хим. механика материалов, 1976, № 6, с.85-90.

6. Витвицкий П.М., Попина С.Ю. Вероятностный расчет прочности дефектных пластин при растяжении - сжатии с учетом трения берегов трещин. - Проблемы прочности, 1977, № 12, с.14-17.

7. Попина С.Ю. О вероятностных характеристиках предельных напряжений хрупких пластин с большим числом трещин при сложном напряженном состоянии. - Физ.-хим.механика материалов, 1977, № 2, с.47-51.

8. Попина С.Ю. Прочность хрупких пластин со статистическим распределением трещин при ненулевом значении порогового напряжения. - В кн.: Материалы УШ-й конф.молодых ученых физ.-мех.института АН УССР. Секция физ.-хим. механики материалов. Львов, 1977, № 896-78 ДЕП, с.162-165.

БГ 00215 от 28.У.79 г. Зак.1900 Тир.150
Тип.ТУ-58 Ив.Федорова,9 г.Львов

двухосном симетричном растяжении вероятность разрушения композита уменьшается с ростом указанного коэффициента.

5. Для стохастически дефектных пластин, находящихся в сложном однородном поле напряжений, получены уравнения кривых средних значений предельных напряжений и линий одинаковой вероятности разрушения. Приведены примеры построения этих вероятностных критериев разрушения. В случае дефектов-трещин исследовано влияние параметра однородности материала, коэффициента трения берегов трещин на вид указанных кривых. Показано влияние параметра однородности композита, коэффициента Пуассона материала матрицы и числа дефектов на форму статистических кривых прочности пластин, содержащих жесткие стержневые включения.

6. Выполнен расчет влияния технологической вытяжки материала на вероятностные характеристики прочности пластин со статистическим распределением трещин. Для таких пластин, находящихся в сложном поле напряжений, приведены примеры построения кривых средний значений предельных напряжений, свидетельствующих о приобретенной вследствие вытяжки прочностной анизотропии. Установлено, что средние значение предельных напряжений, а также прочностная анизотропия изменяются наиболее интенсивно при значениях коэффициента вытяжки $k < 1{,}6$ для растяжения и $k < 1.8$-$2$ для чистого сдвига. Этот вывод может найти практическое применение в технологии обработки материалов.

7. В первом приближении решена задача об определении вероятностных характеристик предельных напряжений для пластины с трещиной случайной формы, близкой к прямолинейной. Для одноосного растяжения пластины установлено, что малые случайные отклонения формы контура трещины от прямолинейной приводят к уменьшению среднего значения предельных нагрузок по сравнению с прямолинейной трещиной.



Если отношение среднего квадратического отклонения высоты неровностей поверхности трещины к её полудлине не превышает 2%, то это уменьшение составляет менее 5% предельной нагрузки для пластины с прямолинейной трещиной. При этом коэффициент вариации предельных напряжений пластины с трещиной случайной формы не превышает 6%.

8. Результаты работы в виде формул, графиков могут найти применение для расчета вероятности разрушения и других вероятностных характеристик прочности пластинчатых элементов конструкций, изготовленных из хрупких неоднородных материалов (термореактивные пластмассы, чугуны, мателлокерамические композиций, различные марки графита и др.).

## ПУБЛИКАЦИИ ПО МАТЕРИАЛАМ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ


1. Витвицкий П.М., Попина С.Ю. Расчет вероятностных характеристик структурной и прочностной анизотропии дефектного материала после его технологической обработки. - В кн.: УI Всесоюзная конференция по прочности и пластичности, Москва, 1975, с.10.
2. Витвицкий П.М., Попина С.Ю. Вероятностный расчет предельного состояния дефектного материала с приобретенной при обработке прочностной анизотропией. - Проблемы прочности, 1976, № 9, с.31-35.
3. Витвицкий П.М., Попина С.Ю. Разрушение пластины со стохастически шероховатой трещиной. - В кн.: IУ Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Киев, 1976, с.86.
4. Витвицкий П.М., Попина С.Ю. О разрушении пластины с трещиной случайной формы, близкой к прямолинейной. - Докл. АН УССР, сер.А 1976, № 6, с.509-513.
5. Витвицкий П.М., Попина С.Ю. Прочность хрупких пластин со стохастическим распределением жестких стержневых включений. - Физ.-

Снесенные на прямолинейную трещину граничные условия показали, что нулевое приближение $k_1^{(0)}$, $k_2^{(0)}$ соответствует решению задачи для пластины с прямолинейной трещиной, растягиваемой на бесконечности напряжениями $p$, перпендикулярными к трещине, а первое приближение $k_1^{(1)}$, $k_2^{(1)}$ -решению задачи для пластины ослабленной прямолинейной трещиной, на берегах которой приложены касательные напряжения $\tau_{xy} = -p\, d\delta/dx$, $|x| \le \ell$.

На основании предположения о том, что функция $\delta(x)$ является стационарной случайной функцией с нулевым средним значением и известной дисперсией, в работе найдены среднее значение и дисперсия случайной величины $k_1$. Для среднего значения предельных усилий, приложенных к пластине с трещиной, получено такое выражение

$$\langle p_* \rangle = \frac{K_c}{\sqrt{\pi \ell}} \left(1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{R_\delta}{\ell} \gamma \right), \quad 0 < \gamma \le 1, \tag{15}$$

где $R_\delta$ - среднее квадратическое отклонение случайной функции $\delta(x)$, $\gamma$ характеризует "колебательность" контура трещины. Из этого выражения видно, что при одноосном растяжении пластины малые случайные отклонения формы контура трещины от прямолинейной приводят к уменьшению среднего значения предельных нагрузок по сравнению с прямолинейной трещиной, для которой $p_* = K_c/\sqrt{\pi \ell}$.

В предположении, что коэффициенты канонического разложения функции $\delta(x)$ имеют нормальное распределение, в работе получены выражения для дисперсии и коэффициента изменчивости случайных предельных напряжений. Например, выражение для коэффициента изменчивости предельных усилий имеет вид $W(p_*) \approx 3R_\delta \gamma/\ell$. Полученные формулы показывают, что при возрастании длины трещины или уменьшении среднего квадратического отклонения высоты неровностей её поверхности, среднее значение случайной предельной нагрузки приближается к величине предельных напряжений для пластины с прямолинейной трещиной, а коэффициент изменчивости при этом стремиться к нулю.



## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

1. В новой постановке решен ряд задач по определению вероятностных характеристик прочности стохастически дефектных пластин при сложном однородном напряженном состоянии или действии теплового потока. Исследовано влияние вида законов распределения геометрических параметров дефектов на вероятностные характеристики прочности пластин.

2. Установлено, что двухосное растяжение или растяжение - сжатие приводит к увеличению вероятности разрушения и соответственно к уменьшению среднего значения предельных растягивающих напряжений по сравнению с одноосным растяжением пластин, ослабленных трещинами. Наличие трения берегов трещин уменьшает вероятность разрушения и увеличивает среднее значение и дисперсию растягивающих напряжений.

3. При большом количестве дефектов (трещин, жестких стержневых включений) получены формулы типа Вейбулла для определения вероятности разрушения пластин и определены в этом случае значения параметров распределения Вейбулла. При силовом или температурном воздействии установлены линейные зависимости между параметром однородности материала и параметрами, характеризующими вероятностное распределение дефектов по размерам.

4. Показано, что в случае дефектов-включений существенное влияние на вероятностные характеристики прочности композита оказывает коэффициент Пуассона материала матрицы. Так, например, при

Здесь $A_1 = 2\sqrt{3}K_c/(\sqrt{\pi}\beta_t E)$, $\beta_t$ - коэффициент линейного температурного расширения, $E$ - модуль упругости, $\alpha$ - угол между линией трещины и направлением теплового потока. Пределы интегрирования в формуле (II) зависят от интервала изменения ориентаций трещин и должны обеспечивать выполнение условия $\ell_{min} \le (A_1 q_1^{-1} |\sin\alpha|^{-1})^{4/3} \le \ell_{max}$.

В предположении, что распределение ориентаций дефектов является равномерным $(f_1(\alpha) = 1/\pi,\ |\alpha| \le \pi/2)$ и распределение их размеров имеет вид (4) или (7), в работе на основании выражения (II) получены формулы для функции распределения $F_1(q_1)$.

Если хрупкая пластина содержит $n$ трещин, то предельный тепловой поток такой пластины определяется на основании гипотезы "наиболее слабого звена". С использованием полученных выражений для функции распределения предельного теплового потока, в работе исследуется зависимость вероятности разрушения пластин от приложенного теплового потока при различных значениях параметров формы $s$, $r$ распределений (4), (7) полудлин трещин. Показано, что увеличение параметра $s$ или $r$ приводит к уменьшению вероятности разрушения, соответствующей заданному значению теплового потока.

Встановлены соотношения для параметров $c$, $m$ функции распределения Вейбулла предельного теплового потока, имеющей вид аналогичный выражению (5). Эти соотношения в случае распределения (4) полудлин трещин представляются так

$$m = \frac{2}{3}(s-1), \quad c = \left(\frac{a}{A_1^{2/3}}\right)^{s-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_1(\alpha) |\sin^{\frac{2(s-1)}{3}}\alpha| \, d\alpha. \tag{I2}$$

На основании распределения Вейбулла и выражений для параметров $c$, $m$ в работе получены формулы для среднего значения, дисперсии, коэффициента изменчивости предельного теплового потока. Как и в случае силового нагружения здесь показано, что при одинаковых значениях параметра однородности материала масштабный эффект



более интенсивен для неограниченной области возможных размеров трещин ( $q_{1,min} = 0$ ) нежели для ограниченной ( $q_{1,min} > 0$ ).

Шестая глава посвящена изучению влияния малых случайных отклонений формы контура трещины от прямолинейной на вероятностные характеристики коэффициентов интенсивности напряжений и предельных значений приложенных нагрузок. Рассматривается бесконечная изотропная пластина с центральной трещиной мало отклоняющейся по форме от прямолинейной. Берега трещины свободны от внешних нормальных и касательных напряжений, а в бесконечно удаленных точках пластины приложены растягивающие напряжения $p$, направленные перпендикулярно к линии соответствующей прямолинейной трещины. Решение задачи осуществляется методом малого параметра. При сносе граничных условий с криволинейной трещины на прямолинейную поступаем аналогично тому, как это сделано в работе В.А.Пальмова "Концентрация напряжений около шероховатой границы упругого тела", Известия АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 3. Уравнение линии трещины представляется в виде

$$y = \delta(x) = \varepsilon\Delta(x), \quad |x| \le \ell, \tag{I3}$$

$\varepsilon$ - малый параметр. Причем должны выполняться следующие соотношения $\delta(\pm\ell) = \delta'(\pm\ell) = 0$. Начало прямоугольной декартовой системы координат выбрано в центре соответствующей прямолинейной трещины, ось $x$ направлена по её линии.

Коэффициенты интенсивности напряжений $k_1$ и $k_2$, соответствующие симметричному и антисимметричному распределению напряжений относительно трещины представлены следующим образом

$$k_1 = k_1^{(0)} + \varepsilon k_1^{(1)} \qquad k_2 = k_2^{(0)} + \varepsilon k_2^{(1)} \tag{I4}$$

ных напряжений $p$ и $q$, приложенных на бесконечности. На основании известных результатов (Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т., Труш И.И., Проблемы прочности, 1972, № 7; Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Труш И.И., Проблемы прочности, 1973, № 10) в работе найдено выражение вида $p = K_0 l^{-\frac{1}{2}} f_2(\alpha, \eta, \varkappa)$ для предельных напряжений элемента пластины с произвольно ориентированным стержневым включением. В этом выражении $K_0$ -постоянная, характеризующая сопротивление материала зарождению трещины, $\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ для плоского напряженного состояния, $\nu$ - коэффициент Пуассона материала матрицы, $f_2(\alpha, \eta, \varkappa)$- некоторая функция. Под предельными подразумеваются напряжения, при действии которых наступает локальное разрушение-образование трещины в окрестности вершины включения.

В случае статистической независимости величин $\alpha$ и $l$ получена аналогичная выражению (2) формула для функции распределения предельных напряжений элемента пластины с одним включением. Дальнейшие вычисления проведены в предположении, что распределение размеров включений имеет вид (4). Если пластина содержит $n$ включений, то функция распределения предельной нагрузки такой пластины вычисляется по формуле (3). Для параметров $c$, $m$ распределения Вейбулла (5), являющегося асимптотическим к выражению (3), в данном случае найдены следующие зависимости

$$m = 2(s-1), \quad c = \left(\frac{a}{K_0^2}\right)^{s-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_1(\alpha) f_2^{2-2s}(\alpha, \eta, \varkappa)\, d\alpha . \qquad (10)$$

В дальнейшем считается, что все ориентации включений равновероятны, т.е. $f_1(\alpha) = 1/\pi$, $|\alpha| \le \pi/2$. Для случаев $p>0$, $-\infty<\eta\le 1$ и $p<0$, $1\le\eta<\infty$ получены выражения для функции распределения предельных напряжений. Исследовано влияние коэффициента Пуассона материала матрицы на вероятность разрушения композита. На основании формул для числовых характеристик случайной величины распределенной по закону (5) и соотношения для параметров $c$, $m$, в работе



изучено влияние отношения главных нормальных напряжений ($\eta$), параметра однородности композита $m$ и коэффициента Пуассона материала матрицы $\nu$ на среднее значение и дисперсию прочности. Для некоторых значений величин $\nu$, $m$ приведены примеры построения кривых средних значений предельных напряжений и линий равной вероятности разрушения (кривых предельных напряжений, соответствующих заданной вероятности разрушения) композита при сложном напряженном состоянии. Построенные кривые статистического критерия прочности композитов характеризуются сглаженностью переломов и пиков, имеющихся на детерминистических кривых предельных напряжений (Бережницкий Л.Т., Громяк Р.С., Труш И.И., ФХММ, 1975, № 5). Показано, что в отличие от случая пластин с трещинами, для которых при двухосном растяжении имеем уменьшение средних значений предельных напряжений в сравнении с одноосным, для композитов в зависимости от величины коэффициента Пуассона материала матрицы и параметра однородности композита можно получить уменьшение или увеличение среднего значения прочности при двухосном растяжении по отношению к одноосному.

<u>В пятой главе</u> рассмотрена задача об определении вероятностных характеристик прочности пластин, находящихся под действием однородного теплового потока, направленного параллельно срединной поверхности пластины. Предполагается, что пластины ослаблены теплоизолированными трещинами случайных ориентаций и длин. Записана аналогичная к выражению (1) формула для функции распределения $F_1(q_1)$ предельного теплового потока. В случае статистической независимости геометрических характеристик трещин формула для функции распределения случайного теплового потока элемента пластины с одной трещиной приведена к виду

$$F_1(q_1) = \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} f_1(\alpha) \left\{ 1 - F_0\left[ \left( \frac{q_1}{q_*|\sin\alpha|} \right)^{2/3} \right] \right\} d\alpha , \qquad (11)$$

$$q_{1,min} \le q_1 \le q_{0\,max}$$

тически независимые случайные величины, распределение ориентаций трещин является равномерным (материал изотропен), а распределение размеров дефектов имеет вид (7) при $\eta = 1$. Пусть такой материал в размягченном состоянии поддается технологической вытяжке с коэффициентом $k \geq 1$, показывающим во сколько раз увеличивается размер элементов материала в направлении вытяжки, а затем отвердевает (охрупчивается). Предполагается, что материал несжимаем, т.е. при увеличении длины фиксированного элемента объема в $k$ раз его ширина и толщина уменьшаются в $\sqrt{k}$ раз, а также, что трещины при вытяжке ведут себя как связанные с материалом растяжимые нити. Такая обработка приводит к изменению геометрических характеристик трещин. На основании рассмотренного модельного представления вытяжки получены зависимости между геометрическими параметрами трещин до и после обработки. Используя эти зависимости, исходный закон распределения ориентаций и длин дефектов, а также формулу для плотности вероятности функций от случайных величин, находим следующее выражение для плотности распределения геометрических параметров трещин после вытяжки

$$f(\alpha, \ell) = \frac{2}{\pi d\sqrt{k}}\left[f_1(\alpha, k) - \frac{\ell}{d}\right], \quad |\alpha| \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \ell \leq f_1(\alpha, k)\,d, \tag{9}$$

где $f_1(\alpha, k) = k(\cos^2\alpha + k^3\sin^2\alpha)^{-1/2}$; $\alpha$ – угол между линией трещины и направлением вытяжки. Анализ распределения (9) показал, что в результате вытяжки среднее значение $\langle\alpha\rangle$ не изменяется $(\langle\alpha\rangle = 0)$, а дисперсия $D(\alpha)$ ориентаций трещин при $k > 1$ меньше последней для $k = 1$. Физически это означает, что вследствие вытяжки в материале возникает преимущественная ориентация дефектов, совпадающая с направлением вытяжки.

С использованием закона (9) вероятностного распределения геометрических параметров трещин и формулы (I), в данной главе получены выра-



жения для функции распределения предельных напряжений пластин, находящихся в сложном поле напряжений $p$, $q$. При этом усилия $p$ действуют по линии вытяжки. Отметим, что пороговое напряжение и функция распределения зависят от коэффициента вытяжки $k$. Результаты исследования зависимости вероятности разрушения пластин от приложенных напряжений показали, что вытяжка материала приводит к понижению вероятности разрушения в сравнении со случаем отсутствия вытяжки при растяжении в ее направлении ( $\eta = 0$ ) и повышению вероятности разрушения при перпендикулярном ( $\eta \to \infty$ ) или двустороннем растяжении ( $\eta = 1$ ).

На основании выражений для функции распределения проведены вычисления средних значений $\langle p\rangle$, $\langle q\rangle$ при различных значениях параметра $\eta$ и в координатах $\langle p\rangle\frac{\sqrt{l}}{A}$, $\langle q\rangle\frac{\sqrt{l}}{A}$ построены кривые средних значений предельных напряжений пластин при сложном напряженном состоянии с учетом вытяжки материала. В отличие от случая $k = 1$ (вытяжка отсутствует) кривые для $k > 1$ несимметричны относительно биссектрисы I-го и 3-го координатных углов, что свидетельствует о приобретенной при вытяжке прочностной анизотропии. Для некоторых видов напряженного состояния исследована также зависимость средних значений прочности пластин от коэффициента вытяжки. Выполненные в этой главе исследования дают возможность прогнозирования вероятностных характеристик прочности и прочностной анизотропии при сложном напряженном состоянии в зависимости от коэффициента вытяжки и количества трещин.

Четвертая глава посвящена исследованию вероятностных характеристик прочности хрупких пластин со стохастическим распределением жестких стержневых включений. Пусть хрупкие пластины, содержащие невзаимодействующие между собой жесткие стержневые включения случайных ориентаций и длин, находятся под действием главных нормальпряжений, соответствующих заданной вероятности разрушения. Приведены примеры построения этих вероятностных критериев разрушения. Отмечено удовлетворительное совпадение теоретической кривой предельных напряжений с экспериментальными значениями прочности графита при сложном напряженном состоянии, заимствованными из работы А.М.Фридмана и др. (Проблемы прочности, 1973, № 1).

Во второй главе рассмотрена та же задача, что и в первой, но в отличие от предыдущего здесь считается, что пластины ослаблены трещинами ограниченных случайных длин ( $0 \le l \le d$ ). В данном случае пороговое напряжение $p_{min}$, соответствующее вероятности разрушения равной нулю, удовлетворяет условию $p_{min} > 0$. Например, для $p>0$, $|\eta| \le 1$ имеем $p_{min} = A/\sqrt{d}$. С помощью выражения (2) выведены общие формулы для функции распределения предельных напряжений при сложном напряженном состоянии, представляющие возможность вычисления вероятности разрушения пластин с трещинами, случайные геометрические параметры которых распределены по произвольных законах. Дальнейшие расчеты проведены в предположении, что распределение ориентаций трещин является равномерным, а распределение размеров дефектов имеет вид

$$f_0(l) = \frac{\tau+1}{d}\left(1-\frac{l}{d}\right)^{\tau}, \quad \tau \ge 0, \; 0 \le l \le d. \qquad (7)$$

Исследована зависимость вероятности разрушения пластин от приложенных усилий при различных значениях параметров $\eta$, $\rho$, $n$. Отмечено, что рост числа трещин $n$ приводит к увеличению вероятности разрушения соответствующей определенному напряжению. В работе получены выражения для плотности вероятности предельных напряжений. Показано, что при двухосном симметричном растяжении ( $\eta = 1$ ) наиболее вероятное значение прочности пластин меньше нежели при одноосном ( $\eta = 0$ ). Приведены примеры построения кривых средних



значений предельных напряжений для пластин при сложном напряженном состоянии. В предыдущем случае (глава 1) указанные кривые при возростании числа трещин стягивались в начало координат, в данном случае средние кривые стремятся к детерминистическим кривым минимальных предельных напряжений для пластины, ослабленной произвольно ориентированными трещинами длины $2d$.

На основании выражения (6) и условия $0 < c < \infty$, в работе получены формулы для параметров $c$, $m$ распределения Вейбулла (5). Например, в случае двухосного симметричного растяжения имеем

$$m = \tau+1, \qquad c = \left(2\sqrt{d}/A\right)^{\tau+1} \qquad (8)$$

С использованием установленных для сложного напряженного состояния зависимостей для параметров $c$ и $m$, в данной главе записаны выражения для среднего значения, дисперсии и коэффициента изменчивости предельных напряжений, распределенных по закону (5). Изучена зависимость этих вероятностных характеристик прочности от параметров $\eta$, $m$, $n$.

Сравнение результатов, полученных в первой и второй главах, показало, что при одинаковых значениях параметра однородности материала масштабный эффект более интенсивен в случае неограниченной области возможных значений случайных полудлин трещин (глава 1) нежели для ограниченной области (глава 2).

Определение вероятностных характеристик прочности пластин, материал которых поддан технологической вытяжке, осуществлено в третьей главе. Модель материала принимается здесь такой же как и в предыдущих главах, т.е. считается, что в материале рассеяны невзаимодействующие между собой прямолинейные трещины со случайными геометрическими характеристиками. Предполагается также, что геометрические параметры трещин материала в исходном состоянии суть статисвия $l_{min} \leq A^2 p^{-2} f^2(\alpha, \gamma, \rho) \leq l_{max}$ , где $l_{min}$ и $l_{max}$ - соответственно наименьшее и наибольшее возможные значения случайной величины $l$.

Если пластина содержит $n$ дефектов, то для функции распределения предельной нагрузки такой пластины имеем на основании гипотезы "наиболее слабого звена" такое выражение

$$F_n(|p|, \gamma) = 1 - [1 - F_1(|p|, \gamma)]^n . \qquad (3)$$

Эта функция по определению равна вероятности локального разрушения пластины (развития хотя бы одной трещины) при параметре нагрузки не превышающим значения $|p|$ .

<u>Первая глава</u> посвящена исследованию вероятностных характеристик (вероятности разрушения, среднего значения, дисперсии и др.) предельных нагрузок пластин, находящихся в сложном однородном поле напряжений $p, q$ и ослабленных трещинами случайных ориентаций и длин. Предполагается, что геометрические параметры трещин $\alpha$ , $l$ - независимые случайные величины, удовлетворяющие условиям $|\alpha| \leq \pi/2$, $0 \leq l < \infty$ . В таком случае возможные значения случайных предельных напряжений $|p|$ находятся на промежутке ( $0, \infty$ ).

На основании формулы (2) для рассматриваемого случая получено общее выражение для функции распределения предельных напряжений. Для дальнейших вычислений плотность распределения полудлин трещин выбрана в виде

$$f_0(l) = \frac{(s-1)\, a^{s-1}}{(l+a)^s}, \quad s > 1, \quad 0 \leq l < \infty . \qquad (4)$$

Известно, что для функции распределения представленной формулой (3), при больших $n$ имеет место асимптотическое распределение Вейбулла

$$F_n(|p|, \gamma) \approx 1 - \exp[-cn(|p| - p_{min})^m], \quad c > 0,\ m > 0. \qquad (5)$$



Для вычисления параметров $c$ , $m$ распределения (5) используем соотношение

$$c = \lim_{|p| \to p_{min}} \frac{F_1(|p|, \gamma)}{(|p| - p_{min})^m} \qquad (6)$$

и условие $0 < c < \infty$ .

На основании этих соотношений в рассматриваемой главе установлена линейная зависимость вида $m = 2(s-1)$ между параметром однородности материала $m$ и параметром $s$, характеризующим вероятностное распределение дефектов по размерам. Получены также выражения для параметра $c$ .

В предположении, что все ориентации трещин равновероятны ( $f_1(\alpha) = 1/\pi$ ) (это вполне приемлемо для изотропных материалов) в работе записаны формулы для функции распределения предельных напряжений пластин, находящихся в условиях растяжения-растяжения или растяжения-сжатия ( $p \geq 0$, $-\infty < \gamma \leq 1$ ). При этом аналитический вид функции $f(\alpha, \gamma, \rho)$ выбран на основании подхода П.А.Павлова и М.Е.Никулиной (Труды ЛПИ, 1973, № 334), дающего в случае двухосного растяжения или растяжения-сжатия при $\rho = 0$ те же результаты, что и подход В.И.Моссаковского и М.Т.Рыбки (ПММ, 1965, №2). Изучена зависимость вероятности разрушения, среднего значения, дисперсии и коэффициента изменчивости прочности от параметров $\gamma$, $m$, $n$, $\rho$. Показано, что интенсивность уменьшения среднего значения и дисперсии прочности с ростом числа трещин увеличивается при уменьшении параметра однородности материала $m$. Если считать среднее число дефектов в единице площади пластины постоянным, то зависимость вероятностных характеристик прочности от $n$ описывает масштабный эффект.

На основании распределения (5) и соотношения $q = \gamma p$ , в работе получены уравнения кривых средних значений предельных натей.

<u>Объем работы</u>. Диссертационная работа содержит I44 страницы машинописного текста, 44 иллюстрации, I таблицу и список литературы (I09 наименований).

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертационная работа состоит из предисловия, введения, шести глав, заключения и списка цитируемой литературы.

<u>Во введении</u> изложены положения теории вероятностей, используемые в работе, приведены краткие сведения о предельном равновесии пластины с произвольно ориентированной трещиной при сложном напряженном состоянии, дан обзор исследований по статистической теории прочности, описана схема решения задачи по определению вероятностных характеристик прочности хрупких пластин со стохастическим распределением трещин при сложном напряженном состоянии. Рассмотрим кратко эту схему.

Пусть хрупкие пластины растягиваются или сжимаются в двух взаимно перпендикулярных направлениях напряжениями $p$ и $q=\eta p$. Считается, что пластины изготовлены из однородного (т.е. с везде одинаковым сопротивлением развитию трещин) материала, в котором рассеяны невзаимодействующие между собой трещины случайной длины $2l$ и ориентации $\alpha$ ($\alpha$ -угол между линией трещины и направлением усилий $p$). Для пластины безопасными будут такие нагрузки, которые не приведут к распространению ни одной трещины в ней. Максимальная из таких нагрузок называется предельной для данной пластины. В случае невзаимодействующих дефектов предельная нагрузка для пластины совпадает с предельной нагрузкой наименее прочного ее элемента. Таким образом, вычисление предельной нагрузки пластины будет аналогичным



расчету прочности по гипотезе "наиболее слабого звена", согласно которой прочность тела равна прочности его наиболее слабого элемента.

Для невзаимодействующих дефектов предельные напряжения элемента пластины, содержащего трещину, вычисляются по формуле, вытекающей из решения задачи о бесконечной пластине с трещиной. Эта формула имеет вид $|p| = A l^{-\frac{1}{2}} \varphi(\alpha,\eta,\rho)$, $A = K_c/\sqrt{\pi}$, где аналитическое представление функции $\varphi(\alpha,\eta,\rho)$ зависит от типа трещины и от подхода к решению указанной задачи, $\rho$ - коэффициент трения берегов трещин, $K_c$ - постоянная, характеризующая сопротивление материала разрушению. Функция распределения вероятностей предельных напряжений $|p|$ элемента пластины с трещиной определяется по формуле (П.М.Витвицкий, ФХММ,I970, № 5)

$$F_1(|p|,\eta) = \iint_R f(\alpha,l)\,d\alpha\,dl\,, \quad p_{min} \le |p| \le p_{max}\,, \qquad (I)$$

где $f(\alpha,l)$ - плотность совместного распределения вероятностей случайных величин $\alpha, l$. В формуле (I) интегрирование осуществляется по двумерной области $R$ возможных значений параметров $\alpha$ и $l$, для которой выполняется неравенство $A l^{-\frac{1}{2}} \varphi(\alpha,\eta,\rho) < |p|$.

В предположении статистической независимости случайных величин $\alpha$ и $l$ в работе иным путем выведена такая формула для функции $F_1(|p|,\eta)$

$$F_1(|p|,\eta) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f_1(\alpha)\left\{1 - F_0\left[\frac{A^2 \varphi^2(\alpha,\eta,\rho)}{p^2}\right]\right\} d\alpha\,, \qquad (2)$$

где $f_1(\alpha)$ - плотность распределения случайных ориентаций трещин, $F_0(l)$ - функция распределения случайных полудлин дефекта. Пределы интегрирования в этом выражении зависят от интервала изменения ориентаций трещин, от области допустимых значений $\alpha$ для функции $\varphi(\alpha,\eta,\rho)$, а также должны обеспечивать выполнение услорасчет влияния вытяжки стохастически дефектного материала на вероятностные распределения его структурных и прочностных характеристик, распространение метода вычисления вероятностных характеристик прочности на случай дефектных пластин, подверженных тепловому воздействию, изучение влияния малых случайных отклонений формы контура трещины от прямолинейной на предельную нагрузку пластин.

Общая методика выполнения исследований. Проведенные исследования основаны на явном введении в расчет случайных геометрических характеристик дефектов (трещин, жестких стержневых включений). При этом использованы результаты механики разрушения и положения теории вероятностей. Случайный характер предельных значений внешних силовых или температурных факторов обусловлен случайностью длин и ориентаций дефектов или случайными отклонениями формы контура трещины от прямолинейной.

Научная новизна. В предположении о статистической независимости геометрических параметров трещин, распределенных по произвольных законах, получены общие выражения для вероятности разрушения хрупких пластин, находящихся в сложном однородном поле напряжений или под действием теплового потока. На основании двухпараметрических статистических моделей распределения размеров дефектов в виде степенных законов предложено новое обобщение распределения Вейбулла для случая сложного однородного напряженного состояния пластин со стохастическим распределением трещин, жестких стержневых включений (установлены неизвестные до сих пор в литературе аналитические зависимости параметров распределения Вейбулла от соотношения приложенных главных нормальных напряжений, от параметров распределений дефектов по ориентациях и размерах). Получены уравнения вероятностных кривых прочности стохастически дефектных пластин при плоском сложном напряженном состоянии.



Осуществлен расчет влияния технологической вытяжки материала (изменяющей ориентации и величины трещин) на вероятностные характеристики прочности стохастически дефектных пластин при действии сложного поля напряжений.

Решены новые задачи: о предельном тепловом потоке для пластины со статистическим распределением трещин, о влиянии малых случайных отклонений формы контура трещины от прямолинейной на вероятностные характеристики предельных напряжений пластины при ее одноосном растяжении. Впервые рассмотрена задача о прочности хрупких пластин со статистическим распределением жестких стержневых включений.

Практическая ценность. Полученные в работе результаты могут быть использованы:

1) при расчете вероятности разрушения и других вероятностных характеристик прочности пластинчатых элементов конструкций, изготовленных из хрупких неоднородных материалов, которые применяются в машиностроении, строительной механике и других отраслях народного хозяйства;

2) при развитии дальнейших исследований по расчету в вероятностном аспекте длительной и усталостной прочности стохастически дефектных тел.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на VI-ой Всесоюзной конференции по прочности и пластичности (г.Москва, 1975 г.), на IV-ом Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (г.Киев, 1976 г.), на VII-ой и VIII-ой конференциях молодых ученых Физико-механического института АН УССР (г.Львов, 1975 г., 1977 г.), на семинарах по механике хрупкого разрушения Физико-механического института АН УССР.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано восемь старасчет влияния вытяжки стохастически дефектного материала на вероятностные распределения его структурных и прочностных характеристик, распространение метода вычисления вероятностных характеристик прочности на случай дефектных пластин, подверженных тепловому воздействию, изучение влияния малых случайных отклонений формы контура трещины от прямолинейной на предельную нагрузку пластин.

Общая методика выполнения исследований. Проведенные исследования основаны на явном введении в расчет случайных геометрических характеристик дефектов (трещин, жестких стержневых включений). При этом использованы результаты механики разрушения и положения теории вероятностей. Случайный характер предельных значений внешних силовых или температурных факторов обусловлен случайностью длин и ориентаций дефектов или случайными отклонениями формы контура трещины от прямолинейной.

Научная новизна. В предположении о статистической независимости геометрических параметров трещин, распределенных по произвольных законах, получены общие выражения для вероятности разрушения хрупких пластин, находящихся в сложном однородном поле напряжений или под действием теплового потока. На основании двухпараметрических статистических моделей распределения размеров дефектов в виде степенных законов предложено новое обобщение распределения Вейбулла для случая сложного однородного напряженного состояния пластин со стохастическим распределением трещин, жестких стержневых включений (установлены неизвестные до сих пор в литературе аналитические зависимости параметров распределения Вейбулла от соотношения приложенных главных нормальных напряжений, от параметров распределений дефектов по ориентациях и размерах). Получены уравнения вероятностных кривых прочности стохастически дефектных пластин при плоском сложном напряженном состоянии.



Осуществлен расчет влияния технологической вытяжки материала (изменяющей ориентации и величины трещин) на вероятностные характеристики прочности стохастически дефектных пластин при действии сложного поля напряжений.

Решены новые задачи: о предельном тепловом потоке для пластины со статистическим распределением трещин, о влиянии малых случайных отклонений формы контура трещины от прямолинейной на вероятностные характеристики предельных напряжений пластины при ее одноосном растяжении. Впервые рассмотрена задача о прочности хрупких пластин со статистическим распределением жестких стержневых включений.

Практическая ценность. Полученные в работе результаты могут быть использованы:

I) при расчете вероятности разрушения и других вероятностных характеристик прочности пластинчатых элементов конструкций, изготовленных из хрупких неоднородных материалов, которые применяются в машиностроении, строительной механике и других отраслях народного хозяйства;

2) при развитии дальнейших исследований по расчету в вероятностном аспекте длительной и усталостной прочности стохастически дефектных тел.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на УI-ой Всесоюзной конференции по прочности и пластичности (г.Москва,1975 г.), на IУ-ом Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (г.Киев,1976 г.), на УII-ой и УIII-ой конференциях молодых ученых Физико-механического института АН УССР (г.Львов, 1975 г., 1977 г.), на семинарах по механике хрупкого разрушения Физико-механического института АН УССР.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано восемь ста-

Работа выполнена в Физико-механическом институте АН УССР.

Научный руководитель – кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник ВИТВИЦКИЙ П.М.

Официальные оппоненты – доктор технических наук, профессор
МОСКАЛЕНКО В.Н.
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник КИТ Г.С.

Ведущее предприятие – Институт механики АН УССР, г.Киев

Защита состоится "______" ____________1979 г. в _____час. на заседании специализированного совета К.016.59.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических и кандидата технических наук в Институте прикладных проблем механики и математики АН УССР (г.Львов, ул.Матейко,4).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладных проблем механики и математики АН УССР (г.Львов,ул.Научная, 3Б).

Отзывы на автореферат (в двух экземплярах) просим направлять по адресу: 290047, ГСП, г.Львов-47, ул.Научная, 3Б, ученому секретарю специализированного совета.

Автореферат разослан "_____" ____________1979 г.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОГО СОВЕТА ШЕВЧУК П.Р.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время в задачах механики де-
формируемого твердого тела все большее применение находят методы
теории вероятностей и математической статистики. Это обусловлено
тем, что вводимые в расчет факторы часто имеют случайный характер.

Большое влияние на применение аппарата теории вероятностей
и математической статистики к проблемам механики деформируемого
твердого тела оказывают работы В.В.Болотина, В.А.Ломакина,В.Н.Мос-
каленко, В.А.Пальмова, Л.П.Хорошуна. Вероятностные методы эффектив-
но использованы в работах А.А.Каминского, В.П.Когаева,Е.С.Перевер-
зева, С.В.Серенсена, В.С.Стреляева, Р.Н.Швеца и других авторов.

Прочность тел зависит от многих факторов, преимущественно слу-
чайного характера. Поэтому важное значение имеют исследования,в ос-
нову которых положена статистическая трактовка прочности.Этим воп-
росам посвящены работы В.Вейбулла, Т.А.Конторовой, Я.И.Френкеля,
В.В.Болотина, Г.С.Писаренко, В.Т.Трощенко,С.Д.Волкова,А.А.Лебеде-
ва, Д.М.Шура, А.И.Чудновского и других авторов. В структуре реаль-
ных материалов имеется значительное количество остроконечных де-
фектов (трещин, включений), размеры, ориентации которых меняются
случайным образом. Отсюда следует необходимость аналитического ис-
следования прочности хрупких тел с явным введением в расчет случай-
ных геометрических параметров дефектов. Немногочисленные исследова-
ния этого плана, представленные в основном работами Фишера и Холло-
мона, П.М.Витвицкого, требуют дальнейшего развития.

Целью работы является исследование вероятностных характерис-
тик прочности стохастически дефектных пластин при различных пред-
положениях о природе дефектов, о законах распределения случайных
геометрических параметров трещин и построение вероятностных кри-
териев разрушения материалов при сложном напряженном состоянии.

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНЫХ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ПОПИНА СТЕПАН ЮРЬЕВИЧ

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ХРУПКИХ ПЛАСТИН, ОСЛАБЛЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДЕФЕКТАМИ

Специальность 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Львов-1979