Міністерство освіти і науки
Тернопільський національний економічний університет

Березька К.М

Фінансова математика
(для заочної форми навчання)

Навчальний посібник

Тернопіль 2016

Фінансова математика (для заочної форми навчання): навчальний посібник / Березька К.М. – Тернопіль: 2016. – 141 с.

У посібнику викладено основні розділи фінансової математики. Головна увага приділена методам розв’язування задач, а також розгляду основних питань теорії при їх аналізі.

Посібник містить теоретичні відомості, багато прикладів розв’язування задач, вправи для самостійної, контрольної та індивідуальної робіт, питання для самоконтролю.

Посібник можуть використовувати викладачі, аспіранти, студенти заочної форм навчання.

ЗМІСТ

ВСТУП

В останнє десятиріччя значно збільшилась зацікавленість фінансовою математикою. Це зумовлено, перш за все, тим, що на фінансових ринках і у сфері послуг збільшилась кількість працівників. З них не всі мають відповідну підготовку з сучасних методів фінансових обчислень. Тому в студентів, аспірантів та спеціалістів у цій галузі виникла потреба в оволодінні математичним апаратом фінансової математики.

Не менш важливий вплив на розвиток цієї дисципліни має поширення персональних комп'ютерів у середовищі фінансової системи, що привело до удосконалення фінансово-кредитної діяльності.

Навчальний посібник умовно можна поділити на дві частини. Перша складається з трьох розділів і охоплює базові поняття фінансової математики – концепцію вартості грошей у часі, відсотки, види відсоткових ставок, процеси нарощення і дисконтування, операції конвертування (обміну) валюти, принцип фінансової еквівалентності платежів.

Друга (розділ 4) присвячена фінансовим потокам платежів, тобто тим випадкам фінансової практики, коли за умовами операції платежі розподілені в часі. Особливу увагу приділено фінансовим рентам постнумерандо і пренумерандо, визначенню їхніх параметрів, конверсії рент.

У кінці кожного розділу містяться питання для самоконтролю та вправи для розв'язування, а в додатках – тестові завдання. Така структура посібника дає змогу студентам працювати як під керівництвом викладача, так і самостійно опрацьовувати матеріал.

При підготовці посібника використані матеріали з [1–16].

1. БАЗОВІ ПОНЯТТЯ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

1.1. Фінансова математика – основа кількісного аналізу фінансових операцій

Будь-який інвестиційний проект, фінансово-кредитна операція чи комерційна угода припускають наявність певних умов їхнього виконання. Обумовлюється обсяг грошових сум, платежів, час, термін виконання, відсоткові ставки і деякі інші додаткові величини. В межах однієї фінансової операції перераховані показники утворять деяку взаємопов'язану систему. При зміні хоча б одного параметру в цій системі зміниться кінцевий результат операції. Такі системи є об'єктом додатку кількісного фінансового аналізу. Перевірені практикою методи цього аналізу і становлять предмет фінансової математики (ФМ).

Кількісний фінансовий аналіз на нині розвивається як наука. На це вказує те, що кілька останніх Нобелівських премій з економіки присуджені за роботи саме в цьому напрямку.

Кількісний фінансовий аналіз застосовується як в умовах визначеності, так і невизначеності. У першому випадку передбачається, що дані для аналізу заздалегідь відомі і фіксовані. Наприклад, при випуску звичайних облігацій однозначно визначаються всі параметри – термін, купонна прибутковість, порядок викупу. Аналіз помітно ускладнюється, коли доводиться враховувати невизначеність – динаміку грошового ринку (рівень відсоткової ставки, коливання валютного курсу і т. д.), поводження контрагента.

ФМ вивчає як елементарні нарахування відсотків, так і відносно складні розрахунки, наприклад, оцінювання впливу різних чинників на ефективність випуску облігацій чи методів скорочення ризику шляхом диверсифікації портфеля фінансових інвестицій і т. д.

Основні завдання ФМ такі:

- розробка планів виконання фінансових операцій;
- визначення кінцевих результатів фінансових операцій для всіх учасників;
- вимірювання залежності кінцевих результатів операції від основних її параметрів та маневрування цими параметрами для розрахунку еквівалентної зміни початкових умов операції;
- оптимізація портфеля активів.

Цей перелік не є вичерпним. У сучасній практиці виникають нові завдання.

Методи ФМ використовуються в будь-якій сфері фінансів і кредиту. В тому числі і на етапі розробки умов контрактів, при фінансовому проектуванні, при порівнянні і виборі довготермінових інвестиційних проектів. Фінансові обчислення використовуються для розрахунків у довготерміновому особистому страхуванні, наприклад, при проектуванні й аналізі стану пенсійних фондів (розрахунок тарифів, оцінювання спроможності фондів виконати свої зобов'язання перед пенсіонерами і т. д.), довготерміновому медичному страхуванні. Причому сфера застосування методів кількісного аналізу фінансових операцій поступово розширюється.

1.2. Принцип зміни цінності грошей у часі та принцип фінансової еквівалентності

У практичних фінансових операціях суми грошей завжди пов'язані з часом. У контрактах фіксуються відповідні терміни, дати, періодичність виплат. Для довготермінових операцій час відіграє не меншу, а іноді навіть і більшу роль, ніж обсяги грошових сум. Необхідність обліку часового фактора випливає із сутності фінансування, кредитування й інвестування і виражається у принципі ***нерівноцінності грошей***, що належать до різних моментів часу, чи в принципі ***зміни цінності грошей у часі***.

Гроші, що наявні сьогодні, можуть бути інвестовані і принести дохід у майбутньому. Отриманий дохід, відповідно, реінвестується і т. д. Тому дві однакові за абсолютною величиною, але внесені в різні часи суми, нерівноцінні, тобто сьогоднішні гроші, цінніші за майбутні, а, майбутні надходження менш коштовні.

У період інфляції вплив фактора часу ще більше підсилюється. Тому є неправомірним підсумовування грошових величин, що належать до різних моментів часу, особливо при прийнятті довготермінових фінансових рішень.

Підсумовування грошових величин різного моменту часу можливе для операцій, де фактор часу не має принципового значення, наприклад, у бухгалтерському обліку (для одержання підсумків за періодами) і у фінансовому контролі. Також неправомірно порівнювати різночасні грошові величини. Їх можна порівняти тільки тоді, коли суми звести до одного моменту часу.

Не менш важливий у фінансовому аналізі принцип ***фінансової еквівалентності*** чи ***рівності фінансових зобов'язань сторін***, які беруть участь в операції. Покажемо цей принцип на прикладі. 1) Банк бере у фізичної особи гроші і зобов'язується періодично виплачувати відсотки, а наприкінці терміну повернути суму, яка дорівнює початковій вартості грошей. 2) Страхувальник оплачує вартість страхування, а страховик зобов'язується виплатити йому страхову суму, але тільки при настанні страхового випадку. В першому прикладі платежі обох сторін безумовні, в другому – платіж страховика має імовірнісний характер.

Принцип еквівалентності в старій фінансовій літературі називався умовою безпеки [15]. Він дає змогу змінювати умови контрактів без порушення прийнятих зобов'язань. За згоди контрагента, відповідно до принципу еквівалентності, можна змінювати рівень відсоткових ставок, їхній вид, терміни виконання зобов'язань, розподіл платежів у часі і т. д. в межах однієї операції, не порушуючи взаємної відповідальності.

Проте зазначені вище принципи не можуть бути реалізовані без нарощення відсотків чи дисконтування із застосуванням якогонебудь виду відсоткової ставки.

1.3. Відсотки, види відсоткових ставок

Відсотки або ***відсоткові гроші*** – це абсолютна величина доходу від надання грошей у борг у будь-якій його формі (видача позички, продаж товару в кредит, купівля облігації, переміщення грошей на депозитний рахунок і т. д.).

При фінансовій угоді кредитор і позичальник домовляються про обсяг відсоткової ставки. ***Відсоткова ставка*** – це відносна величина доходу за фіксований проміжок часу (відношення доходу або відсоткових грошей до суми боргу). Відсоткова ставка вимірюється у відсотках або десяткових чи звичайних дробах. В останньому випадку вона фіксується з точністю до 1/16 чи 1/32. Найчастіше при виконанні розрахунків відсоткові ставки звичайно виміряються в десяткових дробах.

Період нарахування – це часовий інтервал, до якого прив'язана відсоткова ставка. Його не варто плутати з терміном нарахування. Періодом нарахування може бути рік, півріччя, квартал, місяць, день: Найчастіше на практиці мають справу з річними ставками.

Нараховані відсотки відповідно до домовленості між кредитором і позичальником можуть виплачуватися в міру їхнього нарахування або приєднуватися (капіталізуватися) до основної суми боргу. ***Нарощення*** – *це* процес збільшення суми грошей у часі у зв’язку з приєднанням відсотків до суми боргу.

Крім визначення відсотків при русі в часі від сьогодні до майбутнього, існує визначення відсотків в зворотному напрямку – від майбутнього до сьогодні. У цьому випадку сума грошей, яка належить до майбутнього, зменшується на величину відповідного дисконту (знижки). Такий спосіб називають ***дисконтуванням*** (скороченням).

Залежно від умов контрактів існують різні способи нарахування відсотків і, відповідно, різні види відсоткових ставок. Можна виокремити ознаки, за якими розрізняються відсоткові ставки:

- за базою нарахування;

Базу – сума, отримана на попередньому етапі нарощення чи дисконтування. База може бути ***постійною*** або ***змінною***. У першому випадку використовують ***прості***, у другому **–** ***складні*** відсоткові ставки.

- за принципом розрахунку відсоткових грошей;

Принципів розрахунків, як було сказано вище, є два – від сьогодні до майбутнього і, навпаки, від майбутнього до сьогодні. Відповідно застосовують ***ставки нарощення*** і ***дисконтні*** (***дисконтові***, ***облікові***) ставки.

Інколи у фінансовій літературі відсотки, отримані за ставкою нарощення, називають *декурсивними*, за дисконтною ставкою – *антисипативними* [8, 9].

Крім цього основного поділу, відсоткові ставки потрібно розрізняти:

- за стабільністю обсягу відсоткових ставок;

Відсоткові ставки можуть бути *фіксованими* чи *плаваючими*. У другому випадку вказується не сама ставка, а база, що змінюється в часі, (базова ставка) і обсяг надбавки до неї – маржа.

- за принципом погашення заборгованості;

Відсоткова ставка (проста чи складна) може застосовуватися до фактичної суми боргу (та сума, яка враховує послідовні його погашення) або прості відсотки нараховуються відразу на всю суму боргу без обліку послідовного його погашення (наприклад, застосування в споживчому кредиті).

- відсотки бувають *дискретні*, тобто ті, що нараховуються за фіксовані інтервали часу (рік, півріччя і т. д.), і *неперервні*, коли нарощення чи дисконтування відбувається безупинно, за нескінченно малі проміжки часу – *неперервні* відсоткові ставки.

Питання для самоконтролю

1. Що є предметом фінансової математики?
2. Охарактеризуйте основні завдання фінансової математики.
3. Розкрийте основні принципи фінансових операцій.
4. Поясніть принцип зміни цінності грошей у часі.
5. Охарактеризуйте принцип фінансової еквівалентності.
6. Дайте визначення понять “відсотки” і “відсоткова ставка”.
7. Чи існує відмінність між періодом нарахування і терміном нарахування?
8. Порівняйте процеси нарощення і дисконтування.
9. За якими ознаками розрізняються відсоткові ставки?
10. Назвіть види відсоткових ставок.

2. ПРОСТА ВІДСОТКОВА СТАВКА

2.1. Формула нарощення

Як уже зазначалося, залежно від постійної або змінної бази нарахування відсотків використовується проста або складна відсоткова ставка. Розглянемо випадок перший – база нарахування відсотків не змінюється, відсотки не приєднуються до суми боргу, а періодично виплачуються. Тут відсоткова ставка – проста[1]. Введемо деякі означення.

Нарощена сума позички (боргу, депозиту, інших видів виданих у чи борг інвестованих грошей) – це первісна (початкова) сума з нарахованими відсотками до кінця терміну нарахування. Визначається вона як добуток первісної суми боргу на множник нарощення.

Множник нарощення показує, у скільки разів нарощена сума більша за первісну. Його розрахункова формула залежить від виду застосовуваної відсоткової ставки.

Візьмемо такі позначення:

I – відсотки за весь термін позички;

P – первісна сума боргу;

S – нарощена сума, тобто сума наприкінці терміну;

i – ставка нарощення відсотків (у десятковому дробі);

n – термін позички.

Якщо термін виміряється в роках, то i – річна відсоткова ставка. За один рік відсотки становитимуть Pi. Відповідно за n років, тобто за весь термін, відсотки становитимуть

$$I = Pni, \tag{2.1}$$

а нарощена сума дорівнюватиме

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni). \tag{2.2}$$

Вираз (2.2) називають ***формулою нарощення*** за простими відсотками чи ***формулою простих відсотків***. Множник $(1 + ni)$ – множник нарощення простих відсотків.

Множник нарощення однаково залежить як від відсоткової ставки, так і від терміну. Якщо збільшити один із цих показників у k раз, то множник збільшиться в

---

[1] *Примітка.* Нарощення за простими відсотками, крім випадків з постійною базою, використовується при короткотермінових позичках (на термін до 1 року).

$$\frac{(1+kni)}{(1+ni)}\text{ разів.}$$

Приклад 2.1. Позику 1000 грн. було взято на термін 5 років. Відсотки прості за ставкою 20% річних ($i = 0{,}2$).

Необхідно визначити суму заборгованості та нараховані відсотки. У скільки разів збільшиться нарощена сума боргу, якщо термін взяття позики зріс у 2 рази?

▲ Суму боргу вираховуємо за формулою (2.2)

$$S = 1000(1 + 5 \cdot 0{,}2) = 1000 \cdot 2 = 2000 \text{ грн.},$$

а відсотки за формулою (2.1)

$$I = 1000 \cdot 5 \cdot 0{,}2 = 1000 \text{ грн.}$$

Якщо термін взяття позики збільшився у 2 рази, то множник нарощення і відповідно нарощена сума боргу зросте у

$$\frac{(1 + 2 \cdot 5 \cdot 0{,}2)}{(1 + 5 \cdot 0{,}2)} = 1{,}5 \text{ рази.} \blacktriangle$$

Графічно процес нарощення за простими відсотками має вигляд (рис. 2.1).

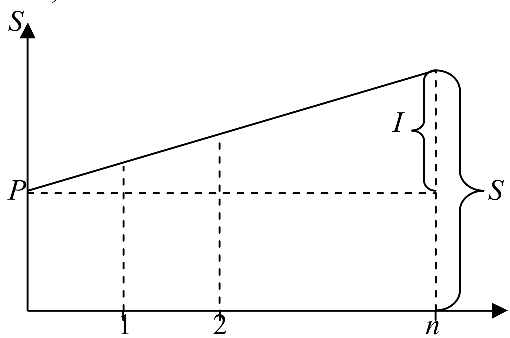


Рис. 2.1. Процес нарощення за простими відсотками

А. Розрахунок відсотків „зі 100", „на 100", „в 100"

Нарощене число – це число, яке дорівнює сумі початкового числа і нарахованих на нього відсотків.

Зменшене число – це число, яке дорівнює різниці початкового числа і нарахованих на нього відсотків.

Відсотки відносно нарощеного числа називаються відсотками ***„на 100"***.

Відсотки щодо початкового числа – відсотки ***„зі 100”***.

Відсотки щодо зменшеного числа називаються відсотками ***„в 100”***.

Відсотки „на 100” використовуються в задачах, коли відома ставка відсотків i та сума двох чисел, одне з яких – відсотки „зі 100” іншого.

Відсотки „в 100” використовуються в задачах, коли відома ставка відсотків i та різниця двох чисел, одне з яких – відсотки „зі 100” іншого.

Позначимо Q – початкове число, тоді

$$Q' = iQ \text{ – відсотки „зі 100”};$$

$$S' = \frac{iQ}{1+i} \text{ – відсотки „на 100”};$$

$$K' = \frac{iQ}{1-i} \text{ – відсотки „в 100”}.$$

<u>*Приклад 2.2*</u>. Знайти з 40 тис. грн. 20% а) „зі 100”; б) на 100”; „в 100”. Перевірити отримані результати.

▲ а) $Q' = 0{,}2 \cdot 40 = 8$ тис. грн.;

б) $S' = \dfrac{0{,}2 \cdot 40}{1 + 0{,}2} = 6{,}67$ тис. грн.;

в) $S' = \dfrac{0{,}2 \cdot 40}{1 - 0{,}2} = 10$ тис. грн.

Перевірка. „На 100”: 40 – 6,67 = 33,33 тис. грн.

$33{,}33 \cdot 0{,}2 = 6{,}67$ тис. грн.

„В 100”: 40 + 10 = 50 тис. грн.

$50 \cdot 0{,}2 = 10$ тис. грн. ▲

Б. короткотермінові позички

Якщо відсоткова ставка річна, а термін позички менший року або коли термін позички менший періоду нарахування, то для визначення нарощеної суми боргу термін подамо у вигляді:

$$n = \frac{t}{K},$$

де t – число днів позички,

K – число днів у році. Показник *K* називають ***часовою базою*** нарахування відсотків.

Існують дві часові бази:

1) *K* = 360 днів (припускають, що місяць має 30 днів, отже, 12 місяців × 30 днів = 360 днів);
2) *K* = 365, 366 днів (залежно від того, чи рік високосний).

Якщо *K* = 360, то одержують *звичайні* чи *комерційні* відсотки, а при використанні дійсної тривалості року (365, 366 днів) розраховують *точні* відсотки.

Число днів позички також можна визначати приблизно (тривалість позички визначається за умови, що будь-який місяць дорівнює 30 дням) і точно (підрахунок числа днів між датою видачі позички і датою її погашення). День видачі і день погашення вважають за один день. Існують таблиці для визначення точного числа днів між двома датами.

Відповідно до того, що є різні часові бази і різний підрахунок днів позички, на практиці застосовують три варіанти розрахунку простих відсотків.

1. *Точні відсотки з точним числом днів позички*. Цей спосіб застосовують центральні банки багатьох країн і великих комерційних банків, наприклад у Великобританії, США. У комерційних документах він позначається як 365/365 чи АСТ/АСТ. Цей варіант дає найточніші результати.

2. *Звичайні відсотки з точним числом днів позички*. Цей метод іноді називають *банківським*. Спосіб поширений у позичкових операціях комерційних банків між країнами, та всередині країн Бельгії, Франції, Швейцарії. Він позначається як 365/360 чи АСТ/360. Цей варіант дає трохи більший результат, ніж застосування точних відсотків. Цікавим є те, що якщо число днів позички буде більшим за 360, то сума нарахованих відсотків буде більшою, ніж передбачалася річною ставкою. Наприклад, якщо $t = 362$, $n = \frac{362}{360} = 1{,}005556$, то множник нарощення за рік за умови, що *i* = 18%, становитиме 1,181. Хоча згідно з формулою (2.2) він має становити $1 + 1 \cdot 0{,}18 = 1{,}18$.

3. *Звичайні відсотки з наближеним числом днів позички*. Такий метод застосовують тоді, коли не потрібно великої точності, наприклад, для проміжних розрахунків. Його практикують комер-

ційні банки Німеччини, Швеції, Данії. Метод умовно позначається як 360/360.

Варіант розрахунку з точними відсотками і наближеним числом днів позички не існує.

Примітка. Для розрахунку числа днів позички найкраще використати таблицю порядкових днів у році (додаток 1). Позначимо $N(\partial)$ – порядковий номер дати в таблиці. Якщо ∂_1 і ∂_2 – дві дати одного року, то число днів між цими датами:

$$D(\partial_1, \partial_2) = N(\partial_2) - N(\partial_1) .$$

Якщо ∂_1 і ∂_2 – дві дати різних років, то число днів між цими датами:

$$D(\partial_1, \partial_2) = N(\partial_2) - N(\partial_1) + 365n ,$$

де n – число років. Якщо ж цей період – високосний рік, то потрібно додати ще 1 день.

Розрахунок наближеного числа днів між датами проводиться за іншою схемою. Нехай $\partial_1 = [d_1; m_1; y_1]$ і $\partial_2 = [d_2; m_2; y_2]$ – дві дати, де y – рік, m – порядковий номер місяця, d – число. Наближене число днів між цими датами:

$$D(\partial_1, \partial_2) = 360(y_2 - y_1) + 30(m_2 - m_1) + (d_2 - d_1) .$$

Приклад 2.3. Позику 1000 грн. було взято з 5 січня по 20 листопада 2003 р. за ставкою i=0,22 річних.

Яку суму повинен заплатити боржник наприкінці терміну при нарахуванні простих відсотків? Розрахунок зробити для трьох методів.

▲ Визначимо число днів позики: точне – 319, наближене – 315 ($30 \cdot (11-1) + (20-5) = 315$).

1. Точні відсотки з точним числом днів позики (365/365):

$$S = 1000\left(1 + \frac{319}{365} \cdot 0,22\right) = 1000 \cdot 1,192274 = 1192,274 \text{ грн.}$$

2. Звичайні відсотки з точним числом днів позики (365/360):

$$S = 1000\left(1 + \frac{319}{360} \cdot 0,22\right) = 1000 \cdot 1,194944 = 1194,944 \text{ грн.}$$

3. Звичайні відсотки з наближеним числом днів позики (360/360):

$$S = 1000\left(1 + \frac{315}{360} \cdot 0{,}22\right) = 1000 \cdot 1{,}1925 = 1192{,}5 \text{ грн. } \blacktriangle$$

В. Нарахування відсотків у суміжних календарних періодах

Часто дати початку і закінчення позики знаходяться в двох різних суміжних календарних періодах. При оподаткуванні, в бухгалтерському обліку, при визначенні річних сум доходу і т. д. виникає необхідність у розподілі суми відсотків за періодами. Тоді загальна сума нарахованих простих відсотків становитиме суму відсотків, отриманих у кожнім році:

$$I = I_1 + I_2 = Pn_1 i + Pn_2 i\,,$$

де n_1, n_2 – частки терміну позички, що припадають на кожний календарний рік.

Г. Змінні ставки

Формула (2.2) припускає, що протягом періоду n ставка відсотка постійна. Але часто в кредитних угодах відсоткові ставки змінюються в часі. Для простих ставок нарощена сума на закінчення терміну визначається за формулою:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots n_m i_m) = P\left(1 + \sum_{j=1}^{m} n_j i_j\right), \qquad (2.3)$$

де i_j – ставка простих відсотків у *j*-му періоді, n_j – тривалість *j*-го періоду з постійною ставкою.

Приклад 2.4. На 2000 грн., вкладених у банк під прості відсотки на 1,5 року, згідно з контрактом передбачається такий порядок нарахування відсотків: перший квартал – 10% річних, другий – 12% річних, третій – 13%, за два наступних – 15% і за останній – 20%. Необхідно визначити нарощену суму вкладу на кінець терміну, ставку відсотків за період контракту, відповідну річну просту ставку відсотків.

▲ Нарощену суму вкладу вираховуємо за формулою (2.3):

$$S = 2000\left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}12 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}13 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}15 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}2\right) = 2425 \text{ грн.}$$

Такий же результат можна отримати, перейшовши від річної ставки відсотків до квартальної. Якщо *i* – річна ,то *i*/4 – квартальна. Тоді

$$S = 2000\left(1 + 1\cdot\frac{0{,}1}{4} + 1\cdot\frac{0{,}12}{4} + 1\cdot\frac{0{,}13}{4} + 2\cdot\frac{0{,}15}{4} + 1\cdot\frac{0{,}2}{4}\right) = 2425 \text{ грн.}$$

Ставка відсотків за період контракту:

$$p = \frac{2425 - 2000}{2000} = \frac{425}{2000} = 0{,}21, \text{ тобто } 21\%.$$

Річна ставка відсотків:

$$i = \frac{0{,}21}{1{,}5} = 0{,}14, \text{ тобто } 14\%. \ \blacktriangle$$

Д. Нарахування відсотків при зміні сум депозиту в часі

Якщо сума, на яку нараховуються відсотки, змінює свою величину в часі (на поточний рахунок періодично надходять чи знімаються гроші і т. п.), то відсотки розраховуються за формулою:

$$I = \sum_j R_j n_j i, \tag{2.4}$$

де R_j – залишок засобів на рахунку в момент j після наступного надходження чи знімання засобів, n_j – термін перебування грошей на рахунку (в роках) до нової зміни залишку засобів.

В ощадно-банківській справі використовують такий спосіб нарахування відсотків. Для цього перетворимо (2.4). Термін вимірюємо у днях, а ставку відсотків – у відсотках. Нехай $n_j = \frac{t_j}{K}$, де t_j – число днів між надходженням і зняттям грошей (дні надходження і зняття рахуються як один день). Після нескладних перетворень (2.4) буде такою:

$$I = \sum_j R_j \frac{t_j}{K}\cdot\frac{i}{100} = \sum_j \frac{R_j t_j}{100}\cdot\frac{i}{K} = \sum_j \frac{R_j t_j}{100} : \frac{K}{i}. \tag{2.5}$$

Величину $\sum_j \frac{R_j t_j}{100}$ називають *відсотковим числом*, а $\frac{K}{i}$ – *відсотковим дільником* (*дивізор*) (дивізор – величина постійна).

<u>Приклад 2.5</u>. На рахунку відбуваються такі операції: 4 лютого надійшли 500 грн., 4 березня – 700 грн., 10 березня знято 400 грн., 4 квітня надійшли 1000 грн. Знайти суму грошей на 4 травня цього ж року (рік не високосний). Ставка відсотків 20% річних.

▲ Відсотковий дільник становитиме 365:20 = 18,25. Розрахунок суми відсоткових чисел подамо у таблиці.

Дата	Рух засобів	Залишок	Термін	Відсоткове число
4.02	500	500	28	140
4.03	700	1200	6	72
10.03	– 400	800	25	200
4.04	1000	1800	30	540
4.05	–	1800	–	–
Всього				952

Відсоткове число рахуємо так: $\frac{500 \cdot 28}{100} = 140$; $\frac{1200 \cdot 6}{100} = 72$;

$\frac{800 \cdot 25}{100} = 200$; $\frac{1800 \cdot 30}{100} = 540$.

Згідно з формулою (2.5) відсотки за весь період становлять:

$$I = \frac{952}{18{,}25} = 52{,}16 \text{ грн.}$$

Отже, на 4 травня на рахунку є 1800 + 52,16 = 1852,16 грн. ▲

Е. Реінвестування за простими ставками.

Задачу зі змінними ставками дещо змінимо. Вважаємо, що після періоду n_1, коли проста ставка i_1 змінюється на i_2, закінчується перша кредитна операція. В результаті отримаємо нарощену суму S_1. Ця сума буде початковою для другої кредитної операції з простою ставкою i_2 і терміном n_2 і т. д. Фактично це є реінвестування засобів, отриманих на кожному етапі нарощення, за допомогою постійної чи змінної ставок. Нарощена сума для всього терміну в цьому випадку буде така:

$$S = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2)\dots(1 + n_m i_m), \tag{2.6}$$

де n_m – термін, протягом якого існує постійна ставка простих відсотків i_m.

Якщо всі терміни нарахування n_m і ставки i_m однакові ($n_m = n$, $i_m = i$), то (2.6) буде такою:

$$S = P(1 + ni)^m, \tag{2.7}$$

де m – кількість повторень реінвестування.

Приклад 2.6. 1.02.03 на місячний депозит покладено 2000 грн. під 18% річних. Якою буде нарощена сума, якщо операція повторюється 4 рази? Розрахунок провести за методами ACT/ACT та $360/360$.

▲ Якщо нараховувати точні відсотки з точним числом днів, то

$$S = 2000 \cdot \left(1 + \frac{28}{365} \cdot 0{,}18\right)\left(1 + \frac{31}{365} \cdot 0{,}18\right)\left(1 + \frac{30}{365} \cdot 0{,}18\right) \times$$
$$\times \left(1 + \frac{31}{365} \cdot 0{,}18\right) = 2120{,}635 \text{ грн.}$$

Звичайні відсотки з наближеним числом днів:

$$S = 2000\left(1 + \frac{30}{360} \cdot 0{,}18\right)^4 = 2122{,}727 \text{ грн. } \blacktriangle$$

2.2. Погашення заборгованості частинами

Якщо борг віддається не в кінці терміну позички, а виплачується частинами протягом цього терміну, то грошові надходження називають *частковими платежами.*

А. Контур фінансової операції

Необхідна умова фінансової чи кредитної операції в будь-якій її формі – збалансованість вкладів і віддач. Пояснимо її на прикладі.

Нехай взято позичку обсягом P на термін T. Через період t_1 вона збільшилась до величини P_1 (відповідно до нарахування відсотків) і її частково погашаємо платежем R_1. Борг зменшується до K_1. Через t_2 борг зросте до P_2 і його частково погашаємо платежем R_2 до величини K_2. До кінця терміну через період t_3 борг зросте до P_3 і ми його повністю погашаємо сумою R_3. І нехай для нас не має значення, яка частина з цих платежів R_1, R_2, R_3 йде на виплату відсотків, а яка – на погашення боргу. Відобразимо усі операції на графіку (рис. 2.2). У кінцевий момент заборгованість має дорівнювати нулю. Такий графік називається *контуром операції.*

Збалансованою буде операція, яка обов'язково має замкнутий контур. Тобто, остання виплата повністю покриває залишок заборгованості. У цьому випадку сукупність платежів точно відповідає умові угоди.

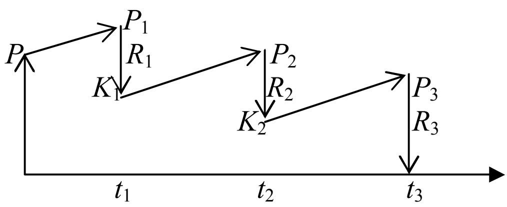


Рис. 2.2. Контур операції

Б. Часткові платежі

При часткових платежах виникає два питання:

1. Яку суму брати за основу нарахування відсотків?
2. Як визначати залишок заборгованості?

Ці питання визначаються двома методами: ***актуарним*** і ***правилом торговельника*** (***продавця***) [15]. За замовчуванням, при нарахуванні відсотків в обох методах використовуються звичайні відсотки з наближеним числом днів (360/360).

Актуарний метод застосовується переважно в операціях з терміном більше року. Цей метод припускає послідовне нарахування відсотків на фактичні суми боргу. Частковий платіж: йде спочатку на погашення відсотків, нарахованих на дату платежу. Якщо частковий платіж більший, ніж нараховані відсотки, то різниця (залишок) йде на погашення основної суми боргу. Наступні відсотки нараховуються від зменшеної на цю різницю суми і т. д. Якщо ж частковий платіж менший, ніж нараховані відсотки, то основна сума боргу не змінюється, а цей частковий платіж приєднується до наступного платежу. Для випадку, показаного на рис. 2.2, одержимо такі розрахункові формули для визначення залишку заборгованості K_j:

$$K_1 = P(1 + t_1 i) - R_1; \qquad K_2 = K_1(1 + t_2 i) - R_2. \qquad (2.8)$$

Оскільки остання виплата повністю має покривати залишок заборгованості, то:

$$K_2(1 + t_3 i) - R_3 = 0. \qquad (2.8')$$

<u>Приклад 2.7</u>. Підприємство зобов'язалося погасити борг обсягом 1 млн. грн. за 1,5 року (з 15.04.02 по 15.10.03 р.). Кредитор згідний одержувати часткові платежі. Відсотки нараховуються за ставкою 18% річних. Часткові надходження були такі:

15.08.02 р. – 50 тис. грн.;

30.04.03 р. – 400 тис. грн.;

15.07.03 р. – 300 тис. грн.

Необхідно знайти залишок боргу на 15.10.03 р. Нарисувати контур операції.

▲ Рахуємо борг на 15.08.02 р.:

$$S = 1000000\left(1 + \frac{120}{360} \cdot 0{,}18\right) = 1060000 \text{ грн.}$$

Отже, нараховані відсотки $I = 60000$ грн. Платіж на це число 50000 грн. менший, ніж відсотки, тому він приєднується до наступного надходження, а основна сума боргу 1 млн. грн. не змінюється.

30.04.03 р.

Борг із відсотками:

$$S = 1000000\left(1 + \frac{375}{360} \cdot 0{,}18\right) = 1187500 \text{ грн.}$$

Нараховані відсотки $I = 1187500 - 1000000 = 187500$ грн.

Платіж дорівнює 50000 + 400000 = 450000 грн.

Оскільки платіж більший, ніж відсотки, то залишок боргу становить:

1187500 – 450000 = 737500 грн.

15.07.03 р.

Борг із відсотками:

$$S = 737500\left(1 + \frac{75}{360} \cdot 0{,}18\right) = 754093{,}8 \text{ грн.}$$

Нараховані відсотки $I = 754093{,}8 - 737500 = 16593{,}8$ грн.

Платіж дорівнює 300000 грн.

Оскільки платіж більший, ніж відсотки, то залишок боргу буде такий

754093,8 – 300000 = 454093,8 грн.

15.10.03 р.

Борг із відсотками становить:

$$S = 454093{,}8\left(1 + \frac{90}{360} \cdot 0{,}18\right) = 474528 \text{ грн.}$$

Отже, останнє надходження повинно становити 474528 грн. Контур цієї операції відображений на рис. 2.3.

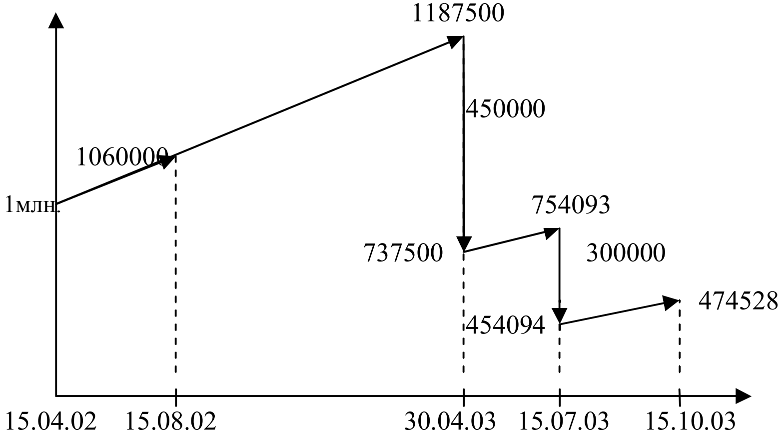


Рис. 2.3. Контур операції прикладу 2.6 ▲

Другий метод – *правило торговельника*. Тут можливі два варіанти.

- якщо термін позички не перевищує рік, то сума боргу з відсотками залишається незмінною до повного погашення. Відповідно накопичуються часткові платежі з нарахованими на них до кінця терміну відсотками. Останній платіж повинен має дорівнювати різниці цих сум;
- якщо термін позички перевищує рік, то зазначені вище розрахунки робляться для річного періоду заборгованості. Наприкінці року із суми заборгованості віднімається нарощена сума накопичених часткових платежів. Залишок погашається в наступному році. Алгоритм можна записати так:

$$Q = S - K = P(1 + ni) - \sum_j R_j \left(1 + t_j i_j\right), \tag{2.9}$$

де Q – залишок боргу на кінець терміну чи року, S – нарощена сума боргу, K – нарощена сума платежів, R_j – сума часткового платежу, n

– загальний термін позички, t_j – інтервал часу від моменту платежу до кінця терміну позички чи року.

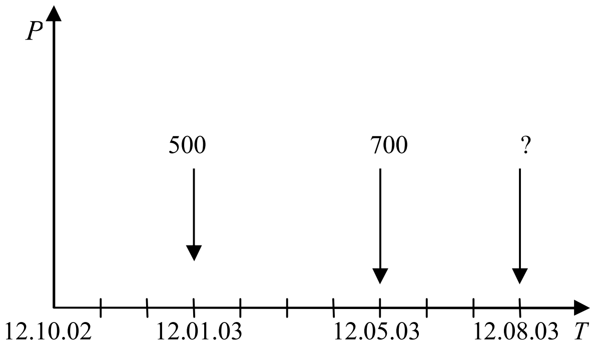
<u>*Приклад 2.8*</u>. Позичка обсягом 2000 грн. взята 12.10.02 р. по 12.08.03 р. Відсотки нараховуються за ставкою 15% річних. Часткові надходження були такі:

12.01.03 р. – 500 грн.;

12.05.03 р. – 700 грн.

Який залишок боргу?

▲ Для підрахунку зобразимо задачу графічно.



Термін позички не перевищує рік. Рахуємо борг за весь період:

$$S = 2000\left(1 + \frac{10}{12} \cdot 0{,}15\right) = 2250 \text{ грн.}$$

Обчислюємо нарощену суму платежів:

$$K = 500\left(1 + \frac{7}{12} \cdot 0{,}15\right) + 700\left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}15\right) = 1270 \text{ грн.}$$

Залишок боргу: Q = 2250 – 1270 = 980 грн. ▲

<u>*Приклад 2.9*</u>. Для даних прикладу 2.7 необхідно знайти залишок боргу на 15.10.03 р. за правилом торговельника.

▲ Термін позички перевищує рік. Тому розрахунки будемо робити спочатку на рік, а потім на решту періоду. Рахуємо борг на кінець року, тобто на 15.04.03 р.:

$$S = 1000000(1 + 1 \cdot 0{,}18) = 1180000 \text{ грн.}$$

Обчислюємо нарощену суму платежів за рік. З 15.04.02 р. по 15.04.03 р. відбувся лише один платіж 15 серпня обсягом 50000 грн.

$$K = 50000\left(1 + \frac{240}{360} \cdot 0{,}18\right) = 56000 \text{ грн.}$$

Залишок боргу Q = 1180000 – 56000 = 1124000 грн.

Борг з відсотками на наступних півроку з 15.04.03 р. по 15.10.03 р.

$$S = 1124000(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}18) = 1225160 \text{ грн.}$$

Нарощена сума платежів:

$$K = 400000\left(1 + \frac{165}{360} \cdot 0{,}18\right) + 300000\left(1 + \frac{90}{360} \cdot 0{,}18\right) = 746500 \text{ грн.}$$

Залишок боргу: Q = 1225160 – 746500 = 478660 грн. ▲

Зауваження. Для тих же даних актуарний метод і правило торговельника в загальному випадку дають різні результати.

2.3. Нарощення відсотків у споживчому кредиті

Споживчий кредит жорсткий для боржника. Відсотки нараховуються на всю суму кредиту і приєднуються до боргу вже в момент відкриття кредиту.

Кредит погашається частинами найчастіше одинаковими через рівні проміжки часу. Тоді нарощена сума:

$$S = P(1 + ni),$$

а разовий платіж:

$$R = \frac{S}{nm}, \tag{2.10}$$

де n – термін кредиту в роках,

m – число платежів у році.

Якщо споживчий кредит оформляється за схемою: кредит сплачується рівними частинами, а відсотки нараховуються на залишок боргу, то разова плата складається з двох доданків – відповідна частина основного боргу і відсоткова плата. Остання постійно зменшується. В такому випадку нараховані відсотки:

$$I = \frac{P \cdot i}{12}\left[m - \frac{1}{m} \cdot \frac{m}{2}(m - 1)\right] = \frac{P \cdot i}{24}(m + 1), \tag{2.10'}$$

де m – кількість місяців.

Приклад 2.10. Покупець планує купити машину вартістю 6000 дол. США. Він у змозі оплатити 3500 дол., а решту зобов'язується виплатити протягом 3-х років під 5% простих річних. Платежі повинен вносити щомісячно. 1) Розрахувати величину разового платежу. 2) Розрахувати величину разового платежу, коли кредит сплачується рівними частинами, а відсотки нараховуються на залишок боргу.

▲ 1) Обчислюємо нарощену суму боргу:

$$S = 2500(1 + 3 \cdot 0{,}05) = 2875 \text{ дол.}$$

та величину разового платежу:

$$R = \frac{2875}{3 \cdot 12} = 79{,}86 \approx 80 \text{ дол.}$$

Отже, щоби погасити борг покупець повинен щомісячно виплачувати 80 дол.

2) Розрахуємо величину відсотків за формулою (2.10'):

$$I = \frac{2500 \cdot 0{,}05}{24}(36 + 1) = 192{,}71.$$

Тоді разовий платіж згідно з формулою (2.10) буде такий:

$$R = \frac{2500 + 192{,}71}{3 \cdot 12} = \frac{2692{,}71}{36} = 74{,}80 \text{ дол.}$$

Щоби погасити борг, покупець повинен щомісячно виплачувати 74,80 дол.

Отже, вибір схеми кредитування суттєво впливає на фінансові результати. ▲

2.4. Дисконтування за простими відсотковими ставками

У фінансовій практиці часто виникає задача: за заданою сумою S, яку треба оплатити через деякий час n, визначити суму позички P. Така ситуація виникає при розробці умов контракту або ж коли відсотки з суми S отримуються безпосередньо при видачі кредиту. У цих випадках кажуть, що сума S *дисконтується*, процес нарахування і отримання відсотків називається *обліком*, отримані відсотки – *дисконтом* або *скидкою*.

Величина P, знайдена за допомогою дисконтування, – це *сучасна вартість* (*величина*) майбутнього платежу S.

Розрізняють математичне дисконтування і банківський (комерційний) облік.

А. Математичне дисконтування – це процес розв'язування задачі, оберненої до нарощення початкової суми позички. Задача формулюється так: яку початкову суму позички треба дати в борг, щоб отримати після закінчення терміну суму S, за умови, що на борг нараховуються відсотки за ставкою i. З формули (2.2) нарощення за простими відсотками знаходимо:

$$P = \frac{S}{1+ni}, \tag{2.11}$$

де P – сучасна величина;

n – термін позички (якщо термін задається в днях, тоді $n = \frac{t}{K}$);

$\frac{1}{1+ni}$ – дисконтний множник, що показує, яку частку становить початкова величина боргу в кінцевій його сумі.

Різниця $S-P$ вважається відсотками, нарахованими на P або дисконтом із суми S.

Приклад 2.11. Через 150 днів після підписання договору боржник сплатить 2 тис. грн. Кредит видано під 17% річних. Яка початкова сума боргу, якщо часова база $K = 365$ днів?

▲ Обчислюємо сучасну величину:

$$P = \frac{2000}{1+\frac{150}{365}\cdot 0{,}17} = \frac{2000}{1{,}07} \approx 1869 \text{ грн.}$$ ▲

Б. Банківський облік (облік векселів)

Суть операції така: банк (фінансова установа) до настання терміну платежу за векселем або іншим платіжним зобов'язанням купує його у власника за ціною, яка менша за суму, що вказана на векселі, тобто купує його з дисконтом. Отримавши при настанні терміну векселя гроші, банк реалізує відсотковий дохід у вигляді дисконту. Відповідно, власник векселя за допомогою його обліку має можливість отримати гроші не в повному обсязі, проте раніше вказаного на ньому терміну.

При обліку векселя застосовується банківський або комерційний облік. Відсотки за користування позичкою у вигляді дисконту нараховуються на суму, яку треба сплатити в кінці терміну. При цьому застосовується облікова ставка d.

Обсяг дисконту – Snd,

де d – річна облікова ставка, n – роки.

$$P = S - Snd = S(1 - nd), \tag{2.12}$$

де $1 - nd$ – дисконтний множник, n – термін від моменту обліку до дати погашення векселя.

Якщо $n = \frac{1}{d}$, то $P = 0$, якщо $n > \frac{1}{d}$, то $P < 0$. Отже, при відносно великому терміні векселя облік може привести до нульової або від'ємної суми P, що не має змісту.

Облік за обліковою ставкою найчастіше проводиться при часовій базі $K = 360$ днів, число днів позички найчастіше точне, тобто відсотки $\frac{ACT}{360}$.

<u>*Приклад 2.12.*</u> Видано вексель на суму 1000 грн. з оплатою 15.01.04. Власник векселя облікував його в банку 15.09.03 за обліковою ставкою 20% ($^{ACT}/_{360}$). Обчислити отриману суму при обліку і дисконт.

▲ До кінця терміну оплати залишилось 122 дні. Отримана при обліку сума становить:

$$P = 1000(1 - \frac{122}{360} \cdot 0{,}2) = 932{,}22 \text{ грн.}$$

Дисконт становить:

$$D = 1000 - 932{,}22 = 67{,}78 \text{ грн.}$$

Змінимо умову задачі.

Нехай на всю суму боргу нараховувались відсотки за ставкою $i = 17\%$ річних. Борг було взято на рік.

Тоді $$P^* = P(1 + ni)(1 - n'd),$$

де n' – термін від моменту обліку до погашення,

n – загальний термін зобов'язання.

$$P^* = 1000(1 + \frac{365}{360} \cdot 0{,}17)(1 - \frac{122}{360} \cdot 0{,}2) =$$

$$=1000\cdot 1{,}17\cdot 0{,}93=1088{,}1\,.\ ▲$$

Дисконт також може бути фіксованою величиною для всього терміну за домовленістю сторін. Проте величина ставки не завжди мається на увазі.

В. Нарощення за обліковою ставкою

Проста облікова ставка іноді застосовується і при розрахунку нарощеної суми, а саме: коли необхідно визначити суму, яку треба проставити у векселі, якщо задана поточна сума боргу P. Тоді:

$$S=P\frac{1}{1-nd}\,. \tag{2.13}$$

Приклад 2.13. Позичку було взято з 20.01 по 15.10 обсягом 1000 грн. Визначити нарощену суму за умови, що відсотки нараховуються за простою обліковою ставкою $d=18\%$.

▲ Обчислюємо за формулою (2.13):

$$S=1000\left(\frac{1}{1-\frac{258}{360}\cdot 0{,}18}\right)=1000\left(\frac{1}{0{,}87}\right)\approx 1149 \text{ грн. } ▲$$

2.5. Визначення терміну позички і величини відсоткової ставки

Обидві ставки (нарощення і дисконтування) застосовуються для розв’язування подібних задач. Проте для ставки нарощення прямою задачею є визначення нарощеної суми, оберненою – дисконтування. Для облікової ставки прямою задачею є дисконтування суми, оберненою – нарощення. При однакових ставках результати завжди різні.

Зазначимо, що облікова ставка відображає фактор часу більш жорстко.

Ставка	Пряма задача	Обернена задача
i	$S=P(1+ni)$	$P=S/(1+ni)$
d	$P=S(1-nd)$	$S=P/(1-nd)$

а) Термін позички:

- у роках:

$$n=\frac{S/P-1}{i}=\frac{S-P}{Pi}\,, \tag{2.14}$$

$$n = \frac{1 - P/S}{d} = \frac{S-P}{Sd}; \tag{2.15}$$

- у днях:

$$t = \frac{S-P}{Pi} \cdot K, \tag{2.14'}$$

$$n = \frac{S-P}{Sd} \cdot K. \tag{2.15'}$$

б) Величина відсоткової ставки:

$$i = \frac{S-P}{nP} = \frac{S-P}{Pt} \cdot K, \tag{2.16}$$

$$d = \frac{S-P}{nS} = \frac{S-P}{St} \cdot K. \tag{2.17}$$

Іноді величина дисконту фіксується в договорі у вигляді відсотка скидки (загальної облікової ставки) d' за весь термін позички. Тоді:

$$P = S(1-d').$$

Оскільки $$P = \frac{S}{1+ni},$$

то прирівняємо множники $$\frac{1}{1+ni} = (1-d').$$

Виразимо ставку i через d':

$$i = \frac{d'}{n(1-d')}. \tag{2.18}$$

Річна облікова ставка дорівнює:

$$d = \frac{d'}{n}. \tag{2.19}$$

<u>*Приклад 2.14.*</u> Згідно з контрактом із суми позички, яку видали на 240 днів, утримується дисконт обсягом 11%. Необхідно визначити ціну кредиту в вигляді річної ставки простих відсотків і облікової ставки ($K = 360$).

▲ Згідно з вище наведеними формулами (2.18, 2.19):

$$i = \frac{0{,}11}{\frac{240}{360}(1-0{,}11)} = \frac{0{,}11}{0{,}59} = 0{,}186 \text{ або } 18{,}6\%,$$

$$d = \frac{0{,}11}{\frac{240}{360}} = 0{,}164 \text{ або } 16{,}4\%. \blacktriangle$$

2.6. Операції конвертування (обміну) валюти і нарощення відсотків

Розглянемо операції конвертування (обміну) валюти і нарощення відсотків.

Існують 4 можливі варіанти для нарощення суми з конвертуванням грошових ресурсів і без нього:

- без конвертування: ВКВ → ВКВ (вільно конвертована валюта);
- з конвертуванням: ВКВ → Грн. → Грн. → ВКВ;
- без конвертування: Грн. → Грн.;
- з конвертуванням: Грн. → ВКВ → ВКВ → Грн.

а) Варіант ВКВ → Грн. → Грн. → ВКВ.

Ця операція має три кроки:

- обмін валюти на гривні;
- нарощення відсотків на цю суму;
- конвертування у вихідну валюту.

Якщо ввести позначення:

P_v – сума депозиту в ВКВ;

P_g – сума депозиту в гривнях;

S_v – нарощена сума у ВКВ;

S_g – нарощена сума в гривнях;

K_0 – курс обміну на початку операції;

K_1 – курс обміну в кінці операції;

n – термін депозиту;

i – ставка нарощення для гривневих сум;

j – ставка нарощення для конкретного виду ВКВ,

то нарощена сума для цього варіанта обчислюватиметься за формулою:

$$S_v = P_v K_0 (1 + ni) \frac{1}{K_1}. \tag{2.20}$$

б) Варіант Грн. → ВКВ → ВКВ → Грн.

Ця операція має три кроки:

- обмін гривень на валюту;
- нарощення відсотків на валюту;
- конвертування в гривні.

При наведених позначеннях нарощена сума для цього варіанта буде вираховуватись за формулою:

$$S_g = \frac{P_g}{K_0}(1+nj)K_1\,. \qquad (2.21)$$

<u>*Приклад 2.15.*</u> Поміщають 1000 дол. на гривневий депозит. Курс продажу 1 дол. на початок терміну депозиту – 5,28 грн., курс купівлі долара в кінці – 5,36 грн. Відсоткові ставки $i = 22\%$, $j = 15\%$ (360/360). Термін депозиту – 4 місяці. Необхідно визначити нарощену суму в доларах.

▲ Використаємо формулу (2.20):

$$S_v = 1000\cdot 5{,}28(1+\frac{4}{12}\cdot 0{,}22)\frac{1}{5{,}36} = 1057 \text{ дол.}$$

Знайдемо нарощену суму в доларах для варіанта без обміну на гривні:

$$S_v = 1000(1+\frac{4}{12}\cdot 0{,}15) = 1049{,}5 \text{ дол.}$$

Перший варіант кращий, ніж другий. ▲

<u>*Приклад 2.16.*</u> Доповнимо попередній приклад. Припустимо, що на доларовий депозит потрібно покласти 10000 грн. Необхідно визначити нарощену суму в гривнях.

▲ Використаємо формулу (2.21):

$$S_g = \frac{10000}{5{,}28}(1+\frac{4}{12}\cdot 0{,}15)\cdot 5{,}36 = 10659 \text{ грн.}$$

Знайдемо нарощену суму в гривнях для варіанта без конвертування у валюту:

$$S_g = 10000(1+\frac{4}{12}\cdot 0{,}22) = 10733{,}33 \text{ грн.}$$

Варіант без конвертування кращий, ніж з конвертуванням. ▲

2.7. Фінансова еквівалентність платежів

Інколи в банківській практиці бувають випадки, коли необхідно замінити одне фінансове зобов'язання на інше. Наприклад, відкласти на подальший період платіж, об'єднати декілька платежів в один (*консолідація* платежів). Умови угод можна змінювати лише тоді, коли між сторонами до і після зміни умов платежів спостерігається незмінність фінансових відносин або *принцип фінансової еквівалентності*. Платежі будуть еквівалентними тоді, коли після приведення їх до одного і того ж моменту часу вони будуть однаковими.

Найчастіше відбуваються такі види змін в умовах контрактів:

- *об'єднання декількох платежів в один*;
- *заміна однієї кількості платежів іншою*;
- *зміна термінів платежів*;
- *зміна обсягів платежів і т. д.*

При розв'язуванні такого типу задач для того, щоб виконувався принцип фінансової еквівалентності, розробляють *рівняння еквівалентності*. У цьому рівнянні сума платежів за старим контрактом, розрахована в певний період часу, дорівнює сумі платежів за новим контрактом на цей самий період часу.

А. Об'єднання декількох платежів в один

Нехай необхідно об'єднати платежі з сумами S_1, S_2, ..., S_m і термінами n_1, n_2, ..., n_m в один об'єднаний платіж з сумою S_0 і терміном n_0.

- Розглянемо задачу при відомому терміні n_0, а невідомій S_0. Згідно з принципом фінансової еквівалентності сума об'єднаного платежу буде дорівнювати:

$$S_0 = \sum_{j=1}^{m} k_{\text{п}j} S_j \ , \qquad (2.22)$$

де $k_{\text{п}j}$ – коефіцієнт приведення.

Коефіцієнт приведення може бути множником нарощення, множником дисконтування або дорівнювати 1 залежно від термінів платежів.

Розглянемо випадки:

1) $n_0 > n_j$, де n_0 – термін об'єднаного платежу, n_j – термін j-го платежу.

Коефіцієнт приведення – це множник нарощення, який розраховується за формулою:

$$k_{\text{п}j} = 1 + t_j i\ ,$$

де $t_j = n_0 - n_j = \dfrac{\partial_0 - \partial_j}{K}$, ∂_0 – дата об'єднання платежу, ∂_j – дата j-го платежу;

2) $n_0 < n_j$.

Коефіцієнт приведення – це дисконтний множник, який розраховується за формулою:

$$k_{\text{п}j} = \frac{1}{1 + t_j i}\ ,$$

де $t_j = n_j - n_0 = \dfrac{\partial_j - \partial_0}{K}$;

3) $n_0 = n_j$.

Коефіцієнт приведення дорівнює одиниці.

<u>*Приклад 2.17.*</u> Об'єднуються чотири платежі із сумами обсягом 10, 15, 20, 13 тис. грн. з термінами 2.03, 23.04, 3.06, 5.08. Термін об'єднання платежів 14.07 при простій ставці i = 10% річних і K = 365. Необхідно розрахувати суму об'єднаного платежу.

▲ Для перших трьох платежів $n_0 > n_j$, ($j = \overline{1{,}3}$), для четвертого $n_0 < n_4$. Розрахуємо число днів від терміну вихідного (початкового) платежу до об'єднаного:

$\partial_0 - \partial_1 = 134$ дні; $\partial_0 - \partial_2 = 82$ дні;

$\partial_0 - \partial_3 = 41$ день; $\partial_4 - \partial_0 = 22$ дні.

Згідно з формулою (2.22) сума об'єднаного платежу становить:

$$S_0 = \left(1 + \frac{134}{365} \cdot 0{,}1\right) \cdot 10 + \left(1 + \frac{82}{365} \cdot 0{,}1\right) \cdot 15 + \left(1 + \frac{41}{365} \cdot 0{,}1\right) \cdot 20 +$$

$$+ \frac{1}{1 + \dfrac{22}{365} \cdot 0{,}1} \cdot 13 = 10{,}36712 + 15{,}33699 + 20{,}22466 + 12{,}92211 =$$

$$= 58{,}85088 \text{ тис. грн.}$$ ▲

- Розглянемо задачу при відомій сумі об'єднаного платежу S_0, а невідомому терміні n_0. Рівняння еквівалентності представимо у вигляді рівності сучасних вартостей відповідних платежів:

$$S_0 \frac{1}{1+n_0 i} = \sum_{j=1}^{m} S_j \frac{1}{1+n_j i}, \qquad (2.23)$$

$$1+n_0 i = \frac{S_0}{\sum_{j=1}^{m} S_j \frac{1}{1+n_j i}},$$

отже,

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{\sum_{j=1}^{m} S_j \frac{1}{1+n_j i}} - 1 \right). \qquad (2.24)$$

Рівняння (2.24) має розв'язок у тому випадку, коли платіж S_0 більший від суми сучасних вартостей платежів, що замінюються, тобто $S_0 > \sum_{j=1}^{m} S_j \frac{1}{1+n_j i}$.

<u>*Приклад 2.18.*</u> Чотири платежі з сумами обсягом 10, 15, 20, 13 тис. грн., які мали бути виплачені через 70, 100, 110, 135 днів замінюються одним платежем обсягом 65 тис. грн. Необхідно розрахувати термін об'єднаного платежу за простої ставки i = 10% річних і K = 365.

▲ Розрахуємо суму сучасних вартостей платежів:

$$P = \frac{10}{1+\frac{70}{365}\cdot 0{,}1} + \frac{15}{1+\frac{100}{365}\cdot 0{,}1} + \frac{20}{1+\frac{110}{365}\cdot 0{,}1} + \frac{13}{1+\frac{135}{365}\cdot 0{,}1} =$$

= 9,81 + 14,60 + 19,41 + 12,54 = 56,36 тис. грн.

Термін об'єднаного платежу розрахуємо за формулою 2.4:

$$n_0 = \frac{1}{0{,}1}\left(\frac{65}{56{,}36} - 1 \right) = 1{,}53 \text{ року, або } 558 \text{ днів.} \ ▲$$

Б. Заміна однієї кількості платежів на іншу

Якщо платежі замінюються не на один платіж, як в попередньому випадку, а на декілька, то необхідно записати загальне рівняння еквівалентності. У ньому сума платежів за старими умовами, які приведені за заданою відсотковою ставкою і датою, прирівнюється до суми платежів за новими умовами, які приведені за тією самою відсотковою ставкою і датою.

Рівняння має такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{ст}}} k_{\text{п}i(\text{ст})} S_{i(\text{ст})} = \sum_{j=1}^{N_{\text{н}}} k_{\text{п}j(\text{н})} S_{j(\text{н})}\,, \tag{2.25}$$

де $S_{i(\text{ст})}$ $(i = \overline{1, N_{\text{ст}}})$ – суми платежів за старими умовами;

$k_{\text{п}i(\text{ст})}$ $(i = \overline{1, N_{\text{ст}}})$ – коефіцієнти приведення платежів за старими умовами до заданої дати;

$S_{j(\text{н})}$ $(j = \overline{1, N_{\text{н}}})$ – суми платежів за новими умовами;

$k_{\text{п}j(\text{н})}$ $(j = \overline{1, N_{\text{н}}})$ – коефіцієнти приведення платежів за новими умовами до тієї самої заданої дати.

Найчастіше задача зводиться до знаходження суми останнього платежу. Перетворимо рівняння (2.25) до вигляду:

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{ст}}} k_{\text{п}i(\text{ст})} S_{i(\text{ст})} = k_{\text{п}N(\text{н})} S_{N(\text{н})} + \sum_{j=1}^{N_{\text{н}}-1} k_{\text{п}j(\text{н})} S_{j(\text{н})}\,, \tag{2.26}$$

де $S_{N(\text{н})}$ – сума останнього платежу; $k_{\text{п}N(\text{н})}$ – коефіцієнт приведення останнього платежу до заданої дати.

З (2.26) маємо:

$$S_{N(\text{н})} = \frac{1}{k_{\text{п}N(\text{н})}} \left(\sum_{i=1}^{N_{\text{ст}}} k_{\text{п}i(\text{ст})} S_{i(\text{ст})} - \sum_{j=1}^{N_{\text{н}}-1} k_{\text{п}j(\text{н})} S_{j(\text{н})} \right). \tag{2.27}$$

Приклад 2.19. У прикладі 2.17 змінимо умови платежів: 1.07 виплачується 25 тис. грн., решту боргу виплачується 10.09. Визначити суму останнього платежу для дати приведення 3.08 і 10.09.

▲ *Випадок* 1. Розрахуємо число днів від початкового платежу до дати приведення 3.08:

$\partial_0 - \partial_{1(\text{ст})} = 154$ (дні); $\partial_{4(\text{ст})} - \partial_0 = 2$ (дні);

$\partial_0 - \partial_{2(\text{ст})} = 102$ (дні); $\partial_0 - \partial_{1(\text{н})} = 33$ (дні);

$\partial_0 - \partial_{3(\text{ст})} = 61$ (день); $\partial_{2(\text{н})} - \partial_0 = 38$ (днів).

Визначимо значення коефіцієнтів приведення:

$$k_{1(\text{ст})} = 1 + \frac{154}{365} \cdot 0{,}1 = 1{,}0422; \qquad k_{4(\text{ст})} = \left(1 + \frac{2}{365} \cdot 0{,}1\right)^{-1} = 0{,}9995;$$

$$k_{2(\text{ст})} = 1 + \frac{102}{365} \cdot 0{,}1 = 1{,}0279; \qquad k_{1(\text{н})} = 1 + \frac{33}{365} \cdot 0{,}1 = 1{,}0090;$$

$$k_{3(\text{ст})} = 1 + \frac{61}{365} \cdot 0{,}1 = 1{,}0167; \qquad k_{2(\text{н})} = \left(1 + \frac{38}{365} \cdot 0{,}1\right)^{-1} = 0{,}9897.$$

Розрахуємо суму останнього платежу:

$$S_{2(\text{н})} = \frac{1}{0{,}9897}\left(10 \cdot 1{,}0422 + 15 \cdot 1{,}0279 + 20 \cdot 1{,}0167 + 13 \cdot 0{,}9995 - 25 \cdot 1{,}0090\right) =$$

$$= 34{,}29557 \text{ тис. грн.}$$

Випадок 2. Розрахуємо число днів від початкового платежу до дати приведення 10.09:

$$\partial_0 - \partial_{1(\text{ст})} = 192 \text{ (дні)}; \qquad \partial_0 - \partial_{4(\text{ст})} = 36 \text{ (днів)};$$

$$\partial_0 - \partial_{2(\text{ст})} = 140 \text{ (днів)}; \qquad \partial_0 - \partial_{1(\text{н})} = 71 \text{ (день)};$$

$$\partial_0 - \partial_{3(\text{ст})} = 99 \text{ (днів)}; \qquad \partial_0 - \partial_{2(\text{н})} = 0 \text{ (днів)}.$$

Визначимо значення коефіцієнтів приведення:

$$k_{1(\text{ст})} = 1 + \frac{192}{365} \cdot 0{,}1 = 1{,}0526; \qquad k_{4(\text{ст})} = 1 + \frac{36}{365} \cdot 0{,}1 = 1{,}0099;$$

$$k_{2(\text{ст})} = 1 + \frac{140}{365} \cdot 0{,}1 = 1{,}0384; \qquad k_{1(\text{н})} = 1 + \frac{71}{365} \cdot 0{,}1 = 1{,}0195;$$

$$k_{3(\text{ст})} = 1 + \frac{99}{365} \cdot 0{,}1 = 1{,}0271; \qquad k_{2(\text{н})} = 1 + \frac{0}{365} \cdot 0{,}1 = 1.$$

Розрахуємо суму останнього платежу:

$$S_{2(\text{н})} = 10 \cdot 1{,}0526 + 15 \cdot 1{,}0384 + 20 \cdot 1{,}0271 + 13 \cdot 1{,}0099 - 25 \cdot 1{,}0195 =$$

$$= 34{,}28575 \text{ тис. грн.}$$

Отже, зміна дати приведення приводить до деякої зміни суми останнього платежу. ▲

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення нарощеної суми позички.
2. Запишіть формулу нарощення за простими відсотками.
3. Що показує множник нарощення?
4. В яких задачах використовується розрахунок відсотків „зі 100”?
5. Коли проводиться розрахунок відсотків „на 100” та „в 100”?
6. Які часові бази існують для нарахування відсотків?
7. Як проводиться підрахунок днів для нарахування відсотків?
8. Охарактеризуйте три варіанти розрахунку простих відсотків.
9. Запишіть формулу нарощення за простими відсотками при зміні відсоткових ставок у часі.
10. Наведіть формулу нарахування відсотків при зміні суми депозиту в часі.
11. Яка величина називається відсотковим числом?
12. Запишіть формулу відсоткового дільника (дивізора).
13. Зобразіть і поясніть на графіку контур збалансованої фінансової операції.
14. Розкрийте суть актуарного методу погашення заборгованості частковими платежами.
15. У чому полягає суть погашення заборгованості частковими платежами за правилом торговельника?
16. Запишіть формули погашення споживчого кредиту.
17. Дайте визначення сучасної вартості майбутнього платежу.
18. Які види дисконтувань вам відомі?
19. Розкрийте суть математичного дисконтування.
20. Запишіть формулу банківського обліку.
21. Виведіть формули визначення терміну позички для ставок нарощення і дисконтування.
22. За якими формулами визначаються ставка нарощення та облікова ставка?
23. Запишіть рівняння еквівалентності при об’єднанні декількох платежів в один.
24. Який вигляд має рівняння еквівалентності при заміні однієї кількості платежів на іншу?

ВПРАВИ

1. Фірма “Любава” взяла позику обсягом 100 тис. грн. терміном на 2 роки під 15% річних і після закінчення позичкового періоду має повернути кредит з відсотками. Яку суму поверне “Любава” банку, якщо відсотки прості?

2. Молода сім’я отримала від банку позику на будівництво житла обсягом 60 тис. грн. терміном на 3 роки під прості відсотки 16% річних. Визначте нарощену суму кредиту і відсотки.

3. Внески на ощадний рахунок становлять 50 тис. грн. на початку кожного року. Визначте, яка сума буде на рахунку через 10 років при відсотковій ставці 11% (відсотки прості)?

4. Банк приймає внески на терміновий депозит на таких умовах: відсоткова ставка при терміні 35 днів – 45%; при терміні 65 днів – 48% ,при терміні 90 днів – 50%. Розрахуйте дохід клієнта на вказані терміни, якщо внесок становить 10 тис. грн., а рік не високосний. Метод розрахунку: точні відсотки з точним числом днів.

5. Клієнт вклав у банк на депозит 2000 грн. на термін з 1 квітня по 6 травня з простою відсотковою ставкою 6% річних. Розрахуйте дохід клієнта за трьома методами, якщо рік не високосний.

6. Банк приймає депозити на 3 місяці за ставкою 5% річних, на 6 місяців за ставкою 6% річних і на рік за ставкою 8% річних. Визначте суму, яку отримає власник депозиту обсягом 500000 грн. для трьох випадків. Порівняйте отримані результати для 5% квартальних, 6% піврічних, 8% річних.

7. Комерційний банк приймає кошти від населення під прості відсотки з відсотковою ставкою 36% річних. Клієнт вніс 6 тис. грн. на депозит з 12 лютого по 24 квітня. Визначте величину множника нарощення і нарощену суму для випадку: а) точних відсотків з точним числом днів; б) звичайних відсотків з точним числом днів; в) звичайних відсотків з наближеним числом днів; рік не високосний.

8. Клієнт вклав у банк 3 тис. грн. 1 лютого. Відсоткова ставка банку з 1 лютого по 18 лютого – 60% річних; з 19 лютого по 7 березня – 56% річних; з 8 березня по 23 березня – 53% річних; з 24 березня по 19 квітня, коли був вилучений внесок, – 48% річних. Визначте дохід клієнта і ефективну відсоткову ставку. Метод розрахунку: звичайні відсотки з точним числом днів, рік не високосний.

9. Фірма вклала в комерційний банк 28 тис. грн. на термін з 9 листопада по 21 листопада. На внески "до запитання" банк нараховує відсотки – 36% річних. Відсотки звичайні з наближеним числом днів у році. Визначте нарощену суму.

10. Клієнт вклав у банк 14 тис. грн. на термін з 14 лютого 2003 р. по 23 липня цього ж року. На внески "до запитання" терміном більше місяця банк нараховує 84% річних. Визначте нарощену суму при розрахунку за: а) точними відсотками з точним числом днів; б) банківським методом; в) звичайними відсотками з наближеним числом днів, якщо рік не високосний.

11. Клієнт вклав в Ощадбанк 3 тис. грн. Згідно з умовами договору "до запитання", відсоткова ставка може бути змінена банком в односторонньому порядку. Внесок було зроблено 3 квітня під 24% річних. 22 квітня відсоткова ставка, згідно з рішенням Правління банку, встановлена в 12% річних, а 20 травня – 84% річних. Внесок разом з відсотками отриманий 3 червня. Визначте нарощену суму, якщо розрахунок відсотків проводиться за точними відсотками з точним числом днів у році (К = 365).

12. Клієнт отримав кредит обсягом 6 тис. грн. терміном на 3 місяці. Сума повернення кредиту – 7,5 тис. грн. Визначте відсоткову ставку банку.

13. На який термін виданий кредит обсягом 300 тис. грн. під відсоткову ставку 60% річних, якщо банк отримав суму від позичальника 380 тис. грн. Методика розрахунку: банківська.

14. Скільки років потрібно, щоб сума 1 млн. грн. досягла величини 2,16 млн. грн., якщо відсоткова ставка – 14,5%.

15. Визначте, який відсоток повинна встановити кредитна спілка "Калина" при наданні позики обсягом 8000 грн., щоби при терміні 187 днів мати дохід не менший, ніж 1400 грн. Відсотки звичайні з наближеним числом днів.

16. Клієнт поклав на депозитний рахунок 4000 грн. терміном на 3 місяці під відсоткову ставку 35% річних. Відсотки прості. Сума, отримана клієнтом після закінчення терміну, 4540 грн. Визначте відсоткову ставку податку на дохід.

17. Обсяг кредиту, отриманого фірмою "Фокстрот" на термін 6 місяців, дорівнює 60 млн. грн. Сума повернення кредиту – 70 млн. грн. Визначте просту відсоткову і облікову ставку кредиту.

18. Підприємство міняє 60 млн. грн. на долари США за курсом 1дол. – 5,32 грн. Скільки доларів США отримає підприємство?

19. Туристична фірма має 50000 грн. і хоче поміняти їх на євро. Курс купівлі/продажу євро – 6,62/6,72. Яку суму отримає фірма і скільки заробить банк на цій операції?

20. Студент має 100 дол. США і хоче купити євро. Курс купівлі – долара 5,25. Скільки євро купить студент, якщо курс продажу євро – 6,40?

21. Необхідно поміняти 1000 євро на італійські ліри. Курс купівлі/продажу євро 6,40/6,65; 1,92/2,05 для італійської ліри. Яку суму отримає клієнт, який прибуток отримає банк на цій операції?

22. Турист повертається з Бельгії через Чехію і вирішив поміняти 300 бельгійських франків на чеські крони. Курс американський долар/бельгійський – 4,6/4,7; американський долар/чеська крона: 2,62/2,72. Яку суму отримає турист у результаті обміну?

23. Визначте курс англійського фунта відносно долара США на початку лютого 2004 р., якщо 535 грн. = 100 дол., а 930 грн. = 100 фунтів.

24. Визначте курс гривні відносно латвійського лата і литовського лита, якщо: 1 латвійський лат = 9859 рос. руб., 1 литовський лит = 1449 рос. руб., 10 рос. руб. = 1,85 грн.

25. Підприємство для модернізації устаткування вирішило взяти в банку кредит на 600 млн. грн. Кредит видається під 28% річних. Термін кредиту – 9 місяців. Крім того, банк вимагає 8% від суми кредиту в заставу. Яку суму отримає підприємство, якщо відсотки прості і оплачуються при видачі кредиту. Визначте реальну відсоткову ставку для кредиту.

26. Фірма "ВІКА" отримала на півроку банківський кредит на 8000 грн. під 24% річних. Відсотки за кредит банк бере авансом. Розрахуйте реальну відсоткову ставку за кредит у випадку: а) застава не вимагається; б) застава за надання кредиту становить 6% від суми кредиту.

27. Є два варіанти купівлі квартири: заплатити 20 тис. дол. сьогодні або 21 тис. дол. через рік. Крім цього, є можливість вкласти 20 тис. дол. на депозит у банку на рік під 6% річних. Яку альтернативу вигідніше вибрати?

28. Фірма "КОМФОРТ" отримала кредит на 3 місяці під заставу нерухомості вартістю 160000 грн. Величина кредиту становить 80% від вартості нерухомості. Відсоткова ставка за кредитом – 36% річних, комісійні з обслуговування кредиту становлять 2%.

Визначте суму отриманого кредиту, реальну відсоткову ставку і дохід банку, якщо відсотки за кредит банк бере авансом.

29. Підприємство отримало кредит в 80000 грн. терміном на 2 роки під просту відсоткову ставку 24% річних. Розгляньте план погашення кредиту і нарахованих на залишкову суму кредиту відсотків серією з восьми рівних платежів, які виплачуються в кінці кожного кварталу.

30. Фірма взяла в банку позику 100 тис. грн. терміном на 1 рік під 12% річних. Відсотки прості і виплачуються в кінці року. Знайти суму, яку фірма має повернути.

31. Банк розміщує валютні кошти фізичних осіб на депозит під 25% річних. Визначте множник нарощення і нарощену суму депозиту в 1000 дол., якщо термін депозиту 3 роки, а відсотки прості.

32. Фірмі виділили банківський кредит на термін з 3 січня по 12 березня під прості відсотки з ставкою 12% річних. Сума кредиту – 80 тис. грн. Визначити за трьома методами множник нарощення і нарощену суму.

33. За який час позика величиною 6000 грн., вкладена під 7% простих річних (K = 360), збільшиться на таку ж суму, що й вклад 7000, внесений з 3.03 по 1.07 під 9% простих річних (K = 365).

34. Фірма взяла в комерційному банку кредит на суму 600 тис. грн. терміном на 4 роки. Згідно з угодою за перший рік відсоткова ставка становила 24% і з урахуванням інфляції кожний подальший рік підвищувалася на 5 пунктів. Визначте множник нарощення, нарощену суму і дохід банку.

35. Ощадний банк приймає вклади "до запитання" під відсоткову ставку i% = 4%. Відсотки прості, K = 365 днів. Через скільки днів вклад в 45000 грн. наросте до 50000 грн.?

36. Українські банки приймають у населення грошові кошти на термінові вклади. Клієнт хоче вкласти в банк грошову суму 3000 грн. на 3 місяці з таким розрахунком, щоб нарощена сума була не менше 4800 грн. Якою повинна бути річна проста відсоткова ставка?

37. На який термін виписаний вексель, якщо його номінальна вартість становить 14000 грн., а власник векселя отримав 12560 грн. за обліковою простою відсотковою ставкою 90% річних?

38. Власник векселя облікував його в банку за 3 місяці до терміну погашення і отримав 4560 грн. Облікова ставка банку – 14%. Визначте номінальну вартість векселя.

39. Визначте номінальну вартість векселя і дисконт банку, якщо його власник облікував за простою обліковою ставкою 18% за два місяці до терміну погашення і отримав 12000 грн.

40. Банк купує акції фірми за ціною 1000 грн., дисконтна ставка – 30% річних, а дата погашення – через місяць. Визначте номінал цієї акції.

41. Визначте просту облікову ставку, еквівалентну простій відсотковій ставці 6% річних при обліку векселя за два місяці до терміну погашення.

42. Визначте просту відсоткову ставку, еквівалентну простій обліковій ставці 5% річних при депозиті 4 місяці.

43. Власник векселя номінальною вартістю 10000 грн., облікував його в банку за два місяці до терміну погашення за простою обліковою ставкою 6% річних. Банк отримує комісійні за обсягом 2% від вартості векселя. Яку суму отримав власник і який дохід цієї операції за ефективною ставкою простих відсотків?

44. Власник векселя номінальною вартістю 3000 грн., облікував його в банку за три місяці до терміну погашення за простою обліковою ставкою 6% річних. Комісійні – 1% від номінальної вартості векселя. Яку суму отримає власник і скільки становить дохід цієї операції за ефективною ставкою простих відсотків?

45. Чотири векселі номінальною вартістю 2000 грн., 3000 грн., 4000 грн., 8500 грн., з терміном погашення 35, 60, 70, 90 днів потрібно об'єднати в один з терміном погашення 120 днів. Визначте вартість об'єднаного векселя, якщо проста відсоткова ставка, за якою відбувається об'єднання – 6% річних.

46. Три векселі номінальною вартістю 2000 грн., 6000 грн., 8000 грн. з термінами 40, 56, 75 днів необхідно об'єднати в один з терміном погашення 95 днів. Об'єднання відбувається за ставкою простих відсотків 8% річних. Яка вартість об'єднаного векселя?

47. Підприємець купив партію товару за 20000 грн., а продав за 35600 грн. Скільки відсотків прибутку отримав підприємець?

48. Товарообіг магазину в червні місяці становив 940 тис. грн., а в липні – 890 тис. грн. На скільки відсотків зменшився товарообіг у липні?

49. За продаж дачної ділянки посередник отримав 2000 грн., що становить 5% від вартості продажу. Визначте, за яку суму було продано дачну ділянку?

50. Підприємець купив першу і другу партію товару відповідно за 36 тис. грн. і 42 тис. грн., продав відповідно за 39,5 тис. грн. і 45,6 тис. грн. При продажі якої партії було отримано найбільший відсоток прибутку?

51. Знайдіть: а) 4% “на 100” з 456; б) 6% “на 100” з 785; в) 10% “на 100” з 2400; г) 15% “на 100” з 56000.

52. Знайдіть: а) 3% “в 100” з 1241; б) 5% “в 100” з 356; г) 23% “в 100” з 2340.

53. Знайдіть з 1320 грн. і 3467 грн.: а) 45% “зі 100”; б) 27% “на 100”; в) 61% “в 100”.

54. Підприємство реалізувало партію товару за 380000 грн., і отримало 25% прибутку. Визначте величину прибутку і собівартість товару.

55. Фірма реалізувала партію товару за 24560 грн. і отримала 6% збитку. Визначте величину збитку і собівартість товару.

56. Через псування було списано 12% товару. Визначте, скільки товару було списано, якщо його залишилось 567 кг?

57. Загальний оклад робітника, включаючи премію обсягом 10% від місячного окладу, становить 864 грн. Знайдіть величину премії і величину окладу.

58. Підприємець за 1кг деякого товару хоче отримати 10 грн. 67 коп. Яку ціну йому потрібно назначити, щоб зробивши 3%-у знижку, отримати 10,67 грн. за 1 кг?

59. Об’єднуються три платежі на суму 5, 7, 4 тис. грн. і з термінами платежів 12.04, 7.06, 22.09. Термін об’єднання платежів – 11.08. Визначте суму об’єднаного платежу при простій ставці 8% і часовій базі $K = 365$ днів.

60. Для умови задачі 59 задані нові терміни платежів: 7.07, 12.09, 11.10, термін об’єднання платежів – 1.09.

61. Об’єднуються чотири платежі з сумами обсягом 8, 10, 12, 14 тис. грн. з термінами 2.04, 28.04, 13.08, 15.08. Термін об’єднання платежів 11.08 при складній ставці $i = 11\%$ річних і $K = 360$. Необхідно розрахувати суму об’єднаного платежу.

62. Для умови задачі 61 задані нові терміни платежів: 7.07, 12.09, 11.10, 22.12, термін об’єднання платежів – 12.10.

63. Платежі сумами 150, 100, 165 тис. грн. і термінами погашення 100, 120, 250 днів від деякої дати заміщуються одним платежем з терміном 270 днів від цієї ж дати. Визначте суму об’єднаного платежу при простій ставці 9% річних і часовій базі $K = 360$ днів.

64. Для умови задачі 63 задані нові терміни погашення: 120, 150, 190 днів від деякої дати та термін об'єднання платежів – 180 днів від цієї ж дати, часова база K = 365 днів.

65. Для умови задачі 63 задані нові терміни погашення: 80, 210, 290 днів від деякої дати та термін об'єднання платежів – 200 днів від цієї ж дати, часова база K = 365 днів.

66. Рух коштів на рахунку відбувався так:
5.04.02 – надходження 3000 грн. (відкрито рахунок);
12.05.02 – зняття 1000 грн.;
30.06.02 – надходження 700 грн.;
11.08.02 – надходження 400 грн.;
15.09.02 – зняття 350 грн.;
7.10.02 – надходження 200 грн.;
30.12.02 – рахунок закрито.

Відсоткова ставка – 21% річних. Визначити суму нарахованих відсотків, використавши точні відсотки з точною кількістю днів. Визначити загальну суму коштів.

3. СКЛАДНА ВІДСОТКОВА СТАВКА

3.1. Нарахування складних річних відсотків

А. Формула нарощення

У середньо- і довготермінових кредитно-фінансових операціях, якщо відсотки не виплачуються зразу після їхнього нарахування, а приєднуються (капіталізуються) до суми боргу, застосовують складні відсотки. База нарахування відсотків змінюється, а саме: збільшується.

Нарощення за складними відсотками нагадує послідовне реінвестування засобів вкладених під прості відсотки на один період нарахування.

Знайдемо формулу нарощеної суми за складними відсотками за умови, що відсотки нараховуються і капіталізуються один раз у рік.

Нехай позначення будуть ті самі, що й в попередньому розділі:

I – відсотки за весь термін позички;

P – первісна (початкова) сума боргу;

S – нарощена сума, тобто сума наприкінці терміну;

i – річна ставка відсотків (у десятковому дробі);

n – термін позички в роках.

За перший рік відсотки становитимуть Pi, а нарощена сума:

$$S = P + Pi = P(1 + i).$$

За другий рік відсотки становитимуть $P(1 + i)i$, а нарощена сума:

$$S = P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)^2.$$

Відповідно можна показати, що за n років, тобто за весь термін, нарощена сума буде дорівнювати:

$$S = P(1 + i)^n. \tag{3.1}$$

Відсотки за весь термін позички становитимуть:

$$I = S - P = P[(1 + i)^n - 1]. \tag{3.2}$$

Відсотки, нараховані на відсотки:

$$I_{\%} = P\left[(1+i)^n - (1+ni)\right]. \tag{3.3}$$

Вираз (3.1) називають ***формулою нарощення*** за складними відсотками чи ***формулою складних відсотків***. Множник $(1+i)^n$ – множник нарощення складних відсотків.

Він показує, у скільки разів нарощена сума більша від первісної. При великих термінах він різко зростає навіть при невеликій ставці. Невелика зміна ставки при великому терміні зумовлює значне збільшення множника нарощення. Існують готові таблиці для значень цього множника.

Зростання за складними відсотками нагадує геометричну прогресію, для якої перший член $b_1 = P$, знаменник – $q = 1 + i$.

Графічно зростання за складними відсотками показано на рис. 3.1.

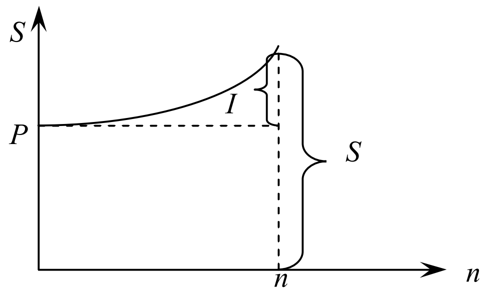


Рис. 3.1. Зростання за складними відсотками

Термін позички при нарощенні за складними відсотками найчастіше виміряється як АСТ/АСТ.

Формулу 3.1 можна використати не тільки при n, виміряному в роках, а й коли i – ставка відсотків за період (півріччя, квартал, місяць), то n – число таких періодів.

<u>Приклад 3.1</u>. Позику 1000 грн. було взято на термін 5 років. Відсотки складні за ставкою 15% річних.

Необхідно визначити суму заборгованості та нараховані відсотки.

▲ Суму боргу знаходимо за формулою (3.1):

$$S = 1000(1 + 0{,}15)^5 = 1000 \cdot 1{,}15^5 = 2011{,}36 \text{ грн.},$$

а відсотки за формулою (3.2):

$$I = 2011{,}36 - 1000 = 1011{,}36 \text{ грн.}$$

Якщо порівняти отримані результати з результатами прикладу 2.1, знайденими за простими відсотками (S = 2000, I = 1000), то бачимо, що нарощена сума і відсотки при складних відсотках є більші. ▲

У формулах (3.1)–(3.3) використовується ставка відсотків i при нарахуванні відсотків з основної суми боргу і відсотків, нарахованих на відсотки. Іноді обумовлюється, що відсотки на відсотки нараховуються за іншою ставкою $k \neq i$. У цьому випадку нарощена сума становитиме:

$$S = P + Pi\left[1 + (1+k) + (1+k)^2 + \ldots + (1+k)^{n-1}\right] = P\left(1 + i\frac{(1+k)^n - 1}{k}\right). \qquad (3.4)$$

Б. Нарахування відсотків у суміжних календарних періодах

Часто дати початку і закінчення позики перебувають у двох різних суміжних календарних періодах. При оподаткуванні, в бухгалтерському обліку, при визначенні річних сум доходу і т. д. виникає необхідність у розподілі суми відсотків за періодами. Тоді загальна сума нарахованих складних відсотків становитиме суму відсотків, отриманих у кожнім році:

$$I = I_1 + I_2 .$$

Нехай n_1, n_2 – частки терміну позички, що приходяться на кожний календарний рік. Тоді відсотки будуть такі:

$$I_1 = P\left((1+i)^{n_1} - 1\right); \qquad (3.5)$$

$$I_2 = P(1+i)^{n_1}\left[(1+i)^{n_2} - 1\right] = P\left[(1+i)^n - (1+i)^{n_1}\right]. \qquad (3.6)$$

<u>*Приклад 3.2*</u>. Позика була видана з 15 червня 2001 р. по 15 червня 2003 р. Обсяг позики – 1 млн. грн. Необхідно розподілити нараховані відсотки (i = 0,15, ACT/ACT) за календарними роками.

▲ Відсотки за період з 15 червня 2001 р. до кінця року (200 днів) знаходимо за формулою (3.5):

$$1000000\left((1+0{,}15)^{\frac{200}{365}} - 1\right) = 79590{,}6 \text{ грн.}$$

Відсотки за 2002 р.:

$$1000000 \cdot 1{,}15^{\frac{200}{365}} \cdot 0{,}15 = 161938{,}6 \text{ грн.}$$

Відсотки за період з 1 січня 2003 до 15 червня 2003 р. (165 днів) вираховуємо за формулою (3.6):

$$1000000 \cdot 1{,}15^{1\frac{200}{365}}\left[1{,}15^{\frac{165}{365}} - 1\right] = 80970{,}8 \text{ грн.}$$

Усіх нарахованих відсотків 79590,6 + 161938,6 + 80970,8 = = 322500 грн.

Для перевірки знайдемо відсотки за два роки:

$1000000\left(1{,}15^2 - 1\right) = 322500$ грн. ▲

В. Змінні ставки

Формула (3.1) припускає, що протягом періоду n ставка відсотка постійна. Проте часто в кредитних угодах відсоткові ставки змінюються в часі. Якщо в контрактах фіксуються змінні обсяги ставок, то загальний множник нарощення визначається як добуток часткових, а нарощена сума визначається за формулою:

$$S = P\left[(1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \times \ldots \times (1+i_m)^{n_m}\right], \tag{3.7}$$

де i_j – ставка складних відсотків у j-му періоді, n_j – тривалість j-го періоду з постійною ставкою.

<u>*Приклад 3.3*</u>. На 2000 грн., вкладених у банк під складні відсотки на 1,5 року згідно з контрактом передбачається такий порядок нарахування відсотків: перший квартал – 10% річних, другий – 12% річних, третій – 13%, за два наступних – 15% і за останній – 20%. Необхідно визначити нарощену суму вкладу на кінець терміну, обчислити множник нарощення.

▲ Нарощену суму вкладу знаходимо за формулою (3.7):

$$S = 2000\left((1+0{,}1)^{1/4} \cdot (1+0{,}12)^{1/4} \cdot (1+0{,}13)^{1/4} \cdot (1+0{,}15)^{1/2} \cdot (1+0{,}2)^{1/4}\right) =$$

$$= 2438{,}353 \text{ грн.}$$

Обчислюємо множник нарощення:

$$q = \left((1+0{,}1)^{1/4} \cdot (1+0{,}12)^{1/4} \cdot (1+0{,}13)^{1/4} \cdot (1+0{,}15)^{1/2} \cdot (1+0{,}2)^{1/4}\right) =$$

$$= 1{,}219176. \ ▲$$

<u>*Приклад 3.4*</u>. Термін позички 3 роки. Згідно з контрактом базова ставка відсотків ‒ 12% річних плюс маржа 0,25% у першому році і 0,5% ‒ у двох наступних. Необхідно обчислити множник нарощення.

▲ Множник нарощення:

$$q = \left((1+0{,}1225)^1 \cdot (1+0{,}125)^2\right) = 1{,}1225 \cdot 1{,}265625 \approx 1{,}42066.$$

Отже, за 3 роки позичка зросте у 1,42 рази. ▲

Г. Нарахування відсотків при дробовому числі років

У фінансово-кредитних операціях терміни нарахування відсотків можуть виражатись цілим числом років і дробовим.

У другому випадку використовуються два способи нарахування відсотків:

1) загальний (за формулою (3.1));

2) змішаний.

При змішаному нарахуванні відсотків на цілу частину терміну нараховуються складні відсотки, на дробову – прості. Інакше кажучи, отримується формула для нарощеної суми:

$$S = P(1+i)^a \cdot (1+bi), \tag{3.8}$$

де термін позички $n = a + b$, a – ціла частина терміну, b – дробова.

<u>*Приклад 3.5*</u>. Кредит обсягом 1 тис. грн. виданий на 2 роки і 180 днів під 15% складних річних. Необхідно обчислити суму боргу на кінець терміну за обома методами.

▲ 1) Знаходимо за формулою (3.1):

$$S = 1000(1+0{,}15)^{2\frac{180}{365}} = 1000(1+0{,}15)^{2,493151} = 1416{,}866 \text{ грн.}$$

2) Розраховуємо за формулою (3.8):

$$S = 1000(1+0{,}15)^2 \cdot \left(1+\frac{180}{365}\cdot 0{,}15\right) = 1000\cdot 1{,}15^2 \cdot (1+0{,}493151\cdot 0{,}15) == 1420{,}329 \text{ грн.}$$

Сума боргу, обчислена змішаним методом, більша, ніж обчислена загальним. ▲

3.2. Порівняння зростання за складними і простими відсотками

Щоби порівняти зростання за простими чи складними відсотками потрібно порівняти множники нарощення (присвоїмо індекс s для ставки простих відсотків).

$$q_s = (1+ni_s) \qquad q = (1+i)^n.$$

Якщо ставка i однакова, то множник залежить від терміну n. Розглянемо різні значення n.

Якщо термін менше року ($0 < n < 1$), то

$1 + ni_s > (1 + i)^n$ – нарощена сума за простими відсотками буде більша, ніж за складними.

Якщо термін рік ($n = 1$), то

$1 + ni_s = (1 + i)^n$ – нарощені суми за простими і складними відсотками рівні.

Якщо термін більше року ($n > 1$), то

$1 + ni_s < (1 + i)^n$ – нарощена сума за простими відсотками буде менша, ніж за складними.

Графічно це зображено на рис. 3.1.

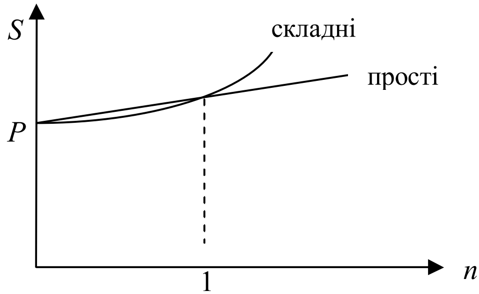


Рис. 3.1. Порівняння зростання за відсотками

Часто виникає потреба в знаходженні терміну, за який початкова сума боргу збільшиться вдвічі. Це буде тоді, коли множник нарощення буде дорівнювати 2, тобто $S = 2P$:

- для простої ставки:

$$1 + ni = 2,$$

$$n = \frac{1}{i}. \tag{3.9}$$

- для складної ставки:

$$(1 + i)^n = 2,$$

$$n = \log_{1+i} 2 = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i)}. \tag{3.10}$$

<u>*Приклад 3.6*</u>. Знайти термін подвоєння суми боргу для ставки відсотків i =18 річних.

▲ 1) Для простих відсотків використовуємо формулу (3.9):

$n = \dfrac{1}{0{,}18} = 5{,}5556$ років.

2) Для складних – формулу (3.10):

$n = \dfrac{\ln 2}{\ln(1 + 0{,}18)} = \dfrac{0{,}693147}{0{,}165514} = 4{,}1878$ років.

Отже, термін подвоєння суми боргу для складних відсотків менший, ніж для простих. ▲

3.3. Номінальна і ефективна ставки

А. Номінальна ставка

У сучасних умовах відсотки капіталізуються, як правило, не один, а декілька раз в році – по півріччях, поквартально, щомісячно. Деякі зарубіжні комерційні банки практикують навіть щоденне нарахування відсотків.

Формула (3.1) використовується і для нарахування відсотків декілька раз у році, де n – число періодів нарахування, i – ставка за відповідний період.

На практиці, як правило, фіксується не ставка за період нарахування, а річна ставка, а період нарахування вказується. Наприклад, „15% річних з поквартальним нарахуванням відсотків".

Нехай

j – річна ставка;

m – число періодів нарахувань у році.

Щоразу відсотки нараховуються за ставкою $\dfrac{j}{m}$, j називають *номінальною* ставкою. Ставка j потрібна для того, щоб знати, яке число потрібно розділити на кількість періодів у році, щоб одержати ставку за період.

Формула нарощення буде мати такий вигляд:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{N}, \qquad (3.11)$$

де N – загальна кількість періодів нарахувань, $N = m \cdot n$.

Приклад 3.7. Яким буде борг, що дорівнює 1000 грн., через 5 років при складній ставці 15% річних, якщо відсотки нараховуються поквартально.

▲ Нарощену суму боргу знаходимо за формулою (3.11):

$$S = 1000\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{4\cdot5} = 2088,152 \text{ грн.}$$

Пригадаємо, що нарощена сума боргу при річному нарахуванні відсотків дорівнювала 2011,36 грн. ▲

Чим частіше нараховуються відсотки, тим швидше відбувається процес нарощення.

Б. Ефективна (дійсна) ставка

Ця ставка вимірює той реальний відносний дохід, який отримують загалом за рік. Або ефективна ставка – це річна ставка складних відсотків, яка дає той самий результат, що й m-разове нарахування відсотків за ставкою j/m. Позначається ефективна ставка буквою i.

За означенням множники $\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}$ і $(1+i)^n$ рівні, тобто

$$(1+i)^n = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} \text{ або}$$

$$1 + i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m}.$$

Звідси можна знайти номінальну ставку через ефективну і, навпаки, ефективну через номінальну:

$$j = m(\sqrt[m]{1+i} - 1) \qquad (3.12)$$

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1. \qquad (3.13)$$

Обидві ставки еквівалентні у фінансовому відношенні. Звідси випливає, що різні за величиною номінальні ставки будуть еквівалентними, якщо відповідні їм ефективні ставки мають одну величину.

Приклад 3.8. Яка величина ефективної ставки, якщо номінальна ставка 25% при щомісячному нарахуванні відсотків?

▲ Використаємо формулу (3.13):

$$i = \left(1 + \frac{0{,}25}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}280732\,.$$

Отже, для сторін не має значення, яку ставку використовувати: 25% при щомісячному нарахуванні відсотків чи ефективну (річну) 28,0732%.▲

Введемо надалі позначення $j^{(m)}$ – номінальна ставка j з m нарахуваннями на рік.

Іноді виникає необхідність у визначенні еквівалентної ставки, якщо збільшується чи зменшується кількість нарахувань відсотків. Еквівалентними ставки будуть, якщо є рівність:

$$\left(1 + \frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{j_2^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2},$$

тобто
$$j_2^{(m_2)} = m_2\left[\left(1 + \frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1\right]. \qquad (3.14)$$

Приклад 3.9. Визначити номінальну ставку $j^{(4)}$, яка еквівалентно замінить ставку $j^{(12)} = 25\%$.

▲ Використаємо формулу (3.14):

$$j^{(4)} = 4\left[\left(1 + \frac{0{,}25}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1\right] = 0{,}25524\,.$$

Отже, за рахунок зменшення кількості нарахувань, потрібно збільшити ставку до 25,524%.▲

3.4. Дисконтування за складною ставкою

Для простих відсотків ми розглянули математичне дисконтування і банківський облік векселів. Аналогічно розглянемо їх і для складних відсотків.

А. Математичне дисконтування

Полягає у визначенні сучасної вартості P, якщо відома майбутня вартість S при заданій відсотковій ставці i.

Знайдемо P з формули (3.1):

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = Sv^n, \qquad (3.15)$$

де $v^n = \dfrac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$, v – дисконтний або обліковий множник. Значення v протабульоване.

Якщо нарахування відсотків проводиться m раз в рік, то

$$P = \frac{S}{(1+\frac{j}{m})^{mn}} = Sv^{mn}. \qquad (3.16)$$

Різниця $S - P$ називається *дисконтом* і позначається D. Дисконт можна визначити за формулою:

$$D = S - P = S(1 - v^n). \qquad (3.17)$$

<u>*Приклад 3.10.*</u> Сума 5000 грн. виплатиться через 7 років. Необхідно визначити сучасну вартість суми за умови, що застосовується ставка складних відсотків 14% річних.

▲ Дисконтний множник $v^7 = 1{,}14^{-7} = 0{,}399637$, тобто початкова сума зменшиться майже на 60%. Сучасна вартість становить:

$$P = 5000 \cdot 1{,}14^{-7} = 1998{,}187. ▲$$

Зазначимо, що чим вища ставка відсотка, тим сильніше дисконтування, при незмінності інших умов.

<u>*Приклад 3.11.*</u> Знайти величину дисконтного множника при збільшенні ставки складних відсотків попереднього прикладу вдвічі.

▲ $i = 0{,}28$. Дисконтний множник $v^7 = 1{,}28^{-7} = 0{,}177636$. Якщо дисконтний множник зменшився, то початкова сума зменшиться майже на 82%.▲

Б. Дисконтування за складною обліковою ставкою

Процес дисконтування при застосуванні складної облікової ставки відбувається сповільнено, так як кожен раз облікова ставка застосовується не до початкової суми, а до суми, дисконтованої на попередньому кроці в часі. Розраховується сучасна вартість за формулою:

$$P = S(1-d)^n\,, \tag{3.18}$$

де d – складна річна облікова ставка.

<u>*Приклад 3.12.*</u> Боргове зобов'язання на суму 7000 грн., термін оплати якого – через 4 роки, продано з дисконтом за складною обліковою ставкою 15% річних. Знайти величину отриманої суми і дисконту. Порівняти ці величини для складної і простої облікової ставки.

▲ Для складної облікової ставки:

$P = 7000(1-0{,}15)^4 = 3654{,}044$ грн.

$D = 7000 - 3654{,}044 = 3345{,}956$ грн.;

для простої облікової ставки:

$P = 7000(1 - 4\cdot 0{,}15) = 2800$ грн.

$D = 7000 - 2800 = 4200$ грн. ▲

Отже, дисконтування для боржника вигідне за складною обліковою ставкою, для банку – за простою.

В. Номінальна і ефективна облікові ставки

Дисконтування може проводитися не один, а m раз у рік, тобто кожен раз облік проводиться за ставкою f/m:

$$P = S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}, \tag{3.19}$$

де f – номінальна річна облікова ставка.

Ефективна облікова ставка d характеризує ступінь дисконтування за рік, тобто множники дисконтування рівні:

$$(1-d)^n = \left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}. \tag{3.20}$$

Звідси знайдемо номінальну облікову ставку через ефективну і, навпаки, ефективну через номінальну:

$$f = m\left(1-\sqrt[m]{1-d}\right); \tag{3.21}$$

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m. \tag{3.22}$$

Г. Нарощення за складною обліковою ставкою

Якщо потрібно знайти нарощену суму за допомогою складної облікової ставки, то її розраховують за формулою:

$$S = \frac{P}{(1-d)^n} \tag{3.23}$$

чи при нарощенні m раз у році:

$$S = \frac{P}{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}}. \tag{3.24}$$

Множник нарощення дорівнює $(1-d)^{-n}$.

3.5. Порівняння результатів нарощення і дисконтування за різними видами ставок

Ми проаналізували нарощення і дисконтування за різними видами ставок i, j, d, f, i_s, d_s.

(*Зауваження.* i_s, d_s – проста відсоткова і облікова ставки відповідно. Індекс введено для того, щоб відрізнити складні ставки від простих).

Застосування цих ставок приводить до різних результатів. Для порівняння результатів нарощення і дисконтування достатньо порівняти множники нарощення і дисконтування. Для ставок j, f результат залежатиме також і від значення m, тому ці ставки не будемо аналізувати.

Припускаємо, що величини ставок однакові. Множники нарощення залежать від терміну нарощення.

Для $0 < n < 1$:

$$(1+i)^n < 1 + ni_s < \frac{1}{1 - nd_s} < \frac{1}{(1-d)^n}.$$

Найбільшу нарощену суму дає складна облікова ставка, найменшу – складна відсоткова.

Для $n = 1$:

$$1 + i = 1 + i_s < \frac{1}{1 - d_s} = \frac{1}{1 - d}.$$

Облікова ставка дає більше зростання, ніж відсоткова.

Для $n > 1$:

$$1 + ni_s < (1 + i)^n < \frac{1}{(1 - d)^n} < \frac{1}{1 - nd_s}.$$

Найбільшу нарощену суму дає проста облікова ставка, найменшу – проста відсоткова.

Аналогічно множники дисконтування залежать від терміну дисконтування.

Для $0 < n < 1$:

$$(1 - d)^n < 1 - nd_s < \frac{1}{1 + ni_s} < \frac{1}{(1 + i)^n}.$$

Найбільшу початкову суму дає складна відсоткова ставка, найменшу – складна облікова.

Для $n = 1$:

$$1 - d = 1 - d_s < \frac{1}{1 + i_s} = \frac{1}{1 + i}.$$

Відсоткова ставка дає більше зростання, ніж облікова.

Для $n > 1$:

$$1 - nd_s < (1 - d)^n < \frac{1}{(1 + i)^n} < \frac{1}{1 + ni_s}.$$

Найбільшу початкову суму дає проста відсоткова ставка, найменшу – проста облікова.

3.6. Визначення терміну позички і величини відсоткової ставки

При розробці умов контрактів, при порівнянні їхніх результатів виникає необхідність у визначенні терміну позички чи величини відсоткової ставки при заданих усіх інших умовах. Зрозуміло, що ці величини можна отримати, розв'язавши рівняння, які пов'язують S та P ((3.1), (3.11), (3.18), (3.19)).

А. Термін позички

- при нарощенні за складною річною ставкою i маємо:

$$n = \frac{\ln(S/P)}{\ln(1+i)} \ ; \tag{3.25}$$

- при нарощенні за складною номінальною ставкою j отримаємо:

$$n = \frac{\ln(S/P)}{m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)} \ ; \tag{3.26}$$

- при дисконтуванні за складною річною обліковою ставкою d маємо:

$$n = \frac{\ln(P/S)}{\ln(1-d)} \ ; \tag{3.27}$$

- при дисконтуванні за складною номінальною обліковою ставкою f отримаємо:

$$n = \frac{\ln(P/S)}{m\ln\left(1-\frac{f}{m}\right)} \ . \tag{3.28}$$

<u>Приклад 3.13.</u> Потрібно розрахувати, за який термін сума 3000 грн. буде дорівнювати 5000 грн., якщо відсотки нараховуються за складною ставкою 15%:

а) один раз на рік;

б) поквартально;

за складною обліковою ставкою 13%:

в) один раз у рік;

г) щомісячно.

▲ Використаємо формули (3.25) та (3.26):

а) $n = \frac{\ln(5000/3000)}{\ln(1+0{,}15)} = \frac{0{,}5108}{0{,}1398} = 3{,}654$ р.;

б) $n = \frac{\ln(5000/3000)}{4\ln(1+\frac{0{,}15}{4})} = \frac{0{,}5108}{0{,}1473} = 3{,}468$ р.;

Використаємо формули (3.27) та (3.28):

в) $n = \frac{\ln(3000/5000)}{\ln(1-0{,}13)} = \frac{-0{,}511}{-0{,}139} = 3{,}668$ р.;

г) $n = \dfrac{\ln(3000/5000)}{12\ln(1-\frac{0{,}13}{12})} = \dfrac{-0{,}511}{12\cdot(-0{,}011)} = 3{,}908$ р. ▲

Б. Величина ставки відсотків

Аналогічно з формул ((3.1), (3.11), (3.18), (3.19)) випливають формули для визначення ставок:

- складна річна ставка i:

$$i = \sqrt[n]{S/P} - 1; \tag{3.29}$$

- складна номінальна ставка j:

$$j = m\left(\sqrt[nm]{S/P} - 1\right); \tag{3.30}$$

- складна річна облікова ставка d:

$$d = 1 - \sqrt[n]{P/S}; \tag{3.31}$$

- складна номінальна облікова ставка f:

$$f = m\left(1 - \sqrt[nm]{P/S}\right). \tag{3.32}$$

<u>*Приклад 3.14*</u>. Якими повинні бути складні ставки, щоб за 5 років сума 3500 грн. зросла до 6000 грн.:

а) відсотки нараховуються один раз на рік;

б) за півріччями.

▲ Використаємо формули (3.29) та (3.30):

а) $i = \sqrt[5]{6000/3500} - 1 = 0{,}113824$;

б) $j = 2\left(\sqrt[5\cdot 2]{6000/3500} - 1\right) = 0{,}110757$. ▲

3.7. Неперервне нарощення і дисконтування

Неперервне нарощення (за нескінченно малі проміжки часу) в практичних фінансово-кредитних операціях застосовується рідко. Найчастіше його використовують в аналізі складних фінансових проблем, фінансовому проектуванні, наприклад, коли відсоткові ставки змінюються відповідно до певного закону.

При неперервному нарощенні застосовують відсоткову ставку – *силу росту*, яка характеризує відносний приріст нарощеної суми за нескінченно малий проміжок часу. Вона буває постійною і змінною в часі.

А. Постійна сила росту

При дискретному нарахуванні відсотків m раз у рік, нарощена сума становить:

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

При $m \to \infty$:

$$S = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = Pe^{jn}.$$

Позначимо силу росту через ξ, тоді

$$S = Pe^{\xi n}. \qquad (3.33)$$

Отже, сила росту – це номінальна ставка складних відсотків при $m \to \infty$.

Визначимо залежність між ставками i та ξ з рівності множників нарощення:

$$(1+i)^n = e^{\xi n}.$$

Звідси:

$$i = e^{\xi} - 1, \qquad (3.34)$$

$$\xi = \ln(1+i). \qquad (3.35)$$

<u>*Приклад 3.15.*</u> Сума, на яку нараховуються неперервні відсотки, дорівнює 1000 грн., сила росту – 10%, термін – 3 роки. Знайти нарощену суму та рівнозначну дискретну річну складну ставку відсотків.

▲ Нарощена сума становить:

$$S = 1000e^{0,1\cdot 3} = 1000\cdot 1,34986 = 1349,9 \text{ грн.}$$

Неперервне нарощення при силі росту 10% рівнозначне нарощуванню за цей же термін дискретних складних відсотків за річною ставкою:

$$i = e^{0,1} - 1 = 0,10517.$$

Перевіримо за формулою (3.1):

$$S = 1000(1+0,10517)^3 = 1349,9 \text{ грн.}$$ ▲

Для неперервного дисконтування з формули (3.33) отримуємо формулу:

$$P = Se^{-\xi n}, \qquad (3.36)$$

де $e^{-\xi n}$ – дисконтний множник.

<u>*Приклад 3.16.*</u> Боргове зобов’язання на суму 7000 грн., термін оплати якого – через 4 роки, продано з дисконтом за силою росту 15%. Знайти величину отриманої суми і дисконту. Порівняти ці величини для дискретної складної ставки такої самої величини з прикладу 3.12.

▲ З формули (3.36) отримаємо:

$$P = 7000e^{-0{,}15\cdot 4} = 3841{,}681 \text{ грн.}$$

$$D = 7000–3841{,}681=3158{,}319 \text{ грн.}$$

Пригадаємо, що для складної облікової ставки $P = 3654{,}044$ грн., $D = 3345{,}956$ грн.

Отже, дисконтування для боржника вигідне за силою росту, для банку – за складною обліковою ставкою. ▲

Б. Змінна сила росту

Якщо сила росту змінюється в часі за законом $\xi_t = f(t)$, то

$$S = Pe^{\int_0^n f(t)dt}, \quad P = Se^{-\int_0^n f(t)dt}.$$

Функція $\xi_t = f(t)$ може бути різною. Тому задача знаходження нарощеної і початкової суми зводиться до знаходження відповідних інтегралів.

Г. Визначення терміну позички і обсягу відсоткової ставки при постійній силі росту

З формули (3.33) знаходимо, що термін позички

$$n = \frac{\ln S/P}{\xi}, \qquad (3.37)$$

а сила росту

$$\xi = \frac{\ln S/P}{n}. \qquad (3.38)$$

3.8. Фінансові функції в EXCEL

Фінансові функції в EXCEL охоплюють такі розрахунки [10]:

а) обчислення нарощеної суми (майбутньої вартості);
б) розрахунок початкової, сучасної, поточної вартості;
в) визначення терміну платежу і відсоткової ставки;
г) розрахунок періодичних платежів.

А. Визначення нарощеної суми (майбутньої вартості) відбувається за допомогою функції:

БЗ (*норма; число періодів нарахувань; виплата; початкова сума; тип*),

де *норма* – відсоткова ставка;

виплата – величина платежу ренти (розглянемо у розділі "Фінансові ренти", а при обчисленні нарощеної суми за формулами (3.1, 3.11) нічого не вводимо);

початкова сума – це величина P, вводиться завжди від'ємною;

тип – характеризує фінансові ренти:

0 – виплата в кінці періоду;
1 – виплата на початку періоду;
за замовчуванням – 0.

Англійський варіант функції **БЗ** – **FV**.

<u>*Приклад 3.17.*</u> Яка сума буде на рахунку, якщо 5 тис. грн. покласти на 10 років під 17% відсотків річних. Відсотки нараховуються а) 1 раз на рік; б) щоквартально.

▲ Обчислюємо за формулою:

а) $S = 5 \cdot (1 + 0{,}17)^{10}$,

в EXCEL БЗ (0,17; 10; ; –5);

б) $S = 5 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}17}{4}\right)^{10 \cdot 4}$,

в EXCEL БЗ (0,17/4; 10×4; ; –5). ▲

Якщо ставка i не постійна протягом періоду нарахувань відсотків, а змінюється, то використовуємо функцію:

БЗРАСПИС (*P***,**{ставка 1; ставка 2; ...; ставка *N*}**)**.

(Англійський варіант цієї функції **FVSchedule**).

Приклад 3.18. За облігацією номіналом 6 тис. грн., випущеною на 5 років, передбачено такий порядок нарахування відсотків: 1-й і 2-й рік – 10%, 3-й – 15%, 4-й і 5-й – 20%. Визначити нарощену суму.

▲ Обчислюємо за формулою:

$$S = 6 \cdot (1 + 0{,}1)^2 \cdot (1 + 0{,}15) \cdot (1 + 0{,}2)^2 ,$$

в EXCEL БЗРАСПИС (6, {0,1; 0,1; 0,15; 0,2; 0,2}),
або якщо занести відсотки в деякий масив, наприклад, A1:A5, то функція матиме вигляд БЗРАСПИС (6, A1:A5). ▲

Б. Визначення початкової суми (сучасної вартості) проводиться за допомогою функції:

ПЗ (*норма; число періодів нарахувань; виплата; нарощена сума; тип*),
де *нарощена сума* – це величина S, вводиться завжди додатною, решта параметрів – такі самі, як у попередніх функціях.
Англійський варіант функції **ПЗ** – **PV**.

Приклад 3.19. Фірмі потрібні 6 тис. грн. через 5 років. Скільки треба вкласти сьогодні під 10% відсотків річних? Відсотки нараховуються а) 1 раз на рік; б) щомісячно.

▲ Обчислюємо за формулою:

а) $$P = \frac{6}{(1 + 0{,}1)^5} = 3{,}73 \text{ тис. грн.},$$

в EXCEL ПЗ (0,1; 5; ; 6)=3,73 тис. грн.;

б) $$P = \frac{6}{\left(1 + \frac{0{,}1}{12}\right)^{5 \cdot 12}} = 3{,}65 \text{ тис. грн.},$$

в EXCEL ПЗ (0,1/12; 12×5; ; 6). ▲

В. Визначення терміну платежу проводиться з допомогою функції:

КПЕР (*норма; виплата; початкова сума; нарощена сума; тип*),
де параметри такі самі, як у попередніх функціях.
Англійський варіант функції **КПЕР** – **NPER**.

Приклад 3.20. Перевіримо результати прикладу 3.13 для пунктів а) та б).

▲ Обчислюємо за формулою в EXCEL:

а) КПЕР(0,15; ; –3000; 5000) = 3,654 р.;

б) КПЕР(0,15/4; ; –3000; 5000) = 3,468 р. ▲

Г. Визначення відсоткової ставки i проводиться за допомогою функції:

НОРМА (*кількість періодів; виплата; початкова сума; нарощена сума; тип; припущення*),

де припущення вводиться у випадку, коли немає розв'язку. Тоді задається інший варіант i, за замовчуванням – 10%. Решта параметрів такі самі, як у попередніх функціях.

Англійський варіант функції **НОРМА** – **RATE**.

Приклад 3.21. Перевіримо результати прикладу 3.14 для пункту а).

▲ Обчислюємо за формулою в EXCEL:

а) НОРМА(5; ; –3500; 6000) = 0,113824. ▲

Також існують функції, які за відомою номінальною ставкою обчислюють ефективну (річну) і навпаки.

Це функції:

ЭФФЕКТ (номінальна ставка, кількість періодів**),**

НОМИНАЛ (ефективна ставка, кількість періодів**)**.

Англійський варіант функцій **EFFEKT**, **NOMINAL**. Обчислення відповідають формулам $i=\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^m-1$ та $j=m(\sqrt[m]{1+i}-1)$.

3.9. Фінансова еквівалентність платежів для складної ставки

У пункті 2.7 розглянуто випадки, коли необхідно замінити одне фінансове зобов'язання іншим, а саме: зміни умов контрактів при об'єднанні декількох платежів в один та заміні однієї кількості платежів іншою. Проаналізовано для простої відсоткової ставки. Аналогічно зробимо це для складної відсоткової ставки.

При розв’язуванні такого типу задач для того, щоб діяв принцип фінансової еквівалентності, розробляють *рівняння еквівалентності*. У ньому сума платежів за старим контрактом, розрахована в певний проміжок часу, дорівнює сумі платежів за новим контрактом на цей же період.

А. Об’єднання декількох платежів в один

Нехай необхідно об’єднати платежі із сумами $S_1, S_2, ..., S_m$ і термінами $n_1, n_2, ..., n_m$ в один об’єднаний платіж із сумою S_0 і терміном n_0.

- Розглянемо задачу при відомому терміні n_0, а невідомій S_0. Згідно з принципом фінансової еквівалентності сума об’єднаного платежу буде дорівнювати:

$$S_0 = \sum_{j=1}^{m} k_{\text{п}j} S_j \;, \tag{3.39}$$

де $k_{\text{п}j}$ – коефіцієнт приведення.

Він може бути множником нарощення, множником дисконтування або дорівнювати 1 залежно від термінів платежів.

Розглянемо такі випадки:

1) $n_0 > n_j$, де n_0 – термін об’єднаного платежу, n_j – термін j-го платежу.

Коефіцієнт приведення – це множник нарощення, який розраховується за формулою:

$$k_{\text{п}j} = (1+i)^{t_j} \;,$$

де $t_j = n_0 - n_j = \dfrac{\partial_0 - \partial_j}{K}$, ∂_0 – дата об’єднання платежу, ∂_j – дата j-го платежу;

2) $n_0 < n_j$.

Коефіцієнт приведення – це дисконтний множник, який розраховується за формулою:

$$k_{\text{п}j} = \frac{1}{(1+i)^{t_j}} \;,$$

де $t_j = n_j - n_0 = \dfrac{\partial_j - \partial_0}{K}$;

3) $n_0 = n_j$.

Коефіцієнт приведення дорівнює одиниці.

Приклад 3.22. Об’єднуються чотири платежі з сумами обсягом 10, 15, 20, 13 тис. грн. з термінами 2.03, 23.04, 3.06, 5.08. Термін об’єднання платежів – 14.07 за складною ставкою i = 10% річних і K = 365. Необхідно розрахувати суму об’єднаного платежу.

▲ Для перших трьох платежів $n_0 > n_j$, ($j=\overline{1,3}$), для четвертого $n_0 < n_4$. Розрахуємо число днів від терміну початкового платежу до об’єднаного:

$\partial_0 - \partial_1 = 134$ дні; $\partial_0 - \partial_2 = 82$ дні;

$\partial_0 - \partial_3 = 41$ день; $\partial_4 - \partial_0 = 22$ дні.

Згідно з формулою (2.22) сума об’єднаного платежу становить:

$$S_0 = (1+0{,}1)^{\frac{134}{365}} \cdot 10 + (1+0{,}1)^{\frac{82}{365}} \cdot 15 + (1+0{,}1)^{\frac{41}{365}} \cdot 20 +$$

$$+\frac{1}{(1+0{,}1)^{\frac{22}{365}}} \cdot 13 = 10{,}3561 + 15{,}3246 + 20{,}2153 + 12{,}9255 =$$

$$= 58{,}8215 \text{ тис грн.}$$ ▲

- Розглянемо задачу при відомій сумі об’єднаного платежу S_0, а невідомому терміні n_0. Рівняння еквівалентності виразимо у вигляді рівності сучасних вартостей відповідних платежів:

$$S_0 \frac{1}{(1+i)^{n_0}} = \sum_{j=1}^{m} S_j \frac{1}{(1+i)^{n_j}}, \qquad (3.40)$$

$$(1+i)^{n_0} = \frac{S_0}{\sum_{j=1}^{m} S_j \frac{1}{(1+i)^{n_j}}},$$

отже,

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right)}{\ln(1+i)}, \qquad (3.41)$$

де $X = \sum_{j=1}^{m} S_j \frac{1}{(1+i)^{n_j}}$.

Рівняння (3.41) має розв’язок у тому випадку, коли платіж S_0 більший від суми сучасних вартостей платежів, що замінюються, тобто $S_0 > X$.

<u>*Приклад 3.23.*</u> Чотири платежі із сумами 10, 15, 20, 13 тис. грн., які мали бути виплачені через 70, 100, 110, 135 днів відповідно, замінюються одним платежем величиною 65 тис. грн. Необхідно розрахувати термін об’єднаного платежу за складною ставкою i = 10% річних і K = 365.

▲ Розрахуємо суму сучасних вартостей платежів:

$$X = \frac{10}{(1+0{,}1)^{\frac{70}{365}}} + \frac{15}{(1+0{,}1)^{\frac{100}{365}}} + \frac{20}{(1+0{,}1)^{\frac{110}{365}}} + \frac{13}{(1+0{,}1)^{\frac{135}{365}}} =$$

$$= 9{,}819 + 14{,}613 + 19{,}434 + 12{,}55 = 56{,}416 \text{ тис. грн.}$$

Термін об’єднаного платежу розрахуємо за формулою (3.41):

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{65}{56{,}416}\right)}{\ln(1+0{,}1)} = \frac{0{,}141634}{0{,}09531} = 1{,}486 \text{ року, або 542 дні.} \ ▲$$

Б. Заміна однієї кількості платежів на іншу

Якщо платежі замінюються не на один платіж, а на декілька, то необхідно записати загальне рівняння еквівалентності. У ньому сума платежів за старими умовами, які приведені за заданою відсотковою ставкою і датою, прирівнюється до суми платежів за новими умовами, які приведені за тією самою відсотковою ставкою і датою.

Тобто рівняння має такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{ст}}} k_{\text{п}i(\text{ст})} S_{i(\text{ст})} = \sum_{j=1}^{N_{\text{н}}} k_{\text{п}j(\text{н})} S_{j(\text{н})} , \qquad (3.42)$$

де $S_{i(\text{ст})}$ ($i = \overline{1, N_{\text{ст}}}$) – суми платежів за старими умовами;

$k_{\text{п}i(\text{ст})}$ ($i = \overline{1, N_{\text{ст}}}$) – коефіцієнти приведення платежів за старими умовами до заданої дати;

$S_{j(\text{н})}$ ($j = \overline{1, N_{\text{н}}}$) – суми платежів за новими умовами;

$k_{\text{п}j(\text{н})}$ ($j = \overline{1, N_{\text{н}}}$) – коефіцієнти приведення платежів за новими умовами до тієї самої заданої дати.

Формула 3.42 аналогічна формулі 2.25, але коефіцієнти приведення обчислюються для складної відсоткової ставки.

Величину останнього платежу знаходять так, як для простої відсоткової ставки за формулою (2.27).

Питання для самоконтролю

1. Запишіть формулу нарощення за складними відсотками .
2. На що вказує множник нарощення при нарахуванні за складними відсотками ?
3. Зобразіть графічно зростання за складними відсотками.
4. Запишіть формулу нарощення за складними відсотками при зміні відсоткових ставок у часі.
5. Зростання за складними і простими відсотками при різних термінах позички.
6. В яких випадках при нарахуванні відсотків використовується номінальна ставка?
7. Дайте визначення ефективної ставки.
8. Наведіть формулу нарощення при номінальній ставці.
9. Виведіть формули визначення номінальної ставки через ефективну і навпаки.
10. Пригадайте визначення сучасної вартості майбутнього платежу.
11. Які види дисконтувань вам відомі?
12. Розкрийте суть математичного дисконтування за складними відсотками.
13. Запишіть формулу банківського обліку за складною обліковою ставкою.
14. Коли застосовуються номінальна і ефективна облікові ставки?
15. Виведіть формули визначення номінальної облікової ставки через ефективну облікову і навпаки.
16. Порівняйте результати нарощення за різними видами ставок при різних термінах позички.
17. Порівняйте результати дисконтування за різними видами ставок при різних термінах позички.
18. Виведіть формули визначення терміну позички для складних ставок нарощення і дисконтування.

19. За якими формулами визначаються складні ставки нарощення та облікові ставки (номінальні та ефективні)?
20. Коли застосовується сила росту?
21. Які розрахунки охоплюють фінансові функції в EXCEL?
22. Запишіть рівняння еквівалентності при об'єднанні декількох платежів в один.
23. Який вигляд має рівняння еквівалентності при заміні однієї кількості платежів на іншу?

ВПРАВИ

1. Банк приймає валютні внески на депозит за номінальною відсотковою ставкою 12% річних. Нарахування відсотків щомісячне. Визначте дохід клієнта, якщо внесок 2500 грн., а термін внеску – 6 місяців.

2. Визначте, яка сума буде на рахунку, якщо вклад на суму 800 тис. грн. зроблено під 8% річних на 20 років, а відсотки нараховуються щоквартально.

3. Визначте нарощену суму внеску в 3 тис. грн. при терміні 2 роки за номінальною відсотковою ставкою 4% річних. Нарахування відсотків проводиться: а) один раз на рік, б) за півріччями, в) щоквартально, г) щомісячно.

4. Яка сума повинна бути виплачена, якщо п'ять років назад була видана позика 2000 грн. під 15% річних із щомісячним нарахуванням відсотків.

5. Банк приймає внески від населення за номінальною відсотковою ставкою 12% річних. Нарахування відсотків щомісячне. Внесок 1200 грн. був повернений через 102 дні. Визначте дохід клієнта.

6. Внески на ощадний рахунок становлять 50 тис. грн. на початку кожного року. Визначте, скільки буде на рахунку через 10 років при відсотковій ставці 11%. Відсотки прості.

7. Для будівництва заводу банк надав фірмі кредит у 200 млн. грн. терміном на 10 років з розрахунку 13% річних. Обчисліть множник нарощення, суму нарахованих відсотків і вартість кредиту на кінець кожного року.

8. Фірмі "BMW" було надано пільгову позику в 500000 дол. на 3 роки під 12% річних. Відсотки на позику нараховуються один раз на рік. За умовами договору фірма має право оплати позику і

відсотки одним платежем в кінці трьохрічного періоду. Скільки повинна заплатити фірма при розрахунку за простими і складними відсотками?

9. Визначте період часу, необхідний для потроєння капіталу за простими і складними відсотками при відсотковій ставці 22% річних. В останньому випадку нарахування відсотків щоквартальне.

10. На який термін потрібно покласти кошти в банк під 26% річних при щомісячному, щоквартальному, піврічному нарахуванні відсотків, щоб сума вкладу подвоїлась. Метод розрахунку – банківський.

11. Клієнт вклав на депозит терміном на 5 місяців 1345 грн. Після закінчення терміну він отримав 1748 грн. Визначте відсоткову ставку банку.

12. За який час позика величиною 6000 грн., вкладена під 7% складних річних (K = 360), збільшиться на таку ж суму, що й вклад 7000 грн., зроблений з 3.03 по 1.07 під 9% складних річних (K=365).

13. Якою повинна бути мінімальна відсоткова ставка, щоб сума вкладу подвоїлась за рік при нарахуванні відсотків: а) щоквартально, б) щомісячно.

14. Реклама одного комерційного банку пропонує 82% річних при щомісячному нарахуванні відсотків. Другий комерційний банк пропонує 86% річних при щоквартальному нарахуванні відсотків. Термін вкладу –11 місяців. Якому банку віддати перевагу?

15. Банк не може забезпечити прибутковість за внесками населення більше, ніж 15% на рік. Яку номінальну ставку він повинен оголосити, якщо капіталізацію відсотків передбачається здійснювати а) раз на півріччя; б) щоквартально; в) щомісячно?

16. Порівняйте умови чотирьох банків: а) відсотки прості і відсоткова ставка 28%; б) номінальна відсоткова ставка – 26% річних, нарахування відсотків відбувається за півріччями; в) номінальна відсоткова ставка – 24%, нарахування відсотків щоквартальне; г) номінальна відсоткова ставка – 22%, нарахування відсотків щомісячне.

17. Клієнт вклав 15000 грн. на терміновий депозитний рахунок терміном на 8 місяців під номінальну відсоткову ставку 36% річних. Визначте нарощену суму і ефективну відсоткову ставку.

18. Яку суму потрібно покласти до банку, щоб через 1,5 року при нарахуванні відсотків раз на півроку можна було б одержати 2500 грн., якщо річна ставка становить 22%?

19. Підприємство взяло кредит на 6 років під річну відсоткову ставку 48%. Комісійні становлять 3% від суми кредиту. Визначте ефективну відсоткову ставку при нарахуванні відсотків: а) один раз на рік; б) щоквартально; в) щомісячно.

20. Підприємство отримало позику на 3 роки під річну відсоткову ставку 38%. Комісійні становлять 5% від суми кредиту. Визначте ефективну відсоткову ставку позики, якщо: а) позика отримана під прості відсотки, б) позика отримана під складні відсотки з нарахуванням відсотків один раз на рік, в) при щомісячному нарахуванні відсотків.

21. Визначте дохід клієнта і податок за терміновим депозитом у 8000 грн. на 7 місяців з номінальною відсотковою ставкою 28% річних, якщо відсоткова ставка податку 20%. Нарахування відсотків проводиться: а)щоквартально, б)щомісячно.

22. Визначте номінальну ефективну ставку простих і складних відсотків для депозиту терміном на 4 місяці, якщо номінальна відсоткова ставка податку 13%. Банк нараховує відсотки щомісячно.

23. Сума термінового депозиту на 6 місяців – 3000 дол. Номінальна відсоткова ставка банку – 16% річних при щомісячному нарахуванні відсотків. Який дохід клієнта, якщо податок на прибуток – 15%.

24. Виробнича фірма отримала кредит в 240000 грн. терміном на 4 роки. Відсотки – складні. Відсоткова ставка за перший рік – 24% і кожен наступний рік збільшується на 3%. Визначте суму повернення кредиту.

25. Визначте період часу, необхідний для подвоєння капіталу за простими і складними відсотками при відсотковій ставці 12% річних. В останньому випадку нарахування відсотків щомісячне.

26. 3.09.03 р. курс купівлі долара в банку “Аваль” становив 5,25 дол. Клієнт купив гривні на суму 500 дол. і помістив їх на терміновий депозит терміном на два місяці. Гривнева відсоткова ставка банку на цей період становила 8% річних. Валютна відсоткова ставка – 4%. Курс продажу долара 3.11.03 р. становив 5,45 дол. Потрібно визначити нарощену валютну суму і ефективну відсоткову ставку такого нарощення.

27. Яким умовам віддасть перевагу клієнт при отриманні кредиту: а) відсоткова ставка – 12%, нарахування відсотків щомісячно;

б) відсоткова ставка – 14%, нарахування відсотків щоквартальне; в) відсоткова ставка – 23%, нарахування відсотків за півріччями.

28. Розрахувати майбутню вартість облігації номіналом 100 тис. грн., яка випущена на 5 років. Перші два роки відсотки нараховуються за ставкою 15%, а в наступні три роки – за ставкою 20% річних.

29. Фірма "Техфарм" для будівництва цеху з виробництва медпрепаратів отримала від держави пільговий кредит під 6% річних на 4 роки. Сума кредиту – 180000 грн. Відсотки складні і оплачуються при видачі кредиту. Яку суму отримає фірма?

30. Підприємець отримав кредит в 18000 грн. на три роки під 18% річних. Погашення кредиту і відсотків повинне відбуватись у кінці кожного року рівними сумами. Відсотки нараховуються на непогашену частину кредиту. Визначити платежі за кредитом і відсоткові платежі за роками.

31. Сума кредиту – 20000 грн. Кредит отриманий на 4 роки під відсоткову ставку 24% річних. Нараховуються відсотки на непогашену суму кредиту. Погашення кредиту і відсотків повинне відбуватися рівними платежами в кінці кожного року. Визначте величину річного платежу, загальну суму відсотків і нарощену суму кредиту.

32. Фірма узяла в комерційному банку кредит на суму 600 тис. грн. терміном на 4 роки. Згідно з угодою, за перший рік відсоткова ставка становила 24% і з урахуванням інфляції кожного року підвищувалася на 5 пунктів. Визначте множник нарощування, нарощену суму і дохід банку.

33. Векселевласник отримав 5000 грн. за векселем з терміном погашення 7 місяців. Номінальна вартість векселя 7000 грн. Визначте облікову ставку банку.

34. Номінальна вартість векселя 11000 грн. Векселевласник обготівкував його в банку за 38 днів до терміну погашення під облікову ставку 84%. Яку суму отримає векселевласник?

35. Векселевласник облікував вексель у банку за 6 місяців до терміну погашення за номінальною відсотковою ставкою j = 0,6. Нарахування відсотків щомісячне. Номінальна вартість векселя – 120000 грн. Скільки отримав власник векселя і чому дорівнює дисконт банку?

36. Визначте, скільки коштує акція 15 червня, дата погашення якої 15 серпня, якщо її номінал 325 грн., а складна дисконтна облікова ставка 30%.

37. Фінансова компанія за кредит в 40000 грн. терміном на 5 місяців під номінальний обліковий відсоток 0,9 отримала дисконт 4000 грн. Відсотки складні і нараховуються щомісячно. На який термін було видано кредит?

38. Визначте номінальний обліковий відсоток, за яким був обготівкований вексель номіналом 3000 грн. і терміном погашення 80 днів, якщо векселевласник отримав 2750 грн. Нарахування відсотків щомісячне.

39. Власник векселя облікував його в банку за три місяці до кінця терміну погашення і отримав 1600 грн. Номінальний обліковий відсоток банку – 0,72. Відсотки складні і нараховуються щомісячно. Визначте номінальну вартість векселя.

40. Визначте просту і складну облікові ставки, якщо за кредит в 2400 грн. з терміном погашення три місяці потрібно заплатити 3200 грн. Нарахування дисконту щомісячне.

41. Власник векселя номінальною вартістю 10000 грн. облікував його в банку за обліковою ставкою 6%. До терміну погашення залишилось 4 місяці. Визначте поточну вартість векселя і дисконт банку у випадку простої і складної облікових ставок. В останньому випадку дисконтування щомісячне.

42. Визначте просту і складну номінальні облікові ставки при кредитуванні, якщо за кредит в 5000 грн., виданий на чотири місяці, потрібно заплатити 6000 грн. В останньому випадку нарахування дисконту щомісячне.

43. На який термін видано кредит при обліковій ставці 0,7, якщо позичальник отримав 1800 грн., а номінальна вартість кредиту – 2000 грн. Дисконтування за простою і складною обліковими ставками. В останньому випадку нарахування дисконту щомісячне.

44. Яку суму необхідно вкласти у банк під складну відсоткову ставку 25% річних, щоб накопичити 30 тис. грн. за 2 роки за щомісячного нарахування відсотків?

45. Визначте номінальну вартість векселя і дисконт банку, якщо банк облікував вексель за три місяці до терміну погашення за обліковою ставкою 6% і власник векселя отримав 4800 грн. Нарахування дисконту щомісячне.

46. Визначте складну облікову ставку, еквівалентну складній відсотковій ставці 6% річних. Нарахування дисконту і відсотків один раз на рік.

47. Визначте річну відсоткову ставку для вкладу величиною 100 тис. грн., якщо за 13 років ця сума зросла до 1 млн. грн. при щоквартальному нарахуванні відсотків.

48. Визначте номінальну складну облікову ставку, еквівалентну номінальній ставці, яка дорівнює 4% складних відсотків, при щомісячному нарахуванні дисконту і відсотків.

49. Визначте складну відсоткову ставку, еквівалентну складній обліковій ставці 7% річних при депозиті 4 місяці.

50. Власник векселя номінальною вартістю 3000 грн., облікував його в банку за три місяці до терміну погашення за простою обліковою ставкою 6% річних. Комісійні – 1% від номінальної вартості векселя. Яку суму отримає власник і який дохід цієї операції за ефективною ставкою простих і складних відсотків?

51. Три векселі номінальною вартістю 1000 грн., 3000 грн., 8000 грн. з терміном погашення 80 днів об'єднали в один номінальною вартістю 14000 грн. Об'єднання відбувається за річною ставкою складних відсотків – 19%. Знайдіть термін погашення об'єднаного векселя.

52. Об'єднуються чотири платежі з сумами 8, 10, 12, 14 тис. грн. з термінами 2.04, 28.04, 3.07, 15.08. Термін об'єднання платежів – 11.08 за складною ставкою i = 11% річних і K = 365. Необхідно розрахувати суму об'єднаного платежу.

53. Об'єднуються три платежі з сумами 5, 7, 4 тис. грн. і термінами платежів 12.04, 7.06, 22.09. Термін об'єднання платежів – 11.08. Визначте суму об'єднаного платежу за складною ставкою 8% і часовою базою K = 360 днів.

54. Платежі на суми 150, 100, 165 тис. грн. і з термінами погашення 100, 120, 250 днів від деякої дати замінюються одним платежем з терміном 270 днів від цієї самої дати. Визначте суму об'єднаного платежу за складної ставки 9% річних і часової бази K = 360 днів.

55. Чотири векселі номінальною вартістю 2000 грн., 3000 грн., 4000 грн., 8500 грн., з терміном погашення 35, 60, 70, 90 днів потрібно об'єднати в один з терміном погашення 120 днів. Визначте вартість об'єднаного векселя, якщо складна відсоткова ставка, за якою відбувається об'єднання, – 6% річних.

4. ФІНАНСОВІ РЕНТИ

4.1. Види потоків платежів і їхні параметри

Сучасні фінансово-банківські операції мають не окремі чи разові платежі, а деяку послідовність у часі [12]. Наприклад, погашення заборгованості в кредит, періодичне надходження доходів від інвестицій, виплати пенсій і т. д. Такі послідовності називають *потоком платежів*.

Класифікація потоків:

- регулярні (обсяги платежів постійні, або через рівні інтервали);
- нерегулярні.

Платежі можуть бути додатними (надходження); від'ємними (виплати).

Потік платежів, всі платежі якого – додатні величини та часові інтервали однакові, називається *фінансовою рентою*, або *рентою*, або *ануїтетом*. Наприклад, платіж за споживчим кредитом, отримання відсотків за облігації.

Рента описується параметрами:

- платіж ренти (величина платежу);
- період ренти (часовий інтервал між двома послідовними платежами);
- термін ренти (час від початку першого періоду ренти до кінця останнього);
- відсоткова ставка;
- додаткові параметри (кількість платежів у році, частота та спосіб нарахування відсотків).

Ренти класифікуються:

За кількістю платежів на рік:

- річні;
- p-термінові.

За частотою:

- дискретні;
- неперервні.

За кількістю нарахувань відсотків протягом року:

- один раз на рік;
- m раз на рік;
- неперервне нарахування.

За величиною платежів ренти:
- постійні;
- змінні.

За виплатами ренти:
- в кінці періоду (постнумерандо);
- на початку періоду (пренумерандо);
- в середині періоду.

Аналіз потоку платежів припускає розрахунок таких характеристик:

- нарощеної суми всіх платежів потоку з нарахованими на них до кінця терміну відсотками;
- оцінку сучасної вартості усього потоку платежів, дисконтованих на початок терміну ренти.

4.2. Прямий метод розрахунку нарощеної суми і сучасної вартості потоку платежів

Нехай є ряд платежів R_t, що виплачуються протягом часу n_t, після деякого початкового моменту часу. Загальний термін виплат – n років. Необхідно визначити нарощену на кінець терміну потоку платежів суму S.

Якщо відсотки нараховуються один раз на рік, то

$$S = \sum_t R_t (1+i)^{n-n_t} . \qquad (4.1)$$

Сучасна вартість такого потоку платежів дорівнює:

$$A = \sum_t \frac{R_t}{(1+i)^{n_t}} . \qquad (4.2)$$

Сучасна вартість потоку платежів – це узагальнена оцінка, пов'язана з деяким попереднім проміжком часу; загальна сума, яка на даний момент рівноцінна майбутнім виплатам.

Нарощена сума – це узагальнення усіх платежів потоку у вигляді одного числа, нарощеного до кінця терміну.

<u>*Приклад 4.1.*</u> Передбачено видачу позики в часі:

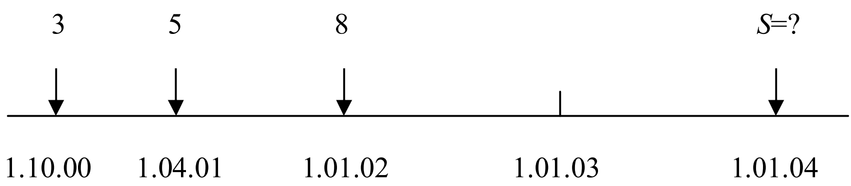
1 жовтня 2000 р. – 3 тис. грн.

1 квітня 2001 р. – 5 тис. грн.

1 січня 2002 р. – 8 тис. грн.

Необхідно визначити суму заборгованості на 1 січня 2004 р. за умови, що відсотки нараховуються за ставкою 17%.

▲ Зобразимо схематично видачу позики



Нарощену суму боргу розраховуємо, використовуючи формулу (4.1):

$$S = 3 \cdot 1{,}17^{3,25-0} + 5 \cdot 1{,}17^{3,25-0,5} + 8 \cdot 1{,}17^{3,25-1,25} =$$

$$= 3 \cdot 1{,}17^{3,25} + 5 \cdot 1{,}17^{2,75} + 8 \cdot 1{,}17^{2} = 3 \cdot 1{,}6657 + 5 \cdot 1{,}5400 + 8 \cdot 1{,}3689 =$$

$$= 4{,}9971 + 7{,}7 + 10{,}9512 = 23{,}6483 \text{ тис. грн.}$$

За цими даними визначимо сучасну вартість потоку на момент виплати першої суми за формулою (4.2):

$$A = 3 \cdot \frac{1}{1{,}17^{0}} + 5 \cdot \frac{1}{1{,}17^{0,5}} + 8 \cdot \frac{1}{1{,}17^{1,25}} = 3 + 4{,}6225 + 6{,}5744 =$$

$$= 14{,}1969 \text{ тис. грн.}$$ ▲

Коли величини платежів потоку довільні, але виплати постнумерандо через рівні проміжки часу, то для підрахунку сучасної вартості потоку можна використати функцію в EXCEL:

НПЗ (*норма; значення*),

де *норма* – відсоткова ставка для того періоду, в якому проводяться виплати;

значення – послідовні дані, що характеризують потік платежів.

4.3. Нарощена сума постійної ренти постнумерандо

Формулами (4.1–4.2) можна скористатися для будь-якого потоку платежів, в тому числі для постійної ренти. Проте є більш компактні формули.

Розглянемо постійну ренту постнумерандо і знайдемо основні формули, що описують її.

А. Річна рента

Нехай n років у банк в кінці кожного року вноситься R грн. На внески нараховуються складні річні відсотки за ставкою i. Це є рента з платежем R, терміном n. Всі платежі ренти, крім останнього, приносять відсотки:

$$R(1+i)^{n-1},\ R(1+i)^{n-2},\ R(1+i)^{n-3},\ ...,\ R(1+i),\ R.$$

Ряд платежів утворює геометричну прогресію, причому якщо розглянути ряд у зворотному порядку, то перший член прогресії $b_1 = R$, знаменник $q = 1+i$. Суму ряду обчислимо за формулою суми членів геометричної прогресії $S = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}$. Отримаємо:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n;i}, \qquad (4.3)$$

де $s_{n;i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ – коефіцієнт нарощення ренти.

<u>*Приклад 4.2.*</u> Створюється фонд, у який внески надходять у вигляді постійної річної ренти постнумерандо протягом 4 років. Величина разового внеску – 1 млн. грн. На засоби, що надходять, нараховуються відсотки за ставкою 18% річних.

Розрахувати величину фонду на кінець терміну.

▲ Обчислюємо за формулою (4.3):

$$S = 1\cdot s_{4;0,18} = 1\cdot\frac{(1+0{,}18)^4 - 1}{0{,}18} = \frac{0{,}938778}{0{,}18} = 5{,}215432 \text{ млн. грн.}$$

Для випадку річної ренти з одноразовим нарахуванням відсотків у році обчислити нарощену суму можна в EXCEL за допомогою функції **БЗ**. У цьому прикладі обчислення будуть такі:

БЗ (0,18; 4; –1; ; 0) = 5,215432 млн. грн.

або **БЗ** (0,18; 4; –1) = 5,215432 млн. грн.

Зауваження. На місці виплати вводимо величину платежу ренти завжди від'ємною, на місці початкової суми нічого не вводимо, тип 0 відповідає ренті постнумерандо. ▲

Б. Річна рента з нарахуванням відсотків m раз на рік

$$S = R\frac{\left(1+{}^{j}\!/\!{}_{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+{}^{j}\!/\!{}_{m}\right)^{m}-1} = Rs_{mn;{}^{j}\!/\!{}_{m}}, \qquad (4.4)$$

де $s_{mn;{}^{j}\!/\!{}_{m}} = \dfrac{\left(1+{}^{j}\!/\!{}_{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+{}^{j}\!/\!{}_{m}\right)^{m}-1}$ – коефіцієнт нарощення ренти.

<u>*Приклад 4.3.*</u> Змінимо умову попередньої задачі. Нехай на засоби, які надходять, нараховуються відсотки за півріччями. Тоді кожен раз вони рахуються за ставкою ${}^{j}\!/\!{}_{m} = {}^{0{,}18}\!/\!{}_{2}$.

▲ Величина фонду на кінець терміну становить:

$$S = 1\cdot s_{2\cdot 4;{}^{0{,}18}\!/\!{}_{2}} = 1\cdot\frac{(1+0{,}09)^{2\cdot 4}-1}{(1+0{,}09)^{2}-1} = \frac{0{,}992563}{0{,}1881} = 5{,}276782 \text{ млн. грн.}$$ ▲

В. Рента р-термінова ($m=1$)

Нехай рента виплачується p раз на рік рівними сумами, відсотки нараховуються раз в кінці року. Якщо R – виплата за рік, то кожен раз виплачується сума ${}^{R}\!/\!{}_{p}$. Загальна кількість платежів ренти дорівнює np. Послідовність платежів утворює геометричну прогресію з першим членом $b_1 = {}^{R}\!/\!{}_{p}$, знаменником – $(1+i)^{1/p}$, тому нарощена сума ренти дорівнює:

$$S = \frac{R}{p}\frac{(1+i)^{{}^{np}\!/\!{}_{p}}-1}{(1+i)^{1/p}-1} = R\frac{(1+i)^{n}-1}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]} = Rs_{n;i}^{(p)}. \qquad (4.5)$$

$s_{n;i}^{(p)} = \dfrac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{1/p}-1}$ – коефіцієнт нарощення ренти.

<u>*Приклад 4.4.*</u> Повернемося до умови попередньої задачі. Нехай на засоби, які надходять, нараховуються відсотки раз на рік, платежі виплачуються щоквартально.

▲ Тоді величина одного платежу становить $R/p = 1/4 = 0{,}25$ млн. грн. Загальна кількість платежів $4 \cdot 4 = 16$. Нарощена сума дорівнює:

$$S = 1 \cdot \frac{(1+0{,}18)^4 - 1}{4 \cdot [(1+0{,}18)^{1/4} - 1]} = 1 \cdot \frac{0{,}938778}{0{,}168987} = 5{,}55534 \text{ млн. грн.} ▲$$

Г. Рента р-термінова **(**$m = p$**)**

Нехай рента виплачується p раз на рік рівними сумами, відсотки нараховуються m раз у рік, а $p = m$, тобто число виплат дорівнює числу нарахування відсотків.

Щоб знайти нарощену суму, підставляємо у формулу (4.3) $i = j/m$, число періодів виплат $np = nm$, платіж ренти $R/p = R/m$:

$$S = \frac{R}{m} \frac{\left(1 + j/m\right)^{mn} - 1}{j/m} = R \frac{\left(1 + j/m\right)^{mn} - 1}{j} = Rs_{mn;j/m}. \qquad (4.6)$$

$$Rs_{mn;j/m} = \frac{\left(1 + j/m\right)^{mn} - 1}{j}$$ – коефіцієнт нарощення ренти.

Зауваження. Для випадку p-термінової ренти, для якої число виплат дорівнює числу нарахування відсотків, обчислити нарощену суму можна в EXCEL за допомогою функції **БЗ**.

Приклад 4.5. Повернемося до умови попередньої задачі. Нехай платежі виплачуються щоквартально і відсотки нараховуються теж щоквартально.

▲ Обчислимо нарощену суму за формулою (4.6):

$$S = 1 \cdot s_{4\cdot4;0{,}18/4} = 1 \cdot \frac{\left(1 + 0{,}18/4\right)^{4\cdot4} - 1}{0{,}18} = \frac{1{,}02237}{0{,}18} = 5{,}679834 \text{ млн. грн.}$$

В EXCEL за допомогою функції **БЗ** обчислення такі:

БЗ (0,18/4; 4*4; –1/4; ; 0) = 5,679834 млн. грн.

або **БЗ** (0,18/4; 4*4; –1/4) = 5,679834 млн. грн. ▲

Д. Рента р-термінова ($p \neq m$)

Нехай рента виплачується p раз на рік рівними сумами, відсотки нараховуються m раз у рік, а число виплат не дорівнює числу нарахування відсотків $p \neq m$.

Щоб знайти нарощену суму, використовуємо формулу суми членів геометричної прогресії з першим членом $b_1 = R/p$, знаменником – $q = \left(1 + j/m\right)^{m/p}$. Тоді нарощена сума ренти має такий вигляд:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + j/m\right)^{\frac{m}{p}np} - 1}{\left(1 + j/m\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + j/m\right)^{mn} - 1}{\left(1 + j/m\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = Rs^{p}_{mn;j/m}. \qquad (4.7)$$

$s^{p}_{mn;j/m} = \dfrac{\left(1 + j/m\right)^{mn} - 1}{\left(1 + j/m\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$ – коефіцієнт нарощення ренти.

<u>*Приклад 4.6.*</u> Для даних до попередньої задачі при

а) виплачуванні платежів щоквартально додамо, що відсотки нараховуються щомісячно;

б) виплачуванні платежів щомісячно додамо, що відсотки нараховуються щоквартально.

▲ Величина фонду за формулою (4.7) становить:

а) $S = 1 \cdot s^{4}_{12\cdot 4;0,18/12} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\left(1 + 0,18/12\right)^{12\cdot 4} - 1}{\left(1 + 0,18/12\right)^{\frac{12}{4}} - 1} = \dfrac{1,043478}{0,182713} = 5,711$ млн. грн.;

б) $S = 1 \cdot s_{4\cdot 4;0,18/4}^{12} = \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{\left(1 + {}^{0,18}\!\!\diagup_{4}\right)^{4\cdot 4} - 1}{\left(1 + {}^{0,18}\!\!\diagup_{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1} = \dfrac{0,085198}{0,01478} = 5,7642$ млн. грн.

▲

Е. Рента з неперервним нарахуванням відсотків

Нехай рента виплачується один раз на рік, а відсотки нараховуються безперервно.

Платежі ренти будуть такі:

$$Re^{(n-1)\xi},\ Re^{(n-2)\xi},\ ...,\ Re^{2\xi},\ Re^{\xi},\ R.$$

У зворотному порядку – це геометрична прогресія з $b_1 = R$, знаменником – $q = e^{\xi}$. Тому нарощена сума ренти має такий вигляд:

$$S = R \cdot \frac{e^{\xi n} - 1}{e^{\xi} - 1} = R \cdot s_{n;\xi}. \qquad (4.8)$$

Для p-термінової ренти з неперервним нарощенням:

$$S = R \cdot \frac{e^{\xi n} - 1}{p(e^{\xi/p} - 1)} = R \cdot s_{n;\xi}^{(p)}. \qquad (4.9)$$

$s_{n;\xi}^{(p)} = \dfrac{e^{\xi n} - 1}{e^{\xi/p} - 1}$ – коефіцієнт нарощення ренти, e =2,718282.

<u>*Приклад 4.7.*</u> До умови попередньої задачі, додамо, що відсотки нараховуються безперервно із силою росту $\xi = 0,18$.

▲ Розрахуємо нарощену суму при p = 1 за формулою (4.8):

$$S = 1 \cdot \frac{e^{0,18\cdot 4} - 1}{e^{0,18} - 1} = \frac{1,0544}{0,1972} = 5,34655 \text{ млн. грн.}$$

Якщо p = 4, то за формулою (4.9) отримаємо:

$$S = 1 \cdot \frac{e^{0,18\cdot 4} - 1}{4 \cdot (e^{0,18/4} - 1)} = \frac{1,0544}{0,1841} = 5,7271 \text{ млн. грн.}$$ ▲

Є. Порівняння результатів нарощення для рент з різними параметрами

Як видно з попередніх прикладів, при різних значеннях p і m отримуються різні значення нарощеної суми. Для їхнього порівняння введемо позначення нарощеної суми з p виплатами і m нарахуваннями відсотків – $S(p;m)$.

Тоді для однакового терміну ренти, відсоткових ставок $i = j = \xi$ та однакових сум, внесених за рік, буде виконуватися нерівність:

$$S(1;1) < \underset{m>1}{S(1;m)} < S(1;\infty) < \underset{p>1}{S(p;1)} < \underset{p=m>1}{S(p;m)} < \underset{m>p>1}{S(p;m)} < \underset{p>m>1}{S(p;m)} < S(p;\infty).$$

Результати нерівності можуть бути використані при розробці умов контрактів, при виборі оптимальних капіталовкладень.

4.4. Сучасна вартість постійної ренти постнумерандо

Сучасна вартість потоку платежів – сума дисконтованих платежів цього потоку до деякого попереднього моменту часу.

Розглянемо методи розрахунку сучасної вартості фінансових рент у такому самому порядку, що й методи розрахунку нарощених сум.

А. Річна рента постнумерандо

Це рента з платежем R в кінці кожного року, терміном n і щорічним дисконтуванням. Дисконтована величина першого платежу $R(1-d) = R\dfrac{1}{1+i} = Rv$, другого – Rv^2 і т. д., останнього – Rv^n.

Ряд цих величин утворює геометричну прогресію з першим членом прогресії $b_1 = Rv$, знаменником $q = v$. Суму ряду обчислимо згідно з формулою суми членів геометричної прогресії і позначимо через A:

$$A = Rv\frac{v^n - 1}{v - 1} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i}, \tag{4.10}$$

де $a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – коефіцієнт приведення ренти, для значення якого складені таблиці. Коефіцієнт приведення ренти характеризує сучасну вартість ренти з платежем $R = 1$.

Приклад 4.8. Створюється фонд, у який внески надходять у вигляді постійної річної ренти постнумерандо протягом 4 років. Величина разового внеску 1 млн. грн. На засоби, що надходять, нараховуються відсотки за ставкою 18% річних.

Розрахувати сучасну вартість майбутніх платежів.

▲ Обчислення проводяться за формулою (4.10):

$$A = 1 \cdot a_{4;0,18} = 1 \cdot \frac{1-(1+0,18)^{-4}}{0,18} = \frac{0,484211}{0,18} = 2,690062 \text{ млн. грн.}$$

Отже, сучасна вартість майбутніх платежів дорівнює 2,690062 млн. грн. або, інакше кажучи, 2,690062 млн. грн., розміщені під 18% річних, забезпечать щорічну виплату по 1 млн. грн. протягом 4-ох років.

Для випадку річної ренти з одноразовим нарахуванням відсотків у році обчислити сучасну вартість можна в EXCEL за допомогою функції **ПЗ**. У цьому прикладі обчислення такі:

ПЗ (0,18; 4; –1; ; 0) = 2,690062 млн. грн.

або **ПЗ** (0,18; 4; –1) = 2,690062 млн. грн. ▲

Б. Річна рента з нарахуванням відсотків m раз на рік

Аналогічно, як і в попередньому випадку, можна показати, що сучасна вартість такої ренти:

$$A = R\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/\!_{m}\right)^{-mn}}{\left(1+{}^{j}\!/\!_{m}\right)^{m}-1} = Ra_{mn;{}^{j}\!/\!_{m}}. \qquad (4.11)$$

Приклад 4.9. Змінимо умову попередньої задачі. Нехай на засоби, що надходять, нараховуються відсотки щопівроку. Тоді щоразу вони рахуються за ставкою ${}^{j}\!/\!_{m} = {}^{0,18}\!/\!_{2}$.

▲ Сучасна вартість майбутнього фонду становить:

$$A = 1 \cdot a_{2\cdot 4;{}^{0,18}\!/\!_{2}} = 1 \cdot \frac{1-(1+0,09)^{-2\cdot 4}}{(1+0,09)^{2}-1} = \frac{0,498134}{0,1881} = 2,648239 \text{ млн. грн.} \ ▲$$

В. Рента p-термінова **(**$m=1$**)**

Нехай рента виплачується p раз на рік рівними сумами, відсотки нараховуються раз у кінці року. Якщо R виплата за рік, то щоразу виплачується сума R/p. Загальна кількість платежів ренти дорівнює np. Сума дисконтованих платежів ренти становить:

$$A = \frac{R}{p}\frac{1-(1+i)^{-np/p}}{(1+i)^{1/p}-1} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]} = Ra_{n;i}^{(p)}. \qquad (4.12)$$

<u>*Приклад 4.10.*</u> Повернемося до умови попередньої задачі. Нехай на засоби, які надходять, нараховуються відсотки раз на рік, платежі виплачуються щоквартально.

▲ Тоді величина одного платежу $R/p = 1/4 = 0{,}25$ млн. грн. Загальна кількість платежів $4 \cdot 4 = 16$. Сучасна вартість становить:

$$A = 1 \cdot \frac{1-(1+0{,}18)^{-4}}{4 \cdot [(1+0{,}18)^{1/4}-1]} = 1 \cdot \frac{0{,}484211}{0{,}168987} = 2{,}865383 \text{ млн. грн. } \blacktriangle$$

Г. Рента р-термінова **(**$m = p$**)**

Нехай число виплат дорівнює числу нарахування відсотків.

Щоб знайти сучасну вартість, підставляємо у формулу (4.10) $i = j/m$, число періодів виплат $np = nm$, платіж ренти $R/p = R/m$. Тоді

$$A = \frac{R}{m}\frac{1-\left(1+j/m\right)^{-mn}}{j/m} = R\frac{1-\left(1+j/m\right)^{-mn}}{j} = Ra_{mn;j/m}. \qquad (4.13)$$

Зауваження. Для випадку *p*-термінової ренти, для якої число виплат дорівнює числу нарахування відсотків, обчислити сучасну вартість можна в EXCEL за допомогою функції **ПЗ**.

<u>*Приклад 4.11.*</u> Повернемося до умови попередньої задачі. Нехай платежі виплачуються щоквартально і відсотки нараховуються теж щоквартально.

▲ Обчислимо сучасну вартість за формулою (4.13):

$$A = 1 \cdot a_{4\cdot 4;0,18/4} = 1 \cdot \frac{1-\left(1+{}^{0,18}\!/_{4}\right)^{-4\cdot 4}}{0,18} = \frac{0,505531}{0,18} = 2,808504 \text{ млн. грн.}$$

В EXCEL за допомогою функції **ПЗ** обчислення такі:

ПЗ (0,18/4; 4*4; –1/4; ; 0) = 2,808504 млн. грн.

або **ПЗ** (0,18/4; 4*4; –1/4) = 2,808504 млн. грн. ▲

***Д. Рента р-термінова* ($p \neq m$)**

Для такої ренти сучасна вартість визначається за формулою:

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = Ra^{(p)}_{mn;j/m}. \tag{4.14}$$

<u>*Приклад 4.12.*</u> Для даних до попередньої задачі при

а) виплачуванні платежів щоквартально додамо, що відсотки нараховуються щомісячно;

б) виплачуванні платежів щомісячно додамо, що відсотки нараховуються щоквартально.

▲ Сучасна вартість фонду за формулою (4.14) становить:

а) $A = 1 \cdot a^{(4)}_{12\cdot 4;0,18/12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\left(1+{}^{0,18}\!/_{12}\right)^{-12\cdot 4}}{\left(1+{}^{0,18}\!/_{12}\right)^{\frac{12}{4}}-1} = \frac{0,510638}{0,182713} = 2,7947$ млн. грн.

б) $A = 1 \cdot a^{(12)}_{4\cdot 4;0,18/4} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1-\left(1+{}^{0,18}\!/_{4}\right)^{-4\cdot 4}}{\left(1+{}^{0,18}\!/_{4}\right)^{\frac{4}{12}}-1} = \frac{0,505531}{0,177366} = 2,8502$ млн.

грн. ▲

Е. Рента з неперервним нарахуванням відсотків

Нехай рента виплачується один раз на рік, а відсотки нараховуються безперервно за ставкою ξ.

При дисконтуванні всіх платежів отримаємо ряд:

$$R,\ Re^{-\xi},\ Re^{-2\xi},\ Re^{-(n-2)\xi},\ Re^{-(n-1)\xi}.$$

Це геометрична прогресія з $b_1 = R$, знаменником – $q = e^{-\xi}$. Тому сучасна вартість ренти становить:

$$A = R \cdot \frac{1 - e^{-\xi n}}{e^{\xi} - 1} = R \cdot a_{n;\xi}. \tag{4.15}$$

Для p-термінової ренти з неперервним нарощенням

$$A = R \cdot \frac{1 - e^{-\xi n}}{p(e^{\xi/p} - 1)} = R \cdot a_{n;\xi}^{(p)} \tag{4.16}$$

Приклад 4.13. До умови попередньої задачі, додамо, що відсотки нараховуються безперервно з силою росту $\xi = 0{,}18$.

▲ Розрахуємо сучасну вартість при p = 1 за формулою (4.15):

$$A = 1 \cdot \frac{1 - e^{-0{,}18 \cdot 4}}{e^{0{,}18} - 1} = \frac{0{,}513248}{0{,}197217} = 2{,}602447 \text{ млн. грн.}$$

Якщо p = 4, то за формулою (4.16) отримаємо:

$$A = 1 \cdot \frac{1 - e^{-0{,}18 \cdot 4}}{4 \cdot (e^{0{,}18/4} - 1)} = \frac{0{,}513248}{0{,}184111} = 2{,}787702 \text{ млн. грн.} \ ▲$$

Є. Порівняння сучасних вартостей для рент із різними параметрами

Як видно з попередніх прикладів, при різних значеннях p і m отримуються різні значення сучасних вартостей. Для їхнього порівняння введемо позначення сучасної вартості з p виплатами і m нарахуваннями відсотків – $A(p;m)$.

Тоді для однакового терміну ренти, відсоткових ставок $i = j = \xi$ та однакових R буде виконуватися нерівність:

$$A(1;\infty) < \underset{m>1}{A(1;m)} < A(1;1) < A(p;\infty) < \underset{m>p>1}{A(p;m)} < \underset{p=m>1}{A(p;m)} < \underset{p>m>1}{A(p;m)} < A(p;1).$$

Результати нерівності можуть бути використані при складанні контрактів.

Ж. Залежність між нарощеною і сучасною вартістю ренти та коефіцієнтами нарощення та приведення

Неважко показати, що нарощена і сучасна вартість річної і p-термінової ренти з нарахуванням відсотків один раз на рік, залежать одна від одної:

$$A(1+i)^n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n-1}{i} = S \tag{4.17}$$

або

$$Sv^n = A. \tag{4.18}$$

Для рент з нарахуванням відсотків m раз на рік взаємозалежність така:

$$A\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{mn} = S, \tag{4.19}$$

$$S\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn} = A. \tag{4.20}$$

Аналогічні залежності характерні і для коефіцієнтів нарощення та приведення:

$$a_{n;i}(1+i)^n = s_{n;i},\ s_{n;i}v^n = a_{n;i}.$$

4.5. Визначення параметрів постійних рент постнумерандо

Було зазначено, що основні параметри ренти – R, n, i та допоміжні – p, m. При розробці контрактів бувають випадки, коли нарощена сума або сучасна вартість відомі, а необхідно знайти один із невідомих параметрів.

А. Визначення величини платежу ренти

Якщо невідома величина платежу ренти, відомі S або A і решта параметрів, то для річної постійної ренти постнумерандо R знаходимо за формулами (4.3) або (4.10):

$$R = \frac{S}{s_{n;i}}, \tag{4.21}$$

$$R = \frac{A}{a_{n;i}}. \tag{4.22}$$

Формулу (4.21) використовують у випадку, коли ставиться задача накопичення за певний термін деякої суми S, формулу (4.22) – при погашенні заборгованості в сумі A.

Аналогічно визначають величину платежу і для інших умов ренти (табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Визначення величини платежів ренти

Вид ренти		Вихідні параметри: S	Вихідні параметри: A
$p=1$	m=1	$R=\dfrac{Si}{(1+i)^n-1}$	$R=\dfrac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$
	m>1	$R=\dfrac{S\left(\left(1+{j}/{m}\right)^m-1\right)}{\left(1+{j}/{m}\right)^{mn}-1}$	$R=\dfrac{A\left(\left(1+{j}/{m}\right)^m-1\right)}{1-\left(1+{j}/{m}\right)^{-mn}}$
	$m\to\infty$	$R=\dfrac{S\left(e^{\xi}-1\right)}{e^{\xi n}-1}$	$R=\dfrac{A\left(e^{\xi}-1\right)}{1\text{-}e^{-\xi n}}$
$p>1$	$m=1$	$R=\dfrac{Sp\left((1+i)^{1/p}-1\right)}{(1+i)^n-1}$	$R=\dfrac{A\left(p[(1+i)^{1/p}-1]\right)}{1-(1+i)^{-n}}$
	$p=m$	$R=\dfrac{Sj}{\left(1+{j}/{m}\right)^{mn}-1}$	$R=\dfrac{Aj}{1-\left(1+{j}/{m}\right)^{-mn}}$
	$m\neq p$	$R=\dfrac{Sp\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)}{\left(1+{j}/{m}\right)^{mn}-1}$	$R=\dfrac{Ap\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right)}{1-\left(1+{j}/{m}\right)^{-mn}}$
	$m\to\infty$	$R=\dfrac{Sp(e^{{\xi}/{p}}-1)}{e^{\xi n}-1}$	$R=\dfrac{Ap(e^{{\xi}/{p}}-1)}{1\text{-}e^{-\xi n}}$

Б. Визначення терміну ренти

Якщо невідомий термін ренти, відомі S або A і решта параметрів, то для різних видів рент постнумерандо n знаходимо за формулою нарощеної суми або сучасної вартості. Для річної ренти постнумерандо з одним нарахуванням відсотків n знаходимо за формулою (4.3), якщо відома S, і за формулою (4.10), якщо відома A.

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}; \qquad (1+i)^n = 1 + \frac{Si}{R};$$

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{Si}{R}\right)}{\ln(1+i)}. \qquad (4.23)$$

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}; \qquad (1+i)^{-n} = 1 - \frac{Ai}{R};$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R}{R-Ai}\right)}{\ln(1+i)} \qquad (4.24)$$

Формули для різних рент наведено в табл. 4.2.

В. Визначення величини відсоткової ставки

Відсоткову ставку для попередніх випадків ми отримували, розв'язавши рівняння, які пов'язували нарощену суму S та сучасну вартість P. Для річної постійної ренти постнумерандо ці параметри визначаються за формулами:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n;i};$$

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i}.$$

Явного задання відсоткової ставки i з цих рівнянь не існує. Можна лише використати інтерполяційну формулу:

$$i = i_l + \frac{a - a_l}{a_d - a_l}\left(i_d - i_l\right), \qquad (4.25)$$

де i_d і i_l – верхній і нижній рівні ставок;

a_d і a_l – табличні значення коефіцієнтів нарощення або приведення рент для i_d та i_l відповідно;

a – значення коефіцієнта нарощення або приведення, для якого визначається величина ставки. Тобто $a = s_{n;i} = S/R$ або $a = a_{n;i} = A/R$.

Таблиця 4.2 – Визначення терміну ренти

Кількість платежів	Кількість нарахувань	Вихідні параметри	
		S	A
$p=1$	$m=1$	$n=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{Si}{R}\right)}{\ln(1+i)}$	$n=\dfrac{\ln\left(\dfrac{R}{R-Ai}\right)}{\ln(1+i)}$
	$m>1$	$n=\dfrac{\ln\left\{\dfrac{S}{R}\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1\right]+1\right\}}{m\ln\left(1+\dfrac{j}{m}\right)}$	$n=\dfrac{\ln\left\{1-\dfrac{A}{R}\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}-1\right]\right\}^{-1}}{m\ln\left(1+\dfrac{j}{m}\right)}$
$p>1$	$m=1$	$n=\dfrac{\ln\left\{\dfrac{S}{R}p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]+1\right\}}{\ln(1+i)}$	$n=\dfrac{\ln\left\{1-\dfrac{A}{R}p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]\right\}^{-1}}{\ln(1+i)}$
	$m=p$	$n=\dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{R}j+1\right)}{m\ln\left(1+j/m\right)}$	$n=\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{A}{R}j\right)^{-1}}{m\ln\left(1+j/m\right)}$
	$m\neq p$	$n=\dfrac{\ln\left\{\dfrac{S}{R}p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]+1\right\}}{m\ln\left(1+\dfrac{j}{m}\right)}$	$n=\dfrac{\ln\left\{1-\dfrac{A}{R}p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]\right\}^{-1}}{m\ln\left(1+\dfrac{j}{m}\right)}$

Приклад 4.14. Заплановано протягом 6-ти років створити фонд величиною 7 млрд. грн. шляхом щорічних внесків постнумерандо по 1 млрд. грн. Якою повинна бути річна відсоткова ставка, щоб досягнути мети?

▲ Визначимо коефіцієнт нарощення:

$$a = s_{6;i} = 7/1 = 7\,.$$

З таблиць коефіцієнтів нарощення знаходимо, що близькі до цього коефіцієнта такі:

$$s_{6;0,05} = 6{,}801913 \text{ і}$$

$$s_{6;0,07} = 7{,}153291\,.$$

Тому припускаємо, що шукана відсоткова ставка перебуває в межах 5% – 7%. Підставляємо всі значення у формулу (4.25):

$$i = 0{,}05 + \frac{7 - 6{,}801913}{7{,}153291 - 6{,}801913}(0{,}07 - 0{,}05) =$$

$$= 0{,}05 + \frac{0{,}198087}{0{,}351378}(0{,}02) = 0{,}0612748 \approx 0{,}061 = 6{,}1\%\,.$$

Перевіримо, підрахувавши нарощену суму для знайденого значення відсоткової ставки:

$$S_{6;6,1} = \frac{(1 + 0{,}061)^6 - 1}{0{,}061} = 6{,}99 \approx 7 \text{ млрд. грн.}$$ ▲

Крім формули (4.25), в сучасних умовах для знаходження відсоткової ставки i використовують комп'ютер.

В EXCEL визначення відсоткової ставки i проводиться за допомогою функції:

НОРМА (*кількість періодів; виплата; початкова сума; нарощена сума; тип; припущення*),

де припущення вводиться у випадку, коли немає розв'язку. Тоді задається інший варіант i, за замовчуванням – 10%. Решта параметрів такі самі, як у попередніх функціях.

Зауваження. У вищих версіях EXCEL замість функції НОРМА використовується функція СТАВКА.

Англійський варіант функції **НОРМА – RATE**.

Попередній приклад матиме таке розв'язування:

НОРМА (6; –1; ; 7) = 0,061402412.

4.6. Нарощені суми і сучасні вартості інших видів постійних рент

Вище було наведено методики розрахунку нарощених сум і сучасних вартостей постійних рент постнумерандо.

Аналогічно розглянемо ці показники для інших видів постійних рент.

А. Ренти пренумерандо

Для цієї ренти платежі проводяться на початку періоду. Зрозуміло, що на кожен платіж будуть нараховуватися відсотки на 1 раз більше, ніж у ренті постнумерандо. Тому нарощена сума ренти пренумерандо (позначимо $\widetilde{S}$) більша в $(1+i)$ раз від S . Тобто

$$\widetilde{S} = S(1+i). \qquad (4.26)$$

Коефіцієнт нарощення річної ренти пренумерандо дорівнює:

$$\widetilde{s}_{n;i} = s_{n;i}(1+i).$$

Аналогічно для річної ренти пренумерандо з нарахуванням відсотків m раз у рік становить:

$$\widetilde{S} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}. \qquad (4.27)$$

Нарощені суми p-термінової ренти пренумерандо також можна знайти через відповідні величини ренти постнумерандо за формулами:

- для випадку $m=1$:

$$\widetilde{S} = S(1+i)^{1/p}; \qquad (4.28)$$

- для випадку $m \neq p$:

$$\widetilde{S} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}. \qquad (4.29)$$

Така сама ситуація для ренти пренумерандо спостерігається із сучасними вартостями і коефіцієнтами приведення:

- річна при $m=1$:

$$\widetilde{A} = A(1+i); \;\; \widetilde{a}_{n;i} = a_{n;i}(1+i); \qquad (4.30)$$

- річна при $m>1$:

$$\widetilde{A} = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}; \;\; \widetilde{a}_{nm;j/m} = a_{n;j/m}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}; \qquad (4.31)$$

- p-термінова при $m=1$:

$$\widetilde{A}=A(1+i)^{1/p};\quad \widetilde{a}_{n;i}^{(p)}=a_{n;i}^{(p)}(1+i)^{1/p};\tag{4.32}$$

- p-термінова при $m\neq p$:

$$\widetilde{A}=A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p};\quad \widetilde{a}_{np;j/m}=a_{np;j/m}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}.\tag{4.33}$$

Б. Ренти з платежами в середині періодів

Для таких рент узагальнені характеристики також можна знайти через характеристики ренти постнумерандо. Якщо платежі відбуваються в середині періодів, то нарощені суми і сучасні вартості таких рент обчислюються за допомогою множення відповідних величин рент постнумерандо на множник нарощення за половину періоду. Так, для нарощеної суми і сучасної вартості при:

- $p=1$ і $m=1$:

$$S_{1/2}=S(1+i)^{1/2},\quad A_{1/2}=A(1+i)^{1/2};\tag{4.34}$$

- $p=1$ і $m>1$:

$$S_{1/2}=S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/2},\quad A_{1/2}=A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/2};\tag{4.35}$$

- $p>1$ і $m=1$:

$$S_{1/2}=S(1+i)^{1/2p},\quad A_{1/2}=A(1+i)^{1/2p};\tag{4.36}$$

- $p>1$ і $m>1$:

$$S_{1/2}=S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/2p},\quad A_{1/2}=A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/2p}.\tag{4.37}$$

В. Відкладені ренти

Початок виплат у відкладеної ренти зсунутий вперед відносно деякого моменту часу. На нарощену суму це не впливає. Розглянемо сучасну вартість такої ренти.

Нехай рента сплачується через t років після деякого моменту часу. Сучасна вартість ренти на початковий момент дорівнює A. Сучасна вартість на початок терміну відкладення в t років дорівнює дисконтованій на цей термін величині сучасної вартості відкладеної ренти. Для річної:

$$ {}_tA = A\frac{1}{(1+i)^t} = Av^t = Ra_{n;i}v^t . \tag{4.38} $$

Розглянемо відкладену ренту на прикладі.

<u>*Приклад 4.15.*</u> Річна рента постнумерандо з параметрами R та n ділиться в часі між двома учасниками. Нехай ділиться спадок. Умови поділу такі:

а) кожен отримує 50% капіталізованої вартості ренти;

б) рента сплачується спочатку першому учаснику, потім другому.

Протягом якого періоду часу сплачується рента для кожного учасника?

▲ Нехай перший учасник отримує свої 50% протягом n_1 років, тоді другий – протягом $n_2 = n - n_1$. Перший учасник отримує термінову ренту, другий – відкладену. Згідно з умовами:

$$ A_1 = n_1A_2 ; $$

$$ Ra_{n_1;i} = Ra_{n_2;i}v^{n_1} ; $$

$$ \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{i} = \frac{1-(1+i)^{-(n-n_1)}}{i}v^{n_1} . $$

Звідси знайдемо n_1:

$$ \frac{1}{i} - \frac{(1+i)^{-n_1}}{i} - \left(\frac{1}{i} - \frac{(1+i)^{-(n-n_1)}}{i}\right)\cdot\frac{1}{(1+i)^{n_1}} = 0 , $$

$$ \frac{1}{i} - \frac{(1+i)^{-n_1}}{i} - \frac{(1+i)^{-n_1}}{i} + \frac{(1+i)^{-n}}{i} = 0 , $$

$$ 2\cdot\frac{(1+i)^{-n_1}}{i} = \frac{1+(1+i)^{-n}}{i} , $$

$$ (1+i)^{-n_1} = \frac{1+(1+i)^{-n}}{2} , $$

$$ n_1 = \frac{-\ln\left\{\dfrac{1+(1+i)^{-n}}{2}\right\}}{\ln(1+i)} , \tag{4.39} $$

$$ \text{а } n_2 = n - n_1 . \ ▲ \tag{4.40} $$

Продемонструємо формули (4.39) і (4.40) на числовому прикладі.

Приклад 4.16. Нехай ділиться спадок за такими умовами поділу, як у попередньому прикладі для $n = 8$, $i = 0{,}14$.

Знайти періоди часу, протягом яких сплачується рента, для кожного учасника.

▲ Використовуємо формулу (4.39):

$$n_1 = \frac{-\ln\left\{\frac{1+(1+0{,}14)^{-8}}{2}\right\}}{\ln(1+0{,}14)} = \frac{0{,}392629}{0{,}131028} = 2{,}996518 \approx 3 \text{ роки},$$

$$\text{а } n_2 = 8 - 3 = 5 \text{ років.}$$

Отже, для першого учасника рента сплачується 3 роки, для другого – 5 років. ▲

Оскільки ренти, початок виплат у яких зсунутий вперед відносно деякого моменту часу, називаються відкладеними, то надалі усі ренти, початок виплат у яких відбувається у початковий момент часу, називаються *терміновими.*

Г. Вічні ренти

Вічна рента – це ряд платежів, кількість яких необмежена. Така рента виплачується нескінченну кількість років. Найчастіше такий вид рент застосовують для облігацій.

Для вічної ренти нарощена сума – нескінченно велика величина:

$$S_\infty \to \infty .$$

Оцінимо сучасну вартість такої ренти. Для випадку річної ренти при $m = 1$:

$$A_\infty = \lim_{n\to\infty} A = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}.$$

Цю формулу можна використовувати при великих термінах n і високій відсотковій ставці i.

Для випадку $p > 1$, $m = 1$:

$$A_\infty = \frac{R}{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]},$$

при $p = m > 1$:

$$A_\infty = \frac{R}{j}.$$

Д. Рента з періодом платежів більше року

Нехай r – часовий інтервал між двома платежами, число нарахувань відсотків $m=1$.

Сучасна вартість першого платежу на початок ренти становить:

$$Tv^r,$$

другого

$$Tv^{2r},$$

$$\ldots$$

останнього

$$Tv^n,$$

де T – платіж,

n – термін кратний r.

Сучасні вартості утворюють геометричну прогресію з першим членом $b_1 = Tv^r$, знаменником $q = v^r$. Число членів геометричної прогресії $\frac{n}{r}$. Сучасна вартість обчислюється за формулою:

$$A = Tv^r \frac{v^{r\frac{n}{r}} - 1}{v^r - 1} = Tv^r \frac{v^n - 1}{v^r - 1} = T\frac{v^n - 1}{v^{-r}(v^r - 1)} = T\frac{1 - v^n}{v^{-r} - 1} =$$

$$= T\frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i)^r - 1} = T\frac{a_{n;i}}{s_{r;i}}.$$

Е. Змінна ставка

На практиці часто трапляються потоки платежів зі змінними відсотковими ставками. Наприклад, при погашенні заборгованості в перші роки застосовуються низькі ставки і вищі – в наступні.

Зміни ставок можуть бути будь-якими.

Якщо зміни „сходинкові”, то для S і A використовуються стандартні формули:

$$S = Rs_{n_1;i_1}(1+i_2)^{n_2} + Rs_{n_2;i_2},$$

$$A = Ra_{n_1;i_1} + Ra_{n_2;i_2}(1+i_1)^{n_1}.$$

4.7. Конверсії рент

4.7.1. *Види конверсій*

Інколи при розробці контрактів або при його виконанні необхідно змінити умови виплати ренти. Інакше кажучи, відбувається конвертування умов, які були передбачені при виплаті ренти фінансової ренти.

Розрізняють такі види конверсії:

- *викуп ренти* (заміна її разовим платежем);
- *розстрочка платежу* (вид конверсії обернений до попереднього, коли платіж замінюється рентою);
- *консолідація (об'єднання) рент*.

Будь-який вид конверсії повинен відбуватися із врахуванням *принципу фінансової еквівалентності.*

А. Викуп ренти

Як відмічено вище, цей вид конверсії полягає в заміні ренти разовим платежем. *Платіж повинен дорівнювати сучасній вартості відповідної ренти.*

Б. Розстрочка платежу

Як вказано вище, цей вид конверсії обернений до попереднього і полягає у заміні платежу рентою. *Сучасна вартість ренти, за якою будуть проводитися платежі, має дорівнювати сумі боргу.* Задача полягає у визначенні величини платежу R або терміну n за умови, що всі інші параметри задані згідно з формулами таблиць 4.1 та 4.2.

В. Об'єднання рент

Об'єднання рент полягає в заміні декількох рент однією, параметри якої необхідно визначити. Як і в попередніх випадках, при цій заміні теж має бути принцип фінансової еквівалентності: *суми сучасних вартостей рент, яких ми замінюємо, дорівнюють сучасній вартості однієї ренти.*

$$A = \sum_{q} A_q \, .$$

Ренти, які об'єднуються, можуть бути будь-які: термінові або відкладені, річні або p-термінові і т. д. З рентою, яка заміняє, треба чітко визначитися, знати її вид, усі параметри, крім одного. Найчастіше невідомим параметром є величина платежу R або термін n, які шукаємо згідно з формулою попередньої теми.

Наприклад, якщо невідомий R і рента термінова, то з формули

$$A = Ra_{n;i} = \sum_q A_q$$

знаходимо:

$$R = \frac{\sum_q A_q}{a_{n;i}}. \qquad (4.41)$$

Якщо невідомий термін, то значення його знаходимо з рівності:

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\sum_q A_q}{R}.$$

Отже,

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \dfrac{i\sum A_q}{R}\right)}{\ln(1+i)}. \qquad (4.42)$$

Зазначимо, що термін можна знайти лише у випадку $\frac{i\sum A_q}{R} < 1$.

<u>*Приклад 4.17.*</u> Дві річні термінові ренти постнумерандо з терміном 5 і 6 років і разовими платежами 80 і 90 тис. грн. заміняються на одну термінову ренту терміном на 7 років і відсотковою ставкою 20%. Визначити суму нового разового внеску і суму нового разового внеску для випадку, якщо об’єднана рента була відкладена на два роки.

▲ Знаходимо сучасні вартості ренти, які підлягають заміні.

$$A_1 = Ra_{n;i} = 80 \cdot a_{5;20} = 80 \cdot 2{,}99061 = 239{,}2488,$$

$$A_2 = Ra_{n;i} = 90 \cdot a_{6;20} = 90 \cdot 3{,}32551 = 299{,}2959.$$

Отже, сучасна вартість об’єднаної ренти дорівнює:

A = 239,2488 + 299,2959 = 538,5447.

Коефіцієнт приведення:

$a_{7;20} = 3{,}60459.$

Отже, згідно з формулою (4.41) новий разовий платіж становить:

$$R = \frac{538{,}5447}{3{,}60459} = 149{,}4.$$

Для випадку, коли об'єднана рента відкладена на два роки:

$$R = \frac{538{,}5447}{a_{7;20} \cdot v^2} = \frac{538{,}5447}{3{,}60459 \cdot 1{,}2^{-2}} = 215{,}1436.$$

Отже, при відкладенні ренти на подальший термін платіж зріс. ▲

4.7.2. *Зміна параметрів рент*

Якщо у ренті зміниться хоча б одна умова, то це рівносильно тому, що одну ренту замінюють іншою. Як і в попередніх випадках, ця заміна базується на принципі фінансової еквівалентності. Тому для збереження цього принципу потрібна рівність сучасних вартостей обох рент. Розглянемо випадки заміни однієї ренти на іншу.

А. Заміна термінової ренти на відкладену

Нехай є термінова рента постнумерандо з параметрами R_1, n_1 і відсотковою ставкою i. Необхідно відкласти виплати на t років, тобто термінову ренту замінити на відкладену з параметрами R_2, n_2, i (t не входить у термін ренти n_2).

- Розглянемо задачу при відомій величині платежу ренти $R_2 = R_1 = R$, а невідомому n_2. Згідно з принципом фінансової еквівалентності:

$$Ra_{n_1,i} = Ra_{n_2,i}v^t,$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n_1}}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n_2}}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^t}.$$

Звідси знайдемо n_2:

$$\frac{1-(1+i)^{-n_2}}{i} = \frac{\left(1-(1+i)^{-n_1}\right)\cdot(1+i)^t}{i},$$

$$1-(1+i)^{-n_2} = \left(1-(1+i)^{-n_1}\right)\cdot(1+i)^t,$$

$$(1+i)^{-n_2}=1-\left(1-(1+i)^{-n_1}\right)\cdot(1+i)^t.$$

Отже,

$$n_2=\frac{-\ln\left\{1-\left(1-(1+i)^{-n_1}\right)\cdot(1+i)^t\right\}}{\ln(1+i)}. \qquad (4.43)$$

<u>*Приклад 4.18.*</u> Річна термінова рента постнумерандо терміном 8 років, відсотковою ставкою 7% і разовим платежем 70 тис. грн. була відкладена на 2 роки. Визначити термін нової ренти, якщо разовий платіж і відсоткова ставка залишаються ті самі.

▲ Знаходимо термін нової ренти згідно з формулою (4.43).

Виконуємо необхідні обчислення:

$$(1+0{,}07)^{=8}=\frac{1}{1{,}07^8}=0{,}582009;$$

$$(1+0{,}07)^2=1{,}144900;$$

$$\ln(1+0{,}07)=0{,}067659;$$

$$n_2=\frac{-\ln\{1-(1-0{,}582009)\cdot 1{,}144900\}}{0{,}067659}=\frac{0{,}65116}{0{,}067659}=9{,}624147.$$

Отже, якщо ренту відкладемо на 2 роки, то це призведе до збільшення терміну виплати: на 1,62 роки.

Перетворимо термін виплати до цілого числа років. Нехай це буде 9 років (без врахування 2 років відкладення).

Сучасна вартість вихідної ренти становить:

$$A=Ra_{n;i}=70\cdot a_{8;0,07}=70\cdot\frac{1-1{,}07^{-8}}{0{,}07}=70\cdot 5{,}97130=417{,}9909.$$

Сучасна вартість відкладеної ренти дорівнює:

$$A=Ra_{n;i}v^t=70\cdot a_{9;0,07}\cdot 1{,}07^{-2}=70\cdot\frac{1-1{,}07^{-9}}{0{,}07}\cdot 1{,}07^{-2}=$$

$$=70\cdot 6{,}51523\cdot 0{,}873439=398{,}3459.$$

Сучасна вартість відкладеної на 2 роки і терміном 9 років ренти менша від вихідної, тому треба зробити доплату. Різницю 417,9909 – 398,3459 = 19,645 тис. грн. треба виплатити на початку дії контракту або в будь-який період з нарахованими відсотками. ▲

- Термін n_2 при відомій величині платежу ренти $R_2 \neq R_1$, розраховуємо за формулою:

$$n_2 = \frac{-\ln\left\{ \frac{R_1}{R_2} \left\{ 1 - \left(1 - (1+i)^{-n_1} \right) \cdot (1+i)^t \right\} \right\}}{\ln(1+i)} .$$

Доведення аналогічне наведеному вище.

- Розглянемо задачу при відомому терміні $n_2 = n_1 = n$, а невідомій величині платежу ренти R_2. Згідно з принципом фінансової еквівалентності отримаємо:

$$R_1 a_{n_1,i} = R_2 a_{n_2,i} v^t .$$

Оскільки $n_2 = n_1 = n$, то

$$R_2 = \frac{R_1}{v^t} = R_1 (1+i)^t .$$

- Величина платежу ренти R_2 при $n_2 \neq n_1$ обчислюється за формулою:

$$R_2 = \frac{R_1 a_{n_1,i}}{a_{n_2,i} v^t} = R_1 \frac{a_{n_1,i}}{a_{n_2,i}} (1+i)^t .$$

Б. Заміна річної ренти на р-термінову

Нехай річна термінова рента з параметрами R_1, n_1 і відсотковою ставкою i замінюється на p-термінову з параметрами R_2, n_2, i, p.

- Розглянемо задачу при відомому терміні n_2, а невідомій величині платежу ренти R_2. Згідно з принципом фінансової еквівалентності маємо:

$$R_1 a_{n_1,i} = R_2 a^{(p)}_{n_2,i} .$$

Підставивши формули коефіцієнтів приведення, отримаємо результат:

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1,i}}{a^{(p)}_{n_2,i}} = R_1 \frac{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}}{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]}} = R_1 \frac{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]}{i} .$$

- Розглянемо задачу при відомій величині платежу ренти R_2, а невідомому терміні n_2. Згідно з принципом фінансової еквівалентності отримаємо:

$$R_1 a_{n_1,i} = R_2 a^{(p)}_{n_2,i} ,$$

$$a_{n_2,i}^{(p)} = \frac{R_1 a_{n_1,i}}{R_2},$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n_2}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]} = \frac{R_1 \dfrac{1-(1+i)^{-n_1}}{i}}{R_2},$$

$$1-(1+i)^{-n_2} = \frac{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]\cdot R_1\left(1-(1+i)^{-n_1}\right)}{iR_2} =$$

$$= \frac{R_1 p\left[(1+i)^{1/p}-(1+i)^{-n_1/p}+(1+i)^{-n_1}-1\right]}{iR_2},$$

$$(1+i)^{-n_2} = \frac{iR_2 - R_1 p\left[(1+i)^{1/p}-(1+i)^{-n_1/p}+(1+i)^{-n_1}-1\right]}{iR_2},$$

$$n_2 = \frac{-\ln\left(\dfrac{iR_2 - R_1 p\left[(1+i)^{1/p}-(1+i)^{-n_1/p}+(1+i)^{-n_1}-1\right]}{iR_2}\right)}{\ln(1+i)}.$$

В. Загальний випадок конверсії

Розглянемо тільки постійні дискретні ренти. Нехай потік ренти постнумерандо нерегулярний: платежі R_t виплачуються протягом часу n_t з початку контракту. Рента, яка замінить цей потік платежів, має параметри *R* та *n*. Тоді рівняння еквівалентності має такий вигляд:

$$Ra_{n,i} = \sum R_t v^{-n_t}.$$

З цієї рівності знаходимо *R* або *n*.

Розв'язок оберненої задачі досягається шляхом підбору величин платежів, що задовольняють рівність.

Питання для самоконтролю

25. Дайте визначення потоку платежів і розкрийте його класифікацію.
26. Який платіж називається фінансовою рентою?
27. Охарактеризуйте параметри ренти.
28. Проаналізуйте ренти за класифікаційними групами.

29. Дайте визначення сучасної вартості та нарощеної суми потоку платежів.
30. Наведіть формули розрахунку нарощеної суми та сучасної вартості потоку платежів.
31. Виведіть формулу обчислення нарощеної суми річної постійної ренти постнумерандо.
32. Наведіть декілька формул обчислення нарощеної суми ренти постнумерандо з різними параметрами.
33. Порівняйте результати нарощення для рент з різними параметрами.
34. Виведіть формулу обчислення сучасної вартості річної постійної ренти постнумерандо.
35. Наведіть декілька формул обчислення сучасної вартості ренти постнумерандо з різними параметрами.
36. Порівняйте сучасні вартості для рент з різними параметрами.
37. Запишіть формули залежностей між нарощеною і сучасною вартістю ренти та коефіцієнтами нарощення і приведення.
38. Наведіть декілька формул визначення величини платежу ренти з різними параметрами.
39. Наведіть декілька формул визначення терміну ренти з різними параметрами.
40. Опишіть алгоритм визначення величини відсоткової ставки.
41. Яка методика розрахунку нарощених сум і сучасних вартостей постійних рент пренумерандо?
42. Наведіть методику розрахунку нарощених сум і сучасних вартостей постійних рент з платежами в середині періодів.
43. Охарактеризуйте відкладені ренти на прикладі задачі про поділ спадку.
44. Дайте визначення вічної ренти і оцініть її нарощену суму і сучасну вартість.
45. Прокласифікуйте види конверсії рент.

ВПРАВИ

1. Фірма створює резервний фонд. Для цього в кінці кожного року протягом 4 років у банк вкладається по 2000 грн. Відсоткова ставка банку – 16%. Визначте нарощену суму фонду і його поточну вартість.

2. Організація створює фонд страховки в 800 тис. грн. Планується створити його протягом п'яти років. Внески робляться: а) щомісячно; б) в кінці року під відсоткову ставку 14% річних. Визначте поточну вартість фонду і величину разового внеску.

3. Фірма "Мрія " взяла кредит в 50000 грн. на 3 роки. Річна відсоткова ставка за користування кредитом – 16%. Визначте величину разового платежу і загальну вартість кредиту при оплаті: а) щорічними рівними внесками в кінці кожного року, б) щомісячними рівними внесками в кінці кожного місяця.

4. Поточна вартість звичайної ренти з внесками 5500 грн. в кінці кожного місяця і нарахуванням 4% річних один раз на рік дорівнює 20 тис. грн. Визначте термін ренти і нарощену суму.

5. Поточна вартість звичайної ренти із щомісячними рівними внесками в кінці кожного місяця і терміном 5 років дорівнює 80000 грн. Нарощена вартість – 240000 грн. Визначте річну відсоткову ставку, якщо нарахування відсотків відбувається один раз на рік.

6. Фірма "ЛОЛА" створює резервний фонд і для цього щомісячно переводить в банк 8 тис. грн. Річна відсоткова ставка при нарахуванні відсотків один раз на рік – 14%. Через який час на рахунку фірми буде 230000 грн.?

7. Пенсіонер збирає гроші для купівлі телевізора вартістю 1240 грн. Для цього він вкладає в банк щомісячно, але в кінці місяця, 50 грн. Номінальна відсоткова ставка банку – 7%. Нарахування відсотків щомісячне. Розрахуйте динаміку нарощування внеску за перших 1,5 року.

8. В кінці кожного місяця сім'я вкладає в банк 100 грн. під номінальну ставку відсотків 14%. Нарахування відсотків щомісячне. Який термін необхідний для того, щоб сума заощадження стала достатньою для придбання легкового автомобіля вартістю 70000 грн.?

9. Проводиться заміна річної ренти постнумерандо з річним платежем 1000 грн. і терміном 10 років річною рентою постнумера-

ндо терміном 6 років. Обчислити річний платіж нової ренти, якщо відсоткова ставка – 10%.

10. Яку суму повинен щомісячно в кінці місяця вкласти член спілки "Калина", щоб на його рахунку через 2 роки була сума 4000 грн. Номінальна відсоткова ставка спілки при щомісячному нарахуванні відсотків – 12%.

11. Кредитна спілка "Калина" створює резервний фонд 60000 грн. Заплановано створити його протягом 3 років: а) рівними річними платежами на початку кожного року, б) рівними щомісячними платежами на початку місяця. Відсоткова ставка спілки – 16%, і відсотки нараховуються раз на рік. Визначте величину разового платежу.

12. Молокозавод отримав кредит вартістю 6 млн. грн. на 1 рік. Річна відсоткова ставка за користування кредитом – 23%. Платежі за кредитом відбуваються на початку кожного місяця рівними сумами. Визначте величину місячного платежу.

13. Для створення резервного фонду фірма вносить 1440 грн.: а) на початку кожного року, б) щомісячно. Резервний фонд заплановано створити протягом 8 років. Відсоткова ставка банку – 12% річних. Визначте нарощену і поточну вартість фонду.

14. Нарощена вартість термінової ренти з щомісячними внесками на початку кожного місяця по 7500 грн. і щомісячним нарахуванням відсотків дорівнює 325 тис. грн. Номінальна річна відсоткова ставка – 13%. Визначте термін ренти.

15. Яку суму отримає студент на випускний вечір якщо буде вкладати свою стипендію величиною 126 грн. на початку кожного місяця протягом п'яти років навчання.

16. Для створення фонду страхування фірма щорічно на початку кожного року протягом п'яти років вкладає в банк привілейовані акції. Визначте дохід фірми і прибутковість операції за ефективною ставкою простих і складних відсотків.

17. Студент вкладає на початку кожного місяця в банк по 30 грн. під 18% річних. Визначте, через який час він збере суму, достатню для купівлі холодильника вартістю 1450 грн. Відсотки нараховуються щомісячно.

18. Сім'я хоче купити через 5 років автомобіль за 8 тис. дол. Яку суму їй потрібно вносити кожного року в банк за умови, що банк нараховує відсотки щомісячно при ставці 8% річних: а) на початку року; б) в кінці року?

19. Яку суму повинен батько покласти сьогодні на рахунок при ставці 8% річних, щоб забезпечити сину щорічні виплати обсягом 700 дол. протягом 4-ох років навчання в інституті. (Син навчається на першому курсі, за перший рік батько оплатив).

20. Потрібно об'єднати три фінансові ренти в одну із щоквартальними платежами і щоквартальним нарахуванням відсотків. Термін об'єднаної ренти – 2 роки. Номінальна відсоткова ставка – 24%. Платежі об'єднаної ренти відкладаються на півроку. Умови об'єднання рент наведені в табл. 5.1, де *m* і *p* – число періодів нарахування відсотків і платежів у році; *j* – номінальна відсоткова ставка рент; *t* – тривалість періоду, на який відкладаються платежі, *R* – разові платежі.

Таблиця 5.1

№ ренти	Термін ренти	*m*	*p*	*t*, років	*R*, тис.	*j*, %
1	1	4	4	0	18	16
2	2	6	6	0	24	14
3	2,5	12	2	1	16	18

21. Потрібно об'єднати три фінансові ренти (табл. 5.2) в одну із щомісячними платежами і щомісячними нарахуваннями відсотків терміном на один рік. Номінальна відсоткова ставка об'єднаної ренти – 28%. Рентні платежі об'єднаної ренти починаються відразу. Визначте вартість місячного платежу.

Таблиця 5.2

№ ренти	Термін ренти	*m*	*p*	*t*, років	*R*, тис.	*j*, %
1	2	4	4	0	14	14
2	1	12	4	0	50	23
3	1,5	6	4	0	120	18

22. Потрібно об'єднати три фінансові ренти (табл. 5.3) в одну із щоквартальними платежами і щоквартальними нарахуваннями відсотків. Термін об'єднаної ренти – 3 роки. Платежі ренти відкладаються на півроку. Відсоткова ставка об'єднаної ренти – 23%.

Таблиця 5.3

№ ренти	Термін ренти	*m*	*p*	*t*, років	*R*, тис.	*j* %
1	2	12	6	0.5	3	24

2	3	6	6	1	60	30
3	5	12	6	0	40	26

23. Передбачається поставка обладнання вартістю 80000000 грн. Можливі наступні варіанти оплати:

1) аванс – 15%. Оплата залишкової суми протягом 2-х років рівними місячними платежами під номінальну відсоткову ставку 16% річних. Нарахування відсотків щомісячне;

2) аванс – 10%. Відстрочка платежу протягом 6 місяців. Оплата залишку рівними щоквартальними платежами протягом 2-х років. Нарахування відсотків один раз на рік за відсотковою ставкою 17% річних;

3) оплата обладнання протягом року рівними щоквартальними платежами за номінальною відсотковою ставкою – 18% річних нарахування відсотків щоквартальне.

Розгляньте фінансові умови запропонованих варіантів.

24. Продається об'єкт вартістю 3,5 млн. грн. Продавець пропонує оплату рівними місячними платежами протягом 2-х років. Нарахування відсотків щомісячне під номінальну відсоткову ставку 24,5 річних. Покупець пропонує такі умови: оплата рівними щоквартальними платежами протягом 3-х років. Нарахування відсотків два рази на рік під номінальну відсоткову ставку 20% річних. Визначте величину річних платежів і загальну нарощену суму для обох варіантів.

25. Автосалон реалізує автомобіль вартістю 84000 грн. Можливі такі варіанти оплати:

1) аванс – 15%. Залишок вартості – в кредит терміном на рік під номінальну відсоткову ставку 24% річних. Відсотки нараховуються щомісячно. Рівні платежі за кредитом проводяться щоквартально;

2) аванс – 20% вартості. Можлива відстрочка платежів на три місяці. Кредит нараховується і виплачується щомісячно рівними сумами під номінальну відсоткову ставку 25,5% річних протягом року;

3) аванс – 25% вартості кредиту. Кредит нараховується і виплачується терміново протягом 2-х років під номінальну відсоткову ставку 26% річних щоквартально рівними сумами.

Розрахуйте фінансові можливості трьох варіантів.

26. Замініть річну ренту з річним платежем 600 грн. і терміном 10 років семирічною річною рентою. Ставка відсотка – 8% на рік.

27. Замініть річну десятирічну ренту з річним платежем 1000 грн. на ренту з піврічним платежем по 600 грн., річна ставка відсотка – 8%.

28. Син мав у банку на рахунку 50000 грн., на які щомісячно нараховувались 0,8%. Син поїхав у десятирічне відрядження за кордон і попросив батька за цих 10 років потратити всі його гроші, що є на рахунку. Скільки грошей буде отримувати батько кожного місяця?

29. Покупець запропонував два варіанти розрахунку при купівлі дачі: 1) 5000 дол. терміново, а потім по 1000 дол. протягом 5-ти років; 2) 8000 дол. терміново і по 300 дол. протягом 5-ти років. Який варіант вигідніший при річній ставці відсотка: а) 10%, б) 5%.

30. Яким повинен бути платіж кінцевої річної ренти терміном 8-ми років, щоб її сучасна вартість була 16000 при ставці 12%?

31. Скільки років буде потрібно, щоби платежі обсягом 1 млн. грн. в кінці кожного року досягли 10,897 млн. грн., якщо відсоткова ставка – 14,5%.

32. Фонд обсягом 21 млн. грн. був створений за 2 роки шляхом надходжень по 770 тис. грн. на початку кожного місяця. Визначити річну відсоткову ставку.

33. Позичка величиною 5000 тис. грн. погашається щомісячними платежами по 141,7 тис. грн. Скільки років відбуватиметься погашення при річній відсотковій ставці 16%?

34. Визначте річну відсоткову ставку для позики в 980 тис. грн., що погашається рівномірними періодичними платежами по 100 тис. грн. кожні півроку протягом семи років.

Додаток 1

Таблиця Д1

Порядкові номери днів у невисокосному році												
День місяця	січень	лютий	бере- зень	квітень	травень	червень	липень	серпень	вере- сень	жовтень	листо- пад	грудень
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Таблиця Д2

Порядкові номери днів у високосному році												
День місяця	січень	лютий	березень	квітень	травень	червень	липень	серпень	вересень	жовтень	листопад	грудень
1	1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
2	2	33	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
3	3	34	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
4	4	35	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
5	5	36	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
6	6	37	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
7	7	38	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
8	8	39	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
9	9	40	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
10	10	41	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
11	11	42	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
12	12	43	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
13	13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
14	14	45	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
15	15	46	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
16	16	47	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
17	17	48	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
18	18	49	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
19	19	50	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
20	20	51	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
21	21	52	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
22	22	53	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
23	23	54	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
24	24	55	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
25	25	56	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
26	26	57	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
27	27	58	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
28	28	59	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
29	29	60	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
30	30		90	121	151	182	212	243	274	304	335	365
31	31		91		152		213	244		305		366

Додаток 2

Таблиця Д3

Множники нарощення (складні відсотки)

Число періодів *n*	Ставка відсотка					
	2	**4**	**6**	**8**	**10**	**11**
1	1,020000	1,040000	1,060000	1,080000	1,100000	1,110000
2	1,040400	1,081600	1,123600	1,166400	1,210000	1,232100
3	1,061208	1,124864	1,191016	1,259712	1,331000	1,367631
4	1,082432	1,169859	1,262477	1,360489	1,464100	1,518070
5	1,104081	1,216653	1,338226	1,469328	1,610510	1,685058
6	1,126162	1,265319	1,418519	1,586874	1,771561	1,870415
7	1,148686	1,315932	1,503630	1,713824	1,948717	2,076160
8	1,171659	1,368569	1,593848	1,850930	2,143589	2,304538
9	1,195093	1,423312	1,689479	1,999005	2,357948	2,558037
10	1,218994	1,480244	1,790848	2,158925	2,593742	2,839421
11	1,243374	1,539454	1,898299	2,331639	2,853117	3,151757
12	1,268242	1,601032	2,012196	2,518170	3,138428	3,498451
13	1,293607	1,665074	2,132928	2,719624	3,452271	3,883280
14	1,319479	1,731676	2,260904	2,937194	3,797498	4,310441
15	1,345868	1,800944	2,396558	3,172169	4,177248	4,784589
16	1,372786	1,872981	2,540352	3,425943	4,594973	5,310894
17	1,400241	1,947900	2,692773	3,700018	5,054470	5,895093
18	1,428246	2,025817	2,854339	3,996019	5,559917	6,543553
19	1,456811	2,106849	3,025600	4,315701	6,115909	7,263344
20	1,485947	2,191123	3,207135	4,660957	6,727500	8,062312
21	1,515666	2,278768	3,399564	5,033834	7,400250	8,949166
22	1,545980	2,369919	3,603537	5,436540	8,140275	9,933574
23	1,576899	2,464716	3,819750	5,871464	8,954302	11,02627
24	1,608437	2,563304	4,048935	6,341181	9,849733	12,23916
25	1,640606	2,665836	4,291871	6,848475	10,83471	13,58546
26	1,673418	2,772470	4,549383	7,396353	11,91818	15,07986
27	1,706886	2,883369	4,822346	7,988061	13,10999	16,73865
28	1,741024	2,998703	5,111687	8,627106	14,42099	18,57990
29	1,775845	3,118651	5,418388	9,317275	15,86309	20,62369
30	1,811362	3,243398	5,743491	10,06266	17,44940	22,89230
35	1,999890	3,946089	7,686087	14,78534	28,10244	38,57485
40	2,208040	4,801021	10,28572	21,72452	45,25926	65,00087
45	2,437854	5,841176	13,76461	31,92045	72,89048	109,5302
50	2,691588	7,106683	18,42015	46,90161	117,3909	184,5648

Продовження табл. Д3

Число періодів *n*	Ставка відсотка					
	13	**15**	**18**	**20**	**23**	**25**
1	1,130000	1,150000	1,180000	1,200000	1,230000	1,250000
2	1,276900	1,322500	1,392400	1,440000	1,512900	1,562500
3	1,442897	1,520875	1,643032	1,728000	1,860867	1,953125
4	1,630474	1,749006	1,938778	2,073600	2,288866	2,441406
5	1,842435	2,011357	2,287758	2,488320	2,815306	3,051758
6	2,081952	2,313061	2,699554	2,985984	3,462826	3,814697
7	2,352605	2,660020	3,185474	3,583181	4,259276	4,768372
8	2,658444	3,059023	3,758859	4,299817	5,238909	5,960464
9	3,004042	3,517876	4,435454	5,159780	6,443859	7,450581
10	3,394567	4,045558	5,233836	6,191736	7,925946	9,313226
11	3,835861	4,652391	6,175926	7,430084	9,748914	11,64153
12	4,334523	5,350250	7,287593	8,916100	11,99116	14,55192
13	4,898011	6,152788	8,599359	10,69932	14,74913	18,18989
14	5,534753	7,075706	10,14724	12,83918	18,14143	22,73737
15	6,254270	8,137062	11,97375	15,40702	22,31396	28,42171
16	7,067326	9,357621	14,12902	18,48843	27,44617	35,52714
17	7,986078	10,76126	16,67225	22,18611	33,75879	44,40892
18	9,024268	12,37545	19,67325	26,62333	41,52331	55,51115
19	10,19742	14,23177	23,21444	31,94800	51,07368	69,38894
20	11,52309	16,36654	27,39303	38,33760	62,82062	86,73617
21	13,02109	18,82152	32,32378	46,00512	77,26936	108,4202
22	14,71383	21,64475	38,14206	55,20614	95,04132	135,5253
23	16,62663	24,89146	45,00763	66,24737	116,9008	169,4066
24	18,78809	28,62518	53,10901	79,49685	143,7880	211,7582
25	21,23054	32,91895	62,66863	95,39622	176,8593	264,6978
26	23,99051	37,85680	73,94898	114,4755	217,5369	330,8722
27	27,10928	43,53531	87,25980	137,3706	267,5704	413,5903
28	30,63349	50,06561	102,9666	164,8447	329,1115	516,9879
29	34,61584	57,57545	121,5005	197,8136	404,8072	646,2349
30	39,11590	66,21177	143,3706	237,3763	497,9129	807,7936
35	72,06851	133,1755	327,9973	590,6682	1401,777	2465,190
40	132,7816	267,8635	750,3783	1469,772	3946,430	7523,164
45	244,6414	538,7693	1716,684	3657,262	11110,41	22958,87
50	450,7359	1083,657	3927,357	9100,438	31279,20	70064,92

Таблиця Д4

Дисконтні множники (складні відсотки)

Число періодів n	Ставка відсотка					
	2	**4**	**6**	**8**	**10**	**11**
1	0,980392	0,961538	0,943396	0,925926	0,909091	0,900901
2	0,961169	0,924556	0,889996	0,857339	0,826446	0,811622
3	0,942322	0,888996	0,839619	0,793832	0,751315	0,731191
4	0,923845	0,854804	0,792094	0,735030	0,683013	0,658731
5	0,905731	0,821927	0,747258	0,680583	0,620921	0,593451
6	0,887971	0,790315	0,704961	0,630170	0,564474	0,534641
7	0,870560	0,759918	0,665057	0,583490	0,513158	0,481658
8	0,853490	0,730690	0,627412	0,540269	0,466507	0,433926
9	0,836755	0,702587	0,591898	0,500249	0,424098	0,390925
10	0,820348	0,675564	0,558395	0,463193	0,385543	0,352184
11	0,804263	0,649581	0,526788	0,428883	0,350494	0,317283
12	0,788493	0,624597	0,496969	0,397114	0,318631	0,285841
13	0,773033	0,600574	0,468839	0,367698	0,289664	0,257514
14	0,757875	0,577475	0,442301	0,340461	0,263331	0,231995
15	0,743015	0,555265	0,417265	0,315242	0,239392	0,209004
16	0,728446	0,533908	0,393646	0,291890	0,217629	0,188292
17	0,714163	0,513373	0,371364	0,270269	0,197845	0,169633
18	0,700159	0,493628	0,350344	0,250249	0,179859	0,152822
19	0,686431	0,474642	0,330513	0,231712	0,163508	0,137678
20	0,672971	0,456387	0,311805	0,214548	0,148644	0,124034
21	0,659776	0,438834	0,294155	0,198656	0,135131	0,111742
22	0,646839	0,421955	0,277505	0,183941	0,122846	0,100669
23	0,634156	0,405726	0,261797	0,170315	0,111678	0,090693
24	0,621721	0,390121	0,246979	0,157699	0,101526	0,081705
25	0,609531	0,375117	0,232999	0,146018	0,092296	0,073608
26	0,597579	0,360689	0,219810	0,135202	0,083905	0,066314
27	0,585862	0,346817	0,207368	0,125187	0,076278	0,059742
28	0,574375	0,333477	0,195630	0,115914	0,069343	0,053822
29	0,563112	0,320651	0,184557	0,107328	0,063039	0,048488
30	0,552071	0,308319	0,174110	0,099377	0,057309	0,043683
35	0,500028	0,253415	0,130105	0,067635	0,035584	0,025924
40	0,452890	0,208289	0,097222	0,046031	0,022095	0,015384
45	0,410197	0,171198	0,072650	0,031328	0,013719	0,009130
50	0,371528	0,140713	0,054288	0,021321	0,008519	0,005418

Продовження табл. Д4

Число періодів *n*	Ставка відсотка					
	13	**15**	**18**	**20**	**23**	**25**
1	0,884956	0,869565	0,847458	0,833333	0,813008	0,800000
2	0,783147	0,756144	0,718184	0,694444	0,660982	0,640000
3	0,693050	0,657516	0,608631	0,578704	0,537384	0,512000
4	0,613319	0,571753	0,515789	0,482253	0,436897	0,409600
5	0,542760	0,497177	0,437109	0,401878	0,355201	0,327680
6	0,480319	0,432328	0,370432	0,334898	0,288781	0,262144
7	0,425061	0,375937	0,313925	0,279082	0,234782	0,209715
8	0,376160	0,326902	0,266038	0,232568	0,190879	0,167772
9	0,332885	0,284262	0,225456	0,193807	0,155187	0,134218
10	0,294588	0,247185	0,191064	0,161506	0,126168	0,107374
11	0,260698	0,214943	0,161919	0,134588	0,102576	0,085899
12	0,230706	0,186907	0,137220	0,112157	0,083395	0,068719
13	0,204165	0,162528	0,116288	0,093464	0,067801	0,054976
14	0,180677	0,141329	0,098549	0,077887	0,055122	0,043980
15	0,159891	0,122894	0,083516	0,064905	0,044815	0,035184
16	0,141496	0,106865	0,070776	0,054088	0,036435	0,028147
17	0,125218	0,092926	0,059980	0,045073	0,029622	0,022518
18	0,110812	0,080805	0,050830	0,037561	0,024083	0,018014
19	0,098064	0,070265	0,043077	0,031301	0,019580	0,014412
20	0,086782	0,061100	0,036506	0,026084	0,015918	0,011529
21	0,076798	0,053131	0,030937	0,021737	0,012942	0,009223
22	0,067963	0,046201	0,026218	0,018114	0,010522	0,007379
23	0,060144	0,040174	0,022218	0,015095	0,008554	0,005903
24	0,053225	0,034934	0,018829	0,012579	0,006955	0,004722
25	0,047102	0,030378	0,015957	0,010483	0,005654	0,003778
26	0,041683	0,026415	0,013523	0,008735	0,004597	0,003022
27	0,036888	0,022970	0,011460	0,007280	0,003737	0,002418
28	0,032644	0,019974	0,009712	0,006066	0,003038	0,001934
29	0,028889	0,017369	0,008230	0,005055	0,002470	0,001547
30	0,025565	0,015103	0,006975	0,004213	0,002008	0,001238
35	0,013876	0,007509	0,003049	0,001693	0,000713	0,000406
40	0,007531	0,003733	0,001333	0,000680	0,000253	0,000133
45	0,004088	0,001856	0,000583	0,000273	0,000090	0,000044
50	0,002219	0,000923	0,000255	0,000110	0,000032	0,000014

Додаток 3

Таблиця Д5

Коефіцієнти нарощення дискретних рент

Число періодів *n*	Ставка відсотка					
	2	**5**	**7**	**9**	**10**	**12**
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	2,02000	2,05000	2,07000	2,09000	2,10000	2,12000
3	3,06040	3,15250	3,21490	3,27810	3,31000	3,37440
4	4,12161	4,31013	4,43994	4,57313	4,64100	4,77933
5	5,20404	5,52563	5,75074	5,98471	6,10510	6,35285
6	6,30812	6,80191	7,15329	7,52333	7,71561	8,11519
7	7,43428	8,14201	8,65402	9,20043	9,48717	10,08901
8	8,58297	9,54911	10,25980	11,02847	11,43589	12,29969
9	9,75463	11,02656	11,97799	13,02104	13,57948	14,77566
10	10,94972	12,57789	13,81645	15,19293	15,93742	17,54874
11	12,16872	14,20679	15,78360	17,56029	18,53117	20,65458
12	13,41209	15,91713	17,88845	20,14072	21,38428	24,13313
13	14,68033	17,71298	20,14064	22,95338	24,52271	28,02911
14	15,97394	19,59863	22,55049	26,01919	27,97498	32,39260
15	17,29342	21,57856	25,12902	29,36092	31,77248	37,27971
16	18,63929	23,65749	27,88805	33,00340	35,94973	42,75328
17	20,01207	25,84037	30,84022	36,97370	40,54470	48,88367
18	21,41231	28,13238	33,99903	41,30134	45,59917	55,74971
19	22,84056	30,53900	37,37896	46,01846	51,15909	63,43968
20	24,29737	33,06595	40,99549	51,16012	57,27500	72,05244
21	25,78332	35,71925	44,86518	56,76453	64,00250	81,69874
22	27,29898	38,50521	49,00574	62,87334	71,40275	92,50258
23	28,84496	41,43048	53,43614	69,53194	79,54302	104,60289
24	30,42186	44,50200	58,17667	76,78981	88,49733	118,15524
25	32,03030	47,72710	63,24904	84,70090	98,34706	133,33387
26	33,67091	51,11345	68,67647	93,32398	109,1818	150,33393
27	35,34432	54,66913	74,48382	102,7231	121,0999	169,37401
28	37,05121	58,40258	80,69769	112,9682	134,2099	190,69889
29	38,79223	62,32271	87,34653	124,1354	148,6309	214,58275
30	40,56808	66,43885	94,46079	136,3075	164,4940	241,33268
35	49,99448	90,32031	138,2369	215,7108	271,0244	431,66350
40	60,40198	120,7998	199,6351	337,8824	442,5926	767,09142
45	71,89271	159,7002	285,7493	525,8587	718,9048	1358,23003
50	84,57940	209,3480	406,5289	815,0836	1163,9085	2400,01825

Продовження табл. Д5

Число періо-дів *n*	Ставка відсотка					
	13	**15**	**18**	**20**	**23**	**25**
1	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
2	2,13000	2,15000	2,18000	2,20000	2,23000	2,25000
3	3,40690	3,47250	3,57240	3,64000	3,74290	3,81250
4	4,84980	4,99338	5,21543	5,36800	5,60377	5,76563
5	6,48027	6,74238	7,15421	7,44160	7,89263	8,20703
6	8,32271	8,75374	9,44197	9,92992	10,70794	11,25879
7	10,40466	11,06680	12,14152	12,91590	14,17077	15,07349
8	12,75726	13,72682	15,32700	16,49908	18,43004	19,84186
9	15,41571	16,78584	19,08585	20,79890	23,66895	25,80232
10	18,41975	20,30372	23,52131	25,95868	30,11281	33,25290
11	21,81432	24,34928	28,75514	32,15042	38,03876	42,56613
12	25,65018	29,00167	34,93107	39,58050	47,78767	54,20766
13	29,98470	34,35192	42,21866	48,49660	59,77883	68,75958
14	34,88271	40,50471	50,81802	59,19592	74,52796	86,94947
15	40,41746	47,58041	60,96527	72,03511	92,66940	109,6868
16	46,67173	55,71747	72,93901	87,44213	114,9834	138,1085
17	53,73906	65,07509	87,06804	105,9306	142,4295	173,6357
18	61,72514	75,83636	103,7403	128,1167	176,1883	218,0446
19	70,74941	88,21181	123,4135	154,7400	217,7116	273,5558
20	80,94683	102,4436	146,6280	186,6880	268,7853	342,9447
21	92,46992	118,8101	174,0210	225,0256	331,6059	429,6809
22	105,4910	137,6316	206,3448	271,0307	408,8753	538,1011
23	120,2048	159,2764	244,4868	326,2369	503,9166	673,6264
24	136,8315	184,1678	289,4945	392,4842	620,8174	843,0329
25	155,6196	212,7930	342,6035	471,9811	764,6054	1054,791
26	176,8501	245,7120	405,2721	567,3773	941,4647	1319,489
27	200,8406	283,5688	479,2211	681,8528	1159,002	1650,361
28	227,9499	327,1041	566,4809	819,2233	1426,572	2063,952
29	258,5834	377,1697	669,4475	984,0680	1755,683	2580,939
30	293,1992	434,7451	790,9480	1181,882	2160,491	3227,174
35	546,6808	881,1702	1816,652	2948,341	6090,334	9856,761
40	1013,704	1779,090	4163,213	7343,858	17154,05	30088,66
45	1874,165	3585,128	9531,577	18281,31	48301,77	91831,50
50	3459,507	7217,716	21813,09	45497,19	135992,2	280255,7

Таблиця Д6

Коефіцієнти приведення дискретних рент

Число періодів *n*	Ставка відсотка					
	2	**5**	**7**	**9**	**10**	**12**
1	0,98039	0,95238	0,93458	0,91743	0,90909	0,89286
2	1,94156	1,85941	1,80802	1,75911	1,73554	1,69005
3	2,88388	2,72325	2,62432	2,53129	2,48685	2,40183
4	3,80773	3,54595	3,38721	3,23972	3,16987	3,03735
5	4,71346	4,32948	4,10020	3,88965	3,79079	3,60478
6	5,60143	5,07569	4,76654	4,48592	4,35526	4,11141
7	6,47199	5,78637	5,38929	5,03295	4,86842	4,56376
8	7,32548	6,46321	5,97130	5,53482	5,33493	4,96764
9	8,16224	7,10782	6,51523	5,99525	5,75902	5,32825
10	8,98259	7,72173	7,02358	6,41766	6,14457	5,65022
11	9,78685	8,30641	7,49867	6,80519	6,49506	5,93770
12	10,57534	8,86325	7,94269	7,16073	6,81369	6,19437
13	11,34837	9,39357	8,35765	7,48690	7,10336	6,42355
14	12,10625	9,89864	8,74547	7,78615	7,36669	6,62817
15	12,84926	10,37966	9,10791	8,06069	7,60608	6,81086
16	13,57771	10,83777	9,44665	8,31256	7,82371	6,97399
17	14,29187	11,27407	9,76322	8,54363	8,02155	7,11963
18	14,99203	11,68959	10,05909	8,75563	8,20141	7,24967
19	15,67846	12,08532	10,33560	8,95011	8,36492	7,36578
20	16,35143	12,46221	10,59401	9,12855	8,51356	7,46944
21	17,01121	12,82115	10,83553	9,29224	8,64869	7,56200
22	17,65805	13,16300	11,06124	9,44243	8,77154	7,64465
23	18,29220	13,48857	11,27219	9,58021	8,88322	7,71843
24	18,91393	13,79864	11,46933	9,70661	8,98474	7,78432
25	19,52346	14,09394	11,65358	9,82258	9,07704	7,84314
26	20,12104	14,37519	11,82578	9,92897	9,16095	7,89566
27	20,70690	14,64303	11,98671	10,02658	9,23722	7,94255
28	21,28127	14,89813	12,13711	10,11613	9,30657	7,98442
29	21,84438	15,14107	12,27767	10,19828	9,36961	8,02181
30	22,39646	15,37245	12,40904	10,27365	9,42691	8,05518
35	24,99862	16,37419	12,94767	10,56682	9,64416	8,17550
40	27,35548	17,15909	13,33171	10,75736	9,77905	8,24378
45	29,49016	17,77407	13,60552	10,88120	9,86281	8,28252
50	31,42361	18,25593	13,80075	10,96168	9,91481	8,30450

Продовження табл. Д6

Число періо-дів *n*	Ставка відсотка					
	13	**15**	**18**	**20**	**23**	**25**
1	0,88496	0,86957	0,84746	0,83333	0,81301	0,80000
2	1,66810	1,62571	1,56564	1,52778	1,47399	1,44000
3	2,36115	2,28323	2,17427	2,10648	2,01137	1,95200
4	2,97447	2,85498	2,69006	2,58873	2,44827	2,36160
5	3,51723	3,35216	3,12717	2,99061	2,80347	2,68928
6	3,99755	3,78448	3,49760	3,32551	3,09225	2,95142
7	4,42261	4,16042	3,81153	3,60459	3,32704	3,16114
8	4,79877	4,48732	4,07757	3,83716	3,51792	3,32891
9	5,13166	4,77158	4,30302	4,03097	3,67310	3,46313
10	5,42624	5,01877	4,49409	4,19247	3,79927	3,57050
11	5,68694	5,23371	4,65601	4,32706	3,90185	3,65640
12	5,91765	5,42062	4,79322	4,43922	3,98524	3,72512
13	6,12181	5,58315	4,90951	4,53268	4,05304	3,78010
14	6,30249	5,72448	5,00806	4,61057	4,10816	3,82408
15	6,46238	5,84737	5,09158	4,67547	4,15298	3,85926
16	6,60388	5,95423	5,16235	4,72956	4,18941	3,88741
17	6,72909	6,04716	5,22233	4,77463	4,21904	3,90993
18	6,83991	6,12797	5,27316	4,81219	4,24312	3,92794
19	6,93797	6,19823	5,31624	4,84350	4,26270	3,94235
20	7,02475	6,25933	5,35275	4,86958	4,27862	3,95388
21	7,10155	6,31246	5,38368	4,89132	4,29156	3,96311
22	7,16951	6,35866	5,40990	4,90943	4,30208	3,97049
23	7,22966	6,39884	5,43212	4,92453	4,31063	3,97639
24	7,28288	6,43377	5,45095	4,93710	4,31759	3,98111
25	7,32998	6,46415	5,46691	4,94759	4,32324	3,98489
26	7,37167	6,49056	5,48043	4,95632	4,32784	3,98791
27	7,40856	6,51353	5,49189	4,96360	4,33158	3,99033
28	7,44120	6,53351	5,50160	4,96967	4,33462	3,99226
29	7,47009	6,55088	5,50983	4,97472	4,33709	3,99381
30	7,49565	6,56598	5,51681	4,97894	4,33909	3,99505
35	7,58557	6,61661	5,53862	4,99154	4,34472	3,99838
40	7,63438	6,64178	5,54815	4,99660	4,34672	3,99947
45	7,66086	6,65429	5,55232	4,99863	4,34743	3,99983
50	7,67524	6,66051	5,55414	4,99945	4,34769	3,99994

Додаток 4

Тестові завдання

1. Відсотки (відсоткові гроші) – це …

Варіанти відповіді:

а) абсолютна величина доходу від надання грошей у борг у будь-якій його формі ……………………………………..……………………………… ☐

б) відносна величина доходу від надання грошей у борг у будь-якій його формі ……………………………………..……………………………… ☐

в) нарощена сума боргу до кінця терміну нарахування .... ☐

г) дисконтована сума боргу на початок терміну нарахування .... ☐

2. Ставка відсотків – це …

Варіанти відповіді:

а) абсолютна величина доходу від надання грошей у борг у будь-якій його формі ……………………………………..……………………………… ☐

б) відносна величина доходу від надання грошей у борг у будь-якій його формі ....………………... ☐

в) нарощена сума боргу до кінця терміну нарахування .... ☐

г) дисконтована сума боргу на початок терміну нарахування .... ☐

3. Ставка відсотків визначається …

Варіанти відповіді:

а) відношенням відсоткових грошей, сплачених за одиницю часу, до величини початкового капіталу .... ☐

б) відношенням відсоткових грошей, сплачених за одиницю часу, до величини майбутнього капіталу …….. ☐

в) відношенням відсоткових грошей, сплачених за одиницю часу, до величини суми початкового і майбутнього капіталу .... ☐

г) різницею між нарощеною сумою і боргом .... ☐

4. Процес нарощення – це …

Варіанти відповіді

а) процес, в якому задані початкова сума і ставка ....……................ ☐

б) процес, в якому задані очікувана в майбутньому сума і ставка .... ☐

в) процес, в якому задані очікувана в майбутньому сума, початкова сума і ставка ..………….. ☐

г) процес, в якому задані майбутня сума і відсоткові гроші .... ☐

5. Процес дисконтування – це …

Варіанти відповіді:

а) процес, в якому задані початкова сума і ставка ....…...................... ☐

б) процес, в якому задані очікувана в майбутньому сума і ставка ..… ☐

в) процес, в якому задані очікувана в майбутньому сума, початкова сума і ставка ..………... ☐

г) процес, в якому задані початкова сума і відсоткові гроші .... ☐

6. При нарощуванні суми грошей в часі відсотки визначаються в розрахунку …

Варіанти відповіді:

а) від сьогодні до майбутнього ………………………....................... ☐

б) від майбутнього до сьогодні ……………………………................ ☐

в) від сьогодні до майбутнього або від майбутнього до сьогодні .... ☐

г) від сьогодні до середини періоду нарахування .... ☐

7 При дисконтуванні суми грошей в часі відсотки визначаються в розрахунку …

Варіанти відповіді:

а) від сьогодні до майбутнього.……………….. ☐

б) від майбутнього до сьогодні …………………………….................... ☐

в) від сьогодні до майбутнього або від майбутнього до сьогодні .... ☐

г) від сьогодні до середини періоду нарахування .... ☐

8 Відсотки відносно до нарощеного числа називаються відсотками …

Варіанти відповіді:

а) „зі 100” ....…….............. ☐

б) „на 100” ....…….............. ☐

в) „в 100” ....…….............. ☐

г) дисконтовані відсотки .... ☐

9 Відсотки відносно до початкового числа називаються відсотками …

Варіанти відповіді:

а) „зі 100” ....…….............. ☐

б) „на 100” ....…….............. ☐

в) „в 100” ....…….............. ☐

г) дисконтовані відсотки .... ☐

10 Відсотки відносно до зменшеного числа називаються відсотками …

Варіанти відповіді:

а) „зі 100” ....…….............. ☐

б) „на 100” ....…….............. ☐

в) „в 100” ....……............ ☐

г) нарощені відсотки .... ☐

11. Прості відсотки нараховуються, якщо база нарахування …

Варіанти відповіді:

а) дорівнює цілому числу...........................……………………….......... ☐

б) послідовно змінюється .... ☐

в) постійна або послідовно змінюється .... ☐

г) постійна ....……………………............... ☐

12 Складні відсотки нараховуються, якщо база нарахування …

Варіанти відповіді:

а) постійна ....……………………............... ☐

б) дорівнює дробовому числу ....………………………........... ☐

в) постійна або послідовно змінюється .... ☐

г) послідовно змінюється .... ☐

13 Нарощеною сумою боргу називається …

Варіанти відповіді:

а) початкова сума з нарахованими відсотками до кінця терміну нарахування .... ☐

б) майбутня сума боргу зменшена на величину дисконту ……............ ☐

в) майбутня сума боргу збільшена на величину дисконту ……............ ☐

г) майбутня сума боргу плюс відсоткові гроші .... ☐

14 Нарощена за простими відсотками сума боргу обчислюється за формулою …

Варіанти відповіді:

а) $S = P(1 - ni)$ ....………………………………........... ☐

б) $S = P(1 + i)^n$ ....………………………………........... ☐

в) $S = P(1 + ni)$ ....……………………………….......... ☐

г) $I = Pni$ ....…………………………………………………............ ☐

15 Відсоткові гроші обчислюються за формулою …

Варіанти відповіді:

а) $S = P(1 - ni)$ ....………………………………........... ☐

б) $S = P(1 + i)^n$ ....………………………………........... ☐

в) $S = P(1 + ni)$ ....……………………………….......... ☐

г) $I = Pni$ ....…………………………………………………............ ☐

16 Яка часова база не використовується при розрахунку відсотків? …

Варіанти відповіді:

а) K = 360 днів ....…………………………………………………........... ☐

б) $K = 365$ днів .... ☐

в) $K = 366$ днів .... ☐

г) $K = 370$ днів .... ☐

17 Запис АСТ/АСТ означає розрахунок …
Варіанти відповіді:

а) точних відсотків з точним числом днів позички .... ☐

б) точних відсотків з наближеним числом днів позички .... ☐

в) звичайних відсотків з точним числом днів позички .... ☐

г) звичайних відсотків з наближеним числом днів позички .... ☐

18 Запис АСТ/360 означає розрахунок …
Варіанти відповіді:

а) точних відсотків з точним числом днів позички .... ☐

б) точних відсотків з наближеним числом днів позички .... ☐

в) звичайних відсотків з точним числом днів позички .... ☐

г) звичайних відсотків з наближеним числом днів позички .... ☐

19 Запис 360/360 означає розрахунок …
Варіанти відповіді:

а) точних відсотків з точним числом днів позички .... ☐

б) точних відсотків з наближеним числом днів позички .... ☐

в) звичайних відсотків з точним числом днів позички .... ☐

г) звичайних відсотків з наближеним числом днів позички .... ☐

20 Який варіант розрахунку відсотків не має змісту …
Варіанти відповіді:

а) точних відсотків з точним числом днів позички .... ☐

б) точних відсотків з наближеним числом днів позички .... ☐

в) звичайних відсотків з точним числом днів позички .... ☐

г) звичайних відсотків з наближеним числом днів позички .... ☐

21 Якщо прості ставки змінюються в часі, то нарощена сума на кінець терміну розраховується за формулою …
Варіанти відповіді:

а) $$S = P\left(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_m i_m\right) = P\left(1 + \sum_{j=1}^{m} n_j i_j\right)$$ .... ☐

б) $$S = P\left[\left(1+i_1\right)^{n_1} \cdot \left(1+i_2\right)^{n_2} \times \ldots \times \left(1+i_m\right)^{n_m}\right]$$ .... ☐

в) $$S = P\left(1 - n_1 i_1 - n_2 i_2 - \ldots - n_m i_m\right) = P\left(1 - \sum_{j=1}^{m} n_j i_j\right)$$ .... ☐

г) $S = P\left[(1-i_1)^{n_1}(1-i_2)^{n_2}\times\ldots\times(1-i_m)^{n_m}\right]$ .... ☐

22 Якщо складні ставки змінюються в часі, то нарощена сума на кінець терміну розраховується за формулою…

Варіанти відповіді:

а) $S = P(1+n_1 i_1 + n_2 i_2 + ..n_m i_m) = P\left(1+\sum_{j=1}^{m} n_j i_j\right)$ .... ☐

б) $S = P\left[(1+i_1)^{n_1}\cdot(1+i_2)^{n_2}\times\ldots\times(1+i_m)^{n_m}\right]$ .... ☐

в) $S = P(1-n_1 i_1 - n_2 i_2 - \ldots - n_m i_m) = P\left(1-\sum_{j=1}^{m} n_j i_j\right)$ .... ☐

г) $S = P\left[(1-i_1)^{n_1}(1-i_2)^{n_2}\times\ldots\times(1-i_m)^{n_m}\right]$ .... ☐

23 Нарощена за складними відсотками сума боргу обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $S = P(1 + ni)$ .... ☐

б) $S = P(1 + i)^n$ .... ☐

в) $I = Pni$ .... ☐

г) $S = P(1 - ni)$ .... ☐

24 Збалансована фінансова операція має контур ...

Варіанти відповіді:

а) завжди опуклий .... ☐

б) розімкнутий .... ☐

в) замкнений або розімкнутий .... ☐

г) замкнений .... ☐

25 Облікова (дисконтна) ставка відсотків визначається ...

Варіанти відповіді:

а) відношенням відсоткових грошей, сплачених за одиницю часу, до величини початкового капіталу .... ☐

б) відношенням відсоткових грошей, сплачених за одиницю часу, до величини майбутнього капіталу .... ☐

в) різницею між майбутнім капіталом і відсоткових грошей, сплачених за одиницю часу .... ☐

г) відношенням відсоткових грошей, сплачених за одиницю часу, до величини суми початкового і майбутнього капіталу .... ☐

26 Залежно від виду відсоткової ставки, якого дисконтування не існує? ...

Варіанти відповіді:

а) математичного дисконтування .... ☐

б) банківського (комерційного) обліку .... ☐

в) фінансового дисконтування .... ☐

27 Сучасна величина, розрахована згідно з методом математичного дисконтування за простою ставкою, обчислюється за формулою ...
Варіанти відповіді:

а) $P = \dfrac{S}{1 - ni}$ .... ☐

б) $P = \dfrac{S}{1 + ni}$ .... ☐

в) $P = S(1 - nd)$ .... ☐

г) $P = S\,(1 + ni)$ .... ☐

28 Сучасна величина, розрахована згідно з методом банківського обліку за простою ставкою, обчислюється за формулою ...
Варіанти відповіді:

а) $P = \dfrac{S}{1 + ni}$ .... ☐

б) $P = S(1 + nd)$ .... ☐

в) $P = S(1 - nd)$ .... ☐

г) $P = S\,(1 + ni)$ .... ☐

29 Сучасна величина, розрахована згідно з методом математичного дисконтування за складною ставкою, обчислюється за формулою ...
Варіанти відповіді:

а) $P = \dfrac{S}{(1 - i)^n}$ .... ☐

б) $P = S(1 - d)^n$ .... ☐

в) $P = S\,(1 + i)^n$ .... ☐

г) $P = \dfrac{S}{(1 + i)^n}$ .... ☐

30 Сучасна величина, розрахована згідно з методом банківського обліку за складною ставкою, обчислюється за формулою ...
Варіанти відповіді:

а) $P = \dfrac{S}{(1 + i)^n}$ .... ☐

б) $P = \dfrac{S}{(1 - i)^n}$ .... ☐

в) $P = S(1 - d)^n$ .... ☐

г) $P = S\,(1 + i)^n$ .... ☐

31 Нарощена сума при однаковій величині ставки відсотків менша при розрахунку складних відсотків, ніж простих. На який термін ведеться розрахунок нарощеної суми? ...
Варіанти відповіді:

а) дробове число років .... ☐

б) менше року .... ☐

в) один рік .... ☐

г) більше року .... ☐

32 Нарощена сума при однаковій величині ставки відсотків більша при розрахунку складних відсотків, ніж простих. На який термін ведеться розрахунок нарощеної суми? ...

Варіанти відповіді:

а) менше року .... ☐

б) один рік .... ☐

в) дробове число років .... ☐

г) більше року .... ☐

33 Нарощена сума при однаковій величині ставки відсотків і розрахунку складних відсотків дорівнює розрахунку за простими. На який термін ведеться розрахунок нарощеної суми? ...

Варіанти відповіді:

а) менше року .... ☐

б) ціле число років .... ☐

в) один рік .... ☐

г) більше року .... ☐

34 Яку ставку використовують при неперервному нарощуванні відсотків? ...

Варіанти відповіді:

а) ефективну .... ☐

б) номінальну .... ☐

в) річну .... ☐

г) силу зростання .... ☐

35 Відсотки, нараховані за складною ставкою за весь термін позички, будуть ...

Варіанти відповіді:

а) $I_{\%} = P\left[(1+i)^n - (1+ni)\right]$ .... ☐

б) $I = P[(1+i)^n - 1]$ .... ☐

в) $I = P[1 - (1+i)^n]$ .... ☐

г) $I = S[(1+i)^n - 1$ .... ☐

36 Номінальна ставка через ефективну визначається за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $j = m(\sqrt[nm]{1+i} - 1)$ .... ☐

б) $j = m(\sqrt[m]{1+i} - n)$ .... ☐

в) $i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$ ………………………………………………….. □

г) $j = m(\sqrt[m]{1+i} - 1)$ ………………………………………………….. □

37 Для якого терміну проводиться нарощення, якщо множники розташовані в такому порядку

$$(1+i)^n < 1 + ni_s < \frac{1}{1 - nd_s} < \frac{1}{(1-d)^n} \ ...$$

Варіанти відповіді:

а) $n = 1$ ………………………………………………………….. □

б) $0 < n < 1$ ……………………………………………………… □

в) $n = 2$ ………………………………………………………….. □

г) $n > 1$ ………………………………………………………….. □

38 Для якого терміну проводиться нарощення, якщо множники розташовані в такому порядку $1 + ni_s < (1+i)^n < \frac{1}{(1-d)^n} < \frac{1}{1 - nd_s}$ ...

Варіанти відповіді:

а) $n = 1$ ………………………………………………………….. □

б) $0 < n < 1$ ……………………………………………………… □

в) $n > 2$ ………………………………………………………….. □

г) $n > 1$ ………………………………………………………….. □

39 Для якого терміну проводиться нарощення, якщо множники розташовані в такому порядку $1 + i = 1 + i_s < \frac{1}{1 - d_s} = \frac{1}{1-d}$ ...

Варіанти відповіді:

а) $n = 1$ ………………………………………………………….. □

б) $0 < n < 1$ ……………………………………………………… □

в) $n > 2$ ………………………………………………………….. □

г) $n > 1$ ………………………………………………………….. □

40 Якщо дисконтування проводиться m раз в рік, то сучасна вартість визначається за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $P = \frac{S}{\left(1 + \frac{f}{m}\right)^{mn}}$ ………………………………………………….. □

б) $P = S\left(1+\frac{f}{m}\right)^{mn}$ …………………………………………………… ☐

в) $P = S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}$ …………………………………………………… ☐

г) $P = \frac{S}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}$ …………………………………………………… ☐

41 При неперервному нарощенні використовується ...

Варіанти відповіді:

а) ефективна ставка нарощення ……………………………………….. ☐

б) номінальна ставка нарощення ………………………………………. ☐

в) сила росту …………………………………………………………. ☐

г) ефективна облікова ставка …………………………………………… ☐

42 Річна ставка $j = 12\%$. В якому випадку нарощена сума буде найбільшою?

Варіанти відповіді:

а) при щоквартальному нарахуванні ………………………………….. ☐

б) при нарахуванні за півріччями ……………………………….…….. ☐

в) при щомісячному нарахуванні ……………………………………… ☐

г) при нарахуванні один раз на рік ……………………………………. ☐

43 Для якого терміну проводиться дисконтування, якщо множники розташовані в такому порядку $(1-d)^n < 1-nd_s < \frac{1}{1+ni_s} < \frac{1}{(1+i)^n}$ ...

Варіанти відповіді:

а) $n = 1$ ……………………………………………………………….. ☐

б) $0 < n < 1$ …………………………………………………………… ☐

в) $n > 2$ ……………………………………………………………….. ☐

г) $n > 1$ ……………………………………………………………….... ☐

44 Для якого терміну проводиться дисконтування, якщо множники розташовані в такому порядку $1-d = 1-d_s < \frac{1}{1+i_s} = \frac{1}{1+i}$ ...

Варіанти відповіді:

а) $n = 1$ ……………………………………………………………….. ☐

б) $0 < n < 1$ …………………………………………………………… ☐

в) $n > 2$ ……………………………………………………………….. ☐

г) $n > 1$ ………………………………………………………………...

45 Для якого терміну проводиться дисконтування, якщо множники розташовані в такому порядку $1 - nd_s < (1-d)^n < \frac{1}{(1+i)^n} < \frac{1}{1+ni_s}$ ...

Варіанти відповіді:

а) $n = 1$ ……………………………………………………………..

б) $0 < n < 1$ ……………………………………………………………

в) $n > 2$ ……………………………………………………………..

г) $n > 1$ ………………………………………………………………...

46 Якщо виплата платежів здійснюється в кінці періоду ренти, то відповідна рента називається ...

Варіанти відповіді:

а) постнумерандо ……………………………………………….............

б) пренумерандо ……………………………………………….............

в) річна ....

г) вічна ………..………………………………………………..............

47 Якщо виплата платежів здійснюється на початку періоду ренти, то відповідна рента називається ...

Варіанти відповіді:

а) постнумерандо ………………...…………………………….............

б) річна ....

в) пренумерандо ……………………………………………….............

г) вічна ………..………………………………………………..............

48 За кількістю платежів у році ренти поділяються на ...

Варіанти відповіді:

а) річні ...……..………………………………………………..............

б) *p*-термінові ...…………………………………………….............

в) періодичні ...………………………………………………..............

г) рівневі ………..……………………………………………..............

49 Нарощена сума постійної річної ренти постнумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $S = R\frac{(1+i)^{-n} - 1}{i}$ ………………………..………………….................

б) $S = R\frac{(1+i)^n+1}{i}$ ………………………………………………....................... □

в) $S = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ ………………………………………………....................... □

г) $S = R\frac{(1+i)^n-1}{i}$ ………………………………………………....................... □

50 Нарощена сума постійної річної ренти постнумерандо з нарахуванням *m* раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}+1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}+1}$$ ……………………………………........................ □

б) $$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}$$ ……...............................………………………......... □

в) $S = R\frac{(1+i)^n+1}{i}$ ……………………...........………….....……………...... □

г) $$S = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm}}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}}$$ ………………………………...........……......... □

51 Нарощена сума постійної *p*-термінової ренти постнумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $$S = \frac{R}{p}\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}$$ …………….........………………………………......... □

б) $$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}$$ …………………...........…………………………......... □

в) $S = R\frac{(1+i)^n-1}{i}$ ……………………...........………………………………...... □

г)

$$S = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm}}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}}$$ ………………………..........………………………......... □

52 Нарощена сума постійної *p*-термінової ренти постнумерандо з нарахуванням *m* раз на рік (*m*= *p*) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)

$$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}-1}{j}$$ ………………………..........………………………............. □

б)

$$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}$$ ………………………..........………………………............. □

в)

$$S = \frac{R}{p}\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}$$ ………………………..........………………………......... □

г)

$$S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$ ………………………..........………………………....... □

53 Нарощена сума постійної *p*-термінової ренти постнумерандо з нарахуванням *m* раз на рік ($m \neq p$) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)

$$S = \frac{R}{p}\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}$$ ………………………..........………………………......... □

б)

$$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}$$ ………………………..........………………………......... □

в)

$$S = \frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+{}^{j}/_{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+{}^{j}/_{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$ ………………………..........………………………......... □

г)

$$S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$ ………………………..........………………………....... □

54 Нарощена сума постійної річної ренти постнумерандо з неперервним нарахуванням обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $$S = R \cdot \frac{e^{\xi n} - 1}{e^{\xi} - 1}$$ .... □

б) $$S = R \cdot \frac{e^{\xi n} - 1}{p(e^{\xi / p} - 1)}$$ .... □

в) $$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$ .... □

г) $$S = R\frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m}}$$ .... □

55 Нарощена сума постійної p-термінової ренти з неперервним нарахуванням обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $$S = R \cdot \frac{e^{\xi n} - 1}{e^{\xi} - 1}$$ .... □

б) $$S = R \cdot \frac{e^{\xi n} - 1}{p(e^{\xi / p} - 1)}$$ .... □

в) $$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$ .... □

г) $$S = R\frac{(1+i)^n + 1}{i}$$ .... □

56 Сучасна вартість постійної річної ренти постнумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $$A = R\frac{1 - \left(1 + j/m\right)^{-mn}}{j}$$ .... □

б) $$A = R\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$ .... □

в) $$A = R\frac{1 - (1+i)^{n}}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}$$ .... □

г)

$$A = R\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m}-1}$$ ……………………………………….................. □

57 Сучасна вартість постійної річної ренти постнумерандо з нарахуванням m раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ ……………...........……………………………......... □

б)

$$A = R\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m}-1}$$ ….…………………...........……………………....... □

в)

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ ………………………………...........………….......... □

г)

$$A = R\frac{1-(1+i)^{n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]}$$ ……………….……………………….……................. □

58 Сучасна вартість постійної p-термінової ренти постнумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а)

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ ………………………………………………..................... □

б)

$$A = R\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m}-1}$$ ….…………………………………………................. □

в)

$$A = R\frac{1-(1+i)^{n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]}$$ ……………….……………………….……................. □

г)

$$A = R\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{j}$$ …………………………………………..................... □

59 Сучасна вартість постійної p-термінової ренти постнумерандо з нарахуванням m раз на рік ($m = p$) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $$A = R\frac{1-\left(1+{j}/{m}\right)^{-mn}}{\left(1+{j}/{m}\right)^{m}-1}$$ …………………………………….................. ☐

б) $$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ …………………………………...........…......... ☐

в) $$A = R\frac{1-(1+i)^{n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]}$$ ………………..……………….........…....... ☐

г) $$A = R\frac{1-\left(1+{j}/{m}\right)^{-mn}}{j}$$ ……………............……………………......... ☐

60 Сучасна вартість постійної p–термінової ренти постнумерандо з нарахуванням m раз на рік ($m \neq p$) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ …………………………………….................... ☐

б) $$A = R\cdot\frac{1\text{-}e^{-\xi n}}{e^{\xi}-1}$$ ..……………………………….............................. ☐

в) $$A = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-\left(1+{j}/{m}\right)^{-mn}}{\left(1+{j}/{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$ ……………………………………..................... ☐

г) $$A = R\frac{1-(1+i)^{n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]}$$ ………………………………………….................. ☐

61 Сучасна вартість постійної річної ренти постнумерандо з неперервним нарахуванням обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ …………………………………….................... ☐

б) $$A = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-\left(1+{j}/{m}\right)^{-mn}}{\left(1+{j}/{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$ ..…………………………………….................... ☐

в) $$A = R\frac{1-(1+i)^{n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]}$$ ………………………………………….................. ☐

г) $$A = R \cdot \frac{1 - e^{-\xi n}}{e^{\xi} - 1}$$ .... □

62 Сучасна вартість постійної *p*-термінової ренти постнумерандо з неперервним нарахуванням обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ .... □

б) $$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\left(1+{}^{j}/_{m}\right)^{-mn}}{\left(1+{}^{j}/_{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$ .... □

в) $$A = R \cdot \frac{1 - e^{-\xi n}}{p\left(e^{\xi/p} - 1\right)}$$ .... □

г) $$A = R \cdot \frac{1 - e^{-\xi n}}{e^{\xi} - 1}$$ .... □

63 Нарощена сума постійної річної ренти пренумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $$\tilde{S} = S\left(1-\frac{j}{m}\right)^{m}$$ .... □

б) $\tilde{S} = S(1+i)$ .... □

в) $\tilde{S} = S(1-i)$ .... □

г) $$\tilde{S} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ .... □

64 Нарощена сума постійної річної ренти пренумерандо з нарахуванням m раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $$\tilde{S} = S\left(1-\frac{j}{m}\right)^{m}$$ .... □

б) $\tilde{S} = S(1+i)$ .... □

в) $$\widetilde{S} = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm}}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}}$$ ………….........……………………………....... □

г) $$\widetilde{S} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$$ ………………….........…………………….................. □

65 Нарощена сума постійної *p*-термінової ренти пренумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $\widetilde{S} = S(1+i)$ ……..………………..…….........………………………................ □

б) $\widetilde{S} = S(1-i)^{1/p}$ ….……………………………………………………............ □

в) $\widetilde{S} = S(1+i)^{1/p}$ ……..………………………………..…………...................... □

г) $$\widetilde{S} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$$ …..…………………………………………............................ □

66 Нарощена сума постійної *p*-термінової ренти пренумерандо з нарахуванням *m* раз на рік ($m \neq p$) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $$\widetilde{S} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}$$ …..……………………………………................................ □

б) $\widetilde{S} = S(1+i)$ ………………………..………………………..………........................ □

в) $$\widetilde{S} = S\left(1-\frac{j}{m}\right)^{m/p}$$ …..………………………………………................................ □

г) $$\widetilde{S} = \frac{R}{p}\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}$$ ………………………………………………….................... □

67 Сучасна вартість постійної річної ренти пренумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $$\widetilde{A} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ …………………………………………………........................ □

б) $\widetilde{A} = A(1+i)$ …………………………………………….. □

в) $$\widetilde{A} = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}$$ ……………………………………………............................ □

г) $\widetilde{A} = A\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}$ .... ☐

68 Сучасна вартість постійної річної ренти пренумерандо з нарахуванням m раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $\widetilde{A} = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ .... ☐

б) $\widetilde{A} = A(1+i)$ .... ☐

в) $\widetilde{A} = A\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}$ .... ☐

г) $\widetilde{A} = A\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}$ .... ☐

69 Сучасна вартість постійної p–термінової ренти пренумерандо з нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $\widetilde{A} = A(1+i)^{1/p}$ .... ☐

б) $\widetilde{A} = A\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m}$ .... ☐

в) $\widetilde{A} = A\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}$ .... ☐

г) $\widetilde{A} = A(1+i)$ .... ☐

70 Сучасна вартість постійної p-термінової ренти пренумерандо з нарахуванням m раз на рік ($m \neq p$) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $\widetilde{A} = A(1+i)^{1/p}$ .... ☐

б) $\widetilde{A} = A\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}$ .... ☐

в) $\widetilde{A} = A(1+i)$ .... ☐

г) $\widetilde{A} = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ .... ☐

71 Нарощена сума постійної річної ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $S_{1/2} = S(1+i)$ .... □

б) $S_{1/2} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$ .... □

в) $S_{1/2} = S(1+i)^{1/2}$ .... □

г) $S_{1/2} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ .... □

72 Нарощена сума постійної річної ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням *m* раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $S_{1/2} = S(1+i)$ .... □

б) $S_{1/2} = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm}}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}}$ .... □

в) $S_{1/2} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$ .... □

г) $S_{1/2} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/2}$ .... □

73 Нарощена сума постійної *p*-термінової ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $S_{1/2} = S(1+i)$ .... □

б) $S_{1/2} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/2}$ .... □

в) $S_{1/2} = S(1+i)^{1/2p}$ .... □

г) $S_{1/2} = S(1+i)^{1/p}$ .... □

74 Нарощена сума постійної *p*–термінової ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням *m* раз на рік ($m \neq p$) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $S_{1/2} = S(1+i)^{1/2p}$ .... □

б) $S_{1/2} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/2p}$ .... □

в) $S_{1/2} = S(1+i)$ .... □

г) $S_{1/2} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$ .... □

75 Сучасна вартість постійної річної ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $A_{1/2} = A(1+i)^{1/2}$ .... □

б) $A_{1/2} = A(1+i)$ .... □

в) $A_{1/2} = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/2}$ .... □

г) $A_{1/2} = A(1-i)^{1/2}$ .... □

76 Сучасна вартість постійної річної ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням *m* раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $A_{1/2} = A(1+i)^{1/2}$ .... □

б) $A_{1/2} = A(1-i)^{1/2}$ .... □

в) $A_{1/2} = A(1+i)$ .... □

г) $A_{1/2} = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/2}$ .... □

77 Сучасна вартість постійної *p*-термінової ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням один раз на рік обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $A_{1/2} = A(1+i)^{1/2p}$ .... □

б) $A_{1/2} = A(1+i)^{1/2}$ .... □

в) $A_{1/2} = A(1+i)$ .... □

г) $A_{1/2} = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/2}$ .... □

78 Сучасна вартість постійної p-термінової ренти з платежами в середині періодів та нарахуванням m раз на рік ($m \neq p$) обчислюється за формулою ...

Варіанти відповіді:

а) $A_{1/2} = A(1+i)^{1/2}$ .... □

б) $A_{1/2} = A(1-i)^{1/2}$ .... □

в) $A_{1/2} = A(1+i)$ .... □

г) $A_{1/2} = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/2p}$ .... □

79 Відкладеною називається рента ...

Варіанти відповіді:

а) рента виплачується нескінченну кількість років .... □

б) виплата платежів якої здійснюється на початку періоду ренти .... □

в) виплата платежів якої здійснюється в кінці періоду ренти .... □

г) початок виплат у якої зсунутий вперед відносно деякого моменту часу .... □

80 Вічною називається рента ...

Варіанти відповіді:

а) яка виплачується нескінченну кількість років .... □

б) платежі якої виплачуються на початку періоду ренти .... □

в) платежі якої виплачуються в кінці періоду ренти .... □

г) початок виплат у якої зсунутий вперед відносно деякого моменту часу .... □

81 Платіж ренти, яка триває скінченну кількість років, відповідає вимозі ...

Варіанти відповіді:

а) $R = Ai$ .... □

б) $R > Ai$ .... □

в) $R < Ai$ .... □

г) $R \leq Ai$ .... □

Література

1. Вітлінський В. В., Наконечний С. І. Ризик в менеджменті. – К.: ТОВ „Борисфен-М”, 1996. – 336 с.
2. Долінський Л. Б. Фінансові обчислення та аналіз цінних паперів: Навч. посібник – К.: Майстер-клас, 2005. – 192 с.
3. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О. Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
4. Івченко І. Ю. Економічні ризики: Навч. посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 304 с.
5. Ілляшенко С. М. Економічний ризик: Навч. посібник. – 2-е вид., доп., перероб. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 220 с.
6. Клименко С. М., Дуброва О. С. Обґрунтування господарських рішень та оцінка ризиків: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2005. – 252 с.
7. Клебанова Т. С., Раевнева Е. В. Теория экономического риска: Учеб. пособие. – Харьков: Изд. ХГЭУ, 2001. – 132 с.
8. Кочович Е. Финансовая математика. Теория и практика финансово-банковских расчетов: Пер. с серб. – М.: Финансы и статистика, 1994. – 268 с.
9. Неміш В. М., Процик А. І., Березька К. М. Практикум з вищої математики: Навч. посібник. – Тернопіль: Економічна думка, 2007. – 302 с.
10. Малыхин В. И. Финансовая математика: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 237 с.
11. Овчаренко Е. К., Ильина О. П., Балыбердин Е. В. Финансово-экономические расчеты в EXCEL. – М.: Информ.-изд. дом «Филин», 1998. – 184 с.
12. Уланов В. А. Сборник задач по курсу финансовых вычислений. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 400 с.
13. Уотшем Т. Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах: Учеб. пособие для вузов / Пер. с англ. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999. – 527 с.
14. Христиановский В. В., Полшков Ю. Н., Щербина В. П. Экономический риск и методы его измерения. – Донецк: ДонГУ, 1999. – 250 с.
15. Четыркин Е. М. Финансовая математика: Учебник. – М.: Дело, 2002. – 400 с.
16. Фінансова математика / Укладачі Березька К.М., Руська Р.В. – Тернопіль, 2004. – 120 с.