

Міністерство освіти України
Тернопільський державний педагогічний інститут

На правах рукопису

Х О М А
НА Д І Я Г Р И Г О Р І В Н А

АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ ВІДШУКАННЯ
ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ГІПЕРБОЛІЧНИХ
РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

01.01.02 - диференціальні рівняння

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Г. Г. Г.

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук,
доц. Гром'як М.І.

Тернопіль-1996

§ 4. Аналітичне зображення розв'язку лінійної крайової 2π -періодичної задачі.....	87
§ 5. Періодичні розв'язки нелінійної крайової π -періодичної задачі.....	93
§ 6. Періодичні розв'язки нелінійної крайової 2π -періодичної задачі.....	100
ВИСНОВКИ.....	106
ЛІТЕРАТУРА.....	107

ВСТУП

Як відомо [40,67-70], в теорії звичайних диференціальних рівнянь розроблено ряд аналітичних методів відшукування періодичних розв'язків як лінійних, так і нелінійних диференціальних рівнянь.

Щодо рівнянь з частинними похідними, особливо рівнянь другого порядку гіперболічного типу, то можна стверджувати, що аналітичні методи відшукування періодичних розв'язків почали тільки недавно розроблятися. До 80-х років здебільшого доведення існування періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку проводилося за допомогою рядів Фур'є, причому період T і крайова умова підбиралися так, щоб можна було досягти бажаного результату [5,9,10,14,25,26,29,59-61,112-115].

Першою серед робіт в цьому напрямку була робота Н.А.Артем'єва [5], в якій в області $\{0 \leq x, t \leq 1\}$ розглядалась задача

$$z_{tt} - \alpha^2 z_{xx} = \Phi(x,t) + \varepsilon f(z),$$

$$z(0,t) = z(1,t) = 0, \quad (1)$$

$$z(x,0) = z(x,1), \quad z_t(x,0) = z_t(x,1).$$

Доведено, що коли $\alpha = (2m+1)/p$ (m, p - цілі числа, $p \neq 0$), то при відповідних обмеженнях на функції $\Phi(x,t)$ і $f(z)$ при достатньо малому ε існує єдиний класичний розв'язок задачі (1) в класі функцій, які зображаються за допомогою ряду

$$z(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t) \sin (2k+1)\pi x. \quad (2)$$

При доведенні цього факту використовується система функцій Гріна

$$\varphi_n(t,\tau) = \frac{\cos 2\pi n(|t-\tau| - 1/2)}{2a\pi n \sin (a\pi n/2)}, \quad (0 \leq t, \tau \leq 1, n \in \mathbb{N}).$$

Стверджується, що при ірраціональному a кожна окрема функція $\varphi_n(t,\tau)$ обмежена, але сукупність всіх $\varphi_n(t,\tau)$ необмежена (оскільки $\sin (a\pi n/2)$ може приймати як завгодно малі значення для нескінченної множини натуральних n , тобто ми тут зустрічаємося з так званою проблемою малих знаменників [5,61]).

Аналізуючи стан розвитку теорії нелінійних крайових задач для рівнянь з частинними похідними, можна стверджувати, що комплекс питань, пов'язаних з проблемою дослідження розв'язків цих задач, ще недостатньо вивчений. В ряді робіт з диференціальних рівнянь гіперболічного типу, які появилися останнім часом, вивчається одновимірне гіперболічне рівняння, лінійна частина якого - оператор Даламбера, а нелінійність має вигляд $F[u](x,t,\varepsilon) = f(x,t,u,u_t,u_x,\varepsilon)$, де ε - малий параметр. При цьому для встановлення теорем існування використовуються методи нелінійного функціонального аналізу, теорії неявних функцій, варіаційні методи, а також теорія монотонних операторів [71,93,98-101,103,121,122].

Широка бібліографія по періодичних розв'язках диференціальних і диференціально-операторних рівнянь наведена в роботах О.Вейводи [120] і Б.М.Пташника [61]. Серед робіт, які не включені в дану бібліографію, треба відмітити роботи сучасних математиків

[41-46,65], в яких розглядається лінійна крайова періодична задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R},$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R},$$

на конкретно визначених просторах функцій, тісно пов'язаних з множиною $\mathbb{I}$, періодом T і параметром a .

Зауважимо, що лише при конкретному виборі періоду $T=1$ і відповідних крайових умовах при $x=0$ і $x=1$ Артем'єву вдалося довести вище згаданий результат. Такий підхід при доведенні існування періодичних розв'язків рівнянь з частинними похідними використовувався багатьма математиками (В.Н.Карп (1960, 1963); А.П.Митряков (1948, 1949); Г.Т.Соколов (1953); М.В.Соловйов (1939)), причому результати одержувалися кожен раз в спеціально виділених просторах функцій.

В 1984 році чеськими математиками О.Вейвдою і М.Штедри в роботі [14] вдалося класифікувати нижче вказані простори функцій при умові, що останні належать C і G_t , де C - клас функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $\mathbb{R}^2$; G_t - клас функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $\mathbb{R}^2$ разом з похідною по t . Коротко зупинимось на основних результатах вказаної роботи. По-перше, виділено такі три періоди і три простори функцій для випадку $a=1$:

$$I. \quad w_1 = \frac{2\pi p}{q}, \quad p - \text{непарне}, \quad q - \text{парне}, \quad (p, q) = 1,$$

$$A_1 = \{ u: u(x,t) = u(x,t+w_1) = u(\pi-x,t) \}.$$

$$\text{II. } w_2 = \frac{2\pi p}{q}, \quad p - \text{парне, } q - \text{непарне, } (p,q) = 1,$$

$$A_2 = \{ u: u(x,t) = -u(x,t+w_2/2) \}.$$

$$\text{III. } w_3 = \frac{2\pi p}{q}, \quad p \text{ і } q - \text{непарні, } (p,q) = 1,$$

$$A_3 = \{ u: u(x,t) = u(\pi-x,t+w_3/2) = u(x,t+w_3) \}.$$

По-друге, доведено, що однорідна крайова періодична задача

$$u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0, \quad u^0(0,t) = u^0(\pi,t) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$u^0(x,t+w_l) = u^0(x,t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad l=1,2,3,$$

має лише тривіальний розв'язок $u^0(x,t) \equiv 0$, а, отже, відповідна неоднорідна задача (3) при $g(x,t) \in A_l$, $l = 1,2,3$, має єдиний розв'язок $u(x,t) \in A_l$, $l = 1,2,3$.

По-третє, проведена класифікація робіт за вказаними просторами A_l , $l = 1,2,3$, тобто названо праці, результати яких одержано в просторі A_1 , A_2 , і зауважено, що простір A_3 розглянуто у роботі [14] вперше.

По-четверте, розв'язки задачі (3) шукаються за допомогою простої модифікації формули Даламбера, яка дозволяє уникнути виразів, в яких потрібно сумувати нескінченні ряди. Перевагою розробленого аналітичного методу, який використовується в просторі

неперервно диференційованих функцій, крім надзвичайної простоти, є і відсутність умови на значення функцій, які стоять в правій частині рівняння $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_t, u_x, \varepsilon)$, в межах точках інтервалу $[0, \pi]$.

Потрібно зауважити, що в анотованій вище роботі О.Вейводи і М.Штедри [14] не вивчається проблема виникнення просторів A_i , $i = 1, 2, 3$, і не точно побудована формула розв'язку задачі (3) в просторі A_3 . Тому, природньо, постають питання: чи існують інші простори функцій, в яких може бути розв'язана задача (3)? Який вигляд має розв'язок в таких просторах?

Вирішенню цих питань, а також відшукуванню аналітичних розв'язків лінійної задачі (3) і вивченню на основі їх властивостей нелінійних крайових періодичних задач і присвячена дисертаційна робота.

У вступі зроблено короткий огляд літератури по темі дисертації, викладено основні результати роботи.

У першій главі досліджується існування та єдиність розв'язків крайової періодичної задачі

$$\begin{aligned} u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} &= f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(x, t+T) &= u(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Розглядаються такі простори функцій:

C - простір функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $\mathbb{R}^2$;

G_x - простір функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $\mathbb{R}^2$;

них на $\mathbb{R}^2$ разом з похідною по x ;

$Q_{2\pi}$ - простір 2π -періодичних по x на $\mathbb{R}^2$ функцій;

$Q_{2\pi}^-$ - простір непарних по x і 2π -періодичних по x на $\mathbb{R}^2$ функцій;

Q_T - простір T -періодичних по t на $\mathbb{R}^2$ функцій;

H_{ab} - простір функцій $f \in C$, які задовольняють на $\mathbb{R}^2$ умови

$$\left\{ \begin{array}{l} r(x, ay, b+\tau) = -r(x, ay, \tau), \\ \int_{-T}^0 d\tau \int_0^b r(x, a(\tau+w), b+\tau) dw = 0, \end{array} \right.$$

де b - дійсне число, відмінне від нуля, а

$$r(x, ay, \tau) = \frac{1}{4} \left\{ f(x+a(y-\tau), \tau) + f(x-a(y-\tau), \tau) \right\};$$

$C^{l,j}$ - простір функцій l раз диференційованих по x і j раз диференційованих по t (якщо $l = j$, то $C^{l,j}(\mathbb{R}^2) = C^l(\mathbb{R}^2)$);

Q^Φ - простір функцій двох змінних x і t , які розкладаються в рівномірно збіжні ряди виду

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin nx.$$

На основі видозміни розв'язку

$$(P_o f)(x, t, a) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{\tau}^t \left\{ f(x+a(y-\tau), \tau) + f(x-a(y-\tau), \tau) \right\} dy$$

мішаної задачі

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \tilde{f}(x, t), \quad 0 < x < \pi,$$

$$u(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{\psi}(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

де $f(x, t)$ - непарне 2π -періодичне продовження функції $\tilde{f}$ по змінній x з відрізка $[0, \pi]$ на всю числову вісь, в § 2 побудовано оператор

$$(Pf)(x, t, a, b) = \int_0^t d\tau \int_{\tau}^t r(x, ay, \tau) d\tau - \int_{\frac{b}{t}}^b d\tau \int_{\tau}^t r(x, ay, \tau) dy,$$

за допомогою якого встановлюються умови існування розв'язку крайової періодичної задачі (5).

Доведено таке твердження:

Теорема I.2.4. Для $f \in G_x \cap Q_T \cap Q_{2\pi}^- \cap H_{ab}$ функція $u = Pf$ є функцією з простору $C^2(\mathbb{R}^2)$, яка задовольняє умови (5).

В § 3 на основі першої залежності, що визначає простір H_{ab} , виведено функціональне рівняння

$$f(ab-z, b+\tau) = f(z, \tau), \quad \forall (z, \tau) \in \mathbb{R}^2, \quad (6)$$

при допомозі якого визначено такі три періоди і три простори функцій:

$$T_1 = \frac{(2p-1)\pi}{aq}, \quad (2p-1, aq) = 1, \quad b_1 = T_1 q,$$

$$B_a^1 = \{f(x, t): f(x, t) = -f(-x, t) = f(x, t+T_1) = f(\pi-x, t)\};$$

$$T_2 = \frac{2\pi(2p-1)}{aq}, \quad a \neq 2a, \quad q = 2s-1, \quad (2p-1, aq)=1, \quad b_2 = T_2 q/2,$$

$$B_a^2 = \{f(x,t): f(x,t) = f(\pi-x, t+T_2/2) = -f(-x,t) = f(x, t+T_2) = \\ = f(x+2\pi, t) \};$$

$$T_3 = \frac{4\pi k}{aq}, \quad q = 2s-1, \quad a \neq 2a, \quad (k, aq) = 1, \quad b_3 = T_3 q/2,$$

$$B_a^3 = \{f(x,t): f(x,t) = -f(-x,t) = f(x+2\pi, t) = -f(x, t+T_3/2) \}.$$

Детально вивчено такі властивості простору B_a^1 :

Лема I.3.1. Якщо $f \in B_a^1 \cap C$, то $f \in Q_{2\pi} \cap C$.

Лема I.3.2. Якщо для функції $f \in C \cap B_a^1$ справедливий розклад в ряд Фур'є

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin kx,$$

то $f_{2n}(t) = 0$ для всіх $n = 1, 2, 3, \dots$, тобто в цьому випадку ряд має вигляд

$$f(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} f_{2s-1}(t) \sin (2s-1)x.$$

Основна лема I.3.3. Якщо $f \in B_a^1 \cap C$, то $f \in H_{ab_1} \cap C$.

Теорема I.3.2. Для $f \in G_x \cap B_a^1$ функція

$$u(x,t) = (P_1^a f)(x,t,a,b_1) = \int_0^{b_1} Q(\tau) d\tau \int_{\tau}^t r(x, ay, \tau) dy,$$

де

$$Q(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq t, \\ -1, & t < \tau \leq b_1, \end{cases} \quad b_1 = T_1 q, \quad T_1 = \frac{(2p-1)\pi}{aq}, \quad (7)$$

є функцією з простору $C^2 \cap B_a^1$, яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (5), причому

$$\|u(x, t)\|_C \leq \frac{(T_1 q)^2}{4} \|f(x, t)\|_C,$$

$$\|u_t(x, t)\|_C \leq \frac{T_1 q}{2} \|f(x, t)\|_C,$$

$$\|u_x(x, t)\|_C \leq \frac{T_1 q}{2|a|} \|f(x, t)\|_C,$$

де $a \neq 0$ і

$$\|f(x, t)\|_C = \sup \{ |f(x, t)|; (x, t) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

В § 3 також показано, що функції $f \in B_a^1 \cap C$ задовольняють обидві умови простору H_{ab} , а функції $f \in B_a^s \cap C$, $s = 2, 3$, - лише першу. Однак існує клас функцій $f \in B_a^s \cap C$, $s = 2, 3$, які задовольняють другу умову простору H_{ab} .

Лема I.3.5. Якщо $f \in B_a^s$, $s=2,3$, розкладається в рівномірно збіжний ряд Фур'є виду

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin nx$$

для всіх $t \in [0, T_s]$, $s = 2, 3$, то $f \in H_{ab_s}$, $s=2,3$.

Теорема I.3.3. Для $f \in G_x \cap B_a^s \cap Q^\Phi$ функція

$$u = (P_s^\alpha f)(x, t, a, b_s) = \frac{1}{4} \int_0^{b_s} Q(\tau) d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi,$$

$$b_s = T_s q / 2, \quad s=2,3,$$

(8)

є функцією із простору C^2 , яка задовольняє крайову періодичну задачу (2.1)-(2.3).

Доведено, що тільки оператор P_1^a відображає простір функцій B_a^1 сам в себе (теорема I.3.2); побудовані оператори P_s^a , $s=2,3$, не відображають вказані простори B_a^s , $s=2,3$, самих в себе, але при додаткових умовах (теорема I.3.3) дають розв'язок крайової періодичної задачі (5), причому лема I.3.5 вказує достатню умову, при якій шукана функція $u(x,t) = (P_s^a f)(x,t) \in C^2 \cap B_a^s$, $s=2,3$.

В даному параграфі зауважено, що теорема I.3.2 є узагальненням відповідної теореми, яка була вперше сформульована в роботі Н.А.Артем'єва [5] в 1937 році при $T_1 = \pi$ і $a = \frac{2p-1}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, причому шукана функція зображалася у вигляді ряду Фур'є, вказаного в лемі I.3.2.

В § 4 доведено, що однорідна крайова періодична задача

$$u_{tt}^0 - a^2 u_{xx}^0 = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u^0(0,t) = u^0(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u^0(x,t+T) = u^0(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

в побудованих просторах функцій B_a^l , $l = 1,2,3$, для $a \in \mathbb{Q}$ має лише тривіальний розв'язок, на основі чого в § 5 сформульовано такі теореми існування і єдиності розв'язку неоднорідної задачі:

Теорема I.5.I. Для $f \in G_x \cap B_a^1$, $a \in \mathbb{Q}$, функція $u = P_1^a f$, визначена формулою (7), є єдиною функцією із простору $C^2 \cap B_a^1$, яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (5).

Теорема I.5.2. Для $f \in G_x \cap B_\alpha^l \cap Q^\Phi$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, функція $u = P_\alpha^l f$, $l = 2, 3$, визначена формулою (8), є єдиною функцією із простору C^2 , яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (5).

За допомогою побудованого в першій главі оператора P для розв'язності лінійної задачі (5) та оцінок розв'язку цієї задачі в другій главі одержано результати і для нелінійної крайової періодичної задачі.

Друга глава присвячена двом частковим випадкам, а саме, розглядаються рівняння виду

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = F[u, u_t]$$

і

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x],$$

де F – оператор, який кожному гладку функцію $u(x, t)$ переводить в скалярну неперервну функцію $F[u](x, t)$ в просторі B_α^1 .

На основі принципу стиснених відображень і його узагальнення (теорема 0.1 [79, с.475]) доведено такі дві теореми існування і єдиності розв'язку вище вказаних задач.

Теорема II.2.1. Нехай скалярна функція $F[u, u_t](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t))$ задовольняє такі умови:

$$1) f(x, t, u(x, t), u_t(x, t)) \in C(\mathbb{R}^2 \times \|u\|_C < \infty \times \|u_t\|_C < \infty);$$

$$2) 0 < \|f(0, 0)(x, t)\|_C = \Gamma < \infty;$$

$$3) |F[u'', u_t''](x, t) - F[u', u_t'](x, t)| \leq$$

$$\leq N_1 |u''(x, t) - u'(x, t)| + N_2 |u_t''(x, t) - u_t'(x, t)|;$$

4) $F[0,0](x,t) \in B_a^1$, $a \in \mathbb{Q}$;

5) для всіх $u(x,t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbb{R}^2)$

$$F[u, u_t](x,t) \in B_a^1 \cap C(\mathbb{R}^2).$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{(T_1 q)^2}{4} N_1 + \frac{T_1 q}{2} N_2 < \frac{1}{2}$$

задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F[u, u_t], \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad (9)$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u(x, t+T) = u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad (10)$$

має єдиний гладкий розв'язок $u(x,t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbb{R}^2)$.

Теорема II.3.2. Нехай скалярна функція $F[u, u_t, u_x](x,t) = f(x,t, u(x,t), u_t(x,t), u_x(x,t))$ задовольняє такі умови:

1) $f(x,t, u(x,t), u_t(x,t), u_x(x,t)) \in C(\mathbb{R}^2 \times \|u\|_{C^{<\infty}} \times \|u_t\|_{C^{<\infty}} \times \|u_x\|_{C^{<\infty}})$;

2) $0 < \|F[0,0,0](x,t)\|_C = \Gamma < \infty$;

3) $|F[u'', u_t'', u_x''](x,t) - F[u', u_t', u_x'](x,t)| \leq N_1 |u''(x,t) - u'(x,t)| +$
 $+ N_2 |u_t''(x,t) - u_t'(x,t)| + N_3 |u_x''(x,t) - u_x'(x,t)|$;

4) $F[0,0,0](x,t) \in B_a^1$, $a \in \mathbb{Q}$;

5) для всіх $u(x, t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbb{R}^2)$

$$F[u, u_t, u_x](x, t) \in B_a^1 \cap C(\mathbb{R}^2).$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{(T_1 q)^2}{4} N_1 + \frac{T_1 q}{2} (N_2 + N_3) < 1$$

задача

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x], \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbb{R}^2)$.

Одержані теореми включають в себе відомі вже результати для різних часткових випадків, а саме в § 4 наведено такі два випадки:

Теорема II.4.1. Нехай $F[u, u_t, u_x](x, t) = f(x, t) + \varepsilon f_1(u)$ і $f(x, t)$ і $f_1(u)$ задовольняють умови:

- 1) $f(x, t) \in C(\mathbb{R}^2) \cap B_a^1$, $a \in \mathbb{Q}$;
- 2) $0 < \|f(x, t)\|_C = \Gamma_2 < \infty$;
- 3) $f_1(0) = 0$;
- 4) $f_1(u) \in Lip(N_1, \mathbb{R})$, $N_1 = const$;
- 5) $f_1(-u) = -f_1(u)$.

Тоді при достатньо малому за модулем ε нелінійна задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) + \varepsilon f_1(u), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

при $a \in \mathbb{Q}$ має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in B_a^1$.

Теорема II.4.2. Нехай виконуються такі умови:

- 1) $f(x, t) \in C(\mathbb{R}^2) \cap B_a^1$, $a \in \mathbb{Q}$;
- 2) $0 < \|f(x, t)\|_C = \Gamma_3 < \infty$;
- 3) $f_2(0) = 0$;
- 4) $f_2(u_t) \in Lip(N_2, \mathbb{R})$, $N_2 = const$;
- 5) $f_2(-u_t) = -f_2(u_t)$.

Тоді при достатньо малому за модулем ε нелінійна задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) + \varepsilon f_2(u_t), \quad (13)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

при $a \in \mathbb{Q}$ має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in B_a^1$.

Розглянуто приклади рівнянь, які задовольняють умови теореми II.4.1 або умови теореми II.4.2.

Як підсумок зробленого, в **третій** главі на основі операторів Вейводи-Штедри досліджуються умови існування і єдиності розв'язку ряду крайових періодичних задач.

Розглядаються такі простори функцій:

C_π - простір функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$;

$G_{\pi t}$ - простір функцій двох змінних x і t , неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ разом з похідною по t ;

$Q_{\pi T}$ - простір функцій $g(x, t)$, які задовольняють на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ співвідношення $g(x, t+T) = g(x, t)$.

В §§ 2-4 визначено простори функцій, в яких сумісні крайові періодичні задачі виду

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x], \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t+T) = u(x, t). \quad (15)$$

Зокрема, в § 2 розглядаються оператори S_1 і S_2 , що визначаються формулами

$$(S_1 g)(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau, \quad (16)$$

$$(S_2 g)(x, t) = -\frac{1}{2} \int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau, \quad (17)$$

і доводяться їх властивості.

Лема III.2.1. Якщо $g(x, t) \in G_{\pi t} \cap Q_{\pi T}$, то кожна з функцій $u^1 = S_1 g$ і $u^2 = S_2 g$ є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt}^i - u_{xx}^i = g(x, t)$, $i = 1, 2$, причому $u^i(x, t) \in Q_{\pi T}$, $i = 1, 2$.

Також розглядається оператор

$$(Sg)(x, t) = \frac{1}{2} ((S_1 g)(x, t) + (S_2 g)(x, t)), \quad (18)$$

що володіє нижче вказаними властивостями.

Лема III.2.2. Якщо $g(x, t) \in G_{\pi t} \cap Q_{\pi T}$, то функція $u(x, t) = (Sg)(x, t)$ є розв'язком такої задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad u(x, t+T) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R},$$

причому

$$(Sg)(0, t) = -\frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau) d\tau, \quad (19)$$

$$(Sg)(\pi, t) = -\frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau. \quad (20)$$

Крім того, зауважено, що при виконанні умови

$$g(\pi-x, t) = g(x, t)$$

праві частини рівностей (19) і (20) рівні між собою.

Якщо тепер розглядати простір функцій

$$A_1^T = \{u: u(x, t) = u(\pi-x, t) = u(x, t+T)\},$$

визначених на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$, то на основі формул (16)-(18) і леми III.2.2 справедливі наступні твердження.

Лема III.2.3. Оператор S володіє такими властивостями:

$$S \in L(C_\pi \cap A_1^T, C_\pi^1 \cap A_1^T),$$

$$S \in L(G_{\pi t} \cap A_1^T, C_\pi^2 \cap A_1^T).$$

Лема III.2.4. Якщо $g(x, t) \in G_{\pi t} \cap A_1^T$, то функція $u(x, t) = (Sg)(x, t)$ є класичним розв'язком такої крайової задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad u(0, t) = u(\pi, t),$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

На основі одержаних в § 2 результатів у §§ 3 і 4 досліджуються лінійні крайові π і 2π -періодичні задачі.

Зокрема, в § 3 дано відповідь на питання про розв'язність лінійної крайової π -періодичної задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (21)$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Справедливе наступне твердження.

Теорема III.3.1. Якщо $g(x, t) \in G_{\pi t} \cap A_1^w = \{g: g(x, t) = g(\pi-x, t) = g(x, t+w), \quad w=\pi/q, \quad q \in \mathbb{N}\}$, то функція

$$u(x, t) = (R_1^w g)(x, t) = (Sg)(x, t) + \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau) d\tau$$

є єдиною функцією із простору $C_{\pi}^2 \cap A_1^w$, яка задовольняє умови (21), причому

$$\|u(x, t)\|_{C_{\pi}} \leq \frac{\pi^2}{2} \|g(x, t)\|_{C_{\pi}},$$

$$\|u_t(x, t)\|_{C_\pi} \leq \frac{\pi}{2} \|g(x, t)\|_{C_\pi},$$

$$\|u_x(x, t)\|_{C_\pi} \leq \frac{\pi}{2} \|g(x, t)\|_{C_\pi},$$

де $\|g(x, t)\|_{C_\pi} = \sup \{|g(x, t)|; 0 \leq x \leq \pi, t \in \mathbb{R}\}$.

В § 4 досліджується така 2π -періодична задача:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

$$u(x, t+2\pi) = u(x, t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}.$$

Показано, що в конкретно визначеному просторі $A_2^{2\pi} = \{u: u(x, t) = u(\pi-x, t+\pi) = u(x, t+2\pi)\}$ функція виду

$$\begin{aligned} u(x, t) = (R_2^{2\pi} g)(x, t) \equiv (Sg)(x, t) + \frac{\pi-x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau) d\tau + \\ + \frac{x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \end{aligned}$$

при $g \in G_{\pi t} \cap A_2^{2\pi}$ є класичним розв'язком задачі (22), причому справедливі наступні твердження.

Лема III.4.1. Оператор $R_2^{2\pi}$ володіє такими властивостями:

$$R_2^{2\pi} \in L(C_\pi \cap A_2^{2\pi}, C_\pi^1 \cap A_2^{2\pi}),$$

$$R_2^{2\pi} \in L(G_{\pi t} \cap A_2^{2\pi}, C_\pi^2 \cap A_2^{2\pi}).$$

Теорема III.4.1. Якщо $g(x,t) \in C_{\pi t} \cap A_2^{2\pi}$, то функція $u(x,t) = (R_2^{2\pi}g)(x,t)$ є єдиною функцією із простору $C_{\pi}^2 \cap A_2^{2\pi}$, яка задовольняє умови (22), причому

$$\|u(x,t)\|_{C_{\pi}} \leq \frac{3}{4} \pi^2 \|g(x,t)\|_{C_{\pi}};$$

$$\|u_t(x,t)\|_{C_{\pi}} \leq \frac{\pi}{2} \|g(x,t)\|_{C_{\pi}};$$

$$\|u_x(x,t)\|_{C_{\pi}} \leq \pi \|g(x,t)\|_{C_{\pi}}.$$

У п'ятому і шостому параграфах досліджується існування гладкого ($u \in C_{\pi}^1$) розв'язку нелінійних крайових π і 2π -періодичних задач. В § 5 розглядається задача

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x], \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

$$u(x, t+\pi/q) = u(x,t), \quad (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{N};$$

а в § 6 -

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t], \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (24)$$

$$u(x, t+2\pi) = u(x,t), \quad (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R},$$

де F - оператор, який кожному гладку функцію $u \in C_\pi^1 \cap A_t^{T_i}$ ($i = 1, T_1 = \pi; i = 2, T_2 = 2\pi$) переводить в скалярну неперервну функцію $F[u](x, t) \in C_\pi \cap A_t^{T_i}$.

На основі принципу стиснених відображень і його узагальнення (теорема 0.1 [79, с.475]) доведено теореми існування і єдиності розв'язку вище вказаних задач.

Теорема III.5.2. Нехай скалярна функція $F[u, u_t, u_x](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t))$ задовольняє такі умови:

$$1) f(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t)) \in C([0, \pi] \times \mathbb{R} \times \|u\|_{C_\pi} < \infty \times \|u_t\|_{C_\pi} < \infty \times \|u_x\|_{C_\pi} < \infty);$$

$$2) 0 < \|F[0, 0, 0](x, t)\|_{C_\pi} = \Gamma < \infty;$$

$$3) |F[u'', u_t'', u_x''](x, t) - F[u', u_t', u_x'](x, t)| \leq N_1 |u''(x, t) - u'(x, t)| + N_2 |u_t''(x, t) - u_t'(x, t)| + N_3 |u_x''(x, t) - u_x'(x, t)|;$$

$$4) F[0, 0, 0](x, t) \in A_1^\pi;$$

$$5) \text{ для всіх } u(x, t) \in A_1^\pi \cap C_\pi^1$$

$$F[u, u_t, u_x](x, t) \in A_1^\pi \cap C_\pi.$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{\pi^2}{2} N_1 + \frac{\pi}{2} (N_2 + N_3) < \frac{1}{2} \quad (25)$$

задача (23) має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in A_1^\pi \cap C_\pi^1$.

Зауважимо, що при послабленні умови (25) доведення можна провести на основі теореми О.І [79, с.475].

Теорема III.5.3. Нехай виконуються умови 1)-5) теореми III.5.2. Тоді при виконанні умови

$$\frac{\pi^2}{2} N_1 + \frac{\pi}{2} (N_2 + N_3) < 1$$

задача (23) має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in A_1^\pi \cap C^1([0, \pi] \times \mathbb{R})$.

Теорема III.6.1. Нехай $g \in C_\pi \cap A_2^{2\pi}$. Тоді лінійна задача (22) має єдиний гладкий розв'язок $u = R_2^{2\pi} g \in A_2^{2\pi}$, для якого справедливі оцінки теореми III.4.1.

Теорема III.6.2. Нехай скалярна функція $F[u, u_t](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t))$ задовольняє такі умови:

- 1) $f(x, t, u(x, t), u_t(x, t)) \in C([0, \pi] \times \mathbb{R} \times \|u\|_{C_\pi} < \infty \times \|u_t\|_{C_\pi} < \infty)$;
- 2) $0 < \|F[0, 0](x, t)\|_{C_\pi} = \Gamma < \infty$;
- 3) $|F[u'', u_t''](x, t) - F[u', u_t'](x, t)| \leq$

$$\leq N_1 |u''(x, t) - u'(x, t)| + N_2 |u_t''(x, t) - u_t'(x, t)|;$$
- 4) $F[0, 0](x, t) \in A_2^{2\pi}$;
- 5) для всіх $u(x, t) \in A_2^{2\pi} \cap C_\pi^1([0, \pi] \times \mathbb{R})$

$$F[u, u_t](x, t) \in A_2^{2\pi} \cap C_\pi.$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{3N_1\pi^2}{4} + \frac{N_2\pi}{2} < 1$$

задача (24) має єдиний гладкий розв'язок $u(x,t) \in A_2^{2\pi} \cap C_\pi^1$.

Справедливе і **зауваження III.6.1**: Замість вимоги, щоб скалярна функція $F(u, u_t)(x,t)$ була визначена для всіх $0 \leq x \leq \pi$ і всіх (t, u, u_t) , достатньо вважати, щоб F була визначена для $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbb{R}$, $\|u\|_{C_\pi} \leq L$, $\|u_t\|_{C_\pi} \leq 2L/(3\pi)$, де L задовольняє нерівність

$$\frac{3\pi^2\Gamma}{4} \leq L \left[1 - \left(\frac{3N_1\pi^2}{4} + \frac{N_2\pi}{2} \right) \right],$$

або просто

$$\frac{3\pi^2 M}{4} \leq L,$$

де $M = \|F(u, u_t)(x,t)\|_{C_\pi}$ для $\|u\|_{C_\pi} \leq L$, $\|u_t\|_{C_\pi} \leq 2L/(3\pi)$.

Г Л А В А І

Л І Н І Й Н А К Р А Й О В А П Е Р І О Д И Ч Н А З А Д А Ч А

У першій главі в просторі неперервних і обмежених на $\mathbb{R}^2$ разом з похідною по x функцій досліджено існування та єдиність розв'язку крайової періодичної задачі для лінійного неоднорідного рівняння коливання струни.

На основі спеціально побудованого оператора в другому параграфі встановлено функціональні умови залежності, накладені на праву частину рівняння, при яких існує розв'язок вказаної задачі і в третьому параграфі виведено функціональне рівняння для побудови конкретних просторів функцій. Функціональне рівняння дало змогу визначити три періоди і три простори функцій, причому вказані періоди повністю співпали з періодами Вейводи-Штедри.

Детально вивчено властивості першого простору функцій, в якому розв'язана лінійна крайова періодична задача, а також доведено теорему існування розв'язку.

У четвертому параграфі встановлено, що в побудованих просторах функцій відповідна однорідна крайова періодична задача має лише тривіальний розв'язок. Це дало можливість у п'ятому параграфі сформулювати теореми існування і єдиності розв'язку неоднорідної задачі.

Г Л А В А ІІ

Н Е Л І Н І Й Н А К Р А Й О В А П Е Р І О Д И Ч Н А З А Д А Ч А

Друга глава присвячена встановленню умов розв'язності не-лінійної крайової періодичної задачі для квазілінійного рівняння другого порядку гіперболічного типу з двома незалежними змінними x і t у просторах неперервних і обмежених разом з похідною по x функцій. Дослідження проводиться на основі побудованого в першій главі оператора для розв'язності відповідної лінійної крайової періодичної задачі та оцінок розв'язку цієї задачі. При цьому використовується принцип стиснених відображень. Розглянуто два випадки. У першому - оператор Даламбера містить параметр α і права частина рівняння - нелінійний оператор, який залежить від шуканої функції та її похідної по часу. В другому випадку $\alpha=1$ і права частина є будь-який нелінійний оператор.

Результати сформульовано і доведено у другому і третьому параграфах у вигляді достатніх умов розв'язності нелінійних крайових періодичних задач. У четвертому параграфі глави вони ілюструються прикладами.

Відмітимо, що перший результат охоплює одержані раніше часткові результати.

§ 1. Про одну властивість розв'язку нелінійної мішаної задачі

В даному параграфі розглянемо таку мішану задачу:

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = \tilde{F}[u, u_t, u_x, \varepsilon], \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{\psi}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.3)$$

і з'ясуємо питання існування і єдиності гладкого ($u \in C^1(\bar{P}_T)$, $\bar{P}_T = \{ 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T \}$) розв'язку цієї задачі в P_T . Заданий оператор $\tilde{F}$ переводить кожен гладку функцію $u(x, t)$, визначену на P_T , в скалярну неперервну функцію $\tilde{F}[u, u_t, u_x, \varepsilon](x, t)$, визначену на множині $P_T \times [0, 1]$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1.1 [46]. Нехай виконуються умови

$$1) \quad \tilde{\varphi}(x) \in \tilde{C}^1[0, l] = \{ \tilde{\varphi}(x) \in C^1 : \tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}(l) = 0 \},$$

$$\tilde{\psi}(x) \in \tilde{C}[0, l] = \{ \tilde{\psi}(x) \in C : \tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(l) = 0 \};$$

2) функція $\tilde{F}[u, u_t, u_x, \varepsilon](x, t)$ визначена для довільної функції $u(x, t) \in C^1(P_T)$, неперервна на множині $\bar{P}_T \times [0, 1]$ і задовольняє таку умову: при переході від функції $u \in C^1(P_T)$ до якої-небудь іншої функції $\bar{u} \in C^1(P_T)$ маємо

$$\int_0^t \max_x |\Delta \tilde{F}[u, u_t, u_x, \varepsilon](x, \tau)| d\tau \leq$$

$$\leq K \int_0^t \left\{ \max_{x, \theta \leq \tau} |\Delta u(x, \theta)| + \max_{x, \theta \leq \tau} |\Delta u_t(x, \theta)| + \max_{x, \theta \leq \tau} |\Delta u_x(x, \theta)| \right\} d\tau,$$

де $\Delta u = \bar{u} - u$ і т.п., а постійна K визначається оператором $\tilde{F}$ (зрозуміло, що і значеннями T і ε);

3) виконуються відповідні умови узгодження в точках $(0,0)$ і $(l,0)$ [46].

Тоді мішана задача (1.1)-(1.3) має один і тільки один розв'язок в прямокутнику Π_T .

Зауваження 1.1. Теорема 1.1 доводиться на основі відповідної теореми для квазілінійної мішаної задачі для гіперболічних систем першого порядку [1,2,27,28,36-39,46], причому область Π_T розбивається на "малі" області, в яких мішана задача еквівалентна системі інтегральних рівнянь Вольтерра. Слід сказати, що в кожній області одержується своя система інтегральних рівнянь. Показано, що якщо оператор $\tilde{F}$ володіє неперервним $2l$ - періодичним продовженням, яке буде означено нижче, то розв'язок мішаної задачі (1.1)-(1.3) задовольняє одну і ту ж систему інтегральних рівнянь [46].

Нехай $\tilde{A}$ і A^O - такі простори функцій:

$$\tilde{A} = \{ u(x, t) \in C^1(\bar{\Pi}_T) \}, \quad \bar{\Pi}_T = [0, l; 0, T];$$

$$A^O = \{ u(x, t) \in C^1(Q_\infty) : u(x+2l, t) = u(x, t) = -u(-x, t) \},$$

$$Q_\infty = \mathbb{R} \times [0, T].$$

Означення 1.1. Якщо оператор $F[u, u_t, u_x, \varepsilon](x, t)$, визначений на множині $\tilde{A}$, визначений також на множині A^O і його значення $F[u, u_t, u_x, \varepsilon](x, t)$ на цій множині задовольняють умови:

$$1) F[u, u_t, u_x, \varepsilon](x+2l, t) = F[u, u_t, u_x, \varepsilon](x, t);$$

$$2) F[u, u_t, u_x, \varepsilon](-x, t) = - F[u, u_t, u_x, \varepsilon](x, t),$$

то будемо говорити, що оператор $\tilde{F}$ допускає непарне $2l$ - періодичне продовження з множини $\tilde{A}$ на множину A^O по змінній x для всіх фіксованих $t \in [0, T]$ і його значення, як сказано вище, будемо позначати $F[u, u_t, u_x, \varepsilon](x, t)$.

Теорема 1.2 [46]. Нехай виконуються умови 1), 2) теореми 1.1 і умова: 3) оператор $\tilde{F}$ допускає непарне $2l$ -періодичне продовження з множини $\tilde{A} = \{u(x, t) \in C^1(\Pi_T)\}$ на множину $A^O = \{u(x, t) \in C^1(Q_\infty): u(x, t) = u(x+2l, t) = -u(-x, t)\}$ по змінній x для всіх фіксованих $t \in [0, T]$.

Тоді мішана задача (1.1)-(1.3) має один і тільки один гладкий розв'язок $u \in A^O$, причому даний розв'язок задовольняє одну і ту ж систему інтегральних рівнянь на всій множині Π_T :

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t \{\psi(x+a\theta) + \psi(x-a\theta)\} d\theta + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t d\theta \int_0^\theta \{F[u, u_t, u_x, \varepsilon](x-a(\tau-\theta), \tau) + F[u, u_t, u_x, \varepsilon](x+a(\tau-\theta), \tau)\} d\tau =$$

$$\begin{aligned} &\equiv \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t \{\psi(x+a\theta) + \psi(x-a\theta)\} d\theta + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_\tau^t \{F[u, u_t, u_x, \varepsilon](x-a(\theta-\tau), \tau) + F[u, u_t, u_x, \varepsilon](x+a(\theta-\tau), \tau)\} d\theta, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$u_t(x, t) = (u)_t, \quad u_x(x, t) = (u)_x,$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ - непарне $2l$ - періодичне продовження початкових функцій $\tilde{\varphi}(x)$ і $\tilde{\psi}(x)$ з відрізка $[0, l]$ на всю числову пряму $\mathbb{R}$.

Тепер, виконуючи відповідні заміни змінних, рівність (1.4) можна записати в зручному для диференціювання вигляді

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \\ & + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F[u, u_t, u_x, \varepsilon](\eta, \tau) d\eta, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$u_t(x, t) = (u)_t, \quad u_x(x, t) = (u)_x.$$

Отже, система інтегральних рівнянь (II.1.4) є узагальненням відповідних рівностей (I.1.14), одержаних для лінійної неоднорідної мішаної задачі (I.1.1), (I.1.2), (I.1.14), коли оператор $F[u, u_t, u_x, \varepsilon]$ квазілінійного рівняння (II.1.1) допускає непарне $2l$ -періодичне продовження по змінній x . З іншого боку, одержана система інтегральних рівнянь (1.4) ((1.5)) дозволить довести сумісність нелінійних крайових періодичних задач, які будуть вивчатися в наступних параграфах.

§ 2. Періодичні розв'язки нелінійної крайової періодичної задачі

Розглянемо спочатку таку крайову періодичну задачу:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F[u, u_t], \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.3)$$

Заданий тут оператор $F[u, u_t]$, взагалі кажучи, нелінійний, переводить гладку ($u \in C^1(\mathbb{R}^2)$) функцію $u(x, t)$ в скалярну неперервну функцію $F[u, u_t](x, t)$, визначену на $\mathbb{R}^2$.

Поставимо завдання встановити умови існування гладкого ($u \in C^1(\mathbb{R}^2)$) розв'язку даної задачі. Використовуючи результати, одержані в главі I для відповідної лінійної неоднорідної крайової періодичної задачі, наприклад, той факт, що в побудованих просторах B_α^s , $s=1, 2, 3$, відповідна лінійна однорідна крайова періодична задача (I.4.1)–(I.4.3) має лише тривіальний розв'язок ($u^0 \equiv 0$), ми зможемо на основі знайдених операторів P_α^s , $s=1, 2, 3$, дати відповідь на поставлену задачу. Оскільки лише оператор P_1^1 відображає простір B_α^1 сам в себе, то найпростіше побудувати алгоритм відшукування розв'язку задачі (2.1)–(2.3) в цьому просторі (див. зауваження I.3.3).

По аналогії з лінійним випадком розглянемо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \frac{1}{4a} \int_0^{b_1} Q(\tau) d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(u, u_t)(\xi, \tau) d\xi, \\
 u_t(x,t) &= \frac{1}{4} \int_0^{b_1} Q(\tau) \sum_{k=0}^1 F[u, u_t](x+(-1)^k a(t-\tau), \tau) d\tau, \quad (2.4) \\
 u_x(x,t) &= \frac{1}{4a} \int_0^{b_1} Q(\tau) (-1)^k \sum_{k=0}^1 F[u, u_t](x+(-1)^k a(t-\tau), \tau) d\tau,
 \end{aligned}$$

де

$$Q(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq t, \\ -1, & t < \tau \leq b_1, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$b_1 = T_1 a, \quad T_1 a = (2p-1)\pi, \quad a \in \mathbb{Q}, \quad (2p-1, a) = 1. \quad (2.6)$$

Означення 2.1. Неперервний розв'язок $(u, u_t, u_x) \in C(\mathbb{R}^2)$, $u \in B_a^1$, системи інтегральних рівнянь (2.4) будемо називати гладким розв'язком крайової періодичної задачі (2.1)-(2.3).

Використовуючи інтегральне зображення (I.3.15) розв'язку $u(x,t) = (P_1^a f)(x,t,a,b_1)$ лінійної задачі (I.2.1)-(I.2.3), на основі теореми I.5.1 переконуємося в справедливості наступного твердження.

Лема 2.1. Нехай $f \in C \cap B_a^1$, $a \in \mathbb{Q}$. Тоді лінійна задача (I.2.1)-(I.2.3) має єдиний гладкий розв'язок $u = P_1^a f$, для якого справедливі оцінки (I.3.17).

Теорема 2.1. Нехай скалярна функція $F[u, u_t](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t))$ задовольняє такі умови:

$$1) f(x, t, u(x, t), u_t(x, t)) \in C(\mathbb{R}^2 \times \|u\|_C < \infty \times \|u_t\|_C < \infty); \quad (2.7)$$

$$2) 0 < \|F[0, 0](x, t)\|_C = \Gamma < \infty; \quad (2.8)$$

$$3) |F[u'', u_t''](x, t) - F[u', u_t'](x, t)| \leq N_1 |u''(x, t) - u'(x, t)| + N_2 |u_t''(x, t) - u_t'(x, t)|; \quad (2.9)$$

$$4) F[0, 0](x, t) \in B_a^1, \quad a \in \mathbb{Q}; \quad (2.10)$$

$$5) \text{ для всіх } u(x, t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbb{R}^2)$$

$$F[u, u_t](x, t) \in B_a^1 \cap C(\mathbb{R}^2). \quad (2.11)$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{(T_1 q)^2}{4} N_1 + \frac{T_1 q}{2} N_2 < \frac{1}{2} \quad (2.12)$$

задача (2.1)-(2.3) має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbb{R}^2)$.

Доведення. Визначимо нульове наближення $u^0(x, t)$ за такою формулою

$$u^0(x, t) = \frac{1}{4a} \int_0^{b_1} Q(\tau) d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F[0, 0](\xi, \tau) d\xi. \quad (2.13)$$

На основі оцінок (I.3.17), (2.8), (2.10) і властивостей лінійного оператора (2.13) маємо, що $u^0(x, t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbb{R}^2)$ і

$$|u^0(x, t)| \leq \frac{\Gamma(T_1 q)^2}{4} = \Gamma_1; \quad \frac{T_1 q}{2} |u_t^0(x, t)| \leq \Gamma_1. \quad (2.14)$$

Виберемо число M таке, що

$$M > 2 \Gamma_1. \quad (2.15)$$

В банаховому просторі функцій

$$D = \{ u \in B_a^1 \cap C^1(\mathbb{R}^2) : \|u\|_{C^1} \leq M \} \quad (2.16)$$

з нормою

$$\|u\|_{C^1} = \max \left\{ \|u\|_C, \frac{T_1 q}{2} \|u_t\|_C \right\} \quad (2.17)$$

розглянемо оператор P_1^a , що визначається за допомогою правої частини першого інтегрального рівняння системи (2.4):

$$(P_1^a F[u, u_t])(x, t) = \frac{1}{4a} \int_0^{b_1} Q(\tau) d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F[u, u_t](\xi, \tau) d\xi. \quad (2.18)$$

На підставі (2.7), (2.11) одержуємо, що

$$(P_1^a F[u, u_t])(x, t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbb{R}^2). \quad (2.19)$$

Далі для $u(x, t) \in D$ будемо мати

$$\begin{aligned} (P_1^a F[u, u_t])(x, t) &= u^0(x, t) + \\ &+ \frac{1}{4a} \int_0^{b_1} Q(\tau) d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \left[F[u, u_t](\xi, \tau) - F[0, 0](\xi, \tau) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи (2.4), (2.9), знаходимо

$$|(P_1^Q F[u, u_t])(x, t)| \leq |u^0(x, t)| + \frac{(T_1 q)^2}{4} [N_1 \|u\|_C + N_2 \|u_t\|_C],$$

$$|(P_1^Q F[u, u_t])_t(x, t)| \leq |u_t^0(x, t)| + \frac{T_1 q}{2} [N_1 \|u\|_C + N_2 \|u_t\|_C].$$

Якщо останню нерівність помножити на $(T_1 q)/2$, а $(N_2 (T_1 q)^2/4) \|u_t\|_C$ переписати у вигляді $(N_2 T_1 q/2)(T_1 q/2) \|u_t\|_C$, то ми одержуємо

$$\begin{aligned} \|(P_1^Q F[u, u_t])(x, t)\|_{C^1} &\leq \Gamma_1 + \left[\frac{(T_1 q)^2}{4} N_1 + \frac{T_1 q}{2} N_2 \right] \|u\|_{C^1} \leq \\ &\leq \Gamma_1 + \left[\frac{(T_1 q)^2}{4} N_1 + \frac{T_1 q}{2} N_2 \right] M. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Якщо вибрати константи Ліпшица N_1 і N_2 такими, щоб виконувалася умова (2.12) теореми 2.1, то з нерівності (2.20), беручи до уваги, що $\Gamma_1 < M/2$, одержуємо

$$\|(P_1^Q F[u, u_t])(x, t)\|_{C^1} \leq \Gamma_1 + M/2 < M.$$

Отже, при вибраних N_1 і N_2 , що задовольняють нерівність (2.12), отримуємо, що коли $u(x, t) \in D$, то $(P_1^Q F[u, u_t])(x, t) \in D$.

Для функцій $u(x, t)$ і $z(x, t)$ введемо відстань $\rho(u, z)$, покладаючи

$$\rho(u, z) = \|u(x, t) - z(x, t)\|_{C^1}.$$

Тоді D буде метричним простором, до того ж, цей простір повний.

Переконаємося тепер, що при виконанні умови (2.12) ві-

дображення $P_1^Q F[u, u_t]$ буде стисненням. Справді, якщо $u(x, t) \in D$ і $z(x, t) \in D$, то з формули (2.18) і формули

$$(P_1^Q F[z, z_t])(x, t) = \frac{1}{4a} \int_0^{b_1} Q(\tau) d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F[z, z_t](\xi, \tau) d\xi,$$

використовуючи умову Ліпшица (2.9), отримуємо

$$|(P_1^Q F[u, u_t])(x, t) - (P_1^Q F[z, z_t])(x, t)| \leq$$

$$\leq \frac{(T_1 q)^2}{4} [N_1 \|u - z\|_C + N_2 \|u_t - z_t\|_C],$$

$$|(P_1^Q F[u, u_t])_t(x, t) - (P_1^Q F[z, z_t])_t(x, t)| \leq$$

$$\leq \frac{T_1 q}{2} [N_1 \|u - z\|_C + N_2 \|u_t - z_t\|_C].$$

Звідси маємо

$$\rho(P_1^Q F[u, u_t], P_1^Q F[z, z_t]) \leq \left[\frac{(T_1 q)^2}{4} N_1 + \frac{T_1 q}{2} N_2 \right] \rho(u, z) \equiv$$

$$\equiv \alpha \rho(u, z),$$

де $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Таким чином, виконуються всі умови принципу стиснених відображень [35]. Отже, існує єдиний неперервний обмежений на $\mathbb{R}^2$ розв'язок $(u(x, t), u_t(x, t))$ системи інтегральних рівнянь (2.4), а, отже, і гладкий розв'язок $u(x, t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbb{R}^2)$ крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3), причому

$$\|u(x,t)\|_{C^1} < M.$$

Теорема 2.1 доведена.

Зауваження 2.1. Умову (2.12) можна послабити, якщо доведення теореми 2.1 проводити на основі теореми 3.1 (теореми 0.1) [79, с.475). Справедливе твердження.

Теорема 2.2. Нехай виконуються умови 1)-5) теореми 2.1. Тоді при виконанні умови

$$\frac{(T_1 q)^2}{4} N_1 + \frac{T_1 q}{2} N_2 < 1$$

задача (2.1)-(2.3) має єдиний гладкий розв'язок $u(x,t) \in B_Q^1 \cap C^1(\mathbb{R}^2)$.

Зауваження 2.2. Замість вимоги, щоб скалярна функція $F[u, u_t](x,t)$ була визначена для всіх $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ і всіх (u, u_t) , достатньо, щоб F була визначена для $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|u| \leq M$, $|u_t| \leq (2M)/(T_1 q)$, де M задовольняє умову

$$\frac{\Gamma(T_1 q)^2}{4} \leq M \left[1 - \left[\frac{N_1 (T_1 q)^2}{4} + \frac{N_2 T_1 q}{2} \right] \right],$$

$$\Gamma = \|F[0,0](x,t)\|_C,$$

або

$$\frac{M_1 (T_1 q)^2}{4} \leq M, \quad (2.21)$$

де $M_1 = \|F[u, u_t](x,t)\|_C$ для $|u| \leq M$, $|u_t| \leq 2M/(T_1 q)$.

Зауваження 2.3. Розв'язок $u(x, t)$ нелінійної задачі (2.1)–(2.3) в просторі B_a^1 можна знайти методом послідовних наближень, а саме

$$u^0(x, t) = \frac{1}{4a} \int_0^{T_1 q} Q(\tau) d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F[0, 0](\xi, \tau) d\xi,$$

$$u_t^0(x, t) = \frac{1}{4} \int_0^{T_1 q} Q(\tau) \sum_{k=0}^1 F[0, 0](x+(-1)^k a(t-\tau), \tau) d\tau,$$

$$u^{n+1}(x, t) = \frac{1}{4a} \int_0^{T_1 q} Q(\tau) d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F[u^n, u_t^n](\xi, \tau) d\xi,$$

$$u_t^{n+1}(x, t) = \frac{1}{4} \int_0^{T_1 q} Q(\tau) \sum_{k=0}^1 F[u^n, u_t^n](x+(-1)^k a(t-\tau), \tau) d\tau,$$

$$n=0, 1, 2, \dots$$

§ 3. Узагальнення результатів

Замітимо, що метод доведення теорем 2.1 і 2.2 переноситься на більш широкий клас квазілінійних рівнянь другого порядку, причому в залежності від застосування відповідних теорем функціонального аналізу [24,35] результати покращуються, тобто умови існування і єдиності розв'язку крайових періодичних задач послаблюються.

Наприклад, застосовуючи теорему 0.1 [79, с.475], ми в цьому параграфі доведемо теорему існування і єдиності при $a=1$ для такої

крайової періодичної задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x], \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.3)$$

у просторі B_α^1 .

Сформулюємо спочатку відповідну теорему функціонального аналізу.

Теорема 3.1 [79, с.475]. Нехай D — банаховий простір елементів $x, y, \dots$, з нормою $|x|, |y|, \dots$. Позначимо через T_θ відображення кулі $|x| < \rho$ простору D в простір D , яке задовольняє умові $|T_\theta[x] - T_\theta[y]| \leq \theta |x-y|$ з деякою константою $\theta, 0 < \theta < 1$. Нехай $m = |T_\theta[0]|$ і $m \leq \rho(1-\theta)$.

Тоді відображення T_θ має єдину нерухому точку x_θ , тобто таку точку x_θ , де $T[x_\theta] = x_\theta$. Більше того, ця точка x_θ може бути знайдена як границя послідовності наближень $x_1 = T_\theta[x_0], x_2 = T_\theta[x_1], x_3 = T_\theta[x_2], \dots$.

Зауваження 3.1. Якщо T_θ відображає кулю $|x| < \rho$ в себе, то умову $m \leq \rho(1-\theta)$ можна відкинути.

Перейдемо до формулювання і доведення основного результату.

Теорема 3.2. Нехай скалярна функція $F[u, u_t, u_x](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t))$ задовольняє такі умови:

$$1) \quad f(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t)) \in C(\mathbb{R}^2 \times \|u\|_C < \infty \times \|u_t\|_C < \infty \times$$

$$* \|u_x\|_C < \infty); \quad (3.4)$$

$$2) 0 < \|F[0,0,0](x,t)\|_C = \Gamma < \infty; \quad (3.5)$$

$$3) |F[u'', u_t'', u_x''](x,t) - F[u', u_t', u_x'](x,t)| \leq N_1 |u''(x,t) - u'(x,t)| + \\ + N_2 |u_t''(x,t) - u_t'(x,t)| + N_3 |u_x''(x,t) - u_x'(x,t)|; \quad (3.6)$$

$$4) F[0,0,0](x,t) \in B_a^1, \quad a \in \mathbb{Q}; \quad (3.7)$$

$$5) \text{ для всіх } u(x,t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbb{R}^2)$$

$$F[u, u_t, u_x](x,t) \in B_a^1 \cap C(\mathbb{R}^2). \quad (3.8)$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{(T_1 q)^2}{4} N_1 + \frac{T_1 q}{2} (N_2 + N_3) < 1 \quad (3.9)$$

задача (3.1)-(3.3) має єдиний гладкий розв'язок $u(x,t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbb{R}^2)$.

Зауваження 3.2. Замість вимоги, щоб скалярна функція $F[u, u_t, u_x](x,t)$ була визначена для всіх значень (x,t,u,u_t,u_x) , достатньо, щоб F була визначена для $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ і $\|u\|_C \leq L$, $\|u_t\|_C \leq 2L/(T_1 q)$, $\|u_x\|_C \leq 2L/(T_1 q)$, де L задовольняє нерівність

$$\frac{(T_1 q)^2 \Gamma}{4} \leq L \left[1 - \left[\frac{(T_1 q)^2 N_1}{4} + \frac{T_1 q}{2} [N_2 + N_3] \right] \right], \quad (3.10)$$

$$\Gamma = \|F[0,0,0](x,t)\|_C,$$

або просто

$$\frac{(T_1 q)^2}{4} M \leq L, \quad (3.11)$$

де $M = \|F[u, u_t, u_x](x, t)\|_C$ для $\|u\|_C \leq L$, $\|u_t\|_C \leq 2L/(T_1 q)$, $\|u_x\|_C \leq 2L/(T_1 q)$.

Доведення теореми 3.2. Нехай D - банаховий простір функцій $f(x, t) \in B_a^1 \cap G_x$ ($a=1$). Нехай $u(x, t)$ є єдиний гладкий розв'язок (лема 2.1) рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = F[f, f_t, f_x], \quad (3.13)$$

який задовольняє умови (3.2), (3.3). Визначимо в кулі $\|f\|_{C^1} \leq L$ простору D оператор T_o , поклавши $(T_o[f])(x, t) = u(x, t)$.

Якщо $u^o(x, t) = (T_o[O])(x, t)$, то, враховуючи умову (3.5), із оцінок (І.3.17) при $f(x, t) = F[O, O, O](x, t)$ для відповідної лінійної крайової періодичної задачі одержуємо

$$\|u^o(x, t)\|_C \leq \frac{(T_1 q)^2}{4} \Gamma, \quad \frac{T_1 q}{2} \|u_t^o(x, t)\|_C \leq \frac{(T_1 q)^2}{4} \Gamma,$$

$$\frac{T_1 q}{2} \|u_x^o(x, t)\|_C \leq \frac{(T_1 q)^2}{4} \Gamma. \quad (3.14)$$

Таким чином, норма функції $u^o(x, t) = (T_o[O])(x, t) \in D$ задовольняє нерівність

$$\|(T_o[O])(x, t)\|_{C^1} \leq \frac{(T_1 q)^2}{4} \Gamma. \quad (3.15)$$

Тепер, якщо $u_1 = T_o[f_1]$, $u_2 = T_o[f_2]$, то згідно (І.3.17) і
(3.6)

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \frac{(T_1 q)^2}{4} \left[N_1 \|f_1 - f_2\|_C + N_2 \|f_{1t} - f_{2t}\|_C + \right. \\ \left. + N_3 \|f_{1x} - f_{2x}\|_C \right],$$

$$|u_{1t}(x,t) - u_{2t}(x,t)| \leq \frac{T_1 q}{2} \left[N_1 \|f_1 - f_2\|_C + N_2 \|f_{1t} - f_{2t}\|_C + \right. \\ \left. + N_3 \|f_{1x} - f_{2x}\|_C \right],$$

$$|u_{1x}(x,t) - u_{2x}(x,t)| \leq \frac{T_1 q}{2} \left[N_1 \|f_1 - f_2\|_C + N_2 \|f_{1t} - f_{2t}\|_C + \right. \\ \left. + N_3 \|f_{1x} - f_{2x}\|_C \right].$$

Якщо останні дві нерівності помножити на $(T_1 q)/2$ і зробити відповідні перетворення, то одержуємо

$$\|T_0[f_1] - T_0[f_2]\|_{C^1} \leq \left[\frac{(T_1 q)^2 N_1}{4} + \frac{T_1 q}{2} \left[N_2 + N_3 \right] \right] \|f_1 - f_2\|_{C^1}. \quad (3.16)$$

Тепер на основі нерівностей (3.9), (3.10), (3.15) бачимо, що виконуються всі умови теореми 3.1 (теореми 0.1, [79, с.475]), тобто, теорема 3.2 доведена.

Аналогічно, якщо $\|F[u, u_t, u_x](x, t)\|_C \leq M$ для $\|u\|_C \leq L$, $\|u_t\|_C \leq 2L/(T_1 q)$, $\|u_x\|_C \leq 2L/(T_1 q)$, то частина співвідношень (3.14), які відносяться до $u_t(x, t)$ і $u_x(x, t)$ показує, що якщо $\|f\|_{C^1} \leq L$, то

$u = T_o[f]$ задовольняє нерівність $\|u\|_{C^1} \leq \frac{(T,q)^2 M}{4}$. Отже, якщо справедлива нерівність (3.11), то T_o відображає кулю $\|f\|_{C^1} \leq L$ саму в себе, а це означає в силу (3.9), що виконуються всі умови зауваження 3.1, які відносяться до теореми 3.1 (теореми 0.1 [79, с.475]).

Таким чином, теорема 3.2 з врахуванням зауваження 3.2 повністю доведена.

§ 4. Приклади

На основі одержаних результатів в попередніх параграфах 2 і 3 можна навести приклади функцій, для яких виконуються всі умови теорем 2.1, 2.2, 3.2, що легко перевіряються.

Нехай

$$F[u, u_t, u_x](x, t) = f(x, t) + \varepsilon f_1(u), \quad (4.1)$$

де ε - малий параметр.

Тоді для задачі

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) + \varepsilon f_1(u), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (4.2)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (4.3)$$

справедливе наступне твердження.

Теорема 4.1. Нехай функції $f(x, t)$ і $f_1(u)$ задовольняють умови:

$$1) f(x, t) \in C(\mathbb{R}^2) \cap B^1_\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Q}; \quad (4.5)$$

$$2) 0 < \|f(x, t)\|_C = \Gamma_2 < \infty; \quad (4.6)$$

$$3) f_1(0) = 0; \quad (4.7)$$

$$4) f_1(u) \in Lip(N_1, \mathbb{R}), \quad N_1 = \text{const}; \quad (4.8)$$

$$5) f_1(-u) = -f_1(u). \quad (4.9)$$

Тоді при достатньо малому за модулем ε нелінійна задача (4.2)-(4.4) при $\alpha \in \mathbb{Q}$ має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in B^1_\alpha \cap C^1(\mathbb{R}^2)$.

Доведення. Покажемо, що з даного твердження випливають умови теорем 2.1, 2.2, 3.1. Оскільки $\alpha \in \mathbb{Q}$, то згідно теореми 2.1, якщо розв'язок існує, то він єдиний. Далі, потрібно показати, що з умов (4.5)-(4.9) випливають умови (2.7)-(2.12) теореми 2.1. Справді, умови (4.1), (4.5), (4.8) приводять до виконання включення (2.7), а (4.1), (4.5), (4.7) - до (2.10). На основі (4.1), (4.6), (4.7) отримуємо умову (2.8). З (4.8) випливає, що функція $F[u, u_t](x, t) = f(x, t) + \varepsilon f_1(u)$ задовольняє умову Ліпшица (2.9). Для обґрунтування включення (2.11) доведемо, що для всіх $u \in B^1_\alpha$, $f_1(u) \in B^1_\alpha$. Тоді разом з умовою (4.5) буде впливати, що $F[u, u_t](x, t) = f(x, t) + \varepsilon f_1(u(x, t)) \in B^1_\alpha \cap C(\mathbb{R}^2)$. Справді, $f_1(u(\pi-x, t)) = f_1(u(x, t))$, $f_1(u(x, t+T_1)) = f_1(u(x, t))$, $f_1(u(-x, t)) = f_1(-u(x, t)) = -f_1(u(x, t))$. Отже, включення (2.11) при даних припущеннях має місце.

Оскільки ε - малий параметр, то завжди можна добитися виконання умови (2.12).

Таким чином, мають місце всі умови (2.7)-(2.12) теореми 2.1, 2.2, згідно яких задача (4.2)-(4.4) при $a \in \mathbb{Q}$ має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in B_a^1$.

Теорема 4.1 доведена.

Зауваження 4.1. Прикладом рівняння, коефіцієнти і функції якого задовольняють всі умови теореми 4.1 є

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) + \varepsilon \sin u, \quad (4.10)$$

де $f(x, t)$ - довільна функція із простору B_a^1 , а прикладом, для якого не виконуються умови теореми 4.1, є рівняння

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) + \varepsilon u^2.$$

Нехай тепер

$$F[u, u_t, u_x](x, t) = f(x, t) + \varepsilon f_2(u_t). \quad (4.11)$$

Тоді для рівняння

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) + \varepsilon f_2(u_t), \quad (4.12)$$

розв'язок якого задовольняє умови (4.3), (4.4), у просторі B_a^1 справедливе наступне твердження.

Теорема 4.2. Нехай виконуються такі умови:

- 1) $f(x, t) \in C(\mathbb{R}^2) \cap B_a^1$, $a \in \mathbb{Q}$;
- 2) $0 < \|f(x, t)\|_C = \Gamma_3 < \infty$;
- 3) $f_2(0) = 0$;

$$4) f_2(u_t) \in L^p(N_2, \mathbb{R}), \quad N_2 = \text{const};$$

$$5) f_2(-u_t) = -f_2(u_t).$$

Тоді при достатньо малому за модулем ε нелінійна задача (4.12), (4.3), (4.4) при $a \in \mathbb{Q}$ має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbb{R}^2)$.

Доведення теореми 4.2 аналогічне доведенню теореми 4.1.

На основі теореми 4.2 крайова періодична задача

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon (u_t - u_t^3),$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0,$$

$$u(x, t+T) = u(x, t)$$

у просторі B_a^1 завжди сумісна.

Замітимо, що дане рівняння добре вивчене в літературі [120].

Г Л А В А III

О П Е Р А Т О Р И ВЕЙВОДИ-ШТЕДРИ І ІХ З А С Т О С У В А Н Н Я

Третя глава присвячена встановленню умов розв'язності як лінійної, так і нелінійної періодичної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку з двома незалежними змінними x і t у просторах неперервних і обмежених разом з похідною по t функцій, коли $0 < x < \pi$.

Спочатку в першому і другому параграфах розглянуто оператори Вейводи-Штедри і вивчено їх властивості. Оскільки дані оператори не задовольняють нульові крайові умови, то на їх основі в третьому і четвертому параграфах побудовано нові оператори, за допомогою яких досліджено умови існування і єдиності розв'язку лінійної крайової періодичної задачі у спеціально виділених просторах функцій. Замітимо, що це досягнуто лише для двох випадків $T = \pi$ і $T = 2\pi$.

В п'ятому і шостому параграфах розглянуто нелінійні крайові π і 2π -періодичні задачі. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку вказаних задач.

§ 1. Постановка задачі Коші для лінійного рівняння

Періодичні розв'язки гіперболічних рівнянь другого порядку, особливо квазілінійних, можна дослідити за допомогою операторів, які одержуються при розв'язанні таких задач Коші:

$$\begin{aligned} u_{xx}^1 - a^2 u_{xx}^1 &= g(x, t), \\ u^1(0, t) &= v(t), \quad u_x^1(0, t) = \mu(t); \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} u_{tt}^2 - a^2 u_{xx}^2 &= g(x, t), \\ u^2(\pi, t) &= v(t), \quad u_x^2(\pi, t) = \mu(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

в спеціальних областях, а саме в характеристичних трикутниках, які будуть визначені нижче. Замітимо, що початковими лініями для задачі (1.1) є вісь t ($x=0$), а для задачі (1.2) — пряма $x=\pi$.

Задача (1.1) в області $\Delta_0 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq \pi, x/a \leq t \leq 2\pi/a - x/a\}$ при $v(t) \in C^2[0, \pi]$, $\mu(t) \in C^1[0, \pi]$, $g(x, t) \in C^{0,1}(\Delta_0)$ завжди сумісна і її класичний розв'язок задається формулою [46],

$$\begin{aligned} u^1(x, t) &= \frac{v(t+x/a) + v(t-x/a)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x (\mu(t+\xi/a) + \mu(t-\xi/a)) d\xi - \\ &- \frac{1}{2a} \int_0^x d\eta \int_0^\eta (g(\xi, t+(\eta-\xi)/a) + g(\xi, t-(\eta-\xi)/a)) d\xi = \\ &= \frac{v(t+x/a) + v(t-x/a)}{2} + \frac{a}{2} \int_{t-x/a}^{t+x/a} \mu(\alpha) d\alpha - \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2a} \int_0^x d\xi \int_{t-(x-\xi)/a}^{t+(x-\xi)/a} g(\xi, \tau) d\tau \equiv u^O(x, t) + u^H(x, t). \quad (1.3)$$

Задача (1.2) в області $\Delta_\pi = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq \pi, (\pi-x)/a \leq t \leq (\pi+x)/a\}$ при $v(t) \in C^2[0, \pi]$, $\mu(t) \in C^1[0, \pi]$, $g(x, t) \in C^{0,1}(\Delta_\pi)$ завжди сумісна і її класичний розв'язок задається формулою [46]

$$\begin{aligned} u^2(x, t) = & \frac{v(t+(\pi-x)/a) + v(t-(\pi-x)/a)}{2} - \frac{1}{2} \int_x^\pi (\mu(t-(\pi-\xi)/a + \\ & + \mu(t+(\pi-\xi)/a) d\xi - \frac{1}{2a^2} \int_x^\pi d\eta \int_\eta^\pi \left\{ g(\xi, t+(\xi-\eta)/a + \right. \\ & \left. + g(\xi, t-(\xi-\eta)/a) \right\} d\xi \equiv \frac{v(t+(\pi-x)/a) + v(t-(\pi-x)/a)}{2} - \\ & - \frac{a}{2} \int_{t-(\pi-x)/a}^{t+(\pi-x)/a} \mu(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2a} \int_x^\pi d\xi \int_{t+(x-\xi)/a}^{t-(x-\xi)/a} g(\xi, \tau) d\tau = \\ & = u^O(x, t) + u^H(x, t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Зауваження 1.1. Якщо припустити, що $v(t+T) = v(t)$, $\mu(t+T) = \mu(t)$, $g(x, t+T) = g(x, t)$ для деякого періоду T , то на основі формул (1.3) і (1.4) переконуємося, що розв'язки $u^i(x, t+T) = u^i(x, t)$, $i=1, 2$. В подальшому покажемо, що крайові періодичні задачі

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F[u, u_t, u_x], \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t+T) = u(x, t),$$

можна вивчати на основі формул (1.3) і (1.4). Це пояснюється тим, що формули (1.3) і (1.4) дають завжди розв'язки таких крайових періодичних задач:

$$u_{tt}^1 - a^2 u_{xx}^1 = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

$$u^1(0, t) = 0, \quad u_x^1(0, t) = \mu(t), \quad u^1(x, t+T) = u^1(x, t)$$

$$u_{tt}^2 - a^2 u_{xx}^2 = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

$$u^2(\pi, t) = 0, \quad u_x^2(\pi, t) = \mu(t), \quad u^2(x, t+T) = u^2(x, t)$$

при умові, що $\mu(t+T) = \mu(t)$, $g(x, t+T) = g(x, t)$, тобто для розв'язку задачі (1.6) не виконується умова $u^1(\pi, t)=0$, а для розв'язку (1.7) - умова $u^2(0, t)=0$.

В наступних параграфах покажемо, що існують простори функцій, в яких сумісні крайові періодичні задачі виду (1.5).

§ 2. Оператори Вейводи-Штедри

Розглянемо оператори S_1 і S_2 , які вперше введені в роботі [14] і визначаються на основі формул (1.3) і (1.4) при $a=1$ таким чином:

$$(S_1 g)(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau; \quad (2.1)$$

$$(S_2 g)(x, t) = -\frac{1}{2} \int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Позначимо через C_π простір функцій, неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$, через $G_{\pi t}$ - простір функцій, неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ разом з похідною по t , а символом $Q_{\pi T}$ позначимо простір функцій $g(x, t)$, які задовольняють на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ співвідношення $g(x, t+T) = g(x, t)$.

Доведемо ряд властивостей операторів S_1 та S_2 .

Лема 2.1. Якщо $g(x, t) \in G_{\pi t} \cap Q_{\pi T}$, то кожна з функцій $u^1 = S_1 g$ і $u^2 = S_2 g$ є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt}^i - u_{xx}^i = g(x, t)$, $i=1, 2$, причому $u^i(x, t) \in Q_{\pi T}$, $i=1, 2$.

Доведення проводиться безпосередньою підстановкою других похідних функцій $u^i = S_i g$, $i=1, 2$ в дане рівняння.

Розглянемо функцію виду

$$(Sg)(x, t) = \frac{1}{2} ((S_1 g)(x, t) + (S_2 g)(x, t)). \quad (2.3)$$

На основі зауваження 1.1 і леми 2.1 переконуємося в справедливості наступного твердження.

Лема 2.2. Якщо $g(x, t) \in G_{\pi t} \cap Q_{\pi T}$, то функція $u(x, t) = (Sg)(x, t)$ є розв'язком такої задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad u(x, t+T) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

причому

$$(Sg)(0, t) = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau) d\tau, \quad (2.5)$$

$$(Sg)(\pi, t) = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Зауваження 2.1. Якщо в інтегралі правої частини (2.6) зробити заміну $\xi = \pi - \eta$, то одержимо таку рівність:

$$\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau = \int_0^{\pi} d\eta \int_{t-\eta}^{t+\eta} g(\pi-\eta, \tau) d\tau, \quad (2.7)$$

тобто праві частини формул (2.5) і (2.6) були б рівними, якби виконувалася умова

$$g(\pi-x, t) = g(x, t). \quad (2.8)$$

Таким чином, якщо тепер розглянути простір функцій

$$A_1^T = \{u: u(x, t) = u(\pi-x, t) = u(x, t+T)\}, \quad (2.9)$$

визначених на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$, то на основі формул (2.1)–(2.3) і леми 2.2 справедливі наступні твердження.

Лема 2.3. Оператор S володіє такими властивостями:

$$S \in L(C_{\pi} \cap A_1^T, C_{\pi}^1 \cap A_1^T), \quad (2.10)$$

$$S \in L(G_{\pi t} \cap A_1^T, C_{\pi}^2 \cap A_1^T).$$

Доведення. Справді, безпосередньою перевіркою переконуємося,

що оператор S кожному неперервну обмежену функцію $g(x, t)$ переводить в неперервно диференційовну обмежену функцію $u(x, t) = (Sg)(x, t)$ (детально це буде доведено в §3), а кожному неперервно диференційовну обмежену функцію $g(x, t)$ в двічі неперервно диференційовну обмежену функцію $u \in C_{\pi}^2$.

Покажемо, що $S: A_1^T \rightarrow A_1^T$. Оскільки $S: Q_{\pi T} \rightarrow Q_{\pi T}$, то достатньо показати виконання умови $(Sg)(\pi-x, t) = (Sg)(x, t)$ для всіх $(x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}$.

Враховуючи позначення (2.1)-(2.3), маємо

$$(Sg)(\pi-x, t) = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi-x} d\xi \int_{t-\pi+x+\xi}^{t+\pi-x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_{\pi-x}^{\pi} d\xi \int_{t+\pi-x-\xi}^{t-\pi+x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau.$$

Зробивши заміну змінної $\xi = \pi-\eta$ в обох інтегралах, одержуємо

$$\begin{aligned} (Sg)(\pi-x, t) &= \frac{1}{4} \int_{\pi}^x d\eta \int_{t+x-\eta}^{t-x+\eta} g(\pi-\eta, \tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{4} \int_x^0 d\eta \int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} g(\pi-\eta, \tau) d\tau = (Sg)(x, t). \end{aligned}$$

Лема 2.3 доведена.

Лема 2.4. Якщо $g(x, t) \in G_{\pi t} \cap A_1^T$, то функція $u(x, t) = (Sg)(x, t)$ є класичним розв'язком такої крайової періодичної задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad u(0, t) = u(\pi, t), \quad (2.11)$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Зауваження 2.2. Отже, на основі лем 2.1 і 2.2 ми завжди можемо знайти частинний періодичний розв'язок задачі (2.4). Більш того, на основі леми 2.4 існує простір функцій A_1^T , в якому функція (2.3): $u(x, t) = (Sg)(x, t)$ є частинним періодичним розв'язком задачі (2.11), (2.12), тобто крайової періодичної задачі, розв'язок якої на кінцях $x=0$ і $x=\pi$ приймає рівні значення. Період T розв'язку $u(x, t) = (Sg)(x, t)$ визначається періодом відомої функції $g(x, t)$ по змінній t . Очевидно такі розв'язки будуть єдиними, якщо розв'язок відповідної однорідної задачі $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$, $u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0$ буде тривіальним.

§ 3. Аналітичне зображення розв'язку лінійної крайової π -періодичної задачі

На основі одержаних в § 2 результатів можна дати відповідь про розв'язність наступної лінійної крайової π -періодичної задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Розглянемо оператор виду

$$(R_1^\pi g)(x, t) = (Sg)(x, t) + \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau) d\tau. \quad (3.4)$$

Враховуючи лему 2.2, зауваження 2.1 і припускаючи, що $g \in A_1^T$, одержуємо такі рівності:

$$(R_1^\pi g)(0, t) = (R_1^\pi g)(x, t) = 0, \quad (R_1^\pi g)(x, t+T) = (R_1^\pi g)(x, t).$$

Значить функція $u = R_1^\pi g$ задовольняє умови (3.2) і (3.3). Оскільки функція $u^H(x, t) = (Sg)(x, t)$ задовольняє неоднорідне рівняння (3.1), то щоб функція $u = R_1^\pi g(x, t)$ була розв'язком неоднорідного рівняння (3.1) потрібно, щоб функція

$$u^O(x, t) = -\frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau) d\tau \quad (3.5)$$

задовольняла однорідне рівняння $u_{tt}^O - u_{xx}^O = 0$. Так як $u_{xx}^O \equiv 0$ (функція $u^O(x, t)$ від x незалежить), то достатньо показати, що $u_{tt}^O \equiv 0$.

Враховуючи (3.5), маємо

$$u_t^O(x, t) = \frac{1}{4} \int_0^\pi g(\xi, t+\xi) d\xi - \frac{1}{4} \int_0^\pi g(\xi, t-\xi) d\xi. \quad (3.6)$$

Зробивши заміну змінної $\xi = \pi - \eta$ в першому інтегралі рівності (3.6), одержимо

$$u_t^O(x, t) = -\frac{1}{4} \int_\pi^0 g(\pi - \eta, t + \pi - \eta) d\eta - \frac{1}{4} \int_0^\pi g(\xi, t - \xi) d\xi. \quad (3.7)$$

Якщо припустити, що $g \in A_1^T$, тобто виконується умова $g(\pi - x, t) = g(x, t)$, то рівність (3.7) запишеться так:

$$u_t^0(x, t) = \frac{1}{4} \int_0^\pi g(\eta, t + \pi - \eta) d\eta - \frac{1}{4} \int_0^\pi g(\xi, t - \xi) d\xi. \quad (3.8)$$

Тепер, покладаючи $T = \pi/q$, $q \in \mathbb{N}$, тобто вважаючи, що функція $g(x, t)$ є π/q - періодичною по змінній t , зокрема $g(x, t + \pi) = g(x, t)$, з (3.8) одержуємо, що $u_t^0(x, t) \equiv 0$, а це означає, що $u_{tt}^0(x, t) \equiv 0$.

Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема 3.1. Якщо $g(x, t) \in G_{\pi t} \cap A_1^w = \{g: g(x, t) = g(\pi - x, t) = g(x, t + w), w = \pi/q, q \in \mathbb{N}\}$, то функція

$$u(x, t) = (R_1^w g)(x, t) \equiv (Sg)(x, t) + \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau) d\tau \quad (3.9)$$

є єдиною функцією із простору $C_\pi^2 \cap A_1^w$, яка задовольняє умови (3.1)-(3.3), причому

$$\|u(x, t)\|_{C_\pi} \leq \frac{\pi^2}{2} \|g(x, t)\|_{C_\pi}, \quad (3.10)$$

$$\|u_t(x, t)\|_{C_\pi} \leq \frac{\pi}{2} \|g(x, t)\|_{C_\pi}, \quad (3.11)$$

$$\|u_x(x, t)\|_{C_\pi} \leq \frac{\pi}{2} \|g(x, t)\|_{C_\pi}, \quad (3.12)$$

де $\|g(x, t)\|_{C_\pi} = \sup \{|g(x, t)|; 0 \leq x \leq \pi, t \in \mathbb{R}\}$.

Доведення. Те, що $u = R_1^w g$ є розв'язком задачі (3.1)-(3.3),

впливає з властивостей оператора S (S_1 і S_2) і вище проведених досліджень.

Перейдемо до встановлення оцінок (3.10)-(3.12). Оператор S можна записати в такому вигляді:

$$(Sg)(x, t) = \frac{1}{4} \int_0^x Q(\xi) d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau, \quad (3.13)$$

де

$$Q(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi \leq x, \\ -1, & x < \xi \leq \pi. \end{cases} \quad (3.14)$$

На основі (3.13) і (3.14) одержуємо

$$\begin{aligned} 4 |(Sg)(x, t)| &\leq \|g(x, t)\|_{C\pi} \left| \int_0^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} d\tau \right| = 2 \|g(x, t)\|_{C\pi} \int_0^\pi |x-\xi| d\xi = \\ &= 2 \|g(x, t)\|_{C\pi} \left\{ \int_0^x (x-\xi) d\xi - \int_x^\pi (x-\xi) d\xi \right\} = 2 \|g(x, t)\|_{C\pi} \left\{ \frac{x^2}{2} + \frac{(x-\pi)^2}{2} \right\} = \\ &= \|g(x, t)\|_{C\pi} (2x^2 - 2x\pi + \pi^2) \leq \pi^2 \|g(x, t)\|_{C\pi}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Аналогічно знаходимо оцінку

$$\left| \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(x, t) d\tau \right| \leq 2 \|g(x, t)\|_{C\pi} \int_0^x \xi d\xi \leq \pi^2 \|g(x, t)\|_{C\pi}. \quad (3.16)$$

Тепер, враховуючи оцінки (3.15) і (3.16), на основі формули (3.9) одержимо оцінку (3.10).

Оскільки $g(x, t) \in G_{\pi t} \cap A_1^T$, то

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi) \{g(\xi, t-x+\xi) - g(\xi, t+x-\xi)\} d\xi; \quad (3.17)$$

$$u_x(x, t) = -\frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi) \{g(\xi, t-x+\xi) - g(\xi, t+x-\xi)\} d\xi. \quad (3.18)$$

Звідси

$$\|u_t(x, t)\|_{C_\pi} \leq \frac{\pi}{2} \|g(x, t)\|_{C_\pi}, \quad (3.19)$$

$$\|u_x(x, t)\|_{C_\pi} \leq \frac{\pi}{2} \|g(x, t)\|_{C_\pi},$$

що треба було довести.

§ 4. Аналітичне зображення розв'язку лінійної крайової 2π -періодичної задачі

В даному параграфі досліджується така 2π -періодична задача:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

$$u(x, t+2\pi) = u(x, t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Доведемо, що функція виду

$$u(x, t) = (R_2^{\pi} g)(x, t) \equiv (Sg)(x, t) + \frac{\pi-x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau) d\tau +$$

$$+ \frac{x}{4\pi} \int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \quad (4.4)$$

В конкретно визначеному просторі функцій $A_2^{2\pi} = \{u: u(x, t) = u(\pi-x, t+\pi) = u(x, t+2\pi)\}$ буде при $g \in G_{\pi t} \cap A_2^{2\pi}$ класичним розв'язком задачі (4.1)-(4.3), причому справедливе твердження.

Лема 4.1. Оператор $R_2^{2\pi}$ володіє такими властивостями

$$R_2^{2\pi} \in L(C_{\pi} \cap A_2^{2\pi}, C_{\pi}^1 \cap A_2^{2\pi}),$$

$$R_2^{2\pi} \in L(G_{\pi t} \cap A_2^{2\pi}, C_{\pi}^2 \cap A_2^{2\pi}).$$

Доведення. Те, що оператор $R_2^{2\pi}$ переводить простір неперервних обмежених функцій в простір обмежених неперервно диференційовних функцій, а простір обмежених неперервно диференційовних функцій в простір обмежених двічі неперервно диференційовних функцій, перевіряється безпосередньо.

Покажемо, що оператор $R_2^{2\pi}$ переводить простір $A_2^{2\pi}$ сам в себе. На основі (4.4) маємо

$$\begin{aligned} (R_2^{2\pi} g)(\pi-x, t+\pi) &= (Sg)(\pi-x, t+\pi) + \frac{x}{4\pi} \int_0^{\pi} d\xi \int_{t+\pi-\xi}^{t+\pi+\xi} g(\xi, \tau) d\tau + \\ &+ \frac{\pi-x}{4\pi} \int_0^{\pi} d\xi \int_{t+\xi}^{t+2\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \equiv I_1 + \frac{x}{4\pi} I_2 + \frac{\pi-x}{4\pi} I_3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Перетворимо окремо кожен із виразів I_k , $k=1,2,3$. Враховуючи (2.3) і (4.5), маємо

$$I_1 = (Sg)(\pi-x, t+\pi) = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi-x} d\xi \int_{t+x+\xi}^{t+2\pi-x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau -$$

$$- \frac{1}{4} \int_{\pi-x}^{\pi} d\xi \int_{t+2\pi-x-\xi}^{t+x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau.$$

Проводячи в новоутвореному виразі спочатку заміну змінної $\xi = \pi - \eta$, а потім в одержаних виразах заміну змінної $\tau = \theta + \pi$, знаходимо

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4} \int_{\pi}^x d\eta \int_{t+\pi+x-\eta}^{t+\pi-x+\eta} g(\pi-\eta, \tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_x^0 d\eta \int_{t+\pi-x+\eta}^{t+\pi+x-\eta} g(\pi-\eta, \tau) d\tau = \\ &= - \frac{1}{4} \int_x^{\pi} d\eta \int_{t+x-\eta}^{t-x+\eta} g(\pi-\eta, \theta+\pi) d\theta - \frac{1}{4} \int_0^x d\eta \int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} g(\pi-\eta, \theta+\pi) d\theta \equiv \\ &\equiv (Sg)(x, t). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\pi} d\xi \int_{t+\pi-\xi}^{t+\pi+\xi} g(\xi, \tau) d\tau = - \int_{\pi}^0 d\eta \int_{t+\eta}^{t+2\pi-\eta} g(\pi-\eta, \tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\pi} d\eta \int_{t-\pi+\eta}^{t+\pi-\eta} g(\pi-\eta, \theta+\pi) d\theta = \int_0^{\pi} d\eta \int_{t-\pi+\eta}^{t+\pi-\eta} g(\eta, \theta) d\theta; \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\pi} d\xi \int_{t+\xi}^{t+2\pi+\xi} g(\xi, \tau) d\tau = - \int_{\pi}^0 d\eta \int_{t-\pi+\eta}^{t+\pi-\eta} g(\pi-\eta, \tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\pi} d\eta \int_{t-\eta}^{t+\eta} g(\pi-\eta, \theta+\pi) d\theta = \int_0^{\pi} d\eta \int_{t-\eta}^{t+\eta} g(\eta, \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Підставляючи обчислені вирази (4.6)-(4.8) в рівність (4.5),

одержуємо

$$(R_2^{2\pi}g)(\pi-x, t+\pi) = (R_2^{2\pi}g)(x, t).$$

Отже, оператор $R_2^{2\pi}$ переводить простір функцій $A_2^{2\pi}$ сам в себе.

Лема 4.1 доведена.

На основі проведених вище досліджень справедливе наступне твердження.

Теорема 4.1. Якщо $g(x, t) \in G_{\pi t} \cap A_2^{2\pi}$, то функція $u(x, t) = (R_2^{2\pi}g)(x, t)$ є єдиною функцією із простору $C_{\pi}^2 \cap A_2^{2\pi}$, яка задовольняє умови (4.1)-(4.3), причому

$$\|u(x, t)\|_{C_{\pi}} \leq \frac{3}{4} \pi^2 \|g(x, t)\|_{C_{\pi}}; \quad (4.9)$$

$$\|u_t(x, t)\|_{C_{\pi}} \leq \frac{\pi}{2} \|g(x, t)\|_{C_{\pi}}; \quad (4.10)$$

$$\|u_x(x, t)\|_{C_{\pi}} \leq \pi \|g(x, t)\|_{C_{\pi}}. \quad (4.11)$$

Доведення. Спочатку доведемо, що функція $u = R_2^{2\pi}g$ задовольняє рівняння (4.1). Зрозуміло, що для цього потрібно показати, що функція

$$\begin{aligned} u^0(x, t) &= (\tilde{S}g)(x, t) + \\ &= \frac{\pi-x}{4\pi} \int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau) d\tau + \frac{x}{4\pi} \int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.12)$$

задовольняє однорідне рівняння $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$.

Оскільки $u_{xx}^0(x, t) = (\tilde{S}g)_{xx}(x, t) \equiv 0$, то потрібно показати, що $u_{tt}^0 \equiv 0$.

Обчислюючи першу похідну u_t^0 , маємо

$$u_t^0 = \frac{\pi-x}{4\pi} \int_0^\pi \{g(\xi, t+\xi) - g(\xi, t-\xi)\} d\xi + \quad (4.13)$$

$$+ \frac{x}{4\pi} \int_0^\pi \{g(\xi, t+\pi-\xi) - g(\xi, t-\pi+\xi)\} d\xi \equiv \frac{\pi-x}{4\pi} \mu(t) + \frac{x}{4\pi} \nu(t).$$

Доведемо, що при $g \in A_2^{\mathbb{Z}\pi}$ функції $\mu(t)$ і $\nu(t)$ тотожно дорівнюють нулю. Використовуючи позначення (4.13) і проводячи в перших інтегралах заміну змінної $\xi = \pi - \eta$, маємо

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \int_0^\pi \{g(\xi, t+\xi) - g(\xi, t-\xi)\} d\xi = \\ &= - \int_\pi^0 g(\pi-\eta, t+\pi-\eta) d\eta - \int_0^\pi g(\xi, t-\xi) d\xi = \\ &= \int_0^\pi g(\eta, t-\eta) d\eta - \int_0^\pi g(\xi, t-\xi) d\xi \equiv 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \int_0^\pi \{g(\xi, t+\pi-\xi) - g(\xi, t-\pi+\xi)\} d\xi = \\ &= - \int_\pi^0 g(\pi-\eta, \pi+t-\pi+\eta) d\eta - \int_0^\pi g(\xi, t-\pi+\xi) d\xi = \\ &= \int_0^\pi g(\eta, t-\pi+\eta) d\eta - \int_0^\pi g(\xi, t-\pi+\xi) d\xi \equiv 0. \end{aligned}$$

Отже, $u_t^0(x, t) \equiv 0$, а значить, $u_{tt}^0(x, t) \equiv 0$, що означає, що функція $u^0(x, t) = (\tilde{S}g)(x, t)$ є розв'язком однорідного рівняння

$$u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0.$$

Таким чином, функція $u(x, t) = (R_2^{2\pi} g)(x, t)$, визначена формулою (4.4), є розв'язком рівняння (4.1).

Тепер безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція $u = R_2^{2\pi} g$ задовольняє крайові умови (4.2), тобто

$$(R_2^{2\pi} g)(0, t) = (R_2^{2\pi} g)(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Залишається показати справедливості оцінок (4.9)-(4.11).

Оскільки

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \right| &\leq 2 \|g(\xi, \tau)\|_{C_\pi} \int_0^\pi |\pi-\xi| d\xi = \\ &= 2 \|g(x, t)\|_{C_\pi} \left[\int_0^x (\pi-\xi) d\xi - \int_x^\pi (\pi-\xi) d\xi \right] = \\ &= \pi^2 \|g(x, t)\|_{C_\pi}; \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\left\| \frac{\pi-x}{4\pi} \right\|_{C_\pi} \leq \frac{1}{4}; \quad \left\| \frac{x}{4\pi} \right\|_{C_\pi} \leq \frac{1}{4}, \quad (4.15)$$

то, враховуючи оцінки (3.15), (3.16), (4.14), (4.15), на основі рівності (4.4) переконуємося у справедливості нерівності (4.9).

Оскільки похідна $u_t(x, t) = (R_2^{2\pi} g)_t(x, t)$ співпадає з похідною (3.17), то на основі нерівності (3.19) одержуємо оцінку (4.10).

Від функції $u(x, t) = (R_2^{2\pi} g)(x, t)$, визначеної формулою (4.4), обчислимо похідну $u_x(x, t)$.

Маємо

$$\begin{aligned}
 u_x(x, t) = & -\frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi) \{g(\xi, t+x-\xi) + g(\xi, t-x+\xi)\} d\xi - \\
 & -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-x}^{t+x} \{g(\xi, \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} \{g(\xi, \tau) d\tau
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

Тепер, враховуючи оцінки (3.16), (3.19) на основі (3.17) і (4.16) переконуємося в справедливості оцінки (4.11).

Теорема 4.1 доведена.

§ 5. Періодичні розв'язки нелінійної π -періодичної задачі

Дослідимо існування гладкого ($u \in C_\pi^1$) розв'язку такої задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x], \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

$$u(x, t+\pi/q) = u(x, t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Заданий оператор $F[u, u_t, u_x]$, взагалі кажучи, нелінійний, переводить гладку ($u \in C_\pi^1 \cap A_1^T$) функцію в скалярну неперервну функцію $F[u, u_t, u_x](x, t) \in C_\pi \cap A_1^T$.

По аналогії з лінійною задачею (3.1)–(3.3) і записами її розв'язку (3.13), (3.17) і (3.18) розглянемо таку систему інтегральних рівнянь:

$$u(x, t) = (R_1^\pi F[u, u_t, u_x])(x, t) = (SF[u, u_t, u_x])(x, t) +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[u, u_t, u_x](\xi, \tau) d\tau,$$

$$u_t(x, t) = \frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi) \left\{ F[u, u_t, u_x](\xi, t-x+\xi) - \right. \\ \left. - F[u, u_t, u_x](\xi, t+x-\xi) \right\} d\xi, \quad (5.4)$$

$$u_x(x, t) = - \frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi) \left\{ F[u, u_t, u_x](\xi, t-x+\xi) - \right. \\ \left. - F[u, u_t, u_x](\xi, t+x-\xi) \right\} d\xi,$$

де функція $Q(\xi)$ визначена формулою (3.14).

Означення 5.1. Неперервний розв'язок $(u, u_t, u_x) \in C_\pi$, $u \in C_\pi \cap A_1^w$ системи інтегральних рівнянь (5.4) будемо називати гладким розв'язком π -періодичної задачі (5.1)-(5.3).

Використовуючи інтегральне зображення (3.4) розв'язку $u = R_1^\pi g$ лінійної задачі (3.1)-(3.3) і позначення (3.13) оператора $\tilde{S}$, на основі теореми 3.1 переконуємося в справедливості наступного твердження.

Теорема 5.1. Нехай $g \in C_\pi \cap A_1^w$. Тоді лінійна задача (3.1)-(3.3) має єдиний гладкий розв'язок $u = R_1^\pi g \in C_\pi^1 \cap A_1^w$, для якого справедливі оцінки (3.10)-(3.12).

Теорема 5.2. Нехай скалярна функція $F[u, u_t, u_x](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t))$ задовольняє такі умови:

$$1) f(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t)) \in C([0, \pi] \times \mathbb{R} \times \|u\|_{C_\pi} < \infty \times \|u_t\|_{C_\pi} < \infty \times \|u_x\|_{C_\pi} < \infty); \quad (5.5)$$

$$2) 0 < \|F[0, 0, 0](x, t)\|_{C_\pi} = \Gamma < \infty; \quad (5.6)$$

$$3) |F[u'', u_t'', u_x''](x, t) - F[u', u_t', u_x'](x, t)| \leq N_1 |u''(x, t) - u'(x, t)| + N_2 |u_t''(x, t) - u_t'(x, t)| + N_3 |u_x''(x, t) - u_x'(x, t)|; \quad (5.7)$$

$$4) F[0, 0, 0](x, t) \in A_1^\pi; \quad (5.8)$$

$$5) \text{ для всіх } u(x, t) \in A_1^\pi \cap C_\pi^1([0, \pi] \times \mathbb{R})$$

$$F[u, u_t, u_x](x, t) \in A_1^\pi \cap C_\pi. \quad (5.9)$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{\pi^2}{2} N_1 + \frac{\pi}{2} (N_2 + N_3) < \frac{1}{2} \quad (5.10)$$

задача (5.1)–(5.3) має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in A_1^\pi \cap C_\pi^1$.

Доведення. Визначимо нульове наближення $u^0(x, t)$ за такою формулою:

$$u^0(x, t) = \frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi) d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} F[0, 0, 0](\xi, \tau) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[0,0,0](\xi, \tau) d\tau. \quad (5.11)$$

Звідси, на основі умов (5.6) і (5.8) теореми 5.2 і оцінок (3.10)-(3.14) для відповідної лінійної задачі, маємо, що $u^0(x, t) \in A_1^{\pi} \cap C_{\pi}^1$ і

$$|u^0(x, t)| \leq \frac{\Gamma \pi^2}{2} = \Gamma_1; \quad \pi |u_t^0(x, t)| \leq \Gamma_1; \quad \pi |u_x^0(x, t)| \leq \Gamma_1. \quad (5.12)$$

Виберемо число M таке, що

$$M > 2 \Gamma_1. \quad (5.13)$$

В банаховому просторі функцій

$$D = \{ u \in A_1^{\pi} \cap C_{\pi}^1 : \|u\|_{C_{\pi}^1} \leq M \} \quad (5.14)$$

з нормою

$$\|u\|_{C_{\pi}^1} = \max \{ \|u\|_{C_{\pi}}, \pi \|u_t\|_{C_{\pi}}, \pi \|u_x\|_{C_{\pi}} \} \quad (5.15)$$

розглянемо оператор $(R_1^{\pi} F[u, u_t, u_x])(x, t)$, що визначається за допомогою правої частини першого інтегрального рівняння системи (5.4):

$$\begin{aligned} (R_1^{\pi} F[u, u_t, u_x])(x, t) = & \frac{1}{4} \int_0^{\pi} Q(\xi) d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} F[u, u_t, u_x](\xi, \tau) + \\ & + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[u, u_t, u_x](\xi, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.16)$$

На підставі (5.5) і (5.9) одержуємо, що

$$(R_1^\pi F[u, u_t, u_x])(x, t) \in A_1^\pi \cap C_\pi^1. \quad (5.17)$$

Далі для $u(x, t) \in D$ будемо мати

$$\begin{aligned} (R_1^\pi F[u, u_t, u_x])(x, t) &= u^0(x, t) + \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi) d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} \left\{ F[u, u_t, u_x](\xi, \tau) - F[0, 0, 0](\xi, \tau) \right\} d\tau + \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} \left\{ F[u, u_t, u_x](\xi, \tau) - F[0, 0, 0](\xi, \tau) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи (5.4) і (5.7), знаходимо

$$|(R_1^\pi F[u, u_t, u_x])(x, t)| \leq |u^0(x, t)| + \frac{\pi^2}{2} (N_1 \|u\|_{C_\pi} + N_2 \|u_t\|_{C_\pi} + N_3 \|u_x\|_{C_\pi}),$$

$$|(R_1^\pi F[u, u_t, u_x])_t(x, t)| \leq |u_t^0(x, t)| + \frac{\pi}{2} (N_1 \|u\|_{C_\pi} + N_2 \|u_t\|_{C_\pi} + N_3 \|u_x\|_{C_\pi}),$$

$$|(R_1^\pi F[u, u_t, u_x])_x(x, t)| \leq |u_x^0(x, t)| + \frac{\pi}{2} (N_1 \|u\|_{C_\pi} + N_2 \|u_t\|_{C_\pi} + N_3 \|u_x\|_{C_\pi}).$$

Якщо останні дві нерівності помножити на π , а $(N_2 \pi^2/2) \|u_t\|_{C_\pi}$ і $(N_3 \pi^2/2) \|u_x\|_{C_\pi}$ переписати у вигляді $(N_2 \pi/2) \pi \|u_t\|_{C_\pi}$ і $(N_3 \pi/2) \pi \|u_x\|_{C_\pi}$, то ми одержуємо

$$\|(R_1^\pi F[u, u_t, u_x])(x, t)\|_{C_\pi^1} \leq \Gamma_1 + \left[\frac{\pi^2}{2} N_1 + \frac{\pi}{2} \left[N_2 + N_3 \right] \right] \|u\|_{C_\pi^1} \leq$$

$$\leq \Gamma_1 + \left[\frac{\pi^2}{2} N_1 + \frac{\pi}{2} \left[N_2 + N_3 \right] \right] M. \quad (5.18)$$

Якщо вибрати константи Ліпшица N_i , $i = 1, 2, 3$, такими, щоб виконувалася умова (5.10) теореми 5.2, то з нерівності (5.2), беручи до уваги, що $\Gamma_1 < M/2$, одержуємо

$$\|(R_1^\pi F[u, u_t, u_x])(x, t)\|_{C_\pi^1} \leq \Gamma_1 + \frac{M}{2} < M.$$

Отже, при вибраних N_1 , N_2 , N_3 , що задовольняють нерівність (5.10), отримуємо, що коли $u(x, t) \in D$, то $(R_1^\pi F[u, u_t, u_x])(x, t) \in D$.

Для функцій $u(x, t)$ і $z(x, t)$ введемо відстань $\rho(u, z)$, покладаючи

$$\rho(u, z) = \|u(x, t) - z(x, t)\|_{C_\pi^1}.$$

Тоді D буде метричним простором, до того ж цей простір повний.

Переконаємося тепер, що при виконанні умови (5.10) відображення $R_1^\pi F$ буде стисненим. Справді, якщо $u(x, t) \in D$ і $z(x, t) \in D$, то з формули (5.16) і формули

$$\begin{aligned} (R_1^\pi F[z, z_t, z_x])(x, t) = & \frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi) d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} F[z, z_t, z_x](\xi, \tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[z, z_t, z_x](\xi, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

використовуючи умову Ліпшица (5.7), отримуємо

$$|(R_1^\pi F[u, u_t, u_x])(x, t) - (R_1^\pi F[z, z_t, z_x])(x, t)| \leq$$

$$\leq \frac{\pi^2}{2} \left[N_1 \|u - z\|_{C_\pi} + N_2 \|u_t - z_t\|_{C_\pi} + N_3 \|u_x - z_x\|_{C_\pi} \right],$$

$$6. \quad |(R_1^\pi F[u, u_t, u_x])_t(x, t) - (R_1^\pi F[z, z_t, z_x])_t(x, t)| \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \left[N_1 \|u - z\|_{C_\pi} + N_2 \|u_t - z_t\|_{C_\pi} + N_3 \|u_x - z_x\|_{C_\pi} \right],$$

$$7. \quad |(R_1^\pi F[u, u_t, u_x])_x(x, t) - (R_1^\pi F[z, z_t, z_x])_x(x, t)| \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \left[N_1 \|u - z\|_{C_\pi} + N_2 \|u_t - z_t\|_{C_\pi} + N_3 \|u_x - z_x\|_{C_\pi} \right].$$

Звідси маємо

$$\rho(R_1^\pi F[u, u_t, u_x], R_1^\pi F[z, z_t, z_x]) \leq$$

$$\leq \left[\frac{\pi^2}{2} N_1 + \frac{\pi}{2} \left[N_2 + N_3 \right] \right] \rho(u, z) \equiv \alpha \rho(u, z),$$

де $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Таким чином, виконуються всі умови принципу стиснених відображень [35]. Отже, існує єдиний неперервний обмежений на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ розв'язок $(u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t))$ системи інтегральних рівнянь (5.4), а, отже, і гладкий розв'язок $u(x, t) \in$

$\in C^2([0, \pi] \times \mathbb{R})$ крайової періодичної задачі (5.1)–(5.3), причому

$$\|u(x, t)\|_{C^1_\pi} < M.$$

Теорема 5.2 доведена.

Зауваження 5.1. Умову (5.10) можна послабити, якщо доведення теореми 5.2 проводити на основі теореми II.3.1 (теореми 0.1) [79, с.475)]. Справедливе твердження.

Теорема 5.3. Нехай виконуються умови 1)–5) теореми 5.2. Тоді при виконанні умови

$$\frac{\pi^2}{2} N_1 + \frac{\pi}{2} (N_2 + N_3) < 1$$

задача (5.1)–(5.3) має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in A_1^\pi \cap C^1([0, \pi] \times \mathbb{R})$.

§ 6. Періодичні розв'язки нелінійної 2 π -періодичної задачі

В цьому параграфі дослідимо існування гладкого ($u \in C^1_\pi$) розв'язку такої задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t], \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

$$u(x, t+2\pi) = u(x, t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}. \quad (6.3)$$

Заданий оператор $F[u, u_t]$, взагалі кажучи, нелінійний, переводить гладку ($u \in C_\pi^1 \cap A_2^{2\pi}$) функцію в скалярну неперервну функцію $F[u, u_t](x, t) \in C_\pi \cap A_2^{2\pi}$. Для простоти доведення теореми існування і єдиності ми розглянемо лише залежність його від функції u і її похідної u_t .

По аналогії з лінійною задачею (4.1)-(4.3) і записами її розв'язку (4.4) розглянемо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} u(x, t) = (R_2^{2\pi} F[u, u_t])(x, t) = (SF[u, u_t])(x, t) + \\ + \frac{\pi-x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[u, u_t](\xi, \tau) d\tau + \frac{x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} F[u, u_t](\xi, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} u_t(x, t) = \frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi) \left\{ F[u, u_t](\xi, t-x+\xi) - \right. \\ \left. - F[u, u_t](\xi, t+x-\xi) \right\} d\xi, \end{aligned}$$

де функція $Q(\xi)$ визначена формулою (3.14).

Означення 6.1. Неперервний розв'язок $(u, u_t) \in C_\pi$, $u \in A_2^{2\pi}$ системи інтегральних рівнянь (6.4) будемо називати гладким розв'язком 2π -періодичної задачі (6.1)-(6.3).

Використовуючи інтегральне зображення (4.4), (3.13), (3.14) розв'язку $u = R_2^{2\pi} g$ лінійної задачі (4.1)-(4.3), на основі теореми 4.1 переконуємося в справедливості наступного твердження.

Теорема 6.1. Нехай $g \in C_\pi \cap A_2^{2\pi}$. Тоді лінійна задача (4.1)–(4.3) має єдиний гладкий розв'язок $u = R_2^{2\pi} g \in A_2^{2\pi}$, для якого справедливі оцінки (4.9)–(4.11).

Теорема 6.2. Нехай скалярна функція $F[u, u_t](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t))$ задовольняє такі умови:

$$1) f(x, t, u(x, t), u_t(x, t)) \in C([0, \pi] \times \mathbb{R} \times \|u\|_{C_\pi} < \infty \times \|u_t\|_{C_\pi} < \infty); \quad (6.5)$$

$$2) 0 < \|F[0, 0](x, t)\|_{C_\pi} = \Gamma < \infty; \quad (6.6)$$

$$3) |F[u'', u_t''](x, t) - F[u', u_t'](x, t)| \leq N_1 |u''(x, t) - u'(x, t)| + N_2 |u_t''(x, t) - u_t'(x, t)|; \quad (6.7)$$

$$4) F[0, 0](x, t) \in A_2^{2\pi}; \quad (6.8)$$

$$5) \text{ для всіх } u(x, t) \in A_2^{2\pi} \cap C_\pi^1([0, \pi] \times \mathbb{R})$$

$$F[u, u_t](x, t) \in A_2^{2\pi} \cap C_\pi. \quad (6.9)$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{3N_1 \pi^2}{4} + \frac{N_2 \pi}{2} < 1 \quad (6.10)$$

задача (6.1)–(6.3) має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in A_2^{2\pi} \cap C_\pi^1$.

Зауваження 6.1. Замість вимоги, щоб скалярна функція $F[u, u_t](x, t)$ була визначена для всіх $0 \leq x \leq \pi$ і всіх (t, u, u_t) , достатньо, щоб F була визначена для $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbb{R}$, $\|u\|_{C_\pi} \leq L$, $\|u_t\|_{C_\pi} \leq 2L/(3\pi)$, де L задовольняє не-

рівність

$$\frac{3\pi^2\Gamma}{4} \leq L \left[1 - \left[\frac{3N_1\pi^2}{4} + \frac{N_2\pi}{2} \right] \right], \quad (6.11)$$

або просто

$$\frac{3\pi^2 M}{4} \leq L, \quad (6.12)$$

де $M = \|F[u, u_t](x, t)\|_{C_\pi}$ для $\|u\|_{C_\pi} \leq L$, $\|u_t\|_{C_\pi} \leq 2L/(3\pi)$.

Доведення теореми 6.1. Нехай D - банаховий простір елементів $g(x, t) \in A_2^{2\pi} \cap G_{\pi t}$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbb{R}$, з нормою

$$\|g\|_{C_\pi^1} = \max \left\{ \|g\|_{C_\pi}, \frac{3\pi}{2} \|g_t\|_{C_\pi} \right\}. \quad (6.13)$$

Візьмемо в кулі $\|g\|_{C_\pi^1} \leq L$ довільну функцію $g(x, t) \in A_2^{2\pi} \cap G_{\pi t}$. Нехай $u(x, t)$ є єдиний гладкий розв'язок рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = F[g, g_t], \quad (6.14)$$

який задовольняє умови (6.2), (6.3). Визначимо в кулі $\|g\|_{C_\pi^1} \leq L$ простору D оператор $T_\circ$, поклавши $(T_\circ[g])(x, t) = u(x, t)$.

Якщо $u^\circ(x, t) = (T_\circ[0])(x, t)$, то, враховуючи умову (6.6), із оцінок (4.9), (4.10) при $g(x, t) = F[0, 0](x, t)$, одержуємо

$$\|u^\circ(x, t)\|_{C_\pi} \leq \frac{3}{4} \pi^2 \Gamma, \quad \frac{3\pi}{2} \|u_t^\circ(x, t)\|_{C_\pi} \leq \frac{3}{4} \pi^2 \Gamma. \quad (6.15)$$

Отже, норма функції $u^\circ(x, t) = (T_\circ[0])(x, t) \in D$ задовольняє

нерівність

$$\|(T_o[O])(x,t)\|_{C_\pi^1} \leq \frac{3}{4} \pi^2 \Gamma. \quad (6.16)$$

Тепер, якщо $u_1 = T_o[g_1]$, $u_2 = T_o[g_2]$, то згідно (4.9), (4.10) і (6.7)

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \frac{3\pi^2}{4} \left[N_1 \|g_1 - g_2\|_{C_\pi} + N_2 \|g_{1t} - g_{2t}\|_{C_\pi} \right],$$

$$|u_{1t}(x,t) - u_{2t}(x,t)| \leq \frac{\pi}{2} \left[N_1 \|g_1 - g_2\|_{C_\pi} + N_2 \|g_{1t} - g_{2t}\|_{C_\pi} \right].$$

Якщо останню нерівність помножити на $3\pi/2$ і $N_2(3\pi^2/4)\|g_{1t} - g_{2t}\|_{C_\pi}$ записати у вигляді $(N_2\pi/2)(3\pi/2)\|g_{1t} - g_{2t}\|_{C_\pi}$, то ми одержуємо нерівність

$$\|T_o[g_1] - T_o[g_2]\|_{C_\pi^1} \leq \left[\frac{3N_1\pi^2}{4} + \frac{N_2\pi}{2} \right] \|g_1 - g_2\|_{C_\pi^1}. \quad (6.17)$$

Тепер на основі нерівностей (6.10), (6.11), (6.16) бачимо, що виконуються всі умови теореми II.3.1 (теореми 0.1, [79, с.475]), тобто, теорема 6.2 доведена.

Аналогічно, якщо $\|F[u, u_t](x,t)\|_{C_\pi} \leq M$ для $\|u\|_{C_\pi} \leq L$, $\|u_t\|_{C_\pi} \leq 2L/(3\pi)$, то частина співвідношень (6.15), які відносяться до $u_t(x,t)$, показує, що якщо $\|g\|_{C_\pi^1} \leq L$, то $u = T_o[g]$ задовольняє нерівність $\|u\|_{C_\pi^1} \leq \frac{3\pi^2 M}{4}$. Отже, якщо справедлива нерівність (6.12), то

T_0 відображає кулю $\|g\|_{C_\pi^1} \leq L$ саму в себе, а це означає в силу (6.10), що виконуються всі умови зауваження II.3.1, які відносяться до теореми II.3.1 (теореми 0.1 [79, с.475]).

Таким чином, теорема 6.2 і зауваження 6.1 повністю доведені.

Зауваження. Виходячи з методики доведення теореми 6.2 і використовуючи оцінки (4.9)-(4.11) можна при певних умовах довести теорему існування і єдиності розв'язку $u(x,t) \in A_2^{2\pi} \cap C_\pi^1$ для такої більш загальної крайової 2π -періодичної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = F(u, u_t, u_x)(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u(x, t+2\pi) = u(x, t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}.$$

В И С Н О В К И

В дисертаційній роботі досліджена лінійна та нелінійна крайова періодична задача для гіперболічного рівняння другого порядку.

Встановлено теорему існування і єдиності класичного розв'язку лінійної крайової періодичної задачі.

Виведено функціональне рівняння, при допомозі якого визначено конкретні простори функцій, в яких існує класичний розв'язок лінійної крайової періодичної задачі.

Вивчено властивості обернених операторів.

Знайдено аналітичні розв'язки лінійної крайової періодичної задачі.

Отримано умови існування гладкого розв'язку нелінійної крайової періодичної задачі.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Аболиня В.Э., Мышкис А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости// Учен. зап. Латв. ун-та.- 1958.- 20.- С.87-104.
2. Аболиня В.Э., Мышкис А.Д. Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости// Мат. сб. - 1960.- 50, № 4.- С.423-442.
3. Алымкулов К.В. Отыскание периодических решений нелинейных гиперболических уравнений// Интегро-дифференц. уравнения и их прил.- Фрунзе, 1978.- № 1.- С.11-13.
4. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике//Успехи мат. наук.- 1963.- - 18, вып. 6.- С.92-191.
5. Артемьев Н.А. Периодические решения одного класса уравнений в частных производных//Изв. АН СССР. Сер. мат.- 1937.- № 1.- - С.15-50.
6. Баландин А.В., Весницкий А.И., Уткин Г.А. О периодических решениях одномерного волнового уравнения с однородными условиями на движущихся границах// Дифференц. и интегральн. уравнения.- Горький, 1980.- № 4.- С. 84-90.
7. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными.- М.:Мир, 1966.- 351 с.
8. Бирюк Г.И. Об одной теореме существования почти периодических решений некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром// Докл. АН СССР.- 1954.- 96, № 1.- С.5-7.
9. Бобик І.О. Крайові задачі для гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами. //Доп. АН України.-1993.- № 6.- С.5-9.

10. Бобик І.О. Пташник Б.М. Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. // Укр.мат.журн.- 1994.- 46, № 7.- С.795-802.
11. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.- М.: Наука, 1974.- 501 с.
12. Вагабов А.И. Одна задача колебания конечной струны// Дифференц. уравнения.- 1983.- 19, № 12.- С.2163-2166.
13. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.- М.: Наука, 1972.- 432 с.
14. Вейвода О., Штедры М. Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений// Дифференц. уравнения.- 1984.- 20, № 10.- С.1733-1739.
15. Виноградова Г.А. О решении уравнения внутренних волн //Соврем. методы в теории краев. задач: Тез.докл., шк., Воронеж, 4-8 мая 1992 г.- Воронеж, 1992 - С.26.
16. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1967.- 436 с.
17. Волterra В. Теории функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений.-М.:Наука, 1982. - 304 с.
18. Вульпе И.М. Нахождение периодических решений нелинейных систем методом усреднения// Дифференц. уравнения.- 1978.- 14, № 9.- С.1558-1565.
19. Годунов С.К. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1971.- 416 с.
20. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.- Киев: Наук. думка, 1984.- 284 с.

21. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач.- М.: Наука, 1980.- 208 с.
22. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости.- М.: Наука, 1967.- 472 с.
23. Жестков С.В. О периодических решениях нелинейных гиперболических систем в полосе//Дифференц. уравнения.- 1989.- 25, № 10.- С. 1806-1807.
24. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах.- М.: Физматгиз, 1959.- 632 с.
25. Карп В.Н. О существовании и единственности периодического решения одной нелинейной задачи о вынужденных колебаниях струны// Докл. АН СССР.- 1960.- 133, № 3.- С.515-518.
26. Карп В.Н. Применение метода волновых областей к решению задачи о вынужденных нелинейных периодических колебаниях струны// Изв. высш. учебн. заведений. Математика.- 1961.- № 6.- С.51-59.
27. Кирилич В.М. Задача про визначення крайової частини одномоірної гіперболічної системи // Вісн. Львів ун-ту. Сер. мех.-мат.- 1991.- Вип. 36.- С.92-97.
28. Кирилич В.М. Основні крайові задачі для гіперболічних рівнянь і систем на прямій.- Київ, 1993.- 72 с.
29. Комарницька Л.І., Пташник Б.М. Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язного відносно старшої похідної за часом // Укр.мат.журн.- 1995.-47, № 9.- С.1197-1208.
30. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики.- М.: Высшая школа, 1970.- 600 с.
31. Курант Р. Уравнения с частными производными.- М.: Мир, 1964.- 830 с.

32. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения.- М.: Гостехиздат, 1953.- 210 с.
33. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики.- М.: Наука, 1973.- 304 с.
34. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях.-М.: Мир, 1981.-598 с.
35. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа.-М.: Наука, 1965.- 519 с.
36. Мельник З.О. Об одной общей смешанной задаче//Докл. АН СССР.- 1964.- 157, № 5.- С.1039-10342.
37. Мельник З.О. Общие смешанные задачи для общих двумерных гиперболических систем// Дифференц. уравнения.- 1966.- 2, № 7.- С.958-966.
38. Мельник З.О. О гиперболических уравнениях с кратными характеристиками// Дифференц. уравнения.- 1974.- 10, № 8.- С.1530-1532.
39. Мельник З.О., Кирилич В.М. Задача без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой// Укр. мат. журн.- 1993.- 35, № 6.- С.722-727.
40. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами.-Киев: Наук. думка, 1984.- 212с.
41. Митропольский Ю.А., Хома Г.П. О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. I //Укр.мат.журн.-1986.-38. № 5.- С.593-600.
42. Митропольский Ю.А., Хома Г.П. О периодических решениях волновых уравнений второго порядка II// Там же, № 6.-С .733-739.

43. Митропольский Ю.А., Хома Г.П. О периодических решениях волновых уравнений второго порядка III// Укр.мат.журн.- 1987,- 39, № 3.- С.347-353.
44. Митропольский Ю.А., Хома Г.П. О периодических решениях волновых уравнений второго порядка IV// Там же.- 1988.-40, № 6.- С.757-763.
45. Митропольский Ю.А., Хома Н.Г. Періодичні розв'язки квазілінійних рівнянь //Укр.мат.журн. 1995.- 47, № 10.- С.1370-1375.
46. Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа.- Киев: Наук. думка, 1991.- 232 с.
47. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных.- М.: Наука, 1976.- 406 с.
48. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных.- М.: Высшая школа, 1977.- 510 с.
49. Мышкис А.Д., Филимонов А.Н. Непрерывные решения квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными// Дифференц. уравнения.- 1981.- 17, № 3.- С.488-500.
50. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы.- М.: Наука, 1969.- 526 с.
51. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа// Дифференц. уравнения.- 1969.- 5, № 1.- С.44-59.
52. Нахушев А.М. Методика постановки корректных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости// Там же.- 1970.- 6, № 2.- С.192-195.
53. Немыцкий В.В., Слудская М.И., Черкасов А.Н. Курс математического анализа. Т.1.- М.: ГИТТЛ, 1957.- 300 с.

54. Немыцкий В.В., Слудская М.И., Черкасов А.Н. Курс математического анализа. Т.2.- М.: ГИТТЛ, 1957.- 400 с.
55. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу.- М.: Мир, 1977.- 232 с.
56. Панков О.А. Про нелінійні гіперболічні системи з майже періодичними коефіцієнтами// Доп. АН УРСР. Сер. А.- 1988.- № 8.- С.31-33.
57. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными.- М.: Физматгиз, 1961.- 400 с.
58. Погореленко В.А. О существовании периодического решения одномерного волнового уравнения//Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с част. произ., посвящ. 75-летию со дня рождения И.Г.Петровского, Москва, 27-31 янв. 1976.- М.: Моск. ун-т, 1978.- С.415-416.
59. Полищук В.М. Периодическая краевая задача для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами//Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений.- К.: Ин-т математики АН УССР, 1976.- С.60-65.
60. Полищук В.М., Пташник Б.И. Периодическая краевая задача для линейных гиперболических уравнений и систем.- Львов, 1982.- 60 с.- (Препринт АН УССР. Физ.-мех. ин-т; №64).
61. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.- К.: Наук. думка, 1984.- 264 с.
62. Романко В.К. Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов.- 1974.- 10, № 1.- С.117-131.
63. Романко В.К. Граничные задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений// Докл. АН СССР.- 1976.- 227, № 4.- С.812-816.

64. Романко В.К. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений//Докл. АН СССР.- 1986.- 286, № 1.- С.47-50.
65. Рудаков И.А. Задача о свободных периодических колебаниях струны с немонотонной нелинейностью//Успехи мат. наук.- 1985.- 241, вып. 1.- С.215-216.
66. Савченко Г.Б. Об одной краевой задаче для системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами// Дифференц. уравнения.- 1973.- 9, № 3.- С.527-532.
67. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений.- К.: Вища шк., 1976.- 180с.
68. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач.-Киев:Наук.думка, 1986.- 224 с.
69. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых дифференциальных уравнений.-Киев:Наук.думка, 1992.-280 с.
70. Самойленко А.М., Ткач Б.П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений с частными производными- К.: Наук думка., 1992.- 208 с.
71. Скрыпник И.В. Применение топологических методов к уравнениям с монотонными операторами// Укр.мат.журн.- 1972.- 24, № 1.- С.69-79.
72. Соболев С.Л. О почти периодичности решений волнового уравнения I-III// Докл. АН СССР.- 1945.- 18, № 8.- С.570-573; № 9.- С.646-649; 1946.- 19, № 1.- С.12-15.
73. Соболев С.Л. Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе// Докл. АН СССР.- 1956.- 109, № 4.- С.707-709.

74. Соболев С.Л. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1956.- 443 с.
75. Стеклов В.А. Основные задачи математической физики.- М.: Наука, 1983.- 600 с.
76. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.- М.: Физматгиз, 1959.- 467 с.
77. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1977.-736 с.
78. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. - М.: Наука, 1969-1970.- Т. 1-2.
79. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.-М.: Мир, 1970.- 720 с.
80. Хома Л.Г., Хома Н.Г. Про властивість розв'язків однієї крайової задачі// Доп. АН України. - 1994. - № 3. С.1240-1243.
81. Хома Лариса, Хома Надія. Розв'язність однієї крайової періодичної задачі для квазілінійного гіперболічного рівняння другого порядку//Всеукраїнська наукова конференція "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях, присвячена 70-річчю від дня народження професора П.С.Казімірського (Львів, 5-7 жовтня 1995 р.):Тез.доп.- Львів, 1995.- С.60-61.
- 82 Хома Л.Г., Хома Н.Г. Узагальнені періодичні розв'язки квазілінійних рівнянь//Укр.мат.журн.- 1996.-48, № 3.- С.406-411.
83. Хома Л.Г., Хома Н.Г., Петрівський Я.Б. Тривіальні розв'язки однорідної крайової періодичної задачі//Волинський математичний вісник. - 1995, вип.2.- С.179-180.
84. Хома Н.Г. Розв'язність однієї крайової задачі//Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.-Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. - С.195-196.

85. Хома Н.Г. Про сумісність однієї крайової задачі//Третя міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука (Київ, 25-27 травня 1994 р.):Тез.доп.- К.: Ін-т математики НАН України, 1994.- С.121.
86. Хома Н.Г. Існування гладкого розв'язку однієї крайової задачі// Укр.мат.журн.- 1995.-47, № 12.- С.1717-1719.
87. Хома Н. Інтегральні зображення хвильових процесів//Міжнародна наукова конференція, присвячена 150-річчю від дня народження видатного українського фізика і електротехніка Івана Пулюя (Тернопіль, 24-28 травня 1995 р.):Тез.доп.- Тернопіль, 1995.- С.37-38.
88. Хома Н.Г. Простори розв'язків однієї крайової задачі//Доп. НАН України.-1996.- № 1.- С.17-19.
89. Хома Н.Г., Петрівський Я.Б. Про періодичні розв'язки квазілінійних рівнянь гіперболічного типу//Четверта міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука (Київ, 11-13 травня 1995 р.):Тез.доп.- К.:Ін-т математики НАН України, 1995.- С.241.
90. Чернятин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Изд-во МГУ, 1991.- 112 с.
91. Штедры М. Периодические решения волнового уравнения// 5-е Сов.-чехословац. совещ. по применению методов теории функций и функц. анализа к задачам мат. физ., Алма-Ата, 1976 г.: Материалы совещ.- Новосибирск, 1978.- С.307-310.
92. Aman H., Zehnder E. Nontrivial solutions for a class of nonresonans problems and applications to nonlinear differential equations// Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.- 1980.- 8.- P.539-603.

93. Aziz A.K., Brodsky S.L. Periodic solutions of a class nonlinear hyperbolic partial differential equations// SIAM J.Math. Anal.- 1972.- 3, № 2.- P.300-313.
94. Aziz A.K., Horak M.G. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in the large// SIAM J.Math. Anal.- 1972.- 3, № 1.- P.176-182.
95. Aziz A.K., Meyers A.M. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in a trip// Trans. Amer. Math. Soc.- 1969.- 146, Dec.- P.167-178.
96. Bartak Yaroslav, Vejvoda Otto. Periodic solutions of linear partial differential equations of the first order// Czechosl. Math. J.- 1991.- 41, № 2.- P.185-202.
97. Bassanini Piero. On a boundary value problem for a class of quasilinear systems in two independent variables//Atti Semin. mat. e fis. Univ. Modena.- 1975(1976).- 24, № 2.- P.343-372.
98. Brezis H., Nirenberg L. Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems// Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.- 1978.- 5, № 2.- P.225-326.
99. Brezis H., Nirenberg L. Forced vibrations for a nonlinear wave equations// Comm. Pure Appl. Math.- 1978.- 31, № 1.- P.1-30.
100. Brezis H., Coron J.M., Nirenberg L. Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P.Rabinowitz// Ibid.- 1980.- 33, № 5.- P.667-684.
101. Brezis H., Coron J.M. Periodic solutions of nonlinear wave equations and Hamiltonian system// Amer. J. Math.- 1980.- - 103, № 3.- P.559-570.

102. Browder F.E. Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach spaces// Bull. Amer. Math. Soc.(N.S.).- 1965.- 71, № 5.- P.780-785.
103. Coron J.M. Periodic solutions of a nonlinear wave equations without assumption of monotonicity// Math. Ann.- 1983.-262, № 2.- P.273-285.
104. Hall W.S. A Rayleigh wave equation an analysis// Nonlinear analysis Theory, Methods and Applications.- 1978.- 2.- P.129-156.
105. Lee Da-Tsin, Yu Wen -Tsu. Boundary value problems for the first order quasilinear hyperbolic systems and their applications// J.Piffer. Equat.- 1981.- 4, № 1.- P.1-26.
106. Lovicarova H. Periodic solutions of a weakly nonlinear wave equation in one dimension// Chech. Math. J.- 1969.- 19, № 2.- P.324-342.
107. Mawhin J. Periodic oscillations of some nonlinear wave systems// Тр. IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям, Киев, 30 авг.-6 сент. 1981 г.: Тез.докл.- Киев: Наук. думка, 1981.- P.206.
108. Minty G. Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space// Duke Math. J.- 1962.- 29, № 3.- P.341-346.
108. Nirenberg L. Variational and topological methods in nonlinear problems// Bull. Amer. Math. Soc.(№.S.).- 1981.- 4, № 3.- P.267-302.
110. Nishida T. Global solution for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system// Proc. Japan. Acad.- 1968.- 44, № 142.- P.642-646.

111. Niizeki Hyôrô. On a representation of solutions of the Cauchy problem for a semilinear hyperbolic system. III// Mem. Fac. Sci. Kochi Univ.- 1981.- 3.- P.1-15.
112. Rabinowitz P. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math.- 1967.- 20, № 1.- P.145-205.
113. Rabinowitz P. Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations// Ibid.- 1969.- 22, № 1.- P.15-39.
114. Rabinowitz P. Time periodic solutions of nonlinear wave equation// Manuscr. Math.- 1978.- 31, № 1.- P.31-68.
115. Rabinowitz P. Apriori bounds for a semilinear wave equation// Lect. Notes Math.-1979.- № 703.- P.340-347.
116. Turo Jan. A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems of hereditary partial differential equations// Atti Semin. mat. e fis. Univ. Modena.- 1986.- 34, № 1.- P.13-34.
117. Vejvoda O. On the existense and stability of the periodic solution of the second kind of a certain mechanical system// Czech. Math. J.- 1959.- 9, № 3.- P.390-415.
118. Vejvoda O. Periodic solutions of a linear and weakly nonlinear wave equation in one dimension// Ibid.- 1964.- 14, № 3.- P.341-382.
119. Vejvoda O., Štědry M. Periodic solutions to weakly nonlinear autonomous wave equations// Ibid.- 1975.- 25(100), № 4.- P.536-555.
120. Vejvoda O., Hartman L., Lovicarova H. et all. Partial differential equations: Time periodic solutions.- In: Alphen aan. den Rijn. Sijthoff: Noordhoff, 1981.- 358+XIII p.

121. Willem Michel. Periodic solutions with jumping nonlinearities// Semin. math. appl. et mec.- 1979.- № 1, IY/1-IY/15.
122. Willem Michel. Subharmonic oscillations of a semilinear wave equation// Semin. math. pure et. appl. Univ. cathol. Louvain.- 1983.- № 1, II/1-II/16.