УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен, О. Г. Возняк

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Наведено результати дослідження і деякі застосування фундаментальних розв'язків задачі Коші для нового класу параболічних рівнянь, у яких: 1) *є три групи просторових змінних, одна основна та дві додаткові;* 2) *допускаються різні ваги просторових змінних з основної групи відносно часової змінної;* 3) *наявні виродження за змінними з додаткових груп;* 4) *є виродження на початковій гіперплощині.*

У теорії задачі Коші для параболічних рівнянь (і систем рівнянь) одним з найважливіших понять є поняття фундаментального розв'язку (ф. р.). Найточніші та найповніші результати для ф. р. задачі Коші на сьогодні одержано у випадку рівномірно параболічних за І. Г. Петровським рівнянь (коли всі просторові змінні рівноправні та мають одну й ту ж вагу $2b$ відносно часової змінної). Ці результати узагальнювались на випадки: $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь С. Д. Ейдельмана, коли кожна просторова змінна може мати свою вагу, так що рівняння має векторну параболічну вагу $\overrightarrow{2b} = (2b_1, \ldots, 2b_n)$ [7, 11, 13]; вироджених параболічних рівнянь, які узагальнюють класичне рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова [6, 8–10, 12, 16]; параболічних за І. Г. Петровським, $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь і вироджених рівнянь типу А. М. Колмогорова, які мають певні виродження на початковій гіперплощині [1–4].

Недавно С. Д. Ейдельман та один з авторів [5, 15] означили й почали дослідження нового класу параболічних рівнянь – вироджених рівнянь типу А. М. Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною за основною групою змінних. У цих рівняннях узагальнюються означення $\overrightarrow{2b}$-параболічності та структура рівнянь типу А. М. Колмогорова. Крім того, рівняння можуть бути й псевдодиференціальними.

У статті розглядаються рівняння з цього нового класу у випадку, коли коефіцієнти рівнянь не залежать від просторових змінних і наявні виродження на початковій гіперплощині. Будується ф. р. задачі Коші, досліджуються його властивості, наводяться теореми про коректну розв'язність задачі Коші та про інтегральне зображення розв'язків для однорідних рівнянь із слабким виродженням на початковій гіперплощині.

1. Використовуватимемо такі позначення:

$n_1,\ n_2,\ n_3,\ b_1,\ \ldots,\ b_{n_1}$ – задані натуральні числа, причому $n_1 \ge n_2 \ge n_3$;

$N \equiv n_1 + n_2 + n_3$; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, \ldots, 2b_{n_1})$; $q_j \equiv 2b_j/(2b_j - 1)$, $1 \le j \le n_1$;

$\mathbb{Z}_+^r$ – множина всіх r-вимірних мультиіндексів;

$\|m_1\| \equiv \sum_{j=1}^{n_1}\left(m_{1j}/(2b_j)\right)$, якщо $m_1 \equiv (m_{1j},\ 1 \le j \le n_1) \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$;

$M_m \equiv \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}(l - 1 + 1/(2b_j))(m_{lj} + 1)$, якщо $m \equiv (m_{lj},\ 1 \le j \le n_l,\ 1 \le l \le 3) \in \mathbb{Z}_+^N$;

$\left\{X \equiv (x_1,\ x_2,\ x_3),\ \Xi \equiv (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)\right\} \subset \mathbb{R}^N$, якщо $\{x_l \equiv (x_{lj},\ 1 \le j \le n_l)$,

$\xi_l \equiv (\xi_{lj},\ 1 \le j \le n_l)\} \subset \mathbb{R}^{n_l}$, $1 \le l \le 3$;

$\partial_{x_1}^{m_1} \equiv \prod_{j=1}^{n_1} \partial_{x_{1j}}^{m_{1j}}$, $\partial_X^m \equiv \prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l} \partial_{x_{lj}}^{m_l}$, якщо $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $X \in \mathbb{R}^N$, $m_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, $m \in \mathbb{Z}_+^N$;

$B(t,\ \tau) \equiv \int\limits_\tau^t \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}\,d\gamma$, $X_{lj}(t,\ \tau) \equiv \sum_{r=1}^{l-1} \frac{1}{r!}(B(t,\ \tau))^r x_{(l-r)j}$, $1 \le j \le n_l$, $1 \le l \le 3$;

$X(t,\ \tau) \equiv (X_{lj}(t,\ \tau),\ 1 \le j \le n_l,\ 1 \le l \le 3)$;

$E_c(t,\ X;\ \tau,\ \Xi) \equiv \exp\left\{-c\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}(B(t,\ \tau))^{1-lq_j}\left|X_{lj}(t,\ \tau)-\xi_{lj}\right|^{q_j}\right\}$,

$E_c^d(t,\ X;\ \tau,\ \Xi) \equiv E_c(t,\ X;\ \tau,\ \Xi)\exp\left\{d\int\limits_\tau^t \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)}\right\}$; $\Pi_H \equiv \left\{(t,\ X)\mid t \in H,\ X \in \mathbb{R}^N\right\}$,

T − задане додатне число; i − уявна одиниця.

Розглянемо рівняння вигляду

$$(Lu)(t,\ X) \equiv \left(\alpha(t)\partial_t - \beta(t)\left(\sum_{l=2}^{3}\sum_{j=1}^{n_l} x_{(l-1)j}\,\partial_{x_{lj}} + \sum_{0<\|m_1\|\le 1} a_{m_1}(t)\,\partial_{x_1}^{m_1}\right) - \right.$$

$$\left. - a_0(t)\right)u(t,\ X) = 0, \qquad (t,\ X) \in \Pi_{(0,\ T]}, \tag{1}$$

де функції $\alpha, \beta : [0,\ T] \to \mathbb{R}$, $a_{m_1} : [0,\ T] \to \mathbb{C}$, $0 < \|m_1\| \le 1$, $a_0 : (0,\ T] \to \mathbb{C}$ неперервні й такі, що $\alpha(0)\,\beta(0) = 0$, $\forall\ t \in (0,\ T] : \alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, β монотонно неспадна; диференціальний вираз $\partial_t - \sum_{\|m_1\|\le 1} a_{m_1}(t)\,\partial_{x_1}^{m_1}$, $t \in [0,\ T]$, є $\overrightarrow{2b}$-параболічним [11, 13]; $\exists\ A \in \mathbb{R}\ \ \forall\ t \in (0,\ T] :\ \mathrm{Re}\,a_0(t) \le A$.

2. Фундаментальним розв’язком задачі Коші для рівняння (1) називатимемо функцію $Z(t,\ X;\ \tau,\ \Xi)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{X,\ \Xi\} \subset \mathbb{R}^N$, таку, що функція

$$u(t,\ X) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(t,\ X;\ \tau,\ \Xi)\,\varphi(\Xi)\,d\Xi, \qquad (t, X) \in \Pi_{(\tau, T]}, \tag{2}$$

є розв’язком рівняння (1), який задовольняє умову

$$u(t,\ X)\big|_{t=\tau} = \varphi(X), \qquad X \in \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

для будь-якого числа $\tau \in (0,\ T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції $\varphi :\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$.

Одним з основних результатів статті є

Теорема 1. *Правильні такі твердження:*

1) *існує єдиний ф. р.* $Z(t,\ X;\ \tau,\ \Xi)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{X,\ \Xi\} \subset \mathbb{R}^N$, *задачі Коші для рівняння* (1);

2) *для функції* Z *справджується формула*

$$Z(t,\ X + i\,X^*;\ \tau,\ \Xi + i\,\Xi^*) = \Gamma(t,\ \tau,\ S)\big|_{S=V(t,\tau,X,\Xi)+iV(t,\tau,X^*,\Xi^*)},$$

$$0 < \tau < t \le T, \quad \{X,\ X^*,\ \Xi,\ \Xi^*\} \subset \mathbb{R}^N,$$

де

$$V(t,\ \tau,\ \ X,\ \Xi) \equiv \left(V_{jk}(t,\ \tau,\ X,\ \Xi), \quad 1 \le k \le n_j, \quad 1 \le j \le 3\right),$$

$$V_{jk}(t,\ \tau,\ X,\ \Xi) \equiv \left(X_{jk}(t,\ \tau) - \xi_{jk}\right)(B(t,\tau))^{-(j-1)-1/(2b_k)},$$

а $\Gamma(t,\ \tau,\ S)$, $S \equiv \left(S_{jk},\ 1 \le k \le n_j,\ 1 \le j \le 3\right) \in \mathbb{C}^N$, *при фіксованих* t *і* τ *є цілою функцією аргументів* S_{jk} *порядків зростання* $p_{jk} = q_k$ *і тих самих порядків спадання при дійсних значеннях аргументів*;

3) *правильні оцінки*

$$\left| \partial_X^m Z(t,\ X + i X^*;\ \tau,\ \Xi + i\Xi^*) \right| + \left| \partial_\Xi^m Z(t,\ X + i X^*;\ \tau,\ \Xi + i\Xi^*) \right| \le$$

$$\le C_m (B(t,\ \tau))^{-M_m} E_c^d(t,\ X;\ \tau,\ \Xi)\, E_{c_1}(t,\ X^*;\ \tau,\ \Xi^*),$$

$$0 < \tau < t \le T, \quad \{X,\ X^*,\ \Xi,\ \Xi^*\} \subset \mathbb{R}^N, \quad m \in \mathbb{Z}_+^N, \tag{4}$$

де $C_m > 0$, $c > 0$, $c_1 > 0$ і $d \in \mathbb{R}$;

4) *ф. р.* Z *має властивість нормальності, а також для нього правильна формула згортки*

$$Z(t,\ X;\ \tau,\ \Xi) = \int_{\mathbb{R}^N} Z(t,\ X;\ \gamma,\ \Lambda)\, Z(\gamma,\ \Lambda;\ \tau,\ \Xi)\, d\Lambda,$$

$$0 < \tau < \gamma < t \le T, \qquad \{X,\ \Xi\} \subset \mathbb{R}^N; \tag{5}$$

5) *у випадку слабкого виродження, тобто коли інтеграл*

$$\int_0^T \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} \tag{6}$$

збігається, оцінки (4) *та рівність* (5) *мають місце й при* $\tau = 0$, *а оцінну функцію* E_c^d *в* (4) *можна замінити на* E_c.

Ці результати аналогічні результатам з [4] для випадку, коли $b_1 = \ldots = b_n = b$, а також результатам з [11] для $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь без вироджень.

Як і для вироджених параболічних рівнянь без виродження на початковій гіперплощині [16, 10], побудова ф. р. задачі Коші для рівняння (1) здійснюється за допомогою методу перетворення Фур'є, згідно з яким розв'язок задачі (1), (3) шукаємо у вигляді

$$u(t,\ X) = \left(F^{-1}[v(t,\ \Xi)]\right)(t,\ X), \qquad (t,\ X) \in \Pi_{(\tau,T]}.$$

Для знаходження функції v одержуємо таку задачу Коші з частинними похідними першого порядку:

$$\left(\alpha(t)\,\partial_t + \beta(t)\sum_{l=2}^{3}\sum_{j=1}^{n_l} \xi_{lj}\,\partial_{\xi_{(l-1)j}} - A(t,\ \xi_1)\right) v(t,\ \Xi) = 0, \qquad (t,\ \Xi) \in \Pi_{(\tau,T]},$$

$$v(t,\ \Xi)\big|_{t=\tau} = F^{-1}[\varphi](\Xi), \qquad \Xi \in \mathbb{R}^N,$$

де $A(t,\ \xi_1) \equiv \beta(t) \sum\limits_{0<\|m_1\|\le 1} a_k(t)\,(i\,\xi_1)^{m_1} + a_0(t)$.

Використовуючи для розв'язання цієї задачі метод характеристик і здійснюючи необхідні перетворення, отримуємо формулу (2) для розв'язку задачі (1), (3). При цьому ф. р. Z визначається рівністю

$$Z(t,\ X;\ \tau,\ \Xi) \equiv (B(t,\ \tau))^{-M_0}\left(F^{-1}[Q(t,\ \tau,\ \Lambda)]\right)(t,\ \tau,\ V(t,\ \tau,\ X,\ \Xi)),$$

$$0 < \tau < t \le T, \quad \{X,\ \Xi\} \subset \mathbb{R}^N,$$

де

$$Q(t,\ \tau,\ \Lambda) \equiv \exp\left\{ \int_0^1 \sum_{0<\|m_1\|\le 1} a_{m_1}(P^{-1}[B(t,\ \tau)\gamma])\, i^{|m_1|}\,[B(t,\ \tau)]^{1-\|m_1\|} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\lambda_1' + \gamma\,\lambda_2' + \frac{\gamma^2}{2}\lambda_3\right)^{m_1'} \left(\lambda_1'' + \gamma\,\lambda_2''\right)^{m_1''} \left(\lambda_1'''\right)^{m_1'''} d\gamma \right\} \exp\left\{ \int_\tau^t \frac{a_0(\gamma)}{\alpha(\gamma)}\, d\gamma \right\};$$

$P(t) \equiv B(t,\ \tau)$, P^{-1} – обернена функція до P; $\Lambda \equiv (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3) \in \mathbb{R}^N$, $\lambda_l \equiv (\lambda_{lj},\ 1 \le j \le n_l)$, $1 \le l \le 3$; $\lambda_l' \equiv (\lambda_{lj},\ 1 \le j \le n_3)$, $\lambda_l'' \equiv (\lambda_{lj},\ n_3 + 1 \le j \le n_2)$, $l = 1,\ 2$; $\lambda_1''' \equiv (\lambda_{1j},\ n_2 + 1 \le j \le n_1)$; $m_1 \equiv (m_1',\ m_1'',\ m_1''')$, $|m_1| \equiv m_{11} + \ldots + m_{1n_1}$.

Отже, дослідження властивостей ф.р. Z зводиться до дослідження властивостей функції Q. Провівши останнє і використавши лему 1.1 з [14] про перетворення Фур'є цілих функцій, доведемо твердження 1) – 3) теореми 1. Доведення твердження 4) проводиться стандартним способом [14, 11, 10] за допомогою відповідної формули Гріна – Остроградського.

3. Властивості ф.р. Z дозволяють дослідити коректну розв'язність неоднорідного рівняння $Lu = f$ з початковою умовою

$$u(t,\ X)\big|_{t=0} = \varphi(X), \qquad X \in \mathbb{R}^N,$$

у випадку слабкого виродження і без початкової умови, якщо має місце сильне виродження, тобто коли інтеграл (6) розбігається. Аналогічні результати для параболічних за І. Г. Петровським рівнянь наведено в [3].

Якщо виродження слабке, то можна одержати для рівняння (1) результати, які аналогічні наведеним у [2, 4, 9] і стосуються інтегральних зображень та описання множин початкових значень розв'язків. Щоб їх сформулювати, наведемо спочатку означення необхідних норм і просторів.

Нехай $0 < c_0 < c$, $\mathbf{a} \equiv (a_{lj},\ 1 \le j \le n_l,\ 1 \le l \le 3)$, де c – стала з оцінок (4), а числа a_{lj}, $1 \le j \le n_l$, $1 \le l \le 3$, такі, що $0 \le a_{lj} < c_0\, T^{(2b_j(l-1)+1)/(2b_j-1)}$, $1 \le j \le n_l$, $1 \le l \le 3$; $k_{lj}(t,\ a_{lj}) \equiv c_0\, a_{lj}\big(c_0^{2b_j-1} - a_{lj}^{2b_j-1}(T - B(T,\ t))^{2b_j(l-1)+1}\big)^{1-q_j}$, $0 \le t \le T$, $1 \le j \le n_l$, $1 \le l \le 3$; $\mathbf{k}(t,\ \mathbf{a}) \equiv (k_{lj}(t, a_{lj}),\ 1 \le j \le n_l,\ 1 \le l \le 3)$. Зауважимо, що $k_{lj}(t,\ a_{lj}) \ge k_{lj}(0,\ a_{lj})$, $t \in [0,\ T]$, $1 \le j \le n_l$, $1 \le l \le 3$, і справджується нерівність

$$E_{c_0}(t,\ X;\ 0,\ \Xi)\,\Psi(0,\ \Xi) \le \Psi(t,\ X), \qquad t \in [0,\ T], \qquad \{X,\ \Xi\} \in \mathbb{R}^N,$$

де

$$\Psi(t,\ X) \equiv \exp\left\{ \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_l} k_{lj}(t,\ a_{lj}) \left| X_{lj}(t,\ 0) \right|^{q_j} \right\}.$$

Нехай $1 \le p \le \infty$, $u(t,\ X)$, $(t,\ X) \in \Pi_{[0,T]}$, – задана комплекснозначна функція, яка при кожному $t \in [0,\ T]$ вимірна по X. Для $t \in [0,\ T]$ означимо норми $\|u(t, \cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \equiv \left\| u(t, \cdot)(\Psi(t, \cdot))^{-1} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}$ і через $L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, $1 \le p \le \infty$, позначимо простір усіх вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, для яких норма $\|\varphi\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ є скінченною. Нехай $M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ – простір усіх комплекснозначних узагальнених мір μ, які визначені на σ-алгебрі борельових множин простору $\mathbb{R}^N$ і задовольняють умову

$$\|\mu\|^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})} \equiv \int_{\mathbb{R}^N} (\Psi(0, X))^{-1}\, d|\mu|(X) < \infty,$$

де $|\mu|$ – повна варіація μ.

Покладемо ще

$$s_{lj}(t, \mathbf{a}) = \sum_{r=l}^{3} \frac{r^{q_j-1}}{(r-l)^{q_j}} \theta(n_r - j)\big(B(t,0)\big)^{(r-1)q_j} k_{rj}(t, a_{rj}), \quad 1 \le j \le n_l, \quad 1 \le l \le 3;$$

$\mathbf{s}(t,\ \mathbf{a}) \equiv (s_{lj}(t, \mathbf{a}),\ 1 \le j \le n_l,\ 1 \le l \le 3)$,

де $\theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \ge 0, \\ 0, & \tau < 0; \end{cases}$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t,\mathbf{a})} \equiv \left\| u(t,\ X) \exp\left\{ -\sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_l} s_{lj}(t,\ \mathbf{a}) \left|x_{lj}\right|^{q_j} \right\} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}.$$

У наступних теоремах припускаємо, що інтеграл (6) збігається.

Теорема 2. *Для будь-яких функцій* $\varphi \in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, $1 \le p \le \infty$, *і узагальненої міри* $\mu \in M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ *формули*

$$u(t,\ X) \equiv \int_{\mathbb{R}^N} Z(t,\ X;\ 0,\ \Xi)\,\varphi(\Xi)\, d\Xi, \tag{7}$$

$$u_0(t,X) \equiv \int_{\mathbb{R}^N} Z(t,\ X;\ 0,\ \Xi)\, d\mu(\Xi), \qquad (t,\ X) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{8}$$

визначають єдині розв'язки рівняння (1) *у шарі* $\Pi_{(0,\ T]}$, *які мають такі властивості: існує стала* $C > 0$, *незалежна від* φ *та* μ *і така, що*

$$\forall\ t \in (0,\ T]: \|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C\|\varphi\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})},$$

$$\forall\ t \in (0,\ T]: \|u_0(t,\cdot)\|_1^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C\|\mu\|^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})};$$

при $1 \le p < \infty$

$$\lim_{t\to 0} \|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t,\mathbf{a})} = 0,$$

а при $p = \infty$ *і для функції* (8) $u(t,\cdot) \to \varphi$, $u_0(t,\cdot) \to \mu$, $t \to 0$, *слабко, тобто для будь-яких* ψ *відповідно з просторів* $L_1^{-\mathbf{s}(T,\ \mathbf{a})}$ *і* $C_0^{-\mathbf{s}(T,\ \mathbf{a})}$ *правильні співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \psi(X)\, u(t,\ X)\, dX = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(X)\,\varphi(X)\, dX,$$

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \psi(X)\, u_0(t,\ X)\, dX = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(X)\, d\mu(X),$$

де $L_1^{-\mathbf{s}(T,\ \mathbf{a})}$ – *простір вимірних функцій* $\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, *для яких є скінченною норма*

$$\left\| \psi(X) \exp\left\{ \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_l} s_{lj}(T,\ \mathbf{a}) \left|x_{lj}\right|^{q_j} \right\} \right\|_{L_1(\mathbb{R}^N)},$$

а $C_0^{-\mathbf{s}(T,\ \mathbf{a})}$ – *простір неперервних функцій* $\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ *таких, що при* $|X| \to \infty$

$$|\psi(X)| \exp\left\{ \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_l} s_{lj}(T,\ \mathbf{a}) \left|x_{lj}\right|^{q_j} \right\} \to 0.$$

Теорема 3. *Нехай u − розв'язок рівняння* (1) *у шарі* $\Pi_{(0,T]}$, *який задовольняє умову*

$$\forall\, t \in (0,\ T] : \| u(t,\cdot) \|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C \tag{9}$$

з деякими $C > 0$ *і* $1 \le p \le \infty$. *Тоді при* $1 < p \le \infty$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, *а при* $p = 1$ − *єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ *такі, що розв'язок u зображується відповідно у вигляді* (7) *і* (8).

Наслідок. *З теорем 2 і 3 випливають такі твердження:*

1) *простори* $L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, $1 < p \le \infty$, *і* $M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ *є множинами початкових значень розв'язків рівняння* (1) *тоді й тільки тоді, коли розв'язки задовольняють умову* (9) *при* $1 < p \le \infty$ *і* $p = 1$ *відповідно;*
2) *для зображення розв'язків рівняння* (1) *у вигляді* (7) *чи* (8) *з* $\varphi \in L_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$, $1 < p \le \infty$, *і* $\mu \in M^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$ *необхідно й досить, щоб виконувалась умова* (9).

Доведення теорем 2 і 3 досить громіздкі, вони потребували розвитку методик, викладених в [2, 7, 9]. Істотні додаткові труднощі в міркуваннях та оцінках викликані складною анізотропією функцій, які вивчаються.

Робота виконана при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень ДКНТ України.

1. *Березан Л., Івасишен С., Пасічник Г.* Фундаментальні матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині // Всеукр. наук. конф. «Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь» (15−19 вер. 1997 р., Дрогобич): Тези доп. − Київ, 1997. − С. 15.
2. *Возняк О. Г.* Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем з виродженням // Матеріали Міжнар. мат. конф., присвяченої пам'яті Ганса Гана. − Чернівці: Рута, 1995. − С. 42−60.
3. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. АН України. − 1994. − № 6. − С. 7−11.
4. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування // Доп. НАН України. − 1996. − № 10. − С. 11−16.
5. *Ейдельман С. Д., Івасишен С. Д.* Про фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного нового класу вироджених параболічних псевдодиференціальних рівнянь // Доп. НАН України. − 1997. − № 6. − С. 18−23.
6. *Ейдельман С. Д., Тичинська Л. М.* Побудова фундаментальних розв'язків деяких вироджених параболічних рівнянь довільного порядку // Доп. АН УРСР. Сер. А. − 1979. − № 11. − С. 896−899.
7. *Ивасишен С. Д.* Интегральные представления и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем // Укр. мат. журн. − 1990. − **42**, № 4. − С. 500−506.
8. *Ивасишен С. Д., Андросова Л. Н.* Об интегральном представлении и начальных значениях решений некоторых вырождающихся параболических уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. − 1989. − № 1. − С. 16−19.
9. *Ивасишен С. Д., Андросова Л. Н.* Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова // Дифференц. уравнения. − 1991. − **27**, № 3. − С. 479−487.
10. *Ивасишен С. Д., Андросова Л. Н.* Фундаментальные решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений / Чернов. ун-т. − Черновцы, 1989. − 62 с. − Деп. в УкрНИИНТИ 16.06.89, № 1761. − Ук89.
11. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. − Киев: Ин-т мат. АН УССР. − 1968. − Вып. 1. − С. 3−175; 271−273.
12. *Малицкая А. П.* Построение фундаментальных решений некоторых ультрапараболических уравнений высокого порядка // Укр. мат. журн. − 1985. − **37**, № 6. − С. 713−718.

13. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1966. – **133**, № 1. – С. 40–43.
14. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
15. *Эйдельман С. Д., Ивасишен С. Д.* Об одном новом классе вырождающихся параболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1996. – **51**, № 5. – С. 227.
16. *Эйдельман С. Д., Малицкая А. П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 5. – С. 1316–1330.

О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Приведены результаты исследования и некоторые применения фундаментальных решений задачи Коши для нового класса параболических уравнений, в которых: 1) *имеются три группы пространственных переменных, одна основная и две дополнительные;* 2) *допускаются различные веса пространственных переменных из основной группы относительно временной переменной;* 3) *имеются вырождения по переменным из дополнительных групп;* 4) *присутствуют вырождения на начальной гиперплоскости.*

ON FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ONE CLASS OF THE DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS

A number of results of investigation and some applications of the fundamental solutions to the Cauchy problem for a new class of the parabolic equations are presented. In these equations: 1) *there are three groups of spatial variables, one basic and two auxiliary;* 2) *different weights of spatial variables from the basic group with respect to the time variable are admitted;* 3) *there are presented the degenerations with respect to variables from the auxiliary groups;* 4) *there are degenerations on the initial hyperplane.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Терноп. акад. нар. госп-ва

Одержано
02.04.98