Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Хома–Могильська Світлана Григорівна

УДК 517.9

КРАЙОВІ ПЕРІОДИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Київ – 2007

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико–математичних наук,
академік НАН України
Самойленко Анатолій Михайлович,
Інститут математики НАН України,
директор.

Офіційні опоненти: доктор фізико–математичних наук, професор
Вірченко Ніна Опанасівна,
Національний технічний університет України „КПІ”,
професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей;

кандидат фізико–математичних наук, доцент
Кирилич Володимир Михайлович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
доцент кафедри диференціальних рівнянь.

Захист відбудеться „26” листопада 2007 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 03022, м. Київ–22, просп. академіка Глушкова, 6, корпус 7, механіко–математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Київського національного університету імені Тараса Шевченка (01033, м. Київ, вул. Володимирська, 58).

Автореферат розісланий „___” ____________2007 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради М. П. Моклячук

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. При дослідженні крайових періодичних задач як для звичайних диференціальних рівнянь, так і рівнянь з частинними похідними, завжди виникають такі дві проблеми: відшукання методу знаходження розв'язку крайової періодичної задачі та встановлення умов існування розв'язку. Для звичайних диференціальних рівнянь розроблено достатньо методів відшукання періодичних розв'язків, у тому числі і всесвітньо відомий чисельно-аналітичний метод А. М. Самойленка. Що ж стосується рівнянь з частинними похідними, особливо як лінійних, так і нелінійних рівнянь гіперболічного типу, то слід зазначити, що існують методи, за допомогою яких доводять лише існування розв'язків крайових періодичних задач. Усіх їх можна поділити на чотири види.

До першого можна віднести так звані класичні методи, які передбачають відшукання розв'язку методом розділення змінних (метод Фур'є).

Другий вид – це функціональні методи, які почали розвиватися в 60–х роках XX століття і передбачали доведення лише існування розв'язку на підставі властивостей оберненого оператора. Це методи Г. Брезіса, Д. Корона, Л. Ніренберга, П. Рабиновича, І. Рудакова.

Третій вид – метод малих знаменників (метод Б. Й. Пташника та його учнів).

Четвертий вид – аналітичні методи, запропоновані чеськими математиками О. Вейводою та М. Штедри та розвинуті українськими математиками Ю. О. Митропольським та Н. Г. Хомою.

Слід зазначити, що результати, отримані математиками, які використовували різні методи відшукання розв'язків крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь, не пов'язані між собою. Наприклад, якщо взяти роботу О. Вейводи і М. Штедри за 1984 рік, то в ній немає посилань на результати Б. Й. Пташника та П. Рабиновича, одержаних в 60-х роках. З вищесказаного випливає, що розв'язність крайових періодичних задач вимагає встановлення нових умов розв'язності та проведення порівняння даних результатів. Цим і обґрунтовується актуальність та необхідність подальших досліджень за тематикою, до якої відноситься пропонована дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертаційної роботи пов'язана з тематикою досліджень кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, тема 06БФ038-01 „Якісні та аналітичні методи дослідження і моделювання нелінійних систем та фізико–механічних полів" (керівник М. О. Перестюк, номер державної реєстрації 0106U005863). Частково дисертаційні дослідження виконувалися в рамках держбюджетної теми „Методи відшукання періодичних розв'язків крайових задач" (номер державної реєстрації №0106U000518), розробкою якої займається кафедра економіко–математичних методів і моделей Тернопільського національного економічного університету.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційного дослідження є встановлення нових форм і методів відшукання періодичних розв’язків крайових задач для гіперболічного рівняння другого порядку.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв’язати такі завдання:

1) встановити зв’язок між різними результатами, одержаними в другій половині XX століття;

2) встановити умови існування розв’язку крайової періодичної задачі для лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$;

3) провести порівняльну характеристику одержаних результатів;

4) довести, що узагальнені розв’язки крайової періодичної задачі легко встановлюються за допомогою класичного методу характеристик;

5) показати, що одержані результати можна застосувати і для більш загальних крайових періодичних задач.

Об’єктом дослідження є крайові періодичні задачі для гіперболічних рівнянь другого порядку.

Предметом дослідження є періодичні розв’язки вказаних задач.

Наукова новизна отриманих результатів:

1) встановлено умови розв’язності крайової $\omega-$періодичної задачі для неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку;

2) на підставі даних умов вперше сформульовано основну теорему про розв’язність крайової періодичної задачі у випадку $\dfrac{2\pi}{\omega}-$ ірраціональне число ($\omega-$ період);

3) за допомогою одержаного методу доведено ряд формул точного розв’язку крайової періодичної задачі для різних значень періоду $\omega = 2\pi$, $\omega = \pi$, $\omega = 4\pi$;

4) побудовано узагальнено неперервні розв’язки крайової періодичної задачі;

5) показано практичне застосування одержаних результатів.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані в дисертаційній роботі результати мають теоретичне і практичне значення. Вони можуть бути використані для подальшого розвитку теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними та побудови наближених розв’язків квазілінійних рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Всі наукові результати, включені в дисертацію, одержані здобувачем особисто. Щодо розглянутих в дисертації задач, які розв’язані в працях спільно з академіком НАН України Ю. О. Митропольським, співавтору належить їх постановка і загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дослідження. Результати дисертаційного дослідження доповідались та обговорювалися на:

– Міжнародних наукових конференціях ім. академіка М. Кравчука (Київ, 2000, 2004, 2006 роки);

- Міжнародній науковій конференції “Диференціальні та інтегральні рівняння” (Одеса, 2000 р.);
- Міжнародній науковій конференції “Нові підходи до розв’язання диференціальних рівнянь” (Дрогобич, 2001 р.);
- Міжнародній науковій конференції “Диференціальні рівняння і нелінійні коливання” (Чернівці, 2001 р.);
- III Всеукраїнській науковій конференції “Нелінійні проблеми аналізу” (Івано-Франківськ, 2003 р.);
- Конференції молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача (Львів, 2004 р.);
- Міжнародній науково–практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна. Сучасний стан науки: досягнення, проблеми та перспективи розвитку” (Київ, 2005 р.);
- Всеукраїнській науковій конференції молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвяченій 100-річневому ювілею Я. Б. Лопатинського (Донецьк, 6-7 грудня 2006 р.);
- науковому семінарі кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь КНУ ім. Тараса Шевченка;
- науковому семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник академік НАН України А. М. Самойленко).

Публікації. За результатами дисертаційного дослідження опубліковано 17 робіт, з них 8 – у фахових виданнях, що входять до переліку №1, затвердженого ВАК України, та 9 – у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 77 найменувань (8 сторінок). Повний обсяг роботи становить 113 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* висвітлено стан наукової проблеми, обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання дослідження, наведено основні результати, визначено їх новизну та практичне значення, охарактеризовано зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами, вказано кількість публікацій автора за темою дисертації, зазначено особистий внесок автора в роботах , опублікованих разом із співавторами, приведені дані про апробацію результатів дослідження, наведено список основних позначень, зокрема:

C_π – простір функцій двох змінних *x* і *t*, неперервних і обмежених на $[0,\pi]\times \mathrm{R}$.

$C_\pi^{k,l}$ – простір функцій $u\in C_\pi$ таких, що $D_t^k D_x^l\, u \in C_\pi$.

$G_{\pi t}$ – простір функцій двох змінних *x* і *t*, неперервних і обмежених на

$[0,\pi]\times\mathrm{R}$ разом із похідною по t.

Q_ω – простір функцій $g(x, t)$, які задовольняють на $[0,\pi]\times\mathrm{R}$ співвідношення $g(x,\ t+\omega)=g(x,t)$. Сюди будемо включати і ω – періодичні функції $\mu=\mu(t)$ однієї змінної.

$L(X, Y)$ – простір лінійних і обмежених відображень X в Y.

У *першому* розділі проведено огляд літератури, присвяченої дослідженню крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь, викладено основні відомі результати, пов'язані з напрямом дослідження.

У *другому* розділі встановлено умови існування класичних розв'язків крайової періодичної задачі для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку.

Так у пункті 2.1 на основі представлення розв'язку крайової періодичної задачі у вигляді

$$u(x,\ t)=u^0(x,\ t)+\tilde{u}(x,\ t),$$

де $u^0(x,\ t)$ – розв'язок однорідної періодичної задачі, який визначається як

$$u^0(x,t)=Ax+B+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos\nu_k x+A_k^2\sin\nu_k x\right)\cos\nu_k t+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^3\cos\nu_k x+A_k^4\sin\nu_k x\right)\sin\nu_k t, \tag{1}$$

$\nu_k=\dfrac{2\pi k}{\omega}$, A, B, A_k^1, A_k^2, A_k^3, A_k^4, $k\in\mathrm{N}$ – довільні сталі, а $\tilde{u}(x,t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$ такий, що $\tilde{u}(x,t+\omega)=\tilde{u}(x,t)$, і який при умові $g(x,t+\omega)=g(x,t)$ може бути представлений однією з формул

$$\tilde{u}_1(x,t)=-\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau\equiv\left(S_1 g\right)(x,t), \tag{2}$$

$$\tilde{u}_2(x,t)=-\frac{1}{2}\int_x^{\pi} d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau\equiv\left(S_2 g\right)(x,t), \tag{3}$$

$$\tilde{u}_{\mathrm{H}}(x,t)=\frac{1}{2}\left(S_1 g+S_2 g\right)(x,t)\equiv\left(Sg\right)(x,t), \tag{4}$$

з врахуванням крайових умов $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ встановлено умови розв'язності крайової ω–періодичної задачі

$$u_{tt}-u_{xx}=g(x,t),\quad 0<x<\pi,\quad t\in\mathrm{R}, \tag{5}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\in\mathrm{R}, \tag{6}$$

$$u(x,t+\omega)=u(x,t),\quad 0\le x\le\pi,\quad t\in\mathrm{R}, \tag{7}$$

а саме:

$$B+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(A_k^1\cos\nu_k t+A_k^3\sin\nu_k t\Big)+\tilde{u}(0,t)=0,$$

$$A\pi+B+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(A_k^1\cos\nu_k\pi+A_k^2\sin\nu_k\pi\Big)\cos\nu_k t+ \tag{8}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(A_k^3\cos\nu_k\pi+A_k^4\sin\nu_k\pi\Big)\sin\nu_k t+\tilde{u}(\pi,t)=0.$$

Ця система є специфічною у тому розумінні, що вона набуває різного вигляду залежно від значення періоду ω, а тому загального методу її розв'язання не існує. Досліджувати систему (8) необхідно для кожного періоду окремо. Зокрема, для випадку $\omega\neq\dfrac{2\pi p}{q}$, $p,q\in\mathrm{N}$, сформульована

Основна теорема. *Нехай функції $\tilde{u}(0,t)$ і $\tilde{u}(\pi,t)$ розкладаються у рівномірно збіжні ряди Фур'є $\tilde{u}(0,t)=\dfrac{a_0^0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k^0\cos\nu_k t+b_k^0\sin\nu_k t\Big)$ і $\tilde{u}(\pi,t)=\dfrac{a_0^\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k^\pi\cos\nu_k t+b_k^\pi\sin\nu_k t\Big)$. Якщо $\nu_k=\dfrac{2\pi k}{\omega}$ не є раціональним числом, тобто, $\nu_k\notin\mathrm{Q}$, $k\in\mathrm{N}$, то система (8) має єдиний розв'язок, а отже, крайова періодична задача (5)–(7) має єдиний формальний точний розв'язок, а саме:*

$$u(x,t)=u^0(x,t)+\tilde{u}(x,t)\equiv$$

$$\equiv\frac{a_0^0-a_0^\pi}{2\pi}x-\frac{a_0^0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-a_k^0\cos\nu_k x+\frac{a_k^0\cos\nu_k\pi-a_k^\pi}{\sin\nu_k\pi}\sin\nu_k x\right)\cos\nu_k t+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-b_k^0\cos\nu_k x+\frac{b_k^0\cos\nu_k\pi-b_k^\pi}{\sin\nu_k\pi}\sin\nu_k x\right)\sin\nu_k t+\big(Sg\big)(x,t), \tag{9}$$

де функція $\big(Sg\big)(x,t)$ визначається за формулою (4).

У випадку, коли **ω=2π**, $\nu_k=k$, $k\in\mathrm{N}$, система розв'язності (8) набуває вигляду

$$B+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(A_k^1\cos kt+A_k^3\sin kt\Big)+\tilde{u}(0,t)=0,$$

$$A\pi+B+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(A_k^1\cos k\pi\cos kt+A_k^3\cos k\pi\sin kt\Big)+\tilde{u}(\pi,t)=0. \tag{10}$$

Дана система є системою двох різних рівнянь для визначення одних і тих самих коефіцієнтів A_k^1 і A_k^3, $k\in\mathrm{N}$. Оскільки ряди $\sum_{k=1}^{\infty}\Big(A_k^1\cos kt+A_k^3\sin kt\Big)$ і $\sum_{k=1}^{\infty}\Big(A_k^1\cos k\pi\cos kt+A_k^3\cos k\pi\sin kt\Big)$ збігаються при $k=2n$ і набувають протилежних значень при $k=2n+1$, то найпростішим випадком розв'язності системи (10) буде випадок, коли існує клас функцій $g(x,t)$ правої частини неоднорідного рівняння (5), для яких частинний розв'язок $\tilde{u}(x,t)$ періодичної задачі (5)–(7) при $x=0$ і $x=\pi$ набуває постійного значення, тобто

$$\tilde{u}(0,t)=const,\quad \tilde{u}(\pi,t)=const. \tag{11}$$

Тоді розв'язком системи (10) будуть коефіцієнти $B=-\tilde{u}(0,t)$, $A=\frac{1}{\pi}\left(\tilde{u}(0,t)-\tilde{u}(\pi,t)\right)$, $A_k^1=0$, $A_k^3=0$, $k\in\mathrm{N}$. Отже, при виконанні умов (11) у випадку $\omega=2\pi$ лінійна неоднорідна крайова періодична задача (5)–(7) має безліч розв'язків, які задаються формулою

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^2\cos kt+A_k^4\sin kt)\sin kx+\tilde{u}(x,t)+\frac{x}{\pi}\left(\tilde{u}(0,t)-\tilde{u}(\pi,t)\right)-\tilde{u}(0,t), \tag{12}$$

де A_k^2, A_k^4, $k\in\mathrm{N}$ – довільні сталі.

Однак існує клас 2π–періодичних функцій $A_2=\{g:g(x,t)=$ $=g(\pi-x,t+\pi)=g(x,t+2\pi)\}$, визначених на $[0,\pi]\times\mathrm{R}$, для яких розв'язок крайової періодичної задачі (5)–(7) єдиний у тому розумінні, що розв'язок

$$u_1^0(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2\cos kt+A_k^4\sin kt\right)\sin kx \tag{13}$$

відповідної однорідної крайової періодичної задачі

$$u_{tt}^0-u_{xx}^0=0,\quad 0<x<\pi,\quad t\in\mathrm{R}, \tag{14}$$

$$u^0\left(0,t\right)=u^0\left(\pi,t\right)=0,\quad t\in\mathrm{R}, \tag{15}$$

$$u^0\left(x,t+2\pi\right)=u^0\left(x,t\right),\quad 0\le x\le\pi,\quad t\in\mathrm{R}, \tag{16}$$

у класі функцій A_2 є тривіальним.

Лема 2.1. *Якщо функція $u_1^0(x,t)$, яка визначена формулою (13), є розв'язком однорідної крайової періодичної задачі (14)–(16) і $u_1^0\in A_2$, то $u_1^0(x,t)\equiv 0$.*

Лема 2.2. *Якщо $g\in C_\pi\cap A_2$, то функції*

$$\tilde{u}(0,t)\equiv\left(Sg\right)(0,t)=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi}g(\xi,\tau)d\tau \ \text{ і } \ \tilde{u}(\pi,t)\equiv\left(Sg\right)(\pi,t)=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}d\xi\int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi}g(\xi,\tau)d\tau$$

є тотожньо сталими, тобто $\tilde{u}(0,t)\equiv\left(Sg\right)(0,t)=const$ і $\tilde{u}(\pi,t)\equiv\left(Sg\right)(\pi,t)=const$ для всіх $t\in$ □ .

Теорема 2.4. *Якщо $g\in G_{\pi t}\cap A_2$, то функція*

$$u(x,t)=\left(R_2g\right)(x,t)\equiv\left(Sg\right)(x,t)+\frac{\pi-x}{4\pi}\int_0^{\pi}d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi}g(\xi,\tau)d\tau+\frac{x}{4\pi}\int_0^{\pi}d\xi\int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi}g(\xi,\tau)d\tau$$

є єдиною функцією із простору $C_\pi^{2,2}\cap A_2$, яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (5)–(7) при $\omega=2\pi$. Крім цього, $R_2\in L\left(C_\pi\cap A_2,\quad C_\pi^{1,1}\cap A_2\right)$, $R_2\in L\left(G_{\pi t}\cap A_2,\quad C_\pi^{2,2}\cap A_2\right)$.

Розглянувши частковий випадок розв'язності системи (10) у класі 2π–

періодичних функцій, визначених таким чином: $A_2^+ = \{g : g(x,t) = -g(\pi - x, t) = -g(x, \pi - t) = g(x, -t)\}$ ($A_2^+ \subset A_2$), одержано таке твердження.

Теорема 2.5. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap A_2^+$, *то функція* $u(x,t) = \left(R_2^+ g\right)(x,t)$, *яка визначена формулою*

$$u(x,t) = \left(R_2^+ g\right)(x,t) \equiv \left(Sg\right)(x,t) + \frac{\pi - 2x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)d\tau, \qquad (17)$$

є єдиною функцією із простору $C_\pi^{2,2} \cap A_2^+$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (5)–(7) при* $\omega = 2\pi$. *Крім цього,* $R_2^+ \in L\left(C_\pi \cap A_2^+,\ \ C_\pi^{1,1} \cap A_2^+\right)$, $R_2^+ \in L\left(G_{\pi t} \cap A_2^+,\ \ C_\pi^{2,2} \cap A_2^+\right)$, *причому* $\left\|\left(R_2^+ g\right)(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{2}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}$; $\left\|\left(R_2^+ g\right)_t(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}$; $\left\|\left(R_2^+ g\right)_x(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \pi\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}$;
де $\left\|\varphi(x,t)\right\|_{C_\pi} = \sup\limits_{(x,t)\in[0,\pi]\times \mathrm{R}} \left|\varphi(x,t)\right|$.

Беручи до уваги те, що оператор R_2^+ переводить парну по t функцію $g(x, t)$ у парну функцію $\left(R_2^+ g\right)(x,t)$, і враховуючи властивості тригонометричних рядів Фур'є, доведено, що розв'язок $u(x,t) = (R_2^+ g)(x,t)$ крайової періодичної задачі (5)–(7) при $\omega = 2\pi$ розкладається лише по косинусах, тобто при певних умовах він зображається рядом $u(x,t) = \left(R_2^+ g\right)(x,t) = \frac{a_0(x)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)\cos kt$.

Лема 2.5. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap A_2^+$, *то* $a_{2n}(x) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Отже, при відповідних умовах, накладених на функцію $g(x, t)$ – праву частину неоднорідного рівняння (5), розв'язок крайової періодичної задачі (5)–(7) у класі функцій A_2^+ має вигляд

$$u(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{2s-1}(x)\cos(2s-1)t. \qquad (18)$$

Зауважимо, що дослідження умов розв'язності крайової періодичної задачі (5)–(7) при $\omega = 2\pi$ у попередніх пунктах проводилося на основі використання частинного розв'язку $\tilde{u}(x,t) = \left(Sg\right)(x,t)$, тобто на підставі формули (4). Однак, у випадку $\omega = 2\pi$ для розв'язності системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь (8) можна використати і частинний розв'язок $\tilde{u}_1(x,t) = \left(S_1 g\right)(x,t)$, записаний у вигляді формули (2). Тоді одержуємо

$$\tilde{u}_1(0,t) \equiv 0, \qquad \tilde{u}_1(\pi,t) = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)d\tau, \quad t \in \mathrm{R}. \qquad (19)$$

На підставі систем (8) і (19) знайдено, що $B=0$, $A_k^1=0$, $A_k^3=0$, $A=-\frac{1}{\pi}\tilde{u}_1(\pi,t)$, $k\in\mathrm{N}$, де A в цьому випадку є функцією від t, що суперечить визначеності числа A. Зрозуміло, що повинні існувати додаткові умови розв'язності крайової періодичної задачі (5)–(7) при $\omega=2\pi$. На нашу думку, це пов'язано з структурою самого розв'язку вказаної задачі, який при цьому має вигляд

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2\cos kt+A_k^4\sin kt\right)\sin kx+\tilde{u}_1(x,t)-\frac{x}{\pi}\tilde{u}_1(\pi,t), \tag{20}$$

де A_k^2, A_k^4, $k\in\mathrm{N}$, – довільні сталі. Зауважимо, що функція

$$u_2^0(x,t)=-\frac{x}{\pi}\,\tilde{u}_1(\pi,t)\equiv\frac{x}{2\pi}\int_0^{\pi}d\xi\int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau, \tag{21}$$

яка входить до розв'язку (20), не завжди буде розв'язком однорідної крайової періодичної задачі (14)–(16). У роботі показано, що проблема розв'язності крайової періодичної задачі (5)–(7) при $\omega=2\pi$ тісно пов'язана з вибором невідомих коефіцієнтів A_k^2, і A_k^4.

Лема 2.6. *Для кожної функції* $\mu(t)\in C^1(\mathrm{R})\cap Q_{2\pi}$, *яка розкладається у рівномірно збіжний ряд Фур'є*

$$\mu(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kt+b_k\sin kt\right), \tag{22}$$

справедливим є зображення

$$\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{x}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)d\alpha\equiv\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^2\cos kt+A_k^4\sin kt)\sin kx, \tag{23}$$

де $A_k^2=a_k/k$, $A_k^4=b_k/k$, $k\in\mathrm{N}$.

Отже, на підставі леми 2.6 розв'язок (20) крайової періодичної задачі (5)–(7) при $\omega=2\pi$ можна зобразити у вигляді

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)d\tau+\frac{x}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}d\xi\int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi}g(\xi,\tau)d\tau-\int_{t-\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)d\alpha\right\}. \tag{24}$$

Це дає можливість сформулювати результат, аналогічний результату П. Рабиновича.

Теорема 2.6. *Нехай* $g\in G_{\pi\,t}\cap Q_{2\pi}$. *Тоді для кожної функції* $\mu(t)\in C^1\cap Q_{2\pi}$, *яка задовольняє рівняння*

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)d\alpha=\int_0^{\pi}d\xi\int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau, \tag{25}$$

функція

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau\equiv u^0(x,t)+\tilde{u}_1(x,t) \tag{26}$$

є єдиним класичним розв'язком крайової періодичної задачі (5)–(7) при $\omega=2\pi$.

Дана теорема підтверджує результат П. Рабиновича (Rabinowitz P. Periodic solution of hyperbolic partial differential equations //Comm. Pure Appl. Math–1967. – Vol. 20, № 1. – P. 145–205) про можливість існування класичних $2\pi-$періодичних розв'язків крайової періодичної задачі (5)–(7) при $\omega = 2\pi$ у вигляді $u_1(x,t) = u^0(x,t) + \tilde{u}_1(x,t)$, де $u^0(x,t)$ – розв'язок однорідного рівняння $u^0_{tt} - u^0_{xx} = 0$, а $\tilde{u}_1(x,t)$ – розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$.

Більше того, рівність (25) є рівнянням для відшукання невідомої функції $\mu(t)$, оскільки воно означає рівність двох функцій однієї змінної *t*. З іншого боку, рівність (25) є умовою виділення класу функцій *g* (*x*, *t*), для яких справедливою є теорема 2.6.

Лема 2.7. *Для кожної непарної функції* $\mu(t) \in C(\mathbf{R}) \cap Q_{2\pi}$ *виконується умова* $\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\, d\alpha = 0,\ \ t \in \square$.

Теорема 2.7. *Нехай* $g \in G_{\pi t} \cap Q_{2\pi}$ *і функція g (x, t) задовольняє рівняння*

$$\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau = 0, \quad t \in \mathrm{R}. \tag{27}$$

Тоді для кожної непарної функції $\mu(t) \in C^1 \cap Q_{2\pi}$ *функція* $u_1(x,t)$*, яка визначена формулою (26), є єдиним класичним розв'язком крайової періодичної задачі (5)–(7) при* $\omega = 2\pi$.

Оскільки $\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\, d\alpha = \int\limits_0^{2\pi} \mu(\alpha)\, d\alpha = const$, то для справедливості теореми 2.6, необхідно, щоб і права частина рівності (25), тобто інтеграл

$$\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau \tag{28}$$

набував постійного значення. А це, як доведено в роботі, можливе в класі функцій A_2. Тому, покладаючи $t = \pi$, рівність (28) може бути записана у вигляді $\int\limits_0^{2\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{\xi}^{2\pi-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau$.

Теорема 2.8. *Нехай*

1) $g(x,t) \in G_{\pi t}\ \mathrm{I}\ A_2$ і $\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{\xi}^{2\pi-\xi} g(\xi,\tau) d\tau = \delta \neq 0$;

2) $\mu(t) \in C^1(\square) \cap Q_{2\pi}$, $\mu(t + 2\pi) = \mu(t)$ і $\int\limits_0^{2\pi} \mu(\alpha) d\alpha = \gamma \neq 0$.

Тоді для кожної функції $\beta(t)=\dfrac{\delta}{\gamma}\mu(t)$ *функція*

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\beta(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau\equiv u^0(x,t)+\tilde{u}_1(x,t) \qquad (29)$$

є єдиним класичним розв'язком крайової періодичної задачі (5)–(7) при $\omega=2\pi$.

У класі **π**– періодичних функцій у дисертаційній роботі доведені

Лема 2.8. *Якщо* $g\in C_\pi\bigcap A_1=\{g:g(x,t)=g(\pi-x,t)=g(x,t+\pi)\}$, *то* $g\in A_2$.

Лема 2.9. *Якщо* $g\in C_\pi\bigcap A_1$, *то*

$$\left(Sg\right)(0,t)=\left(Sg\right)(\pi,t)=const. \qquad (30)$$

Теорема 2.9. *Якщо* $g\in G_{\pi t}\bigcap A_1$, *то функція* $u=R_1g$, *яка визначена формулою*

$$u(x,t)=\left(R_1g\right)(x,t)\equiv\left(Sg\right)(x,t)+\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi d\xi\int\limits_{t-\xi}^{t+\xi}g(\xi,\tau)d\tau, \qquad (31)$$

є єдиною функцією із класу $C_\pi^{2,2}\bigcap A_1$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (5)–(7) при* $\omega=\pi$. *Крім цього,* $R_1\in L(C_\pi\bigcap A_1,\ C_\pi^{1,1}\bigcap A_1)$, $R_1\in L(G_{\pi t}\bigcap A_1,\ C_\pi^{2,2}\bigcap A_1)$.

Лема 2.10. *Якщо* $g\in C_\pi\bigcap A_2^-=\{g:g(x,t)=g(\pi-x,t+\pi)=g(x,t+2\pi)=$ $=-g(x,-t)\}$, *то* $\tilde{u}(0,t)\equiv\left(Sg\right)(0,t)=0$ *і* $\tilde{u}(\pi,t)\equiv\left(Sg\right)(\pi,t)=0$, $t\in\mathrm{R}$.

Теорема 2.10. *Якщо* $g\in G_{\pi t}\bigcap A_k^-$, *k=1, 2, то функція* $u(x,t)=\left(Sg\right)(x,t)$ *є єдиною функцією із класу* $C_\pi^{2,2}\bigcap A_k^-$, *k=1, 2, яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (5)–(7) при* $\omega=k\pi$, *k=1, 2, і оператор S володіє властивостями:* $S\in L(C_\pi\bigcap A_k^-,\ C_\pi^{1,1}\bigcap A_k^-)$, $S\in L(G_{\pi t}\bigcap A_k^-,\ C_\pi^{2,2}\bigcap A_k^-)$, *k=1, 2.*

У класі **4π**– періодичних функцій отримані такі результати.

Лема 2.11. *Якщо* $g\in C_\pi\bigcap A_{4\pi}=\{g:g(x,t)=-g(x,t+2\pi)\}$, *то* $g\in Q_{4\pi}$.

Лема 2.12. *Якщо* $u^0(x,t)\in A_{4\pi}$ *і є розв'язком однорідної крайової* $\omega=4\pi$– *періодичної задачі, то* $u^0(x,t)\equiv 0$.

Теорема 2.11. *Якщо* $g\in G_{\pi t}\bigcap A_{4\pi}$, *то функція*

$$u(x,t)=\left(R_{4\pi}g\right)(x,t)\equiv\left(Sg\right)(x,t)+\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi d\xi\int\limits_{t-x-\xi}^{t+x+\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau \qquad (32)$$

є єдиною функцією із класу $C_\pi^{2,2}\bigcap A_{4\pi}$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (5)–(7) при* $\omega=4\pi$. *Крім цього,* $R_{4\pi}\in L(C_\pi\bigcap A_{4\pi},\ C_\pi^{1,1}\bigcap A_{4\pi})$, $R_{4\pi}\in L(G_{\pi t}\bigcap A_{4\pi},\ C_\pi^{2,2}\bigcap A_{4\pi})$, *причому* $\left\|(R_{4\pi}g)(x,t)\right\|_{C_\pi}\le\pi^2\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}$;

$$\left\|(R_{4\pi}g)_t(x,t)\right\|_{C_\pi}\le\pi\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi};\quad \left\|(R_{4\pi}g)_x(x,t)\right\|_{C_\pi}\le\pi\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi},$$

де $\left\|\varphi(x,t)\right\|_{C_\pi}=\sup\limits_{(x,t)\in[0,\pi]\times\mathrm{R}}\left|\varphi(x,t)\right|$.

Дослідження, проведені у другому розділі, дають змогу зробити висновок, що крайова періодична задача $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, $u(x,t+2\pi)=u(x,t)$ для лінійного гіперболічного рівняння $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$ може бути розв'язана різними операторними методами залежно від класу функцій $g(x,t)$ і періоду ω. Як було показано в другому розділі, крайова періодична задача може мати і нескінченну множину розв'язків, що є передумовою встановлення єдиності розв'язку цієї задачі. Відповідь на це питання одержано у *третьому* розділі, де доведено існування узагальнених (неперервних $u\in C\big([0,\pi]\times\mathrm{R}\big)$) розв'язків крайової 2π–періодичної задачі і встановлено, при яких умовах узагальнено неперервні розв'язки можуть бути класичними. Класичні результати повністю збігаються з результатами другого розділу.

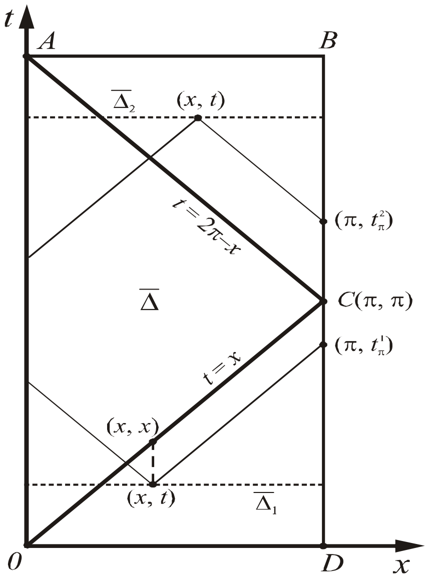
У пункті 3.1 побудовано у прямокутнику $[0,\pi]\times[0,2\pi]$ (малюнок 1) неперервний розв'язок крайової задачі

$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t),\quad 0<x<\pi,\quad 0\le t\le 2\pi, \tag{33}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad 0\le t\le 2\pi, \tag{34}$$

$$u_x(0,t)=\mu(t),\quad 0\le t\le 2\pi, \tag{35}$$

і вивчено його властивості.



Малюнок 1.

$$\overline{\Delta}=\left\{(x,t)\in\mathrm{R}^2:\ 0\le x\le\pi,\quad x\le t\le 2\pi-x\right\};$$

$$\overline{\Delta}_1=\left\{(x,t)\in\mathrm{R}^2:\ 0\le x\le\pi,\quad 0\le t\le x\right\};$$

$$\overline{\Delta}_2=\left\{(x,t)\in\mathrm{R}^2:\ 0\le x\le\pi,\quad 2\pi-x\le t\le 2\pi\right\};$$

$$\overline{\Pi}_{2\pi}=[0,\pi]\times[0,2\pi]=\overline{\Delta}\cup\overline{\Delta}_1\cup\overline{\Delta}_2.$$

Відомо, що функція

$$u_\Delta(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\eta\int\limits_{t-x+\eta}^{t+x-\eta}f(\eta,\tau)\,d\tau \tag{36}$$

є єдиним класичним розв'язком задачі Коші

$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t),\quad 0<x<\pi,\quad 0\le t\le 2\pi, \tag{37}$$

$$u(0,t)=0,\qquad u_x(0,t)=\mu(t),\quad 0\le t\le 2\pi, \tag{38}$$

у характеристичному трикутнику $\overline{\Delta}$ (див. малюнок 1).

У дисертаційній роботі доведено, що функція

$$u_{\Delta_1}(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int_{2\pi+t-x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^x d\eta\int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\eta\int_{\eta}^{t-x+\eta}f(\eta,\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\eta\int_{2\pi+t-x-\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau \tag{39}$$

при $\mu(t)\in C^1(\mathbb{R})$ і $f(x,t)\in C^{0,1}\big([0,\pi]\times\mathbb{R}\big)$ є класичним розв'язком рівняння (33) у трикутнику $\overline{\Delta}_1$, а функція

$$u_{\Delta_2}(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^{t+x-2\pi}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int_{t-x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^x d\eta\int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\eta\int_{2\pi-\eta}^{t+x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\eta\int_{\eta}^{t+x+\eta-2\pi}f(\eta,\tau)d\tau \tag{40}$$

при $\mu(t)\in C^1(\mathbb{R})$ і $f(x,t)\in C^{0,1}\big([0,\pi]\times\mathbb{R}\big)$ є класичним розв'язком рівняння (33) у трикутнику $\overline{\Delta}_2$ (див. малюнок 1).

На основі формул (36), (39), (40) побудова функція

$$\tilde{u}(x,t)=\begin{cases}u_{\Delta}(x,t), & (x,t)\in\overline{\Delta},\\ u_{\Delta_1}(x,t), & (x,t)\in\Delta_1\setminus\{t=x,\quad 0\le x\le\pi\},\\ u_{\Delta_2}(x,t), & (x,t)\in\Delta_2\setminus\{t=2\pi-x,\quad 0\le x\le\pi\},\end{cases} \tag{41}$$

яка визначена у прямокутнику $\overline{\Pi}_{2\pi}$ і володіє властивостями:

Теорема 3.2. *Якщо* $\mu(t)\in C(\mathbb{R})$ *і* $f(x,t)\in C\big([0,\pi]\times\mathbb{R}\big)$, *то функція* $\tilde{u}(x,t)$, *визначена формулою (41), є неперервною функцією у прямокутнику* $\overline{\Pi}_{2\pi}$.

Зауваження 3.1. За відповідних умов, накладених на праву частину $f(x, t)$ неоднорідного рівняння (33), а також початкову функцію $\mu(t)$, формула (41) містить класичні розв'язки крайової задачі (33)–(35), класичні розв'язки періодичної задачі $u(x,t+2\pi)=u(x,t)$.

Теорема 3.3. *При виконанні умов теореми 3.2 і умови*

$$\int_0^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha-\int_0^{\pi}d\eta\int_{\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau=0 \tag{42}$$

функція $\tilde{u}(x,t)$, *визначена згідно з (41), задовольняє крайові умови*

$$\tilde{u}(0,t)=\tilde{u}(\pi,t)=0,\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Теорема 3.4. *При виконанні умов теореми 3.2 і умов*

$$\textit{1)}\ \mu(0)=\mu(2\pi);\qquad \textit{2)}\ \int_0^{\pi}\{f(\eta,2\pi-\eta)-f(\eta,\eta)\}d\eta=0$$

функція $\tilde{u}(x,t)$, *визначена згідно з формулою (41), має неперервні частинні похідні першого порядку у прямокутнику* $\overline{\Pi}_{2\pi}$.

Зауваження 3.2. Якщо для правої частини $f(x, t)$ рівняння (33) виконується умова $\int\limits_0^{\pi} d\eta \int\limits_{\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)d\tau = b \neq 0$, то для кожної функції $\mu(t) \in C(\mathbb{R})$, для якої виконується умова $\int\limits_0^{2\pi} \mu(\alpha)\, d\alpha = a \neq 0$ завжди існує неперервний розв'язок у прямокутнику $\overline{\Pi} = [0,\pi]\times[0,2\pi]$ задачі (33)–(35).

У пункті 3.2 подана структура неперервного розв'язку в класі періодичних функцій.

Зокрема розглянуто класи функцій:

$A_{2\pi}^{-} = \left\{ f : f(x,t) = f(x, t+2\pi) = -f(x,-t) \right\}$;

$A_{2\pi}^{+} = \left\{ f : f(x,t) = f(x, t+2\pi) = f(x,-t) \right\}$;

$A_2 = \left\{ f : f(x,t) = f(\pi - x, \pi + t) = f(x, t+2\pi) \right\}$;

$A_2^{-} = \left\{ f : f(x,t) = f(\pi - x, \pi + t) = f(x, t+2\pi) = -f(x,-t) \right\}$;

$Q_{2\pi} = \left\{ \mu : \mu(t) = \mu(t+2\pi) \right\}$;

$Q_{2\pi}^{-} = \left\{ \mu : \mu(t) = \mu(t+2\pi) = -\mu(-t) \right\}$.

Теорема 3.5. *Нехай функції* $\mu(t)$ *і* $f(x, t)$ *задовольняють такі умови:*

$$\text{1) } \mu(t) \in C(\mathbb{R}) \cap Q_{2\pi}^{-}; \quad \text{2) } f(x,t) \in A_{2\pi}^{-} \cap C_{\pi}.$$

Тоді функція $\tilde{u}(x,t)$*, визначена формулою (41), задовольняє крайові умови* $\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(\pi,t) = 0$.

Теорема 3.6. *Нехай 1)* $\mu(t) \in C(\mathbb{R}) \cap Q_{2\pi}$*; 2)* $f(x,t) \in A_2 \cap C_{\pi}$.
Тоді функція $\tilde{u}(x,t)$*, визначена формулою (41), має неперервні частинні похідні першого порядку у прямокутнику* $\overline{\Pi}_{2\pi}$.

Теорема 3.7. *Нехай функції* $\mu(t)$ *і* $f(x, t)$ *задовольняють такі умови:*

$$\text{1) } \mu \in C^1(\mathbb{R}) \cap Q_{2\pi}^{-}; \quad \text{2) } f \in G_{\pi t} \cap A_2^{-}.$$

Тоді функція $u_{\Delta}(x,t)$*, визначена формулою (36), є єдиним у прямокутнику* $\overline{\Pi}_{2\pi}$ 2π*–періодичним класичним* $\left(u_{\Delta} \in C_{\pi}^{2,2}\right)$ *розв'язком крайової задачі*

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u_x(0,t) = \mu(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3.8. *Якщо* $f \in G_{\pi t} \cap A_2^{-}$*, то функція* $u = Sf$*, визначена формулою*

$$(Sf)(x,t) = -\frac{1}{4}\int\limits_0^{x} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\xi,\tau)\, d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_x^{\pi} d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\xi,\tau)\, d\tau, \qquad (43)$$

є єдиною функцією із простору $C_{\pi}^{2,2} \cap A_2^{-}$*, яка задовольняє умови крайової* 2π*–періодичної задачі*

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad u(x, t+2\pi) = u(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

У підпункті 3.2.3. знайдено узагальнено неперервний розв'язок крайової задачі (33), (34).

Теорема 3.9. *Нехай* $f(x,t)\in C_{\pi}$ *і*

$$\int\limits_{0}^{\pi} d\eta \int\limits_{\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)d\tau=\delta\neq 0\,. \tag{44}$$

Тоді для кожної функції $\mu(t)\in C(\text{Ў})$*, для якої*

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \mu(\alpha)d\alpha=\gamma\neq 0, \tag{45}$$

крайова задача (33), (34) має єдиний узагальнено неперервний розв'язок у прямокутнику $\overline{\Pi}_{2\pi}$.

У *четвертому* розділі показане практичне застосування результатів (умов існування), одержаних у другому і третьому розділах, для дослідження загальної крайової періодичної задачі для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку. Знайдено нову заміну змінних, на підставі якої досягнуто даний результат. Доведено основну теорему, а також доведено існування гладких розв'язків квазілінійної крайової періодичної задачі.

Розглядається така загальна крайова $2\pi-$ періодична задача:

$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t),\quad 0<x<\pi,\quad t\in\square\,, \tag{46}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(\pi,t)=\mu_2(t),\quad t\in\mathrm{R}\,, \tag{47}$$

$$u(x,t+2\pi)=u(x,t),\quad 0\le x\le\pi,\quad t\in\mathrm{R}\,. \tag{48}$$

а також квазілінійна крайова періодична задача

$$u_{tt}-u_{xx}=F[u,u_t],\quad 0<x<\pi,\quad t\in\mathrm{R}\,, \tag{49}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\in\mathrm{R}\,, \tag{50}$$

$$u(x,t+2\pi)=u(x,t),\quad 0\le x\le\pi,\quad t\in\mathrm{R}\,. \tag{51}$$

Встановлено умови існування класичних розв'язків задачі (46)–(48) та умови існування гладкого (узагальненого) розв'язку задачі (49)–(51), а саме в класі функцій $A_2^{+}=\left\{g: g(x,t)=-\,g(\pi-x,t)=-g(x,\pi-t)=g(x,-t)\right\}$.

За аналогією з лінійним випадком розглядається така система інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} &u(x,t)=\left(R_2^{+}F[u,u_t]\right)(x,t)\equiv\left(SF[u,u_t]\right)(x,t)+\frac{\pi-2x}{4\pi}\int\limits_{0}^{\pi}d\xi\int\limits_{t-\xi}^{t+\xi}F[u,u_t](\xi,\tau)d\tau,\\ &u_t(x,t)=\left(R_2^{+}F[u,u_t]\right)_t(x,t)\equiv\left(SF[u,u_t]\right)_t(x,t),\\ &u_x(x,t)=\left(R_2^{+}F[u,u_t]\right)_x(x,t)\equiv\left(SF[u,u_t]\right)_x(x,t)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}d\xi\int\limits_{t-\xi}^{t+\xi}F[u,u_t](\xi,\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{52}$$

де $\left(SF[u,u_t]\right)(x,t)=-\dfrac{1}{4}\int\limits_{0}^{x}d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}F[u,u_t](\xi,\tau)d\tau-\dfrac{1}{4}\int\limits_{x}^{\pi}d\xi\int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}F[u,u_t](\xi,\tau)d\tau$,

$F[u,u_t](x,t) = f(x,t,u(x,t),u_t(x,t))$ – значення оператора *F,* а $f(x,t,u,u_t)$ – вираз нелінійності правої частини рівняння (49).

Означення 4.1. *Неперервний розв'язок* (u,u_t,u_x), $u \in A_2^+$, *системи інтегральних рівнянь (52) будемо називати гладким розв'язком крайової періодичної задачі (49)–(51).*

Теорема 4.4. *Нехай скалярна функція* $F[u,u_t](x,t) = f\left(x,t,u(x,t),u_t(x,t)\right)$ *задовольняє такі умови:*

1) $f(x,t,u,u_t) \in C_\pi\left([0,\pi]\times \mathrm{R} \times \|u\|_{C_\pi} < \infty \times \|u_t\|_{C_\pi} < \infty\right)$; (53)

2) $0 < \|F[0,0](x,t)\|_{C_\pi} = \Gamma < \infty$; (54)

3) $\left|F[\tilde{\tilde{u}},\tilde{\tilde{u}}_t](x,t) - F[\tilde{u},\tilde{u}_t](x,t)\right| \le N_1\left|\tilde{\tilde{u}}(x,t)-\tilde{u}(x,t)\right| + N_2\left|\tilde{\tilde{u}}_t(x,t)-\tilde{u}_t(x,t)\right|$; (55)

4) $F[0,0](x,t) \in A_2^+$; (56)

5) *для всіх* $u(x,t) \in A_2^+ \cap C_\pi^{1,1}$ $\quad F[u,u_t](x,t) \in A_2^+ \cap C_\pi$. (57)

Тоді при виконанні умови $\dfrac{\pi^2}{2}N_1 + \dfrac{\pi}{2}N_2 < \dfrac{1}{2}$ *задача (49)–(51) має єдиний гладкий* $\left(u \in C_\pi^{1,1} \cap A_2^+\right)$ *розв'язок.*

Теорема 4.5. *Нехай виконуються умови 1)–5) теореми 4.4. Тоді при достатньо малому параметрі* ε *(*$0<\varepsilon<\varepsilon_0$*) правої частини* $\varepsilon F[u,u_t]$ *рівняння (49) задача (49)–(51) має єдиний гладкий* $\left(u(x,t) \in A_2^+ \cap C_\pi^{1,1}\left([0,\pi]\times\mathrm{R}\right)\right)$ *розв'язок.*

ВИСНОВКИ

У роботі встановлено умови існування періодичних розв'язків, що задовольняють крайові умови для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку. Показано, що у випадку ірраціональності періоду ω ($\omega \notin \mathrm{Q}$) завжди існує єдиний формальний розв'язок.

У дисертації обґрунтовано, що з умов існування розв'язку випливають раніше встановлені, але не доведені в літературі результати Ю. Митропольського та його учнів, а також у випадку $\omega = 2\pi$ існує новий клас функцій, для якого розв'язок має вигляд $u(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{2s-1}(x)\cos(2s-1)t$, що не відповідне методам відшукання розв'язку лише у вигляді $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin kx$ (тобто раніше встановленим результатам Б. Пташника та П. Рабиновича).

Показано, що крайова періодична задача для лінійного гіперболічного рівняння другого порядку може бути розв'язана різними операторними методами залежно від класу функцій $g(x,t)$ і періоду ω. Доведено, що крайова періодична задача може мати і нескінченну множину розв'язків, що є передумовою встановлення єдиності розв'язку цієї задачі.

Доведено існування узагальнених (неперервних $u \in C([0,\pi]\times \mathrm{R})$) розв'язків крайової 2π–періодичної задачі і встановлено, за яких умов узагальнено неперервні розв'язки можуть бути класичними.

У випадку $\omega = 2\pi$ на підставі умов розв'язності (8) підтверджено результат П. Рабиновича, який сформульовано у вигляді теореми 2.6.

На підставі умов розв'язності (8) досліджено існування π–періодичних і 4π–періодичних розв'язків крайових періодичних задач. Знайдено точні класичні π, 2π та 4π– періодичні розв'язки вказаних задач.

Наведено нову схему дослідження розв'язків крайової періодичної задачі для лінійного неоднорідного рівняння. Вказаний метод побудови розв'язку лінійної задачі дає змогу досліджувати умови існування неперервних розв'язків багатьох нелінійних крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь.

Вказано на практичне застосування результатів (умов розв'язності) для дослідження загальної крайової періодичної задачі для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку.

Наведено новий запис заміни змінних, що дозволяє використовувати отримані результати для дослідження загальних крайових періодичних задач.

Сформульовано основну теорему, а також доведено існування гладких розв'язків квазілінійної крайової періодичної задачі.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Хома С. Г. Узагальнені періодичні розв'язки гіперболічного рівняння другого порядку // Нелінійні коливання. – 1999. – № 4. – С. 574–577.
2. Хома С. Г. Розв'язок однієї крайової задачі для гіперболічного рівняння другого порядку // Укр. Мат. Журн. –2000. – Т. 52, № 4. – С. 572–573.
3. Хома С. Г. Гладкий розв'язок однієї крайової задачі // Доп. НАН України. – 2000. – № 3. – С. 37–39.
4. Хома С. Г. Класичний розв'язок однієї крайової задачі // Доп. НАН України. – 2000. – № 7. – С. 32–34.
5. Митропольський Ю. О., Хома Н. Г., Хома С. Г. Гладкий розв'язок задачі Діріхле для квазілінійного гіперболічного рівняння другого порядку // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 7. – С. 931–935.
6. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Побудова неперервного розв'язку в прямокутнику $[0,\pi]\times[0,2\pi]$ // Доп. НАН України. – 2005, № 2. – С. 33–37.
7. Хома–Могильська С. Г. Неперервний розв'язок крайової задачі // Доп. НАН України. – 2005. – № 3. – С. 28–32.
8. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного

гіперболічного рівняння другого порядку. І // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 7. – С. 912–921.

9. Хома С. Г. Неперервний розв’язок крайової задачі для гіперболічного рівняння другого порядку // Восьма Міжнародна наукова конференція ім. Академіка М. Кравчука. (Київ, 11–14 травня 2000 року). – К.: “Задруга”, 2000. – С. 209.
10. Хома С. Г., Хома Н. Г., Хохлова Л. Г. Класичні розв’язки періодичної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку // Міжнародна наукова конференція “Диференціальні та інтегральні рівняння” (Одеса, 12–14 вересня 2000 року). – Одеса: „Астро Принт”, 2001. – С. 286–287.
11. Хома С. Г. Єдиність розв’язку деяких крайових періодичних задач для гіперболічного рівняння другого порядку // Міжнародна наукова конференція “Диференціальні рівняння і нелінійні коливання” (Чернівці, 27–29 серпня 2001 року). –К.: Ін-т математики НАН України, 2001. – С. 162–163.
12. Мигович Ф., Хома С. Операторне дослідження крайових задач // Міжнародна наукова конференція “Нові підходи до розв’язання диференціальних рівнянь” (Дрогобич, 1–5 жовтня 2001 року).– К.: Інститут математики НАН України, 2001. – С. 97.
13. Хома-Могильська С. Г. Про один результат П. Рабиновича // Х Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2004 р.). – К.: “Задруга”, 2004. – С. 271.
14. Хома-Могильська С. Г. Властивості розв’язків однієї мішаної задачі // Конференція молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача (Львів, 24–26 травня 2004 р.). Львів, 2004. – С. 164–165.
15. Хома-Могильська С. Г. Про існування періодичних розв’язків // Матеріали Міжнародної науково–практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна. Сучасний стан науки: досягнення, проблеми та перспективи розвитку” (Київ, 10–11 березня 2005 р.). – К: Логос, 2005. – Ч.2. – С. 261–263.
16. Хома–Могильська С. Г. Форми і методи відшукання періодичних розв’язків диференціальних рівнянь // Матеріали Одинадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 18–20 травня 2006 р.). – Київ, 2006. – С.286.
17. Самойленко А. М., Хома Н. Г., Хома–Могильська С. Г. Використання методу Я. Б. Лопатинського для дослідження однієї загальної крайової задачі // Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвячена 100-річневому ювілею Я. Б. Лопатинського (Донецьк, 6-7 грудня 2006 р.). – Донецьк: ДонНУ, 2006. – С.111–112.

АНОТАЦІЯ

Хома–Могильська С. Г. ***Крайові періодичні задачі для гіперболічних рівнянь другого порядку.*** – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2007.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку. Встановлено умови існування періодичних розв'язків вказаних задач. Знайдено точні класичні π, 2π та 4π–періодичні розв'язки крайових періодичних задач. Вказано новий клас функцій, для якого розв'язок крайової 2π– періодичної задачі має вигляд $u(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty} a_{2s-1}(x)\cos(2s-1)t$. Сформульовано основну теорему, яка встановлює єдиний формальний розв'язок крайової періодичної задачі у випадку ірраціональності періоду ω. Наведено нову схему дослідження розв'язків крайової періодичної задачі для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння, яка дає змогу досліджувати умови існування неперервних розв'язків нелінійних крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку. Доведено існування узагальнених розв'язків крайової 2π–періодичної задачі і встановлено, за яких умов узагальнено неперервні розв'язки можуть бути класичними. Вказано на практичне застосування одержаних результатів для дослідження загальних крайових періодичних задач. Доведено існування гладких розв'язків квазілінійних крайових періодичних задач.

Ключові слова: крайова періодична задача, періодичний розв'язок, класичний розв'язок, узагальнено–неперервний розв'язок, умови розв'язності, метод характеристик, клас функцій, оператор, період.

АННОТАЦИЯ

Хома–Могильская С. Г. ***Краевые периодические задачи для гиперболических уравнений второго порядка***. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, 2007.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений разработан ряд аналитических методов отыскания периодических решений как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений. Что касается уравнений с частными производными, особенно гиперболических уравнений второго

порядка, то можно утверждать, что аналитические методы отыскания периодических решений начались разрабатываться относительно недавно. До недавнего времени исследование существования периодических решений гиперболических уравнений второго порядка в большинстве случаев проводилось с помощью рядов Фурье, причем период и краевые условия подбирались так, чтоб можно было достичь желаемого результата.

В первой главе выполнен обзор работ, в которых изучались подобного рода краевые периодические задачи для гиперболических уравнений.

Во второй главе исследована краевая $\omega-$ периодическая задача для неоднородного линейного гиперболического уравнения второго порядка. Найдены условия существования периодических решений данных задач. Найдены точные классические π, 2π и $4\pi-$ периодические решения краевых периодических задач. Указан класс функций, для которого решение краевой $2\pi-$ периодической задачи имеет вид $u(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{2s-1}(x)\cos(2s-1)t$, что не соответствует методам отыскания решений только в виде $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin kx$. Сформулирована основная теорема, которая устанавливает формальное единое решение краевой $\omega-$ периодической задачи в случае иррациональности периода ω. Установлено, что в случае $\omega=2\pi$ краевая периодическая задача имеет бесконечное множество решений и лишь при выполнении дополнительных условий (в конкретных классах функций) данная задача имеет единственное решение.

В третьей главе приведена новая схема исследования решений краевых периодических задач. Указанный метод построения решений даёт возможность исследовать условия существования непрерывных решений нелинейных краевых периодических задач для гиперболических уравнений второго порядка. Доказано существование обобщённых (непрерывных на $u\in C([0,\pi]\times\mathrm{R})$) решений краевой $2\pi-$ периодической задачи. Установлено, при каких условиях обобщённо–непрерывные решения могут быть классическими.

В четвёртой главе приведено практическое применение полученных результатов для исследования общей краевой периодической задачи. Доказано существование гладких решений квазилинейной краевой периодической задачи.

Результаты исследований имеют теоретическое значение, могут быть использованы при исследованиях в теории дифференциальных уравнений с частными производными и уравнений математической физики, а также применятся для решения конкретных прикладных задач, математическими моделями которых служат краевые периодические задачи.

Ключевые слова: краевая периодическая задача, периодическое решение, обобщённо–непрерывное решение, условия разрешимости, метод характеристик, класс функций, оператор, период.

ABSTRACT

Khoma-Mohyl's'ka S. H. ***Periodic boundary-value problems for the second order hyperbolic equations.*** – Manuscript.

The thesis to obtain Scientific Degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in specialty 01.01.02 – Differential Equations. Taras Shevchenko Kyiv National University, Kyiv, 2007.

The thesis deals with comprehensive research for solutions of the periodic boundary-value problems for the second order hyperbolic equations. Conditions of solvability for these problems are established. Exact classic π, 2π and 4π–periodic solutions of the periodic boundary-value problems are found. New class of functions, for which solution of the 2π–periodic boundary-value problem is represented by the formula $u(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty} a_{2s-1}(x)\cos(2s-1)t$, is determined. A new scheme for investigation of the periodic boundary-value problems solutions is proposed. It allows investigating of solutions of nonlinear periodic boundary-value problems for the second order hyperbolic equation. The existence of generalized uninterrupted solutions of the 2π–periodic boundary-value problems is proved. The obtained results are to be applied for investigation of the periodic general boundary-value problems. The existence of smooth solutions of the quasi-linear periodic boundary-value problems is proved.

Key word: periodic boundary-value problems, periodic solutions, generalized uninterrupted solutions, classic solutions, conditions of solvability, the method of characteristics, class of functions, operator, period.