УДК 517.956.4

О. Г. Возняк, С. Д. Івасишен

ОДНОЗНАЧНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ І ВЛАСТИВІСТЬ ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ РІВНЯНЬ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ ПОЧАТКОВИМИ ДАНИМИ

Встановлено однозначну розв'язність і наведено властивість локалізації розв'язків задачі Коші з узагальненими початковими даними для одного класу вироджених параболічних рівнянь, у яких: 1) *є три групи просторових змінних, одна основна та дві додаткові;* 2) *допускаються різні ваги просторових змінних з основної групи відносно часової змінної;* 3) *наявні виродження за змінними з додаткових груп;* 4) *є виродження на початковій гіперплощині.*

У працях [7–10] для нового класу рівнянь – вироджених рівнянь типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною за основною групою змінних – у випадку незалежних від просторових змінних коефіцієнтів побудовано і досліджено фундаментальний розв'язок (ф. р.), доведено теореми про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків, а в працях [2, 3] доведено теореми про однозначну розв'язність і властивість локалізації розв'язків задачі Коші з початковими даними з відповідних просторів узагальнених функцій. Для таких рівнянь, які містять також виродження на початковій гіперплощині, в [11] наведено результати, аналогічні одержаним у [7–10], а в пропонованій статті встановлюється однозначна розв'язність і властивість локалізації розв'язків задачі Коші з початковими даними із відповідних просторів узагальнених функцій. Ці результати узагальнюють результати досліджень з [1–4].

1. Користуватимемось такими позначеннями: $n_1,\ n_2,\ n_3,\ b_1,\ \ldots,\ b_{n_1}$ – натуральні числа такі, що $n_1 \ge n_2 \ge n_3$; $n \equiv n_1 + n_2 + n_3$; $N_0 \equiv \{1,2,3\}$; $N_l \equiv \{1,\ldots,n_l\}$, $l \in N_0$; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1,\ldots,2b_{n_1})$, $q_j \equiv \dfrac{2b_j}{2b_j - 1}$, $j \in N_1$, $q' \equiv \min\limits_{j\in N_1} q_j$, $q'' \equiv \max\limits_{j\in N_1} q_j$; $\mathbb{R}^r$, $\mathbb{R}^r_+$ і $\mathbb{Z}^r_+$ – множини всіх r-вимірних відповідно дійсних векторів, векторів з усіма додатними координатами і векторів з усіма цілими невід'ємними координатами, тобто мультиіндексів;

$$\|\mathbf{m}_1\| \equiv \sum_{j=1}^{n_1} \frac{m_{1j}}{2b_j}, \text{ якщо } \mathbf{m}_1 \equiv (m_{11},\ldots,m_{1n_1}) \in \mathbb{Z}^{n_1}_+;\quad M_{\mathbf{m}} \equiv \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}\left(l-1+\frac{1}{2b_j}\right)(m_{lj}+1),$$

якщо $\mathbf{m} \equiv (m_{11},\ldots,m_{1n_1},m_{21},\ldots,m_{2n_2},m_{31},\ldots,m_{3n_3}) \in \mathbb{Z}^n_+$; $\{x \equiv (x_1,x_2,x_3)$, $\xi \equiv (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\} \subset \mathbb{R}^n$, якщо $\{x_l \equiv (x_{l1},\ldots,x_{ln_l}),\ \xi_l \equiv (\xi_{l1},\ldots,\xi_{ln_l})\} \subset \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in N_0$;

$$\partial^{\mathbf{m}_1}_{x_1} \equiv \prod_{j=1}^{n_1} \partial^{m_{1j}}_{x_{1j}},\quad \partial^{\mathbf{m}}_{x} \equiv \prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l} \partial^{m_{lj}}_{x_{lj}}, \text{ якщо } x_1 \in \mathbb{R}^{n_1},\ x \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{m}_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}_+,\ \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n_+;$$

T – задане додатне число; $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}$ і $\beta : [0,T] \to \mathbb{R}$ – неперервні функції такі, що $\alpha(0)\beta(0) = 0$; для будь-яких $t \in (0,T]$ $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, β – монотонно неспадна і $\int_0^T \dfrac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$; $B_0(t) \equiv \int_0^t \dfrac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\,d\tau$; $x_{lj}(t) \equiv \sum\limits_{r=0}^{l-1} \dfrac{1}{r!}(B_0(t))^r x_{(l-r)j}$, $j \in N_l$, $l \in N_0$; $x(t) \equiv (x_{11}(t),\ldots,x_{1n_1}(t),x_{21}(t),\ldots,x_{2n_2}(t),x_{31}(t),\ldots,x_{3n_3}(t))$;

$$E_c(t,x;\xi) \equiv \exp\left\{-c\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}\left(B_0(t)\right)^{1-lq_j}|\,x_{lj}(t)-\xi_{lj}\,|^{q_j}\right\};$$

$d(x,\xi) \equiv \left(\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}|\,x_{lj}-\xi_{lj}\,|^{q_j}\right)^{1/q''}$ – спеціальна відстань між точками x і ξ простору $\mathbb{R}^n$; $K_R \equiv \{x\in\mathbb{R}^n \mid d(x,0)\le R\}$; $\Pi_H \equiv \{(t,x) \mid t\in H,\ x\in\mathbb{R}^n\}$; i – уявна одиниця.

Нехай вектори

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_1}) \in \mathbb{R}_+^{n_1}, \quad \boldsymbol{\beta} \equiv (\beta_{11},\ldots,\beta_{1n_1},\beta_{21},\ldots,\beta_{2n_2},\beta_{31},\ldots,\beta_{3n_3}) \in \mathbb{R}_+^n$$

такі, що $\alpha_j+\beta_{lj}\ge 1$, $j\in N_l$, $l\in N_0$. Розглядатимемо простір $S_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}}$ з [6]. Цей простір складається з нескінченно диференційовних функцій $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, які задовольняють умову

$$\exists\, C>0\ \exists\,\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}\subset\mathbb{R}_+^n\ \forall\{\mathbf{k},\mathbf{s}\}\subset\mathbb{Z}_+^n\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n:$$

$$\left|\,\xi^{\mathbf{k}}\partial_\xi^{\mathbf{s}}f(\xi)\right| \le C\mathbf{A}^{\mathbf{k}}\mathbf{B}^{\mathbf{s}}\mathbf{k}^{\mathbf{k}\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{s}^{\mathbf{s}\boldsymbol{\beta}}, \tag{1}$$

де $\mathbf{A}^{\mathbf{k}} \equiv \prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l}A_{lj}^{k_{lj}}$, $\mathbf{B}^{\mathbf{s}} \equiv \prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l}B_{lj}^{s_{lj}}$, $\mathbf{k}^{\mathbf{k}\boldsymbol{\alpha}} \equiv \prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l}k_{lj}^{k_{lj}\alpha_j}$, $\mathbf{s}^{\mathbf{s}\boldsymbol{\beta}} \equiv \prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l}s_{lj}^{s_{lj}\beta_{lj}}$. Тут A_{lj}, B_{lj}, k_{lj} і s_{lj} – координати відповідно векторів $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{k}$ і $\mathbf{s}$.

Умову (1) можна замінити такою умовою [6]:

$$\exists C>0\quad \exists\,\mathbf{B}\in\mathbb{R}_+^n\quad \exists\, c_0>0\quad \forall\mathbf{s}\in\mathbb{Z}_+^n\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n:$$

$$\left|\,\partial_\xi^{\mathbf{s}}f(\xi)\right| \le C\mathbf{B}^{\mathbf{s}}\mathbf{s}^{\mathbf{s}\boldsymbol{\beta}}\exp\left\{-c_0\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}|\,\xi_{lj}\,|^{1/\alpha_j}\right\}.$$

Якщо $\beta_{lj}=\beta_j$, $j\in N_l$, $l\in N_0$, то простір $S_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}}$ з таким вектором $\boldsymbol{\beta}$ позначатимемо також через $S_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}_0}$, де $\boldsymbol{\beta}_0\equiv(\beta_1,\ldots,\beta_{n_1})$. Зауважимо [6], що при $0<\beta_j<1$, $j\in N_1$, функція $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ належить до простору $S_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}_0}$ тоді й тільки тоді, коли вона може бути продовжена до цілої функції $f(\xi+i\eta)$, $\{\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n$, яка задовольняє нерівність

$$|\,f(\xi+i\eta)\,| \le C\exp\left\{\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}\left[-c_0\,|\,\xi_{lj}\,|^{1/\alpha_j}+c_1\,|\,\eta_{lj}\,|^{1/(1-\beta_j)}\right]\right\} \tag{2}$$

з деякими $C>0$, $c_0>0$ і $c_1>0$. При $\beta_{lj}>1$, $j\in N_l$, $l\in N_0$, простір $S_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}}$ містить фінітні функції, тоді як при $\beta_{lj}<1$ для принаймні однієї пари l, j фінітних функцій серед елементів простору $S_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}}$ немає.

2. Розглянемо рівняння вигляду

$$\left[\alpha(t)\partial_t-\beta(t)\left(\sum_{l=2}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}x_{(l-1)j}\partial_{x_{lj}}+\sum_{0<\|\mathbf{m}_1\|\le 1}a_{\mathbf{m}_1}(t)\partial_{x_1}^{\mathbf{m}_1}\right)-a_{\mathbf{0}}(t)\right]u(t,x)=0,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{3}$$

де функції $a_{\mathbf{m}_1}:[0,T]\to\mathbb{C}$, $\|\,\mathbf{m}_1\,\|\le 1$, неперервні й такі, що диференціальний вираз $\partial_t^1-\sum_{\|\mathbf{m}_1\|\le 1}a_{\mathbf{m}_1}(t)\partial_{x_1}^{\mathbf{m}_1}$, $t\in[0,T]$, є рівномірно параболічним у шарі $[0,T]\times\mathbb{R}^{n_1}$.

Із результатів, наведених в [11], випливає, що ф. р. $Z_0(t,x;\xi+i\eta)\equiv\equiv Z(t,x;0,\xi+i\eta)$ задачі Коші для рівняння (3) при будь-яких фіксованих $t\in(0,T]$ і $x\in\mathbb{R}^n$ є цілою функцією від аргументу $\xi+i\eta$. Крім того, якщо в одержаних у [11] оцінках

$$\max\left\{\left|\,\partial_x^{\mathbf{m}}Z_0(t,x+iy;\xi+i\eta)\right|,\ \left|\,\partial_\xi^{\mathbf{m}}Z_0(t,x+iy;\xi+i\eta)\right|\right\}\le$$

$$\le C_{\mathbf{m}}(B_0(t))^{-M_{\mathbf{m}}}E_c(t,x;\xi)E_{-c_1}(t,y;\eta),\quad 0<t\le T,\ \{x,y,\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n,\ \mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n,\quad (4)$$

при $\mathbf{m}=\mathbf{0}$, $y=0$ вважати фіксованими $t\in(0,T]$ і $x\in\mathbb{R}^n$, а також скористатися нерівністю $|\,x_{lj}(t)-\xi_{lj}\,|^{q_j}\ge 2^{-q_j+1}|\,\xi_{lj}\,|^{q_j}-|\,x_{lj}(t)\,|^{q_j}$, $j\in N_l$, $l\in N_0$, то дістанемо оцінку

$$|\,Z_0(t,x;\xi+i\eta)\,|\le C\exp\left\{-c_0\big(d(\xi,0)\big)^{q''}+c_1\big(d(\eta,0)\big)^{q''}\right\},\quad \{\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n,\quad (5)$$

у якій $C\equiv C(t,x(t))$, $c_0\equiv 2^{-q''+1}c\min\left\{1,\ (B_0(T))^{1-3q''}\right\}$. З оцінки (5) випливає, що для Z_0 правильні оцінки (2) з $\alpha_j=\dfrac{1}{q_j}$, $\beta_j=1-\dfrac{1}{q_j}=\dfrac{1}{2b_j}$, $j\in N_1$. Отже, ф. р. $Z_0(t,x;\xi)$ як функція від $\xi\in\mathbb{R}^n$ належить до простору $S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$. Так ми позначатимемо простір $S_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}_0}$ з $\boldsymbol{\alpha}=\left(\dfrac{1}{q_1},\ldots,\dfrac{1}{q_{n_1}}\right)$ і $\boldsymbol{\beta}_0=\left(\dfrac{1}{2b_1},\ldots,\dfrac{1}{2b_{n_1}}\right)$. Тому функція $Z_0(t,x;\,\cdot\,)$ є абстрактною функцією параметрів $t\in(0,T]$ і $x\in\mathbb{R}^n$ у просторі $S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$. Властивості цієї функції опишемо в наступній лемі, доведення якої проведемо аналогічно до доведення відповідної леми з [1].

Лема. *У просторі* $S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$ *функція* $Z_0(t,x;\,\cdot\,)$ *як абстрактна функція параметра:*

1) $t\in(0,T]$ *(при фіксованих* $x\in\mathbb{R}^n$*) диференційовна;*

2) $x_1\in\mathbb{R}^{n_1}$ *(при фіксованих* $t\in(0,T]$, $x_2\in\mathbb{R}^{n_2}$ *і* $x_3\in\mathbb{R}^{n_3}$*) нескінченно диференційовна;*

3) $x_2\in\mathbb{R}^{n_2}$ *(при фіксованих* $t\in(0,T]$, $x_1\in\mathbb{R}^{n_1}$ *і* $x_3\in\mathbb{R}^{n_3}$*) нескінченно диференційовна;*

4) $x_3\in\mathbb{R}^{n_3}$ *(при фіксованих* $t\in(0,T]$, $x_1\in\mathbb{R}^{n_1}$, *і* $x_2\in\mathbb{R}^{n_2}$*) нескінченно диференційовна.*

Д о в е д е н н я. Оскільки $Z_0(t,x;\xi)=\big(F^{-1}[\tilde{Q}(t,\cdot)]\big)(t,V(t,0,x,\xi))$, де V – функція, означена в [11], а

$$\tilde{Q}(t,\lambda)\equiv\exp\left\{\int_0^t P(\tau,\lambda)\,d\tau\right\},\quad P(\tau,\lambda)\equiv\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\sum_{0<\|\mathbf{m}_1\|\le 1}a_{\mathbf{m}_1}(\tau)i^{|\mathbf{m}_1|}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n_3}\left(\lambda_{1j}+B_0(\tau)\lambda_{2j}+\frac{1}{2}(B_0(\tau))^2\lambda_{3j}\right)^{m_{1j}}\prod_{j=n_3+1}^{n_2}\left(\lambda_{1j}+B_0(\tau)\lambda_{2j}\right)^{m_{1j}}\prod_{j=n_2+1}^{n_1}\left(\lambda_{1j}\right)^{m_{1j}}+\frac{a_0(\tau)}{\alpha(\tau)},$$

то з неперервності перетворення Фур'є (прямого й оберненого) у просторі $S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}$ випливає, що функція $\tilde{Q}(t,\lambda)$ як абстрактна функція параметра t в просторі $F\left[\,S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overrightarrow{2b}}\,\right]=S_{1/\overrightarrow{2b}}^{1/\mathbf{q}}$ є диференційовною за t, тобто

$$\partial_t \tilde{Q}(t,\lambda) = \exp\left\{ \int_0^t P(\tau,\lambda)\, d\tau \right\} P(t,\lambda) = \tilde{Q}(t,\lambda) P(t,\lambda).$$

Таким чином, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$H_{\Delta t}(t,\lambda) \equiv \frac{\tilde{Q}(t+\Delta t,\lambda) - \tilde{Q}(t,\lambda)}{\Delta t} \underset{\Delta t \to 0}{\to} P(t,\lambda)\tilde{Q}(t,\lambda)$$

виконується у просторі $S_{1/\overline{2b}}^{1/\mathbf{q}}$. Це означає, що:

а) $\partial_\lambda^{\mathbf{k}} H_{\Delta t}(t,\lambda) \underset{\Delta t \to 0}{\to} \partial_\lambda^{\mathbf{k}} \big(P(t,\lambda)\tilde{Q}(t,\lambda)\big)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n$, рівномірно щодо $\lambda \in K_R$, де R – будь-яке додатне число;

б) $\left| \partial_\lambda^{\mathbf{s}} H_{\Delta t}(t,\lambda) \right| \le C \mathbf{B}^{\mathbf{s}} \mathbf{s}^{\mathbf{s}/\mathbf{q}} \exp\left\{ -c_0 (d(\lambda,0))^{q''} \right\}$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n$, де $C > 0$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}_+^n$ і $c_0 > 0$ не залежать від Δt, якщо Δt досить мале.

Доведемо твердження *а*). Функція $\tilde{Q}$ диференційовна за t у звичайному розумінні, тому $\tilde{Q}(t+\Delta t,\lambda) - \tilde{Q}(t,\lambda) = \partial_t \tilde{Q}(t+\theta\Delta t,\lambda)\,\Delta t$, $(t+\theta\Delta t) \in (0,T)$, $0 < \theta < 1$, і $H_{\Delta t}(t,\lambda) = \partial_t \tilde{Q}(t+\theta\Delta t,\lambda) = \tilde{Q}(t+\theta\Delta t,\lambda) P(t+\theta\Delta t,\lambda)$. Звідси

$$\partial_\lambda^{\mathbf{k}} H_{\Delta t}(t,\lambda) = \sum_{\mathbf{r} \le \mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}^{\mathbf{r}}\, \partial_\lambda^{\mathbf{r}} \tilde{Q}(t+\theta\Delta t,\lambda)\, \partial_\lambda^{\mathbf{k}-\mathbf{r}} P(t+\theta\Delta t,\lambda), \tag{6}$$

$$\partial_\lambda^{\mathbf{r}} \tilde{Q}(t+\theta\Delta t,\lambda) = \exp\left\{ \int_0^{t+\theta\Delta t} P(\tau,\lambda)\, d\tau \right\} \int_0^{t+\theta\Delta t} \partial_\lambda^{\mathbf{r}} P(\tau,\lambda)\, d\tau,$$

$$\tilde{Q}(t+\theta\Delta t,\lambda) - \partial_\lambda^{\mathbf{r}} \tilde{Q}(t,\lambda) = \left[\exp\left\{ \int_0^{t+\theta\Delta t} P(\tau,\lambda)\, d\tau \right\} - \exp\left\{ \int_0^t P(\tau,\lambda)\, d\tau \right\} \right] \times$$

$$\times \int_0^t \partial_\lambda^{\mathbf{r}} P(\tau,\lambda) d\tau + \exp\left\{ \int_0^{t+\theta\Delta t} P(\tau,\lambda)\, d\tau \right\} \left[\int_0^{t+\theta\Delta t} \partial_\lambda^{\mathbf{r}} P(\tau,\lambda)\, d\tau - \int_0^t \partial_\lambda^{\mathbf{r}} P(\tau,\lambda)\, d\tau \right]. \tag{7}$$

Вираз у перших і других квадратних дужках із формули (7) позначимо відповідно через Δ_1 і Δ_2. Для Δ_1 маємо

$$\Delta_1 = \exp\left\{ \int_0^t P(\tau,\lambda)\, d\tau \right\} \left[\exp\left\{ \int_t^{t+\theta\Delta t} P(\tau,\lambda)\, d\tau \right\} - 1 \right] \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0 \tag{8}$$

рівномірно щодо $\lambda \in K_R$, оскільки функція $\exp\left\{ \int_0^t P(\tau,\lambda)\, d\tau \right\}$, $t \in [0,T]$, $\lambda \in K_R$, обмежена, а $\exp\left\{ \int_t^{t+\theta\Delta t} P(\tau,\lambda)\, d\tau \right\} - 1 \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0$ рівномірно щодо $\lambda \in K_R$.

Для $\lambda \in K_R$ одержуємо

$$|\Delta_2| = \left| \int_t^{t+\theta\Delta t} \partial_\lambda^{\mathbf{r}} P(\tau,\lambda)\, d\tau \right| \le C |\theta\Delta t| \le C |\Delta t| \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0. \tag{9}$$

Зі співвідношень (7)–(9) випливає, що $\partial_\lambda^{\mathbf{r}} \tilde{Q}(t+\theta\Delta t,\lambda) \underset{\Delta t \to 0}{\to} \partial_\lambda^{\mathbf{r}} \tilde{Q}(t,\lambda)$ рівномірно щодо $\lambda \in K_R$, тому з (6) одержуємо, що $\partial_\lambda^{\mathbf{k}} H_{\Delta t}(t,\lambda) \underset{\Delta t \to 0}{\to} \partial_\lambda^{\mathbf{k}} \big(P(t,\lambda)\tilde{Q}(t,\lambda)\big)$ рівномірно щодо $\lambda \in K_R$, тобто твердження *а*) виконується.

Доведемо твердження *б*). Зауважимо, що $\tilde{Q}(t,\lambda) = Q(t,0,\tilde{V}(t,\lambda))$, де $\tilde{V}(t,\lambda) \equiv \big(\tilde{V}_{11}(t,\lambda), \ldots, \tilde{V}_{1n_1}(t,\lambda), \tilde{V}_{21}(t,\lambda), \ldots, \tilde{V}_{2n_2}(t,\lambda), \tilde{V}_{31}(t,\lambda), \ldots, \tilde{V}_{3n_3}(t,\lambda)\big)$,

$\tilde{V}_{lj}(t,\lambda) \equiv \lambda_{lj}(B_0(t))^{(l-1)+\frac{1}{2b_j}}$, $j \in N_l$, $l \in N_0$, а функція Q означена в [11]. Звідси і з оцінки для Q при $0 < \varepsilon \le B_0(t) \le B_0(T)$ випливає нерівність

$$|\tilde{Q}(t,\lambda + i\eta)| \le C\exp\{-\delta_3(d(\lambda,0))^{q''} + F_3(d(\eta,0))^{q''}\}, \quad \{\lambda,\eta\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Остання оцінка дозволяє зробити висновок про те, що $\tilde{Q}(t,\lambda)$ як функція $\lambda \in \mathbb{R}^n$ при фіксованому $t > 0$ належить до простору $S^{1/\mathbf{q}}_{1/2\bar{b}}$ і звідси отримуємо оцінки

$$|\partial_\lambda^{\mathbf{r}}\tilde{Q}(t,\lambda)| \le C\mathbf{B}^{\mathbf{r}}\mathbf{r}^{\mathbf{r}/\mathbf{q}}\exp\{-c_1(d(\lambda,0))^{q''}\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n_+. \tag{10}$$

Враховуючи оцінки (10) і нерівність

$$|\partial_\lambda^{\mathbf{k}}P(t,\lambda)| \le C(1 + (d(\lambda,0))^{q''}), \quad t \in [0,T], \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_+,$$

з нерівності (6) одержимо

$$|\partial_\lambda^{\mathbf{s}}H_{\Delta t}(t,\lambda)| \le \bar{C}\bar{\mathbf{B}}^{\mathbf{r}}\,\mathbf{r}^{\mathbf{r}/\mathbf{q}}\exp\{-c_0(d(\lambda,0))^{q''}\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^n_+,$$

де $\bar{C} > 0$, $\bar{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^n_+$ і $c_0 > 0$ не залежать від Δt. Отже, умова *б*) також виконується.

Доведемо твердження *2*). Для цього досить довести, що граничне співвідношення

$$H_{\Delta x_{1j}}(\xi) \equiv \frac{Z_0(t,x_{\Delta x_{1j}};\xi) - Z_0(t,x;\xi)}{\Delta x_{1j}} \underset{\Delta x_{1j}\to 0}{\longrightarrow} \partial_{x_{1j}}Z_0(t,x;\xi),$$

де $x_{\Delta x_{1j}} \equiv (x_1 + \Delta x_1^{(j)}, x_2, x_3)$, $\Delta x_1^{(j)} \equiv (0,\dots,0,\Delta x_{1j},0,\dots,0)$, $j \in N_1$, виконується у просторі $S^{1/\mathbf{q}}_{1/2\bar{b}}$. Останнє означає, що:

в) $\partial_\xi^{\mathbf{k}}H_{\Delta x_{1j}}(\xi) \underset{\Delta x_{1j}\to 0}{\longrightarrow} \partial_\xi^{\mathbf{k}}\partial_{x_{1j}}Z_0(t,x;\xi)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_+$, рівномірно щодо $\xi \in K_R$, де R – будь-яке додатне число;

г) $|\xi^{\mathbf{k}}\partial_\xi^{\mathbf{s}}H_{\Delta x_{1j}}(\xi)| \le C\mathbf{A}^{\mathbf{k}}\mathbf{B}^{\mathbf{s}}\mathbf{k}^{\mathbf{k}/\mathbf{q}}\mathbf{s}^{\mathbf{s}/2\bar{b}}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{k},\mathbf{s}\} \subset \mathbb{Z}^n_+$, де $C > 0$, $\{\mathbf{A},\mathbf{B}\} \subset \subset \mathbb{R}^n_+$ не залежать від Δx_{1j}, якщо Δx_{1j} досить мале.

Зобразимо вираз $H_{\Delta x_{1j}}(\xi)$ у вигляді

$$H_{\Delta x_{1j}}(\xi) = \frac{1}{\Delta x_{1j}}\int_0^{\Delta x_{1j}}\partial_{x_{1j}}Z_0(t,x_{\omega_{1j}};\xi)\,d\omega_{1j}. \tag{11}$$

Згідно з теоремою про середнє і неперервністю похідних від Z_0 для $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_+$ маємо, що

$$\partial_\xi^{\mathbf{k}}H_{\Delta x_{1j}}(\xi) = \frac{1}{\Delta x_{1j}}\int_0^{\Delta x_{1j}}\partial_\xi^{\mathbf{k}}\partial_{x_{1j}}Z_0(t,x_{\omega_{1j}};\xi)\,d\omega_{1j} =$$
$$= \partial_\xi^{\mathbf{k}}\partial_{x_{1j}}Z_0(t,x_{\theta_{1j}};\xi) \underset{\Delta x_{1j}\to 0}{\longrightarrow} \partial_\xi^{\mathbf{k}}\partial_{x_{1j}}Z_0(t,x;\xi)$$

рівномірно щодо $\xi \in K_R$. Отже, твердження *в*) виконується.

Використовуючи зображення (11) і оцінки (4), для $\{\xi,\eta\} \subset \mathbb{R}^n$ маємо

$$|H_{\Delta x_{1j}}(\xi + i\eta)| \le \frac{1}{|\Delta x_{1j}|}\left|\int_0^{\Delta x_{1j}}|\partial_{x_{1j}}Z_0(t,x_{\omega_{1j}};\xi + i\eta)|\,d\omega_{1j}\right| \le$$

$$\leq \frac{C_1}{|\Delta x_{1j}|}(B_0(t))^{-M_0+\frac{1}{2b_j}}\left|\int\limits_0^{\Delta x_{1j}} E_c(t,x_{\omega_{1j}};\xi)E_{-c_1}(t,0;\eta)\,d\omega_{1j}\right| = \frac{C_1}{|\Delta x_{1j}|}(B_0(t))^{-M_0+\frac{1}{2b_j}} \times$$

$$\times\left|\int\limits_0^{\Delta x_{1j}} \exp\left\{-c\left(\sum_{k=1}^{n_l}\frac{\left|x_{1k}+\omega_{1k}^{(j)}-\xi_{1k}\right|^{q_k}}{(B_0(t))^{-1+q_k}}+\sum_{k=1}^{n_2}\frac{\left|x_{2k}+B_0(t)(x_{1k}+\omega_{1k}^{(j)})-\xi_{2k}\right|^{q_k}}{(B_0(t))^{-1+2q_k}}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n_3}\frac{\left|x_{3k}+B_0(t)x_{2k}+\frac{1}{2}(B_0(t))^2(x_{1k}+\omega_{1k}^{(j)})-\xi_{3k}\right|^{q_k}}{(B_0(t))^{-1+3q_k}}\right)+$$

$$\left.\left.+c_1\left(\sum_{k=1}^{n_l}\frac{|\eta_{1k}|^{q_k}}{(B_0(t))^{-1+q_k}}+\sum_{k=1}^{n_2}\frac{|\eta_{2k}|^{q_k}}{(B_0(t))^{-1+2q_k}}+\sum_{k=1}^{n_3}\frac{|\eta_{3k}|^{q_k}}{(B_0(t))^{-1+3q_k}}\right)\right\}d\omega_{1j}\right|, \quad (12)$$

де $\omega_1^{(j)} \equiv (0,\ldots,0,\omega_{1j},0,\ldots,0)$. З огляду на нерівність $(a+b)^{q_k} \leq 2^{q_k-1}(a^{q_k}+b^{q_k})$ одержуємо

$$\left|x_{1k}+\omega_{1k}^{(j)}-\xi_{1k}\right|^{q_k} \geq 2^{-q_k+1}|\xi_{1k}|^{q_k} - \left|x_{1k}+\omega_{1k}^{(j)}\right|^{q_k} \geq 2^{-q_k+1}|\xi_{1k}|^{q_k} -$$
$$-2^{q_k-1}\left(|x_{1k}|^{q_k}+\left|\omega_{1k}^{(j)}\right|^{q_k}\right) \geq 2^{-q_k+1}|\xi_{1k}|^{q_k} - 2^{q_k-1}|x_{1k}|^{q_k} - 2^{q_k-1}|\Delta x_{1k}|^{q_k} \geq$$
$$\geq 2^{-q_k+1}|\xi_{1k}|^{q_k} - 2^{q_k-1}|x_{1k}|^{q_k} - 2^{q_k-1}h^{q_k}, \qquad k \in N_1;$$

$$\left|x_{2k}+B_0(t)(x_{1k}+\omega_{1k}^{(j)})-\xi_{2k}\right|^{q_k} \geq 2^{-q_k+1}|\xi_{2k}|^{q_k} - 2^{q_k-1}|x_{2k}+B_0(t)x_{1k}|^{q_k} -$$
$$-2^{q_k-1}(B_0(t))^{q_k}\left|\omega_{1k}^{(j)}\right|^{q_k} \geq 2^{-q_k+1}|\xi_{2k}|^{q_k} - 2^{q_k-1}|x_{2k}+B_0(t)x_{1k}|^{q_k} -$$
$$-2^{q_k-1}(B_0(t))^{q_k}h^{q_k}, \qquad k \in N_2;$$

$$\left|x_{3k}+B_0(t)x_{2k}+\frac{1}{2}(B_0(t))^2(x_{1k}+\omega_{1k}^{(j)})-\xi_{3k}\right|^{q_k} \geq$$
$$\geq 2^{-q_k+1}|\xi_{3k}|^{q_k} - 2^{q_k-1}\left|x_{3k}+B_0(t)x_{2k}+\frac{1}{2}(B_0(t))^2x_{1k}\right|^{q_k} - \frac{1}{2}(B_0(t))^{2q_k}\left|\omega_{1k}^{(j)}\right|^{q_k} \geq$$
$$\geq 2^{-q_k+1}|\xi_{3k}|^{q_k} - 2^{q_k-1}\left|x_{3k}+B_0(t)x_{2k}+\frac{1}{2}(B_0(t))^2x_{1k}\right|^{q_k} -$$
$$-\frac{1}{2}(B_0(t))^{2q_k}h^{q_k}, \qquad k \in N_3,$$

якщо $|\Delta x_{1k}| \leq h$. Якщо ці нерівності використати у (12), то при фіксованих $t \in (0,T]$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $x_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$ і будь-яких $|\Delta x_{1k}| \leq h$ одержимо оцінку

$$\left|H_{\Delta x_{1j}}(\xi+i\eta)\right| \leq C\exp\left\{-c_0(d(\xi,0))^{q''}+c_2(d(\eta,0))^{q''}\right\}, \quad \{\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n,$$

з деякими $C>0$, $c_0>0$, $c_2>0$, які не залежать від Δx_{1j}. Ця оцінка рівносильна оцінці з твердження *г*).

Твердження 3) і 4) доводяться аналогічно. ◊

3. Визначимо $\langle\varphi, Z_0(t,x;\cdot)\rangle$ як значення узагальненої функції $\varphi \in \left(S_{1/\mathbf{q}}^{1/2b}\right)'$ на функції з основного простору. Якщо функція φ звичайна, то

$$\left\langle \varphi, Z_0(t,x;\cdot)\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

за умови, що інтеграл існує.

Під розв'язком задачі Коші для рівняння (3) з початковою умовою

$$u(t,\cdot)\Big|_{t=0} = \varphi, \qquad \varphi \in \left(S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overline{2b}} \right)', \tag{13}$$

розумітимемо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$, яка має похідні, що входять у рівняння (3), задовольняє це рівняння та умову (13) у такому розумінні:

$$\forall f \in S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overline{2b}} : \left\langle u(t,\cdot), f \right\rangle \underset{t\to 0+}{\to} \left\langle \varphi, f \right\rangle.$$

Наведемо теорему про існування і єдиність розв'язків задачі Коші (3), (13), доведення якої проведемо аналогічно доведенню відповідної теореми для випадку, коли $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$ [4], а також для випадку без виродження на початковій гіперплощині [3].

Теорема 1. *Задача* (3), (13) *однозначно розв'язна. Її розв'язок диференційовний за* t, *нескінченно диференційовний за* x *і має вигляд*

$$u(t,x) = \left\langle \varphi, Z_0(t,x;\cdot) \right\rangle, \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{14}$$

Д о в е д е н н я. Згідно з лемою функція $Z_0(t,x;\cdot)$ як абстрактна функція параметрів $t \in (0,T]$ і $x \in \mathbb{R}^n$ у просторі $S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overline{2b}}$ є диференційовною за t і нескінченно диференційовною за x. Тому (14) є звичайною функцією, диференційовною за t і нескінченно диференційовною за x. Оскільки Z_0 – ф. р. задачі Коші для рівняння (3), то функція (14) задовольняє рівняння (3) у звичайному розумінні.

Нехай $f \in S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overline{2b}}$. Покладемо

$$g_t(\xi) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\xi) f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x+\xi_t;\xi) f(x+\xi_t)\,dx, \qquad t \in (0,T],$$

де $\xi_t \equiv (\xi_t^{11},\ldots,\xi_t^{1n_1},\xi_t^{21},\ldots,\xi_t^{2n_2},\xi_t^{31},\ldots,\xi_t^{3n_3})$, $\xi_y^{lj} \equiv \sum\limits_{r=0}^{l-1} \dfrac{1}{r!}\left(-B_0(t)\right)^r \xi_{(l-r)j}$, $j \in N_l$, $l \in N_0$.

Для $t \in (0,T]$ і $\{\xi,\eta\} \subset \mathbb{R}^n$ маємо

$$|\, g_t(\xi + i\eta) \,| \le \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\, Z_0(t, x + \xi_t + i\eta_t; \xi + i\eta) \,|\, |\, f(x + \xi_t + i\eta_t) \,|\, dx. \tag{15}$$

Врахувавши, що на підставі рівномірної обмеженості операції зсуву в просторі $S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overline{2b}}$ для будь-яких $t \in (0,T]$ і $\{x,\xi,\eta\} \subset \mathbb{R}^n$ правильна нерівність

$$|\, f(x+\xi_t+i\eta_t) \,| \le C \exp\left\{-c_0\left(d(\xi_t,0)\right)^{q''} + c_1\left(d(\eta_t,0)\right)^{q''}\right\},$$

де сталі $C > 0$, $c_0 > 0$ і $c_1 > 0$ не залежать від x, а також аналогічні до (10) з роботи [3] нерівності $\left(d(\xi_t,0)\right)^{q''} \ge \delta_1\left(d(\xi,0)\right)^{q''}$, $\left(d(\eta_t,0)\right)^{q''} \le \delta_2\left(d(\eta,0)\right)^{q''}$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, які справджуються для будь-яких $t \in (0,\gamma]$, якщо γ є досить малим, одержимо оцінку

$$|\, f(x+\xi_t+i\eta_t) \,| \le C \exp\left\{-c_2(d(\xi,0))^{q''} + c_3(d(\eta,0))^{q''}\right\},$$
$$\{x,\xi,\eta\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad t \in (0,\gamma]. \tag{16}$$

Згідно з оцінкою (4) маємо

$$|\, Z_0(t, x+\xi_t+i\eta_t; \xi+i\eta) \,| \le C_{\mathbf{0}} (B_0(t))^{-M_{\mathbf{0}}} E_{c_4}(t, x+\xi_t; \xi)\, E_{-c_5}(t, \eta_t; \eta) =$$
$$= C_{\mathbf{0}} (B_0(t))^{-M_{\mathbf{0}}} E_{c_4}(t,x;0), \qquad t \in (0,T], \quad \{x,\xi,\eta\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

Використовуючи нерівності (15)–(17) і рівність (18) з [4], одержуємо

$$| g_t(\xi + i\eta) | \le C_1 \exp\{- c_2(d(\xi,0))^{q''} + c_3(d(\eta,0))^{q''}\} \int_{\mathbb{R}^n} (B_0(t))^{-M_0} E_{c_4}(t,x;0)\,dx =$$

$$= C_2 \exp\{- c_2(d(\xi,0))^{q''} + c_3(d(\eta,0))^{q''}\}, \qquad t \in (0,\gamma], \quad \{\xi,\eta\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (18)$$

звідки випливає, що існує $\gamma \in (0,T]$ таке, що для будь-яких $t \in (0,\gamma]$ $g_t \in S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overline{2b}}$.

Тепер доведемо, що $g_t \underset{t\to 0+}{\to} f$ у просторі $S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overline{2b}}$. Це означає, що: *а*) $\partial_\xi^{\mathbf{k}} g_t \underset{t\to 0+}{\to} f$ рівномірно в кожній кулі K_R; *б*) при досить малому γ функції g_t рівномірно щодо $t \in (0,\gamma]$ обмежені в просторі $S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overline{2b}}$. Виконання умови *б*) випливає з того, що у нерівності (18) сталі C_2, c_2 і c_3 не залежать від t, якщо $t \in (0,\gamma]$. Доведемо, що виконується умова *а*). Оскільки згідно з означенням функції g_t для $t \in (0,T]$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ маємо

$$\partial_\xi^{\mathbf{k}} g_t(\xi) = \sum_{\mathbf{s}\le\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}^{\mathbf{s}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^{\mathbf{k}-\mathbf{s}} Z_0(t, x+\xi_t;\xi)\,\partial_\xi^{\mathbf{s}} f(x+\xi_t)\,dx, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n,$$

а $\partial_\xi^{\mathbf{k}-\mathbf{s}} Z_0(t,x+\xi_t;\xi) = 0$ для $\mathbf{s} < \mathbf{k}$, то

$$\partial_\xi^{\mathbf{k}} g_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x+\xi_t;\xi)\,\partial_\xi^{\mathbf{k}} f(x+\xi_t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x+\xi_t;\xi)\,dx\,\partial_\xi^{\mathbf{k}} f(\xi_t) +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x+\xi_t;\xi)\big(\partial_\xi^{\mathbf{k}} f(x+\xi_t) - \partial_\xi^{\mathbf{k}} f(\xi_t)\big)\,dx \equiv I_1(t,\xi) + I_2(t,\xi),$$

$$t \in (0,T], \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \qquad (19)$$

Використовуючи те, що $\int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\xi)\,dx \underset{t\to 0+}{\to} 1$ рівномірно щодо $\xi \in \mathbb{R}^n$ і оцінки похідних від f, одержуємо, що

$$I_1(t,\xi) \underset{t\to t_0+}{\to} \partial_\xi^{\mathbf{k}} f(\xi) \qquad (20)$$

рівномірно щодо $\xi \in K_R$.

Зобразимо інтеграл $I_2(t,\xi)$ у вигляді суми інтеграла $I_2'(t,\xi)$ по K_δ та інтеграла $I_2''(t,\xi)$ по $\mathbb{R}^n \setminus K_\delta$, $\delta > 0$. Для довільно додатного числа ε виберемо $\delta > 0$ так, щоб для всіх $x \in K_\delta$, $t \in (0,T]$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ виконувалась нерівність

$$\big| \partial_\xi^{\mathbf{k}} f(x+\xi_t) - \partial_\xi^{\mathbf{k}} f(\xi_t) \big| < \varepsilon. \qquad (21)$$

За допомогою оцінки (17) при $\eta = 0$, нерівностей (21) і

$$E_1(t,x;\xi) \le \exp\{- c_1 R^{q''} (B_0(t))^{1-q'}\}, \quad B_0(t) \in (0,\delta_0), \quad \delta_0 \in (0,1), \ c_1 > 0,$$

які є правильними для будь-яких $x \in \mathbb{R}^n \setminus K_{2R}$ і $\xi \in K_R$, а також рівності (18) з роботи [4] маємо

$$| I_2'(t,\xi) | \le \varepsilon \int_{K_\delta} | Z_0(t,x+\xi_t;\xi) |\,dx \le C_0\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_4}(t,x;0)(B_0(t))^{-M_0}\,dx = C\varepsilon,$$

$$\xi \in \mathbb{R}^n, \qquad (22)$$

$$| I_2''(t,\xi) | \le \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_\delta} | Z_0(t,x+\xi_t;\xi) |\,\big| \partial_\xi^{\mathbf{k}} f(x+\xi_t) - \partial_\xi^{\mathbf{k}} f(\xi_t) \big|\,dx \le$$

$$\le L_{\mathbf{k}} C_0 \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus K_\delta} E_{c_4}(t,x;0)\big(B_0(t)\big)^{-M_0}\,dx \le$$

$$\le L_{\mathbf{k}} C_0 \exp\left\{-\frac{c_1 c_4}{2}\big(B_0(t)\big)^{1-q'}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{q''}\right\}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c_4/2}(t,x;0)\,dx =$$

$$= L_{\mathbf{k}} C \exp\left\{-c_6\big(B_0(t)\big)^{1-q'}\delta^{q''}\right\}, \quad B_0(t)\in(0,\delta_0], \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{23}$$

де $L_{\mathbf{k}} \equiv \sup\limits_{\substack{t\in[0,T]\\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n}} \left|\partial_\xi^{\mathbf{k}} f(x+\xi_t)\right| + \sup\limits_{\substack{t\in[0,T]\\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n}} \left|\partial_\xi^{\mathbf{k}} f(\xi_t)\right|$, $\quad c_6 \equiv 2^{-q''-1}c_1 c_4$.

З нерівності (23) випливає, що існує число $\gamma\in(0,T]$ таке, що для будь-яких $t\in(0,\gamma)$ і $\xi\in\mathbb{R}^n$ виконується $\left|I_2''(t,\xi)\right|<\varepsilon$. Звідси та з нерівності (22) одержуємо нерівність $\left|I_2(t,\xi)\right|\le(C+1)\varepsilon$ для будь-яких $t\in(0,\gamma)$ і $\xi\in\mathbb{R}^n$. Оскільки ε довільне, то

$$I_2(t,\xi) \underset{t\to 0+}{\to} 0 \tag{24}$$

рівномірно щодо $\xi\in\mathbb{R}^n$. Зі співвідношень (19), (20) і (24) випливає правильність умови *a*).

Отже, доведено, що $g_t \underset{t\to 0+}{\to} f$ у просторі $S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overline{2b}}$. Звідси випливає, що функція (14) задовольняє умову (13) у вищезазначеному розумінні. Справді, для довільної $f\in S_{1/\mathbf{q}}^{1/\overline{2b}}$ маємо

$$\lim_{t\to 0+}\left\langle u(t,\cdot),f\right\rangle = \lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t,x)f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left\langle \varphi, Z_0(t,x;\cdot)\right\rangle f(x)\,dx = \lim_{t\to 0+}\langle\varphi,g_t\rangle = \left\langle\varphi,f\right\rangle.$$

Доведення єдиності розв'язку задачі (3), (13) проводиться так само, як і в роботах [3, 4]. При цьому використовується загальна теорема про єдиність з [5, § 2, гл. II]. ◊

4. У наступній теоремі опишемо властивості локалізації розв'язку задачі (3), (13), доведення якої проведемо аналогічно доведенню для випадків, коли $b_1=b_2=\ldots=b_n$ [4], і без виродження на початковій гіперплощині [2].

Теорема 2. *Якщо узагальнена функція* $\varphi\in\big(S_{1/\mathbf{q}}^{\boldsymbol\beta}\big)'$, $\boldsymbol\beta\equiv(\beta_{11},\ldots,\beta_{1n_1},\beta_{21},\ldots,\beta_{2n_2},\beta_{31},\ldots,\beta_{3n_3})$, *де* $\beta_{lj}>\dfrac{l-1}{q'-1}+\dfrac{q'}{2b_j(q'-1)}$, $j\in N_l$, $l\in N_0$, *збігається в області* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *з неперервною функцією* ψ, *то для довільного компакта* $K\subset\Omega$ *збіжність* $u(t,x)\underset{t\to 0+}{\to}\psi(x)$ *є рівномірною щодо* $x\in K$.

Д о в е д е н н я. Спочатку наведемо його для випадку, коли $\psi=0$ в Ω. Для цього розглянемо функцію $\theta\in S_{1/\mathbf{q}}^{\boldsymbol\beta}$ таку, що $\operatorname{supp}\theta\subset\Omega$ і $\theta=1$ на K', де K' – компакт в $\mathbb{R}^n$ такий, що $K\subset K'\subset\Omega$. Використовуючи те, що функції $\theta(\cdot)Z_0(t,x;\cdot)$ і $(1-\theta(\cdot))Z_0(t,x;\cdot)$ при кожних фіксованих $t\in(0,T]$ і $x\in\mathbb{R}^n$ належать до простору $S_{1/\mathbf{q}}^{\boldsymbol\beta}$, узагальнена функція φ дорівнює нулю в області Ω, а $\operatorname{supp}\big(\theta(\cdot)Z_0(t,x;\cdot)\big)\subset\Omega$, то на підставі формули (14) і лінійності функціонала φ одержуємо формулу

$$u(t,x) = B_0(t)\left\langle \varphi, (B_0(t))^{-1}(1-\theta(\cdot))\, Z_0(t,x;\cdot)\right\rangle, \quad (t,x)\in \Pi_{(0,T]}.$$

Тому для доведення твердження теореми в цьому випадку потрібно довести, що функції $g_{t,x}(\xi) \equiv (B_0(t))^{-1}(1-\theta(\xi))\, Z_0(t,x;\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, обмежені у просторі $S^{\boldsymbol\beta}_{1/\mathbf q}$ рівномірно щодо $t\in(0,\gamma)$ і $x\in K$, якщо γ досить мале, тобто

$$\left|\,\xi^{\mathbf k}\partial_\xi^{\mathbf s} g_{t,x}(\xi)\,\right| \le C\mathbf{A}^{\mathbf k}\,\mathbf{B}^{\mathbf s}\,\mathbf{k}^{\mathbf k/\mathbf q}\,\mathbf{s}^{\mathbf s\boldsymbol\beta}, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \quad \{\mathbf k,\mathbf s\}\subset \mathbb{Z}_+^n, \tag{25}$$

де сталі $C>0$ і $\{\mathbf A,\mathbf B\}\in\mathbb{R}_+^n$ не залежать від параметрів t і x, які змінюються вищезазначеним способом. Враховуючи те, що $g_{t,x}(\xi)=0$ для $\xi\in K'$, оцінку (25) встановимо для $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus K'$.

За допомогою формули диференціювання добутку двох функцій маємо

$$\left|\,\xi^{\mathbf k}\partial_\xi^{\mathbf s} g_{t,x}(\xi)\,\right| = (B_0(t))^{-1}\left|\,\xi^{\mathbf k}\sum_{\mathbf r\le\mathbf s} C_{\mathbf s}^{\mathbf r}\partial_\xi^{\mathbf r}(1-\theta(\xi))\,\partial_\xi^{\mathbf s-\mathbf r} Z_0(t,x;\xi)\right| \le$$

$$\le (B_0(t))^{-1}\sum_{\mathbf r\le\mathbf s} C_{\mathbf s}^{\mathbf r}\left|\,\xi^{\mathbf k}\partial_\xi^{\mathbf r}\theta(\xi)\right|\cdot\left|\,\partial_\xi^{\mathbf s-\mathbf r}Z_0(t,x;\xi)\right| + (B_0(t))^{-1}\left|\,\xi^{\mathbf k}\partial_\xi^{\mathbf s}Z_0(t,x;\xi)\right| \equiv$$

$$\equiv G'_{t,x}(\xi) + G''_{t,x}(\xi).$$

Оцінимо $G'_{t,x}(\xi)$. Оскільки $\theta\in S^{\boldsymbol\beta}_{1/\mathbf q}$, то

$$\left|\,\xi^{\mathbf k}\partial_\xi^{\mathbf r}\theta(\xi)\right| \le \bar C\mathbf A^{\mathbf k}\,\bar{\mathbf B}^{\mathbf r}\,\mathbf k^{\mathbf k/\mathbf q}\,\mathbf r^{\mathbf r\boldsymbol\beta},\quad \xi\in\mathbb R^n,\ \{\mathbf k,\mathbf r\}\subset\mathbb Z_+^n,\ \{\mathbf A,\bar{\mathbf B}\}\in\mathbb R_+^n,\ \bar C>0. \tag{26}$$

Функція $\tilde Z(t,\xi+i\eta)\equiv (B_0(t))^{-M_{\mathbf 0}}\left(F^{-1}[Q(t,0,\cdot)]\right)(t,\xi+i\eta)$, $t\in(0,T]$, $\{\xi,\eta\}\subset\mathbb R^n$, де Q − функція, означена в [11], і як функція від $\xi+i\eta$ при кожному фіксованому $t\in(0,T]$ є цілою функцією [11], яка має оцінку

$$\left|\,\tilde Z(t,\xi+i\eta)\right| \le C(B_0(t))^{-M_{\mathbf 0}}\exp\{-c_0 d^{q''}(\xi,0)+c_1 d^{q''}(\eta,0)\},\ t\in(0,T],\ \{\xi,\eta\}\subset\mathbb R^n,$$

де $C>0$, $c_0>0$ і $c_1>0$ − деякі сталі. Звідси функція $\tilde Z(t,\cdot)$ при кожному фіксованому $t\in(0,T]$ належить до простору $S^{1/\overline{2b}}_{1/\mathbf q}$ і є правильними нерівності

$$\left|\partial_\xi^{\mathbf s}\tilde Z(t,\xi)\right| \le \bar{\bar C}\bar{\bar{\mathbf B}}^{\mathbf s}\mathbf s^{\mathbf s/\overline{2b}}(B_0(t))^{-M_{\mathbf 0}}\exp\{-c_2 d^{q''}(\xi,0)\},\ t\in(0,T],\ \xi\in\mathbb R^n,\ \mathbf s\in\mathbb Z_+^n, \tag{27}$$

з деякими сталими $\bar{\bar C}>0$, $c_2>0$, $\bar{\bar{\mathbf B}}\in\mathbb R_+^n$. На підставі того, що $Z_0(t,x;\xi) = \tilde Z(t,V(t,0,x,\xi))$, де V − функція, означена в [11], і нерівностей (27) одержуємо оцінки

$$\left|\,\partial_\xi^{\mathbf s}Z_0(t,x;\xi)\right| \le \bar{\bar C}\bar{\bar{\mathbf B}}^{\mathbf s}\,\mathbf s^{\mathbf s/\overline{2b}}(B_0(t))^{-M_{\mathbf s}}E_{c_3}(t,x;\xi),$$

$$t\in(0,T],\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb R^n,\quad \mathbf s\in\mathbb Z_+^n, \tag{28}$$

де $\bar{\bar C}>0$, $c_3>0$, $\bar{\bar{\mathbf B}}\in\mathbb R_+^n$. З нерівностей (28) і нерівності

$$E_1(t,x;\xi)\le\exp\left\{-c_4 d^{q''}(B_0(t))^{1-q'}\right\},\ x\in K,\ \xi\in\mathbb R^n\setminus K',\ t\in(0,\gamma),\ c_4>0, \tag{29}$$

де d − відстань між межами компактів K і K', а $\gamma\in(0,T]$ є досить малим, випливають оцінки

$$\left|\,\partial_\xi^{\mathbf s}Z_0(t,x;\xi)\right| \le \bar{\bar C}\,\bar{\bar{\mathbf B}}^{\mathbf s}\,\mathbf s^{\mathbf s/\overline{2b}}(B_0(t))^{-M_{\mathbf s}}\exp\left\{-a d^{q''}(B_0(t))^{1-q'}\right\},$$

$$x\in K,\quad \xi\in\mathbb R^n\setminus K',\quad t\in(0,\gamma),\quad a>0,\quad \mathbf s\in\mathbb Z_+^n. \tag{30}$$

За допомогою оцінок (26) і (30) маємо

$$G'_{t,x}(\xi)\le (B_0(t))^{-1}\sum_{\mathbf r\le\mathbf s}C_{\mathbf s}^{\mathbf r}\,\bar C\,\mathbf A^{\mathbf k}\bar{\mathbf B}^{\mathbf r}\mathbf k^{\mathbf k/\mathbf q}\,\mathbf r^{\mathbf r\boldsymbol\beta}\bar{\bar C}\bar{\bar{\mathbf B}}^{\mathbf s-\mathbf r}(\mathbf s-\mathbf r)^{(\mathbf s-\mathbf r)/\overline{2b}}(B_0(t))^{-M_{\mathbf s-\mathbf r}}\times$$

$$\times\exp\left\{-ad^{q''}(B_0(t))^{1-q'}\right\} = \bar{C}\bar{\bar{C}}\mathbf{A}^{\mathbf{k}}\mathbf{k}^{\mathbf{k}/\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{r}\le\mathbf{s}} C_{\mathbf{s}}^{\mathbf{r}}\bar{\mathbf{B}}^{\mathbf{r}}\bar{\bar{\mathbf{B}}}^{\mathbf{s}-\mathbf{r}}\mathbf{r}^{\mathbf{r}\beta}(\mathbf{s}-\mathbf{r})^{(\mathbf{s}-\mathbf{r})/\overrightarrow{2b}}(B_0(t))^{-1-M_{\mathbf{s}-\mathbf{r}}}\times$$

$$\times\exp\left\{-ad^{q''}(B_0(t))^{1-q'}\right\} \le \bar{C}\bar{\bar{C}}\mathbf{A}^{\mathbf{k}}\mathbf{k}^{\mathbf{k}/\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{r}\le\mathbf{s}} C_{\mathbf{s}}^{\mathbf{r}}\bar{\mathbf{B}}^{\mathbf{r}}\bar{\bar{\mathbf{B}}}^{\mathbf{s}-\mathbf{r}}\mathbf{r}^{\mathbf{r}\beta}(\mathbf{s}-\mathbf{r})^{(\mathbf{s}-\mathbf{r})/\overrightarrow{2b}}\prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l} L^{(s_{lj}-r_{lj})}, \quad (31)$$

де $L^{(p_{lj})} \equiv \sup_{t>0}\left((B_0(t))^{-\frac{1}{n}-\frac{q_{lj}}{2b_j}}\exp\left\{-\frac{a}{n}d^{q''}(B_0(t))^{1-q'}\right\}\right)$, $q_{lj} \equiv ((l-1)2b_j+1)(p_{lj}+1)$, $j \in N_l$, $l \in N_0$. Безпосереднім обчисленням знаходимо, що

$$L^{(p_{lj})} = \left(\frac{\left(\frac{q_{lj}}{2b_j(q'-1)}+\frac{1}{n(q'-1)}\right)n}{aed^{q''}}\right)^{\frac{q_{lj}}{2b_j(q'-1)}+\frac{1}{n(q'-1)}}.$$

Нехай число $\varepsilon > 0$ таке, що $\frac{l-1}{q'-1}+\frac{q'}{2b_j(q'-1)}+\varepsilon < \beta_{lj}$, $j \in N_l$, $l \in N_0$. Для тих p_{lj}, для яких $\varepsilon p_{lj} > a_{lj}+\frac{1}{n(q'-1)}$, де $a_{lj} \equiv \frac{l-1}{q'-1}+\frac{1}{2b_j(q'-1)}$, $j \in N_l$, $l \in N_0$, маємо $\frac{q_{lj}}{2b_j(q'-1)}+\frac{1}{n(q'-1)} < (a_{lj}+\varepsilon)p_{lj}$ і звідси $L^{(p_{lj})} \le \bar{D}_{lj}^{p_{lj}}p_{lj}^{(a_{lj}+\varepsilon)p_{lj}}$, $\bar{D}_{lj} \equiv \left(\frac{(a_{lj}+\varepsilon)n}{aed^{q''}}\right)^{a_{lj}+\varepsilon}$. Якщо $\varepsilon p_{lj} \le a_{lj}+\frac{1}{n(q'-1)}$, то $\frac{q_{lj}}{2b_j(q'-1)} = a_{lj}(p_{lj}+1) \le$ $\le a_{lj}\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(a_{lj}+\frac{1}{n(q'-1)}\right)+1\right)$ і $L^{(p_{lj})} \le \bar{\bar{C}}_{lj}\bar{\bar{D}}_{lj}^{p_{lj}} \le \bar{\bar{C}}_{lj}\bar{\bar{D}}_{lj}^{p_{lj}}p_{lj}^{(a_{lj}+\varepsilon)p_{lj}}$,

де $\bar{\bar{D}}_{lj} \equiv \left(\frac{\left(a_{lj}\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(a_{lj}+\frac{1}{n(q'-1)}\right)+1\right)+\frac{1}{n(q'-1)}\right)n}{aed^{q''}}\right)^{a_{lj}}$, $\bar{\bar{C}}_{lj} \equiv \bar{\bar{D}}_{lj}^{1+\frac{1}{na_{lj}(q'-1)}}$.

Отже, для будь-яких $p_{lj} \ge 0$ є правильною оцінка $L^{(p_{lj})} \le C_{lj}D_{lj}^{p_{lj}}p_{lj}^{(a_{lj}+\varepsilon)p_{lj}}$, де $C_{lj} \equiv \max\left\{1,\bar{\bar{C}}_{lj}\right\}$, $D_{lj} \equiv \max\left\{\bar{D}_{lj},\bar{\bar{D}}_{lj}\right\}$. Звідси випливає, що

$$\prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l} L^{(p_{lj})} \le C_0\,\mathbf{D}^{\mathbf{p}}\,\mathbf{p}^{\mathbf{p}\mathbf{a}_\varepsilon}, \quad (32)$$

де $C_0 \equiv \prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l} C_{lj}$, $\mathbf{D} \equiv (D_{11},\ldots,D_{1n_1},D_{21},\ldots,D_{2n_2},D_{31},\ldots,D_{3n_3})$,

$\mathbf{a}_\varepsilon \equiv (a_{11}+\varepsilon,\ldots,a_{1n_1}+\varepsilon,a_{21}+\varepsilon,\ldots,a_{2n_2}+\varepsilon,a_{31}+\varepsilon,\ldots,a_{3n_3}+\varepsilon)$,

$\mathbf{p} \equiv (p_{11},\ldots,p_{1n_1},p_{21},\ldots,p_{2n_2},p_{31},\ldots,p_{3n_3})$.

Використовуючи оцінки (31) і (32), маємо

$$G'_{t,x}(\xi) \le C\mathbf{A}^{\mathbf{k}}\mathbf{k}^{\mathbf{k}/\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{r}\le\mathbf{s}} C_{\mathbf{s}}^{\mathbf{r}}\bar{\mathbf{B}}^{\mathbf{r}}\bar{\bar{\mathbf{B}}}^{\mathbf{s}-\mathbf{r}}\mathbf{D}^{\mathbf{s}-\mathbf{r}}\mathbf{r}^{\mathbf{r}\beta}(\mathbf{s}-\mathbf{r})^{(\mathbf{s}-\mathbf{r})/\overrightarrow{2b}}(\mathbf{s}-\mathbf{r})^{(\mathbf{s}-\mathbf{r})\mathbf{a}_\varepsilon},\ C \equiv \bar{C}\bar{\bar{C}}C_0. \quad (33)$$

Оскільки $a_{lj}+\varepsilon+\frac{1}{2b_j} = \frac{l-1}{q'-1}+\frac{q'}{2b_j(q'-1)}+\varepsilon$, $j \in N_l$, $l \in N_0$, а $\frac{l-1}{q'-1}+$ $+\frac{q'}{2b_j(q'-1)}+\varepsilon < \beta_{lj}$, $j \in N_l$, $l \in N_0$, то $\mathbf{r}^{\mathbf{r}\beta}(\mathbf{s}-\mathbf{r})^{(\mathbf{s}-\mathbf{r})/\overrightarrow{2b}}(\mathbf{s}-\mathbf{r})^{(\mathbf{s}-\mathbf{r})\mathbf{a}_\varepsilon} \le \mathbf{r}^{\mathbf{r}\beta}(\mathbf{s}-\mathbf{r})^{(\mathbf{s}-\mathbf{r})\beta} \le$ $\le \mathbf{s}^{\mathbf{s}\beta}$. Далі

$$\sum_{\mathbf{r}\le\mathbf{s}} C_{\mathbf{s}}^{\mathbf{r}} \bar{\mathbf{B}}^{\mathbf{r}} \bar{\bar{\mathbf{B}}}^{\mathbf{s}-\mathbf{r}} \mathbf{D}^{\mathbf{s}-\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{r}\le\mathbf{s}} C_{\mathbf{s}}^{\mathbf{r}} \bar{\mathbf{B}}^{\mathbf{r}} \bar{\mathbf{D}}^{\mathbf{s}-\mathbf{r}} \le \tilde{\mathbf{B}}^{\mathbf{s}} \sum_{\mathbf{r}\le\mathbf{s}} C_{\mathbf{s}}^{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{B}}^{\mathbf{s}} \cdot 2^{|\mathbf{s}|} = \mathbf{B}^{\mathbf{s}},$$

де $\bar{D}_{lj} \equiv \bar{\bar{B}}_{lj} D_{lj}$, $\tilde{B}_{lj} \equiv \max\{\bar{B}_{lj}, \bar{D}_{lj}, 1\}$, $B_{lj} \equiv 2\tilde{B}_{lj}$. Тому з нерівності (33) одержуємо потрібну оцінку $G'_{t,x}(\xi) \le C\mathbf{A}^{\mathbf{k}}\,\mathbf{B}^{\mathbf{s}}\,\mathbf{k}^{\mathbf{k}/\mathbf{q}}\,\mathbf{s}^{\mathbf{s}\boldsymbol{\beta}}$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus K'$, $t \in (0,\gamma)$, $x \in K$, $\{\mathbf{k},\mathbf{s}\} \subset \mathbb{Z}_+^n$.

Оцінимо $G''_{t,x}$. На підставі оцінок (28) і (29) маємо

$$G''_{t,x}(\xi) \le \bar{\bar{C}}\,\bar{\bar{\mathbf{B}}}^{\mathbf{s}}\,\mathbf{s}^{\mathbf{s}/\overline{2b}}\,|\,\xi^{\mathbf{k}}\,|\,E_{\frac{c_3}{2}}(t,x;\xi)(B_0(t))^{-1-M_{\mathbf{s}}}\exp\{-\frac{a}{2}d^{q''}(B_0(t))^{1-q'}\} \le$$

$$\le \bar{\bar{C}}\,\bar{\bar{\mathbf{B}}}^{\mathbf{s}}\,\mathbf{s}^{\mathbf{s}/\overline{2b}}\prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l} L_1^{(s_{lj})} M_{t,x}^{(\mathbf{k})}(\xi), \tag{34}$$

де $L_1^{(s_{lj})}$ − вираз, який відрізняється від $L^{(s_{lj})}$ тільки тим, що в ньому a замінено на $\frac{a}{2}$, а $M_{t,x}^{(\mathbf{k})}(\xi) \equiv |\,\xi^{\mathbf{k}}\,|\,E_{\frac{c_3}{2}}(t,x;\xi)$. Далі оцінимо $M_{t,x}^{(\mathbf{k})}(\xi)$ для $t \in (0,\gamma)$, $x \in K$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$, якщо $B_0(\gamma) < 1$. На підставі нерівностей $E_1(t,x;\xi) \le$ $\le \exp\{-c_5(d(\xi,0))^{q''} + (1 + 2^{q''} + 3^{q''})R^{q''}\}$ маємо

$$M_{t,x}^{(\mathbf{k})}(\xi) \le E\,|\,\xi^{\mathbf{k}}\,|\exp\{-\delta(d(\xi,0))^{q''}\} \le E\prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l}\left(|\,\xi_{lj}\,|^{k_{lj}}\exp\{-\delta\,|\,\xi_{lj}\,|^{q_j}\}\right) \le$$

$$\le E\prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l} M^{(k_{lj})},$$

де $E \equiv \exp\left\{\frac{c_3}{2}(1 + 2^{q''} + 3^{q''})R^{q''}\right\}$, $\delta \equiv \frac{c_3 c_5}{2}$, $M^{(k_{lj})} \equiv \sup_{r\ge 0}\left(r^{k_{lj}}\exp\{-\delta r^{q_j}\}\right)$.

Оскільки $M^{(k_{lj})} = \left(\frac{k_{lj}}{\delta q_j e}\right)^{k_{lj}/q_j} = A_j^{k_{lj}} k_{lj}^{k_{lj}/q_j}$, $A_j \equiv \left(\frac{1}{\delta q_j e}\right)^{1/q_j}$, то

$$M_{t,x}^{(\mathbf{k})}(\xi) \le E\mathbf{A}^{\mathbf{k}}\mathbf{k}^{\mathbf{k}/\mathbf{q}}. \tag{35}$$

Із оцінок (34), (35), а також оцінки (32) для $\prod_{l=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_l} L_1^{(s_{lj})}$ випливає потрібна оцінка для $G''_{t,x}$ і звідси − оцінка (25). Таким чином, твердження теореми 2 доведено у випадку, коли $\psi = 0$ в Ω.

Розглянемо тепер загальний випадок. Нехай θ − використовувана вище функція. Оскільки $\varphi - \psi = 0$ в Ω, то $\theta(\varphi - \psi) = 0$ в Ω, $(1-\theta)\varphi = 0$ на K' і на підставі доведеного збіжність $\left\langle \theta(\varphi-\psi), Z_0(t,x;\cdot)\right\rangle \underset{t\to 0+}{\to} 0$, $\left\langle (1-\theta)\varphi, Z_0(t,x;\cdot)\right\rangle \underset{t\to 0+}{\to} 0$ є рівномірною щодо $x \in K$. Але

$$u(t,x) = \left\langle \varphi, Z_0(t,x;\cdot)\right\rangle = \left\langle \theta(\varphi-\psi), Z_0(t,x;\cdot)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle (1-\theta)\varphi, Z_0(t,x;\cdot)\right\rangle + \left\langle \theta\psi, Z_0(t,x;\cdot)\right\rangle,$$

а $\left\langle \theta\psi, Z_0(t,x;\cdot)\right\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} Z_0(t,x;\xi)(\theta\psi)(\xi)d\xi \underset{t\to 0+}{\to} (\theta\psi)(x)$ рівномірно щодо $x \in K$, тому на підставі рівності $\theta\psi = \psi$ на K одержуємо, що $u(t,x) \underset{t\to 0+}{\to} \psi(x)$ рівномірно щодо $x \in K$. ◊

1. *Андросова Л. Н., Ивасишен С. Д.* Однозначная разрешимость и свойство локализации решений задачи Коши для одного класса вырожденных параболических уравнений в пространствах обобщенных функций / Киев. ун-т. – Киев, 1989. – 40 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 01.11.1989, № 2388–Ук89.
2. *Возняк О. Г.* Про властивість локалізації розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь у просторах узагальнених функцій // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2002. – Вип. 134 (у друці).
3. *Возняк О. Г.* Про однозначну розв'язність задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь у просторах узагальнених функцій // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2001. – Вип. 111. – С. 5–10.
4. *Возняк О. Г.* Про однозначну розв'язність та властивість локалізації розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь у просторах узагальнених функцій // Волин. мат. вісн. – 2001. – Вип. 8. – С. 35–45.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
7. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* О задаче Коши для вырожденных уравнений типа Колмогорова с $\overrightarrow{2b}$-параболической частью по основной группе переменных // Дифференц. уравнения. – 2000. – **36**, № 4. – С. 527–536.
8. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* Об интегральном представлении решений вырожденных уравнений типа Колмогорова с $\overrightarrow{2b}$-параболической частью по основной группе переменных // Дифференц. уравнения. – 2000. – **36**, № 5. – С. 647–655.
9. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях задачи Коши для вырожденных уравнений типа Колмогорова с $\overrightarrow{2b}$-параболической частью по основной группе переменных // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 11. – С. 1536–1545.
10. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические уравнения с вырождением по части переменных // Докл. РАН. – 1998. – **360**, № 3. – С. 303–305.
11. *Івасишен С. Д., Возняк О. Г.* Про фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 2. – С. 13–19.

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И СВОЙСТВО ЛОКАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Установлена однозначная разрешимость и приведено свойство локализации решений задачи Коши с обобщенными начальными данными для одного класса вырожденных параболических уравнений, в которых: 1) *имеются три группы пространственных переменных, одна основная и две дополнительные;* 2) *допускаются различные веса пространственных переменных из основной группы относительно временной переменной;* 3) *имеются вырождения по переменным из дополнительных групп;* 4) *присутствуют вырождения на начальной гиперплоскости.*

UNIQUE SOLVABILITY AND PROPERTY OF LOCALIZATION OF SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR ONE CLASS OF DEGENERATE EQUATIONS WITH GENERALIZED INITIAL DATA

The unique solvability of Cauchy problem for one class of the degenerate parabolic equations with generalized initial data is established. The property of localization of the solutions for such equations with generalized initial data is presented. In these equations: 1) *there are three groups of spatial variables, one basic and two auxiliary;* 2) *different weights of spatial variables from the basic groups with respect to time variable are admitted;* 3) *the degenerations with respect to variables from the auxiliary groups are presented;* 4) *there are degenerations on the initial hyperplane.*

Терноп. акад. нар. госп-ва, Тернопіль,
Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.06.01