n$

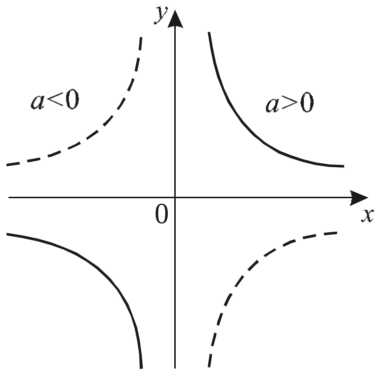
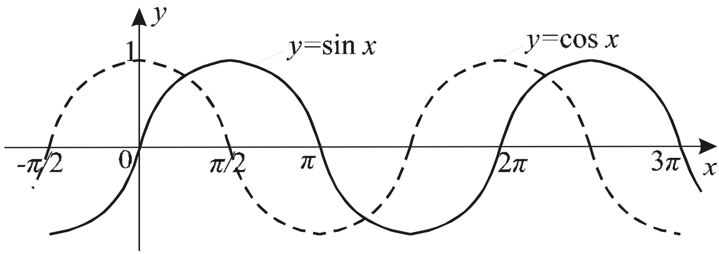
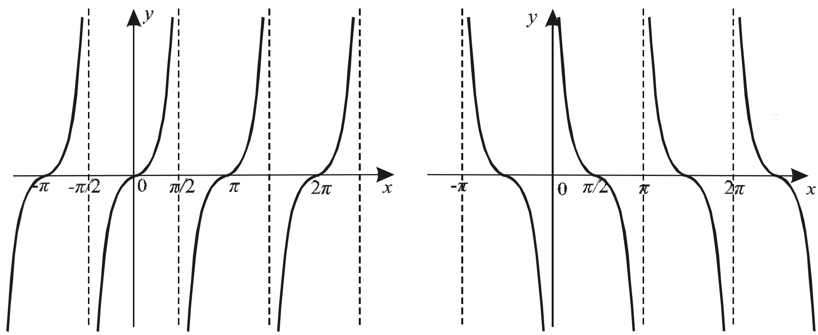


Рис. 6. Функція $y = \dfrac{a}{x}$, $a \neq 0$



а)



б) в)

Рис. 7. Тригонометричні функції: а) $y = \cos x$ і $y = \sin x$;
б) $y = \operatorname{tg} x$; в) $y = \operatorname{ctg} x$

ЛІТЕРАТУРА

1. Сборник математических задач с практическим содержанием: Кн. для учителя / П. Т. Апанасов, Н. П. Апанасов. – М.: Просвещ., 1987. – 110 с.
2. Математика для економістів: Вища математика / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К.: Нац. акад. упр., 1997. – 397 с.
3. Высшая математика с основами математической статистики / В. А. Белинский, И. Л. Калихман, Л. Е. Майстров та ін. – М.: Высш. шк., 1965. – 516 с.
4. Бугір М. К. Математика для економістів: Навчальний посібник. – Тернопіль: Підруч. і посіб., 1998. – 192 с.
5. Вища математика: Навч. посіб.: У 2-х ч. К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова – К.: КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.; – К.: КНЕУ, 2002. – Ч. 2. – 451с.
6. Вища математика: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисципліни / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. – К.: КНЕУ, 1999. – 396 с.
7. Вища математика: Підруч. / В. А. Домбровський, І. М. Крижанівський, Р. С. Мацьків та ін.; за ред. М. І. Шинкарика– Тернопіль: Вид-во Карп'юка, 2003. – 480 с.
8. Курс высшей математики. – Изд. 2-е, перераб. и доп. / А. А. Глаголев, Т. В. Солнцева. – М.: Высш. шк., 1971. – 656 с.
9. Збірник задач з вищої математики: Уч. посіб. / Ф. С. Гудименко, Д. М. Борисенко, В. О. Волкова та інші.. – К.: Вид-во КДУ, 1967. – 352 с.
10. Высшая математика в упражнениях и задачах: Уч. пособ. – Изд. 2-е. / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – М.: Высш. шк., 1974. – Ч. I. – 416 с.
11. Высшая математика в упражнениях и задачах: Уч. пособ. – Изд. 2-е. / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – М.: Высш. шк., 1974. – Ч. II. – 464 с.
12. Краткое руководство к решению задач по высшей математике (для техникумов) / И. Г. Доброжицкая, М. Б. Доброжицкий. – Минск: Вышейш. шк., 1972. – 200 с.
13. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике: Уч. пособ. – Изд. 4-е.– Харьков: Изд-во ХГУ, 1970. – Ч. I, II.– 576 с.

14. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике: Уч. пособ. – Изд. 3-е, стереотип. Ч. III. – Изд. 2-е, стереотип. – Ч. IV. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1971. – 500 с.
15. Карасев А. И. Курс высшей математики для економических вузов / А. И. Карасев, З. М. Аксютина, Т. И. Савельева. – Ч. I. Основы высшей математики: Уч. пособ. – М.: Высш. шк., 1982. – 272 с.
16. Практикум по математике для заочных техникумов: Уч. пособ. / Л. А. Клюева, Д. А. Тальский – М.: Высш. шк., 1970.– 446 с.
17. Крыньский Х. Э. Математика для економистов: Пер. с польск. В. Д. Меникера / Под ред. М. И. Баренгольца. – М.: Стат., 1970. – 584 с.
18. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: Уч. пособ. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
19. Неміш В. М. Практикум з вищої математики: Навч. посіб. – 3-тє вид. / В. М. Неміш, А. І. Процик, К. М. Березька. – Тернопіль: ТНЕУ, в-во «Екон. думка», 2010. – 304 с.
20. Петров В. А. Математические задачи из сельскохозяйственной практики: Пособ. для учителей. – М.: Просвещ., 1980.– 64 с.
21. Сборник задач по курсу высшей математики: Уч. пособ. для втузов / Г. И. Кручкович, Н. И. Гутарина, П. Е. Дюбюк и др. / Под ред. Г. И. Крючковича. – Изд. 3-е, перераб. – М.: Высш. шк., 1973. – 576 с.
22. Справочное пособие по математическому анализу. Ч. І. Введение в анализ, производная, интеграл / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай – К.: Вища шк., 1978.– 696 с.
23. Типові індивідуальні розрахункові завдання з вищої математики: Навч. посіб. / І. В. Домбровський, О. Ф. Лесик, Ф. М. Мигович та ін.; за ред. М. І. Шинкарика. – Тернопіль: Підруч. і посіб., 2008. – 208 с.
24. Фишер С. Экономика: Пер. с англ. со 2-го изд. / С. Фишер, Р. Дорнбуш, Р. Шмалензи. – М.: Дело ЛТД, 1993. – 864 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Андрій Миколайович Алілуйко
Василь Миколайович Неміш
Микола Іванович Шинкарик

КОМПЛЕКСНІ ПРАКТИЧНІ ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Редактор ***Оксана Бойчук***
Комп'ютерна верстка ***Надії Демчук***
Дизайн обкладинки ***Марії Одобецької***

Підписано до друку 29.11.2012 р.
Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Гарнітура Times.
Папір офсетний. Друк на дублікаторі.
Умов. друк. арк. 9,18. Облік.-вид. арк. 9,0.
Зам. № У520-12. Тираж 200 прим.

Видавець та виготовлювач

Тернопільський національний економічний університет

вул. Львівська, 11, м. Тернопіль, 46004

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців ДК № 3467 від 23.04.2009 р.

Видавничо-поліграфічний центр «Економічна думка ТНЕУ»
вул. Львівська, 3, м. Тернопіль, 46004
тел. (0352) 47-58-72
E-mail: edition@tneu.edu.ua