УДК 518.25

Л.М. Семчишин[1], канд. фіз.-мат. наук
А.М. Алілуйко[2]**,** канд. фіз.-мат. наук
Є.О. Марценюк[3]**,** канд. техн. наук
Чортківський навчально-науковий інститут підприємництва і бізнесу[1]
Тернопільський національний економічний університет[1]
Тернопільський національний економічний університет[2]
Тернопільський національний економічний університет[3]

ЗАСТОСУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ МІЖГАЛУЗЕВИХ МОДЕЛЕЙ

У статті запропоновано узагальнені динамічні моделі замкнутої виробничої системи. Розглянуто міжгалузеві моделі та їх місце серед моделей економічної динаміки. Проведено чисельні розрахунки моделі. Наведено спосіб зведення систем із $\lambda -$матрицями до систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Проаналізовано етапи розв’язку моделі відповідно до теорії диференціальних рівнянь. Охарактеризовано складність алгоритму та показано його ефективність з точки зору комп'ютерної алгебри.

Ключові слова: динамічні математичні моделі, система лінійних алгебраїчних рівнянь, матричні многочлени, відношення двох поліномів, узагальнена динамічна модель В. Леонтьєва, матричне рівняння, складність алгоритму.

Вступ. Економіко-математичні дослідження, що проводяться в країні, охоплюють важливі проблеми на різних рівнях планування та управління. Успішне розв'язання численних економіко-математичних задач стало можливим лише завдяки широкому використанню математичних моделей, обчислювальних методів і комп'ютерних технологій. Застосування математики в економіці дозволяє виділити й формально описати найголовніші зв'язки між економічними змінними та параметрами об'єктів дослідження, індуктивним шляхом одержати нові відомості про об'єкт, зробити важливі теоретичні висновки і прийняти правильні економічні рішення. Головні переваги математики як засобу наукового пізнання найповніше розкриваються саме у процесі побудови математичних моделей.

Постановка проблеми. Обчислювальний експеримент дозволяє із заданою точністю кількісно та якісно описати досліджувану проблему, інакше кажучи побудувати математичну модель, аналіз якої в свою чергу дозволяє глибше проникнути в суть явища, що вивчається. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) завжди є одним із актуальних задач обчислювальної математики. Особливо часто їх доводиться розв'язувати під час дослідження економіко-математичних задач. Залежно від того, на який економічний процес звертається основна увага, при побудові й дослідженні моделі використовується відповідний математичний апарат. Головні переваги математики як засобу наукового пізнання найповніше розкриваються саме у процесі побудови математичних моделей.

Аналіз останніх публікацій. У роботі [6, с. 123-129] проведено аналіз пропорцій розширеного відтворення та узагальнення найпростішої динамічної міжгалузевої моделі. Створено оптимізаційні моделі з матрицями міжгалузевого балансу та запропоновано ефективний метод реалізації цих моделей. Проаналізовано економічне зростання при різних траєкторіях споживання. У роботі [7, с. 169-187] запропоновано новий підхід до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва. Проаналізовано обчислювальну стійкість запропонованого алгоритму. Охарактеризовано складність алгоритму та показано його ефективність з точки зору комп'ютерної алгебри.

Актуальність теми. У значній кількості прикладних задач виникає необхідність використання динамічних міжгалузевих моделей. Питання міжгалузевих моделей розглядаються у багатьох публікаціях вітчизняних та зарубіжних вчених. Використанню міжгалузевих моделей присвячені роботи В.С. Григорківа [2], А.Ф. Кабака [4], Жукова С.А. [3], І.М. Ляшенка [6], А.С. Солодовнікова, В.А. Бабайцева, А.В. Браілова [8].

Слід зауважити, що питання розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва розглядалися у працях [6]. Однак, лише в окремих з них розглядалися питання щодо дослідження узагальнених динамічних міжгалузевих моделей [7]. Питання вивчення міжгалузевих моделей в економіко-математичних дослідженнях актуальне, відповідає на важливі методологічні та змістовні питання економіко-математичної науки, допомагає оцінити можливості та перспективи використання математичного моделювання в економіці.

Мета роботи. Метою цієї роботи є дослідження матричного варіанту моделі Леонтьєва-Форда і системи лінійних диференціальних рівнянь першого степеня. Зведення систем із $\lambda -$ матрицями до систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації, економіко-математичне моделювання.

Основна частина.

Розглянемо динамічні математичні моделі, які відповідають окремим аспектам ведення сучасного електронного бізнесу.

1. Модель розвитку бізнес-порталу **(**модель Леонтьєва-Форда**).** Матричний варіант моделі Леонтьєва-Форда має наступний вид:

$$\left.\begin{aligned} A_{1,1}(t)X_1(t)+A_{1,2}(t)X_2(t)=Y_1(t),\\ A_{2,1}(t)X_1(t)+A_{2,2}(t)X_2(t)=-Y_2(t).\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Тут $A_{1,1}(t)$ – матриця основних затрат розмірності $n\times n$; $A_{1,2}(t)$ – матриця прямих затрат, котра має розмірність $n\times m$; $A_{2,1}(t)$ – матриця допоміжних затрат, котра має розмірність $m\times n$; $A_{2,2}(t)$ – матриця затрат на виробництво засобів виробництва розмірності $m\times m$.

Вектори $X_1(t),\ X_2(t)$ – позначають кількість проданих товарів і наданих послуг. У правій частині (1) вектор $Y_1(t)$ – означає загальне обмеження на суму товарів і послуг, а вектор $Y_2(t)$ – це розмір вимушених амортизаційних затрат, необхідних для розвитку порталу.

Матриця цін на товари повинна задовольняти умові

$$\begin{pmatrix} A_{1,1}(t) & A_{1,2}(t)\\ A_{2,1}(t) & A_{2,2}(t)\end{pmatrix}>0. \qquad (2)$$

Вектори правої частини теж повинні бути позитивні

$$\begin{pmatrix} Y_1(t)\\ Y_2(t)\end{pmatrix}>0. \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Без обмеження загальності припускаємо,

$$a_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{l} a_{i,j,k} t^k .$$

і що $\deg a_{i,j}(t) = l$ для всіх $i, j = 1,2,\cdots,n+m$.

Для проведення якісного аналізу моделі та чисельних розрахунків можна скористатися алгоритмом зведення систем із $\lambda -$ матрицями до систем лінійних алгебраїчних рівнянь [3, 92]. Матриці $A(t)$ та $Y(t)$ можна записати у вигляді матричних многочленів

$$A(t) = t^l A_0 + t^{l-1} A_1 + ... + A_l , \tag{4}$$

та

$$Y(t) = t^l Y_0 + t^{l-1} Y_1 + ... + Y_l . \tag{5}$$

Розв’язок системи шукається у вигляді відношення двох поліномів із невідомими коефіцієнтами

$$X(t) = \sum_{j=0}^{s} t^j X_{s-j} / \sum_{j=0}^{s} t^j z_{s-j} \tag{6}$$

де $s = n + m.$

Тут $X_0, X_1, ..., X_s$ – вектори розмірності $n+m$, а $z_0, z_1, ..., z_s$ – скалярні величини. Тоді систему (1) можна записати як числову систему $(n+m)[(n+m+1)+1]$ рівнянь із $(n+m+1)[l(n+m)+1]$ невідомими:

$$\left.\begin{array}{l}
A_0 X_0 - Y_0 z_0 = 0 \\
A_0 X_1 + A_1 X_0 - (Y_0 z_1 + Y_1 z_0) = 0 \\
A_0 X_2 + A_2 X_0 + (Y_0 z_2 + Y_1 z_1 + Y_2 z_0) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum\limits_{j=0}^{l} A_j X_{p-s} - \sum\limits_{j=0}^{l} Y_j z_{p-j} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{l-1} X_s + A_l X_{s-1} - (Y_{l-1} z_s + Y_l z_{s-1}) = 0 \\
A_l X_s - Y_l z_s = 0
\end{array}\right\} \quad (7)$$

2. Розглянемо найпростіша узагальнену модель відтворення валового внутрішнього продукту, яка може бути записана у вигляді:

$$x(t) = a(t)x(t) + b(t)\frac{dx(t)}{dt} + c(t). \quad (8)$$

При дезагрегуванні цієї моделі до галузевого рівня ендогенні та екзогенні змінні $x(t)$, $\frac{dx(t)}{dt}$, $c(t)$ замінюються векторами стовпцями $X(t)$, $\frac{dX(t)}{dt}$, $C(t)$, а параметри a і b - квадратними матрицями A і B. Отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь першого степеня, нерозв'язану відносно похідних узагальнену динамічну модель В. Леонтьєва:

$$X(t) = A(t)X(t) + B(t)\frac{dX(t)}{dt} + C(t), \quad (9)$$

де $X(t) = [x_j(t)]$ – вектор-стовпець обсягів виробництва;

$\frac{dX(t)}{dt} = \left[\frac{dx_j(t)}{dt}\right]$ – вектор-стовпець абсолютних приростів виробництва;

$C(t)$ – вектор-стовпець споживання (разом із невиробничим нагромадженням);

$A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)$ – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат (на відміну від коефіцієнтів статичного міжгалузевого балансу коефіцієнти в динамічній моделі включають також витрати на відшкодування вибуття і капітальний ремонт основних виробничих фондів) $(i,\,j\in J,\;J=\{1,\dots,n\})$;

$B(t)=\left(b_{ij}(t)\right)$ – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів виробництва (витрати виробничого нагромадження на одиницю приросту відповідних видів продукції) $(i,\,j\in J,\;J=\{1,\dots,n\})$.

В такому випадку статична модель міжгалузевого балансу може бути записана як:

$$X=A(t)X(t)+Y(t)$$

або

$$X=\left(E-A(t)\right)^{-1}Y(t),$$

де $\left(E-A(t)\right)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повних потреб у випуску продукції для одержання одиниць відповідних видів кінцевої продукції.

Відповідність між статичною і динамічною моделями міжгалузевого балансу для кожного t встановлюють за допомогою матричного рівняння:

$$Y(t)=B(t)\frac{dX(t)}{dt}+C(t). \qquad (10)$$

Оскільки $\dfrac{dX(t)}{dt}=\left(E-A(t)\right)^{-1}\dfrac{dY(t)}{dt}$, то замість (9) можна досліджувати систему диференціальних рівнянь:

$$Y(t)=B(t)\left(E-A(t)\right)^{-1}\frac{dY(t)}{dt}+C(t), \qquad (11)$$

де $B(t)\left(E-A(t)\right)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повного приросту капіталомісткості, тобто повних витрат виробничого нагромадження на одиничні прирости елементів використовуваного національного доходу [9,10].

Припускають, що $A(t)$ – матриця продукції. У подальшому аналізі зручно вважати матрицю $A(t)$ нерозкладною, а матрицю $B(t)$ – невиродженою. Тоді

$$(E - A(t))^{-1} > E + A(t),$$
$$B(t)(E - A(t))^{-1} > B(t).$$

Далі розглянемо також випадок, коли матриці $B(t)$ і $B(t)(E - A(t))^{-1}$ включають не все виробниче нагромадження, а тільки нагромадження основних виробничих фондів.

На перший погляд ці припущення неприпустимо штучні, оскільки дійсні матриці $A(t)$, як правило, розкладні, а матриці $B(t)$ мають нульові рядки (зокрема, за галузями, що виробляють тільки предмети споживання). Однак після зведення системи (4) до рівнянь тільки для фондоутворюючих галузей обидва припущення стають цілком правомірними.

Очевидно, що економічне значення мають тільки розв'язки $X(t) > 0.$ Аналогічну вимогу в моделі без зовнішньої торгівлі може бути накладено на вектор $Y(t).$ Як буде описано далі, економічним передумовам моделі (9) відповідають тільки не спадні траєкторії $X(t),$ тобто $\frac{dX(t)}{dt} \geq 0.$ Розв'язок системи (4) при $\frac{dY(t)}{dt} \geq 0$ через невід'ємність матриць $(E - A(t))^{-1}$ та $B(t)(E - A(t))^{-1}$ гарантує, що $Y(t) \geq 0$ і $\frac{dX(t)}{dt} \geq 0.$ Однак останні умови можуть бути виконані і тоді, коли окремі компоненти вектора $\frac{dY(t)}{dt}$ від'ємні.

Відповідно до теорії диференціальних рівнянь розв'язок систем (9) і (11) здійснюють в три етапи:

а) визначають загальний розв'язок однорідної системи рівнянь при $C(t) = 0$;

б) знаходять частковий розв'язок неоднорідної системи;

в) з початкових умов обчислюють невизначені сталі загального розв'язку.

Таким чином, обчислювальний процес для даного випадку володіє виключно високою чисельною стійкістю.

Висновки. У статті запропоновано узагальнені динамічні моделі замкнутої виробничої системи. Розглянуто міжгалузеві моделі та їх місце серед моделей економічної динаміки. Проведено чисельні розрахунки моделі. Наведено спосіб зведення систем із $\lambda -$матрицями до систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Проаналізовано етапи розв'язку моделі відповідно до теорії диференціальних рівнянь. Охарактеризовано складність алгоритму та показано його ефективність з точки зору комп'ютерної алгебри.

Одержані результати збагачують теорію математичних методів і розширюють область застосування математичних моделей в економіці.

Список використаних джерел:

1. Бабицький А. Ф. Методологія аналізу економічних процесів і управління. Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / А.Ф. Бабицький. — К.:МАУП, 2003. – 128 с.
2. Григорків В.С. Моделювання економіки. Частина 2: Навч. посібник. – Чернівці: Рута, 2006. –100с.
3. Жуков С.А., Остапчук В.С., Сторубльов О.І. Матемитичні методи та моделі в економіці / Навч. посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2002. – 231 с.
4. Кабак А.Ф. Економіко-математичні методи і моделі / Навч. посібник. – К.: ІЗМН, 1996. – 164 с.
5. Недашковський М.О. Обчислення з λ-матрицями / М.О. Недашковський, О.Я. Ковальчук. – К.: Наукова думка, 2007. – 294 с.
6. Семчишин Л.М. Динамічні математичні моделі в економіці / Л.М. Семчишин. Вісник Тернопільського національного економічного університету. – Тернопіль: Економічна думка, 2008. – Випуск 3. – С. 123-129.
7. Семчишин Л.М. Узагальнені динамічні міжгалузеві моделі / Л.М. Семчишин, М.О. Недашковський. Вісник Тернопільського національного економічного університету. – Тернопіль: Економічна думка, 2009. –Випуск 1. – С. 169–187
8. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике. – М., 2000.

9. Цегелик Г.Г. Чисельні методи / Г.Г. Цегелик. – Л.: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 408 с.
10. Cabay S. Systems f Linear Equations with Dense Univariate Polynomial Coefficients. Journal of the Associaation for Computing Machinery. / S. Cabay B. Domzy. Vol.34. № 3. July 2007.pp.646-660.

The generalized dynamic models of productive close system are offered in the article. Inter-branch models and their place are considered among the models of economic dynamics. The numeral calculations of model are conducted. A method over of erection of the systems is brought with matrices to the systems of linear equalizations of algebra. The stages of decision of model are analysed in accordance with the theory of differential equalizations. Complication of algorithm is described and his efficiency is shown from the point of view of computer algebra.
Key words: dynamic mathematical models, system of linear equalizations of algebra, matrix polynomials, relation of two polynomials, the dynamic model of В. Леонтьєва, matrix equalization, complication of algorithm, is generalized.