УДК 517.944

УМОВИ ІСНУВАННЯ 2π-ПЕРІОДИЧНОГО ГЛАДКОГО РОЗВ'ЯЗКУ КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

[1]Хома Н. Г., к. ф.-м. н., доцент, [1]Хома–Могильська С. Г., к. ф.-м. н., доцент,
[2]Хохлова Л. Г., к. ф.-м. н., доцент

[1]*Тернопільський національний економічний університет,*
вул. Львівська, 11, м. Тернопіль, 46020, Україна

[2]*Тернопільський національний педагогічний університет ім. Володимира Гнатюка,*
вул. М. Кривоноса, 2, м. Тернопіль, 46027, Україна

khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

У роботі розглядається квазілінійне рівняння гіперболічного типу. Встановлено умови існування розв'язку крайової періодичної задачі для квазілінійного рівняння гіперболічного типу. Доведено теорему існування і єдиності 2π-періодичного гладкого розв'язку крайової задачі для квазілінійного гіперболічного рівняння другого порядку. Сформульовано теорему існування і єдиності 2π-періодичного гладкого розв'язку крайової задачі для нелінійного рівняння з малим параметром.

Ключові слова: квазілінійне рівняння, крайова задача, умови існування гладкого розв'язку, інтегральний оператор.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКОГО ГЛАДКОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

[1]Хома Н. Г., к. ф.-м. н., доцент, [1]Хома–Могильская С. Г., к. ф.-м. н., доцент,
[2]Хохлова Л. Г., к. ф.-м. н., доцент

[1]*Тернопольский национальный экономический университет,*
ул. Львовская, 11, г. Тернополь, 46020, Украина

[2]*Тернопольский национальный педагогический университет им. Владимира Гнатюка,*
ул. М. Кривоноса, 2, г. Тернополь, 46027, Украина

khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

В работе рассматривается квазилинейное уравнение гиперболического типа. Установлены условия существования решения краевой периодической задачи для квазилинейного уравнения гиперболического типа. Доказана теорема существования и единственности 2π-периодического гладкого решения краевой задачи для квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка. Сформулирована теорема существования и единственности 2π-периодического гладкого решения краевой задачи для нелинейного уравнения с малым параметром.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение, условия существования гладкого решения, граничная задача, интегральный оператор.

EXISTENCE CONDITIONS OF 2π-PERIODIC SMOOTH SOLUTION TO THE QUASI-LINEAR EQUATION OF HYPERBOLIC TYPE

[1]Khoma N. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
[1]Khoma-Mohylska S. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
[2]Khokhlova L. H., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

[1]*Ternopil national economic university,*
Lvivs'ka str., 11, Ternopil', 46020, Ukraine

[2]*Ternopil Volodymyr Hnatiuk national pedagogical university,*
M. Krivonosa str., 2, Ternopil', 46027, Ukraine

khoma.nadiya@gmail.com, sv_khoma@ukr.net, larysa_khokhlova@ukr.net

Today the theory of differential equations in partial derivatives is developing dynamically. The hyperbolic equations are significant. The requirements to research of hyperbolic equations are due to the needs of applied nature. The hyperbolic equations describe many physical operations such as the wave processes, oscillating characteristics of radio-electronic circuits, the movement of liquids and gases in certain circumstances.

In the plan of the research given equations are difficult object. Therefore of great interest is the development of new methods for constructing analytical and approximate solutions of quasi-linear differential equations in partial derivatives and study their properties.

The aim of the investigation is to establish the existence and uniqueness conditions of smooth 2π-periodic solution of boundary-value ($u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ \ t\in\mathbf{R}$) periodic ($u(x,\, t+2\pi)=u(x,t),\ \ 0\le x\le\pi,\ t\in\mathbf{R}$) problem for quasi-linear hyperbolic second order equation $u_{tt}-u_{xx}=F[u,u_t],\quad 0<x<\pi,\ t\in\mathbf{R}$. Given operator $F[u,u_t]$ generally speaking is nonlinear and maps smooth function $u(x,t)$ in scalar function $F[u,u_t](x,t)$.

At first we specify functional spaces which are necessary for problem. Father we examine boundary-value ($u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ \ t\in\mathbf{R}$) periodic ($u(x,\, t+2\pi)=u(x,t),\ \ 0\le x\le\pi,\ t\in\mathbf{R}$) problem for linear non-homogeneous hyperbolic second order equation $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$. It is known that in class $A_2^+=\{g:g(x,t)=-g(\pi-x,t)=-g(x,\pi-t)=g(x,-t)\}$ the corresponding homogeneous boundary-value periodic problem has unique trivial solution. The operator R_2^+ which maps class A_2^+ in A_2^+ makes it possible to construct classic solution for linear non-homogeneous boundary-value periodic problem.

Since problem for the investigation is similar with last problem, then we use operator R_2^+ for finding of its solution. Analogous with linear case we consider integral equation system. Uninterrupted solution $(u,u_t,u_x),\ u\in A_2^+$, of this system is smooth solution of basic boundary-value periodic problem. Principal result is in theorem, which asserts that quasi-linear problem has unique smooth solution in class A_2^+ at certain conditions, which right part of quasi-linear hyperbolic equation must satisfy. We argue this with the help of the contraction mapping principle. The conditions of theorem guarantee the observance of all requirements of indicated principle. Therefore the basic problem has unique smooth solution in $[0,\pi]\times\mathbf{R}$.

The method of construction of smooth solution of quasi-linear problem makes it possible to investigate the conditions for the existence of smooth solution of non-linear boundary-value periodic problem with small parameter.

Key words: quasi-linear equation, boundary-value problem, existence conditions of smooth solution, integral operator.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

На сьогодні теорія диференціальних рівнянь у частинних похідних найбільш динамічно розвивається. Суттєві відмінності притаманні різним типам диференціальних рівнянь (еліптичним, параболічним, гіперболічним). Окремий тип рівнянь володіє істотно відмінними рисами в питаннях, які стосуються побудови розв'язку визначеного класу задач: задачі Коші, мішаних, крайових задач. Необхідність дослідження саме гіперболічних рівнянь зумовлена потребами прикладного характеру. Багато фізичних явищ описуються цими рівняннями, а саме, різні хвильові процеси, як однорідних, так і неоднорідних середовищ, коливні характеристики радіоелектронних контурів, рух рідин та газів у заданих умовах.

Гіперболічні рівняння є складним об'єктом дослідження, а тому значний інтерес становить розробка нових методів побудови аналітичних і наближених розв'язків квазілінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними та вивчення їх властивостей.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Аналізуючи стан розвитку теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними, можна стверджувати, що комплекс питань, пов'язаних з проблемою дослідження розв'язків цих задач, ще недостатньо вивчений. Наразі в теорії гіперболічних рівнянь особливо неоднозначно стоїть питання існування періодичних розв'язків крайових задач для квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку, як з малим параметром у правих частинах, так і для загального випадку. Вказаній задачі присвячені роботи Г. Брезіса, Д. Корона, Л. Ніренберга, П. Рабиновича, І. Рудакова, О. Вейводи, М. Штедри [1-4].

У ряді робіт з диференціальних рівнянь гіперболічного типу, які опубліковані наприкінці XX – початку XXI ст., широка бібліографія яких наведена в роботах [5-6], вивчається одномірне гіперболічне рівняння, лінійна частина якого – оператор Даламбера, а нелінійність має вигляд $F[u](x,t,\varepsilon)=f(x,t,u,u_t,u_x,\varepsilon)$, де ε – малий параметр. При цьому для встановлення теорем існування розв'язку використовуються методи нелінійного функціонального аналізу, теорії неявних функцій, варіаційні методи, а також теорія монотонних операторів. У 80-х роках започатковано новий напрямок дослідження крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку. У роботах О. Вейводи, М. Штедри, Ю. Митропольського, Г. Хоми та його учнів (Я. Петрівського, Л. Хохлової, Н. Хоми, А. Ботюка та ін.) [4, 7-10], будуються інтегральні оператори і розв'язок шукається у спеціально визначених просторах неперервно диференційованих функцій для конкретних випадків періодичності.

МЕТА

У роботі розглянемо квазілінійне рівняння гіперболічного типу $u_{tt} - u_{xx} = f\left(x,t,u,u_t\right)$. Встановимо умови існування 2π-періодичного гладкого розв'язку вказаного рівняння.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ТА ОБҐРУНТУВАННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Скористаємося позначеннями:

C_π – простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\left[0,\pi\right]\times\mathbf{R}$.

$C_\pi^{k,l}$ – простір функцій $u \in C_\pi$, таких, що $D_t^k D_x^l\, u \in C_\pi$.

$G_{\pi t}$ – простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\left[0,\pi\right]\times\mathbf{R}$ разом із похідною по t.

Q_ω – простір функцій $g\left(x,t\right)$, які задовольняють на $\left[0,\pi\right]\times\mathbf{R}$ співвідношення $g\left(x,t+\omega\right)=g\left(x,t\right)$. Сюди будемо включати і ω-періодичні функції $\mu=\mu\left(t\right)$ однієї змінної.

$L\left(X,Y\right)$ – простір лінійних і обмежених відображень X в Y.

$A_2^+ = \left\{g : g\left(x,t\right) = -g\left(\pi-x,t\right) = -g\left(x,\pi-t\right) = g\left(x,-t\right)\right\}.$

Використовуючи результати, одержані в роботі [10], для лінійної неоднорідної крайової 2π-періодичної задачі, наприклад той факт, що у класі функцій A_2^+ відповідна лінійна однорідна крайова 2π-періодична задача має лише тривіальний розв'язок, ми можемо на підставі знайденого оператора R_2^+ дати відповідь на поставлену задачу. Оскільки оператор R_2^+ відображає вказаний клас функцій A_2^+ самого в себе і лінійна однорідна задача в цьому класі має єдиний тривіальний розв'язок, то найпростіше побудувати алгоритм знаходження розв'язку квазілінійної крайової періодичної задачі в цьому класі.

Розглянемо таку крайову періодичну задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} = g\left(x,t\right), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$u\left(0,t\right) = u\left(\pi,t\right) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

$$u\left(x,t+\omega\right) = u\left(x,t\right), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Теорема 1 [10, с. 918]. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap A_2^+$, *то функція* $u\left(x,t\right) = \left(R_2^+ g\right)\left(x,t\right)$, *яка визначена формулою*

$$u\left(x,t\right) = \left(R_2^+ g\right)\left(x,t\right) \equiv \left(Sg\right)\left(x,t\right) + \frac{\pi - 2x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g\left(\xi,\tau\right) d\tau, \tag{4}$$

є єдиною функцією із простору $C_\pi^{2,2} \cap A_2^+$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (1)-(3) при* $\omega = 2\pi$. *Крім цього,* $R_2^+ \in L\left(C_\pi \cap A_2^+, C_\pi^{1,1} \cap A_2^+\right)$, $R_2^+ \in L\left(G_{\pi t} \cap A_2^+, C_\pi^{2,2} \cap A_2^+\right)$, *при цьому*

$$\left\|\left(R_2^+ g\right)(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{2}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi};$$
$$\left\|\left(R_2^+ g\right)_t(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}; \tag{5}$$
$$\left\|\left(R_2^+ g\right)_x(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \pi\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi},$$

де $\left\|\varphi(x,t)\right\|_{C_\pi} = \sup\limits_{(x,t)\in[0,\pi]\times\mathbb{R}}\left|\varphi(x,t)\right|.$

Розглянемо тепер таку квазілінійну крайову періодичну задачу:

$$u_{tt}-u_{xx}=F\left[u,u_t\right],\quad 0<x<\pi,\quad t\in\mathbf{R}, \tag{6}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\in\mathbf{R}, \tag{7}$$

$$u(x,t+2\pi)=u(x,t),\quad 0\le x\le\pi,\quad t\in\mathbf{R}. \tag{8}$$

Заданий тут оператор $F\left[u,u_t\right]$, загалом, нелінійний, переводить гладку $\left(u\in C^1\left([0,\pi]\times\mathbf{R}\right)\right)$ функцію $u(x,t)$ у скалярну функцію $F\left[u,u_t\right](x,t)$, визначену на $[0,\pi]\times\mathbf{R}$.

За аналогією з лінійним випадком розглянемо таку систему інтегральних рівнянь:

$$u(x,t)=\left(R_2^+F\left[u,u_t\right]\right)(x,t)\equiv\left(SF\left[u,u_t\right]\right)(x,t)+\frac{\pi-2x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi}F\left[u,u_t\right](\xi,\tau)\,d\tau,$$
$$u_t(x,t)=\left(R_2^+F\left[u,u_t\right]\right)_t(x,t)\equiv\left(SF\left[u,u_t\right]\right)_t(x,t), \tag{9}$$
$$u_x(x,t)=\lim_{x\to\infty}\left(R_2^+F\left[u,u_t\right]\right)_x(x,t)\equiv\left(SF\left[u,u_t\right]\right)_x(x,t)-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi}F\left[u,u_t\right](\xi,\tau)\,d\tau,$$

де

$$\left(SF\left[u,u_t\right]\right)(x,t)=-\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}F\left[u,u_t\right](\xi,\tau)\,d\tau-\frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}F\left[u,u_t\right](\xi,\tau)\,d\tau,$$

$F\left[u,u_t\right](x,t)=f\left(x,t,u(x,t),u_t(x,t)\right)$ – значення оператора F, а $f\left(x,t,u,u_t\right)$ – вираз нелінійності правої частини рівняння (6).

Означення 1. *Неперервний розв'язок* $\left(u,u_t,u_x\right)$, $u\in A_2^+$ *системи інтегральних рівнянь (9) будемо називати гладким розв'язком крайової періодичної задачі (6)-(8).*

Використовуючи інтегральне зображення (4) розв'язку $u(x,t)=\left(R_2^+g\right)(x,t)$ лінійної неоднорідної крайової періодичної задачі (1)-(3) при $\omega=2\pi$, на підставі теореми 1, переконуємося у справедливості такого твердження:

Лема 1. *Нехай* $g\in C_\pi\cap A_2^+$. *Тоді лінійна крайова задача (1)-(3) при* $\omega=2\pi$ *має єдиний гладкий розв'язок* $u=R_2^+g$, *для якого справедливі оцінки (5).*

Теорема 2. *Нехай скалярна функція*

$$F\left[u,u_t\right](x,t)=f\left(x,t,u(x,t),u_t(x,t)\right)$$

задовольняє такі умови:

1) $$f\left(x,t,u,u_t\right)\in C_\pi\left(\left[0,\pi\right]\times \mathrm{R}\times \left\|u\right\|_{C_\pi}<\infty\times\left\|u_t\right\|_{C_\pi}<\infty\right); \tag{10}$$

2) $$0<\left\|F\left[0,0\right]\left(x,t\right)\right\|_{C_\pi}=\Gamma<\infty; \tag{11}$$

3) $$\left|F\left[\tilde{\tilde{u}},\tilde{\tilde{u}}_t\right]\left(x,t\right)-F\left[\tilde{u},\tilde{u}_t\right]\left(x,t\right)\right|\le N_1\left|\tilde{\tilde{u}}\left(x,t\right)-\tilde{u}\left(x,t\right)\right|+N_2\left|\tilde{\tilde{u}}_t\left(x,t\right)-\tilde{u}_t\left(x,t\right)\right|; \tag{12}$$

4) $$F\left[0,0\right]\left(x,t\right)\in A_2^+; \tag{13}$$

5) $$\textit{для всіх}\quad u\left(x,t\right)\in A_2^+\cap C_\pi^{1,1}\quad F\left[u,u_t\right]\left(x,t\right)\in A_2^+\cap C_\pi. \tag{14}$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{\pi^2}{2}N_1+\frac{\pi}{2}N_2<\frac{1}{2} \tag{15}$$

задача (6)-(8) має єдиний гладкий $\left(u\in C_\pi^{1,1}\cap A_2^+\right)$ *розв'язок.*

Доведення. Означимо нульове наближення за такою формулою:

$$u_0\left(x,t\right)=\left(R_2^+F\left[0,0\right]\right)\left(x,t\right)\equiv\left(SF\left[0,0\right]\right)\left(x,t\right)+\frac{\pi-2x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi}F\left[0,0\right]\left(\xi,\tau\right)d\tau. \tag{16}$$

Використовуючи оцінки (5), (11), (13) на підставі властивостей лінійного оператора (16), маємо, що $u_0\left(x,t\right)\in A_2^+\cap C_\pi^{1,1}\left(\left[0,\pi\right]\times\mathbf{R}\right)$ і

$$\left|u_0\left(x,t\right)\right|\le\frac{\Gamma\pi^2}{2}=K_1;\quad \frac{\pi}{2}\left|u_{0t}\left(x,t\right)\right|\le K_1.$$

Візьмемо число M таке, що $M>2K_1$.

У банаховому просторі функцій $D=\left\{u\in A_2^+\cap C_\pi^{1,1}\left(\left[0,\pi\right]\times\mathbf{R}\right):\left\|u\right\|_{C_\pi^{1,1}}\le M\right\}$ з нормою $\left\|u\right\|_{C_\pi^{1,1}}=\max\left\{\left\|u\right\|_{C_\pi},\pi\left\|u_t\right\|_{C_\pi}\right\}$ розглянемо оператор R_2^+, що визначається за допомогою правої частини першого інтегрального рівняння системи (9):

$$\left(R_2^+F\left[u,u_t\right]\right)\left(x,t\right)=\left(SF\left[u,u_t\right]\right)\left(x,t\right)+\frac{\pi-2x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi}F\left[u,u_t\right]\left(\xi,\tau\right)d\tau. \tag{17}$$

На підставі (10), (14) одержимо

$$\left(R_2^+F\left[u,u_t\right]\right)\left(x,t\right)\in A_2^+\cap C_\pi^{1,1}\left(\left[0,\pi\right]\times\mathbf{R}\right).$$

Тепер для довільного $u\left(x,t\right)\in D$ будемо мати:

$$\left(R_2^+F\left[u,u_t\right]\right)\left(x,t\right)=u_0\left(x,t\right)+\left(S\left(F\left[u,u_t\right]-F\left[0,0\right]\right)\right)\left(x,t\right)+$$

$$+\frac{\pi-2x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi}\left(F\left[u,u_t\right]-F\left[0,0\right]\right)\left(\xi,\tau\right)d\tau.$$

Звідси, враховуючи (9), (12), знаходимо:

$$\left|\left(R_2^+F\left[u,u_t\right]\right)(x,t)\right|\le\left|u_0(x,t)\right|+\frac{\pi^2}{2}\left(N_1\|u\|_{C_\pi}+N_2\|u_t\|_{C_\pi}\right),$$

$$\left|\left(R_2^+F\left[u,u_t\right]\right)_t(x,t)\right|\le\left|u_{0t}(x,t)\right|+\frac{\pi}{2}\left(N_1\|u\|_{C_\pi}+N_2\|u_t\|_{C_\pi}\right).$$

Якщо останню нерівність помножити на π, а $\left(N_2\dfrac{\pi^2}{2}\right)\|u_t\|_{C_\pi}$ переписати у вигляді $\left(N_2\dfrac{\pi}{2}\right)\left(\pi\|u_t\|_{C_\pi}\right)$, то ми одержуємо:

$$\left\|\left(R_2^+F\left[u,u_t\right]\right)(x,t)\right\|_{C_\pi^{1,1}}\le K_1+\left(\frac{\pi^2}{2}N_1+\frac{\pi}{2}N_2\right)\|u\|_{C_\pi^{1,1}}\le K_1+\left(\frac{\pi^2}{2}N_1+\frac{\pi}{2}N_2\right)M\,. \tag{18}$$

Якщо вибрати константи Ліпшиця N_1, N_2 такими, щоб виконувалася умова (15) теореми 2, то з нерівності (18), беручи до уваги, що $K_1<M/2$, знаходимо

$$\left\|\left(R_2^+F\left[u,u_t\right]\right)(x,t)\right\|_{C_\pi^{1,1}}\le K_1+M/2<M.$$

Отже, при вибраних N_1, N_2, що задовольняють нерівність (15), отримуємо, що коли $u(x,t)\in D,$ то $\left(R_2^+F\left[u,u_t\right]\right)(x,t)\in D.$

Уведемо для функцій $u(x,t)$ і $z(x,t)$ відстань $\rho(u,z)$, покладаючи

$$\rho(u,z)=\left\|u(x,t)-z(x,t)\right\|_{C_\pi^{1,1}}.$$

Тоді D буде метричним простором, до того ж, цей простір повний.

Тепер переконаємося, що при виконанні умови (15) відображення $R_2^+F\left[u,u_t\right]$ буде стисненим. Справді, якщо $u(x,t)\in D$ і $z(x,t)\in D,$ то з формули (17) і формули

$$\left(R_2^+F\left[z,z_t\right]\right)(x,t)=\left(SF\left[z,z_t\right]\right)(x,t)+\frac{\pi-2x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi}F\left[z,z_t\right](\xi,\tau)\,d\tau,$$

використовуючи умову Ліпшиця (12), отримаємо:

$$\left|\left(R_2^+F\left[u,u_t\right]\right)(x,t)-\left(R_2^+F\left[z,z_t\right]\right)(x,t)\right|\le\frac{\pi^2}{2}\left(N_1\|u-z\|_{C_\pi}+N_2\|u_t-z_t\|_{C_\pi}\right),$$

$$\pi\left|\left(R_2^+F\left[u,u_t\right]\right)_t(x,t)-\left(R_2^+F\left[z,z_t\right]\right)_t(x,t)\right|\le\frac{\pi^2}{2}\left(N_1\|u-z\|_{C_\pi}+N_2\|u_t-z_t\|_{C_\pi}\right).$$

Звідси маємо

$$\rho\left(R_2^+F\left[u,u_t\right],R_2^+F\left[z,z_t\right]\right)\le\left(\frac{\pi^2}{2}N_1+\frac{\pi}{2}N_2\right)\rho(u,z)\equiv\alpha\rho(u,z),\quad \text{де}\quad 0<\alpha<\frac{1}{2}.$$

Отже, виконуються всі умови принципу стиснених відображень. Це означає, що існує єдиний неперервний обмежений на $[0,\pi]\times\mathbf{R}$ розв’язок $\left(u(x,t),u_t(x,t)\right)$ системи інтегральних рівнянь (9), а отже, і гладкий розв’язок $\left(u\in A_2^+\cap C^{1,1}\left([0,\pi]\times\mathbf{R}\right)\right)$ крайової періодичної задачі вигляду (6)-(8), до того ж

 ISSN 2413-6549

$$\left\| u(x,t) \right\|_{C_\pi^{1,1}} \le M.$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Умову (15) можна послабити, якщо доведення теореми 2 проводити на підставі теореми 0.1 [11, с. 475]. Більш того, для нелінійної задачі з малим параметром вигляду

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F[u, u_t], \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{19}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{20}$$

$$u(x, t+2\pi) = u(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{21}$$

справедливе твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1)-5) теореми 2. Тоді при достатньо малому параметрі* ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$, *задача (19)-(21) має єдиний гладкий розв'язок* $\left(u(x,t) \in A_2^+ \cap C_\pi^{1,1}([0,\pi] \times \mathbf{R}) \right)$.

ВИСНОВКИ

На основі принципу стиснених відображень у роботі встановлено умови існування розв'язку квазілінійного рівняння гіперболічного типу. Доведено теорему існування і єдиності 2π-періодичного гладкого розв'язку вказаного рівняння. Для рівнянь з малим параметром проведено уточнення даних умов.

ЛІТЕРАТУРА

1. Brezis H. Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz / H. Brezis, J. M. Coron, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. – 1980. – Vol. **33**. – P. 667-689.

2. Rabinowitz P. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations / P. Rabinowitz // Comm. Pure Appl. Math. – 1967. – **20**, № 1. – P. 145-205.

3. Рудаков И. А. Нелинейные колебания струны / И. А. Рудаков // Вестник Моск. ун-та. – Сер. 1. Математика и механика. – 1984. – № 2. – С. 9-13.

4. Вейвода О. Существование классических периодических решений волнового уравнения. Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений / О. Вейвода, М. Штедры // Дифференциальные уравнения. – 1984. – **XX**, № 10. – С. 1733-1739.

5. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник. – К. : Наукова думка, 1984. – 264 с.

6. Пташник Б. Й. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук. – К. : Наукова думка, 2002. – 416 с.

7. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, М. И. Громяк. – К. : Наук. думка, 1991. – 232 с.

8. Хохлова Л. Г. Тривіальні розв'язки однорідної крайової періодичної задачі / Л. Г. Хохлова, Н. Г. Хома, Я. Б. Петрівський // Волинський матем. вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 179-182.

9. Самойленко А. М. Властивості 2π-періодичних розв'язків крайової задачі / А. М. Самойленко, Н. Г. Хома, С. Г. Хома-Могильська // Доповіді НАН України. – 2010. – № 10. – С. 27-32.

10. Митропольський Ю. О. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку / Ю. О. Митропольський, С. Г. Хома-Могильська // Укр. Мат. журн. – 2005. – **57**, № 7. – С. 912-921.

11. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М. : Мир, 1970. – 720 с.

REFERENCES

1. Brezis, H., Coron, J.M. and Nirenberg, L. (1980), “Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz”, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **33**, pp. 667-689.
2. Rabinowitz, P. (1967), “Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **20**, no. 1, pp. 145-205.
3. Rudakov, I.A. (1984), “Nonlinear vibration of a string”, *Vestnik Mosk. un-ta, Ser. 1. Matematika i mekhanika*, no. 2, pp. 9-13.
4. Veyvoda, O. and Shtedry, M. (1984), “The existence of periodic solutions of the classical wave equation. Contact number-theoretic nature of the period and the geometric properties of solutions”, *Differentsialnyye uravneniya*, **XX**, no. 10, pp. 1733-1739.
5. Ptashnik, B.I. (1984), *Nekorrektnyye granichnyye zadachi dlya differentsialnykh uravneniy z chastnymi proizvodnymi* [Ill-posed boundary value problems for differential equations with partial derivatives], Naukova dumka, Kiev.
6. Ptashnyk, B.Y., Ilkiv, V.S., Kmit, I.Ya. and Polishchuk, V.M. (2002), *Nelokalni kraiovi zadachi dlia rivnian iz chastynnymy pokhidnymy* [Nonlocal boundary value problems for partial differential equations], Naukova dumka, Kiyv.
7. Mitropolskiy, Yu.A., Khoma, G.P. and Gromyak, M.I. (1991), *Asimptoticheskiye metody issledovaniya kvazivolnovykh uravneniy giperbolicheskogo tipa* [Asymptotic methods of investigation of quasi-wave equations of hyperbolic type], Nauk. dumka, Kiev.
8. Khokhlova, L.H., Khoma, N.H. and Petrivskyi, Ya.B. (1995), “Trivial solutions homogeneous boundary periodic problem”, *Volynskyi matem. visnyk*, issue 2, pp. 179-182.
9. Samoilenko, A.M., Khoma, N.H. and Khoma-Mohylska, S.H. (2010), “Properties 2π-periodic solutions of the boundary problem”, *Dopovidi NAN Ukrainy*, no. 10, pp. 27-32.
10. Mytropolskyi, Yu.O. and Khoma-Mohylska, S.H. (2005), “Existence conditions of boundary periodic problem for linear inhomogeneous hyperbolic equations of second order. I”, *Ukr. Mat. zhurn.*, **57**, no. 7, pp. 912-921.
11. Khartman, F. (1970), *Obyknovennyye differentsyalnyye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Mir, Moskow.

УДК 539.374

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА ПЛОЩАДКЕ ТЕКУЧЕСТИ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., профессор, Шевченко А. Г., аспирант

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49000, Украина

artur_shev91@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

Исследуется вопрос о локализации пластической деформации в форме образования шейки для материалов с площадкой текучести в условиях плоского напряженного состояния. Установлено, что длина шейки может быть конечной и определяется в зависимости от действующего в теле максимального напряжения, а также, верхнего и нижнего пределов текучести, которые характерны для диаграмм одноосного нагружения материала с площадкой текучести при жестком нагружении.

Ключевые слова: *локализация пластической деформации, плоское напряженное состояние, шейкообразование, разрыв перемещений, дислокации, полосы Людерса-Чернова.*