МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ЧЕРНОВИЦКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Ю. ФЕДЬКОВИЧА

На правах рукописи

ШИНКАРИК НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ

ГИБРИДНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ФУРЬЕ, ЛЕЖАНДРА) С ПРИМЕНЕНИЕМ К ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
М.П.Ленюк

Черновцы – 1990

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в связи с широким применением композиционных материалов в технике, технологии, строительстве, радиоэлектронике и сварочном производстве, при расчете на прочность конструктивных элементов машин, а также среди многочисленных технических задач, возникающих при конструировании машин и проектировании инженерных сооружений, возникла необходимость в изучении температурных полей и упругих напряжений в телах, состоящих из нескольких материалов, имеющих разные физико-механические характеристики. Важное место здесь занимают исследования кинетики физических и химико-технологических процессов, расчеты элементов на кручение и вопросы концентрации напряжений [2 ,73 , 74],

Проверкой достоверности информации о решении задач математической физики, как правило, служит решение соответствующей линейной задачи. Одним из эффективных методов решения линейных задач является метод интегральных преобразований. Наиболее распространенными среди них являются, ставшие классическими, интегральные преобразования Фурье, Лапласа, Фурье-Бесселя, Вебера, Ханкеля, Меллина, Лежандра, Гильберта, Конторовича-Лебедева, Мелера-Фока [4 , 9 , 20 , 33 , 61 , 67] .

Впервые интегральные преобразования на полярной оси $\tau \geqslant 0$, ядрами которых являются функции Лежандра $P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)$, получены Мелером Ф.Г. [94] и строго обоснованные в работах Фока В.А. [78] и Лебедева Н.Н. [33] . Это было достаточно для решения ряда осесимметричных задач теории потенциала для областей, образованных двумя пересекающимися сферами, а также для гиперболоида вращения. Отсутствие осевой симметрии привело к обобщению интегрального преобразования Мелера-Фока на случай $P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)$,

$(m=0,1,2,\ldots)$. В работах [6,71,75] получены интегральные преобразования Мелера-Фока на полярной оси $r \geq R_0 > 0$. В дальнейшем интегральные преобразования Мелера-Фока на полярной оси $r \geq 0$ будем называть интегральными преобразованиями Мелера-Фока первого рода, а на полярной оси $r \geq R_0 > 0$ – интегральными преобразованиями Мелера-Фока второго рода.

На современном этапе научно-технического прогресса возникает потребность решения достаточно широкого класса задач математической физики неоднородных структур. Последнее требует с одной стороны усовершенствования и модифицирования существующего математического аппарата, а с другой стороны развития новых методов. Оказывается, что для решения задач математической физики кусочно-однородных сред, может быть создан аналог интегральных преобразований, как эффективного метода получения точного решения краевых задач неоднородных структур.

Вопросам исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и для систем из разнотипных дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ [23,24,26,56,62].

Интегральные преобразования типа Фурье-Лежандра и Лежандра-Фурье, Ханкеля Лежандра, ядрами которых служат функции $P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\,r)$ и $Q_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\,r)$, рассматривалист в работах [57,58,60,61,62]. Здесь приведены формулы разложения кусочно-непрерывной функции, абсолютно суммируемой с надлежащей весовой функцией и имеющей ограниченную вариацию по собственным функциям сингулярной краевой задачи Штурма-Лиувилля с разрывными коефициентами. Собственные функции спектральной задачи обладают той особенностью, что на одном участке полубесконечного интервала они удовлетворяют уравнению $y''+\lambda y=0$, на остальной части этого интервала они удовлетворяют уравнению Лежандра либо уравнению Бесселя, а в точке стыка условиям сопряжения первого рода.

Анализ перечисленных работ показывает, что:

I) структура оператора сопряжения не охватывает даже таких практически важных условий сопряжения как неидеальный термический контакт или идеальный механический контакт на стыке цилиндрических либо сферических поверхностей в задачах термоупругости;

2) не всегда четко выписаны правила действия прямого и обратного оператора интегрального преобразования;

3) отсутствует логическая схема применения гибридных интегральных преобразований для построения точных аналитических решений соответствующих задач математической физики неоднородных структур.

Указанные обстоятельства определили направленность настоящей работы. Предлагаемая диссертация посвящена построению, математическому обоснованию и применению гибридных интегральных преобразований Лежандра, Фурье-Лежандра, Лежандра-Фурье. Существенную роль при этом играет метод дельтаобразных последовательностей, в качестве которых выступают либо ядро Коши либо ядро Дирихле.

В первой главе: а) построены интегральные преобразования обобщающие известные в математической литературе интегральные преобразования Мелера-Фока I-го и 2-го рода [33, 71, 74, 75] на случай действительного $\mu \geqslant -\frac{1}{2}$, где μ - порядок присоединенных функций Лежандра, в предположении задания любого из краевых условий I-го, 2-го или 3-го рода;

б) методом дельтаобразных последовательностей построены прямое и обратное гибридное интегральное преобразование Мелера-Фока I-го и 2-го рода на полярной оси с одной и двумя точками сопряжения. В качестве дельтаобразной последовательности служит ядро Коши, как фундаментальная матрица решения задачи Коши для соответствующей сепаратной системы классических нестационарных уравнений теплопроводности с оператором Лежандра. Это позволяет выписать структуру спектральной функции, спектральной плотности и весовой функции, порожденных оператором Лежандра сингулярных задач Штурма-Лиувилля на кусочно-однородной полярной оси. Последнее дает возможность получить интегральные представления меры Дирака, а, следовательно, и интегральные разложения функций. Здесь же сформулированы и доказаны теоремы о наличии основного тождества интегрального преобразования дифференциального оператора.

Вторая глава посвящена построению гибридных интегральных преобразований Фурье-Лежандра на декартовой оси, Фурье-Лежандра на ограниченной справа полупрямой, Фурье-Лежандра на полярной оси, Лежандра I-го рода - Фурье и Лежандра 2-го рода - Фурье на полярной оси при наиболее общих (в рамках предложенной теории) предположениях на структуру краевых операторов и операторов сопряжения. Сформулированы и доказаны теоремы об интегральных представлениях функций и наличии основного тождества.

Третья глава носит прикладной характер. Здесь предложена логическая схема применения построенных гибридных интегральных преобразований для решения достаточно широкого класса сингулярных задач математической физики неоднородных структур на примерах задач кручения неоднородных стержней и неоднородного упругого слоя, задачи о структуре материальных полей в тороидальных объектах. При этом решения задач выписываются в замкнутой форме, удобной для использования их (с помощью ЭВМ) в инженерных расчетах (в каждом требуемом практикой случае). Последнее подтверждает пример численного расчета структуры поля перемещения. Полученные интегральные преобразования применены для вычисления достаточно широкого класса несобственных интегралов. (§ II).

Результаты, полученные в работе, были доложены:

I. На ХУП научной конференции преподавателей и студентов Тернопольского финансово-экономического института (г.Тернополь, I987 г.).
2. На научно-технической конференции "Применение вычислительной техники, математических методов и моделирования в автоматизации экспериментальных исследований (г.Киев, I987г.)
3. На ХУШ научной конференции преподавателей и студентов Тернопольского финансово-экономического института (г.Тернополь, I988 г.).
4. На УП Всесоюзном семинаре "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики (г.Кемерово, I988 г.).
5. На научном семинаре "Эффективные методы решения задач математической физики" (г.Харьков, I988 г.).
6. На научно-технической конференции "Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях".(г.Киев, I989 г.).
7. На П Всесоюзной конференции "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений" (г.Москва, I989 г.).
8. На Всесоюзной конференции "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики" (г.Тернополь, I989 г.).
9. На научно-методических семинарах кафедры дифференциальных уравнений Черновицкого государственного университета (г.Черновцы, I989 г.).
I0. На республиканской конференции "Нелинейные задачи математической физики" (г.Черновцы, I989 г.).

Основные результаты диссертации изложены в работах [11,47,48,49,50,51,52,53,64,82,83,84,85,86,87].

На защиту выносятся следующие положения:

I. Построение методом дельта-образных последовательностей интегральных преобразований Мелера-Фока I-го и 2-го рода, в конструкции ядер которых применяют участия присоединенные функции Лежандра действительного порядка.

2. Построение методом дельта-образных последовательностей гибридных интегральных преобразований Мелера-Фока I-го и 2-го рода на полярной оси с одной и двумя точками сопряжения.

3. Построение методом дельта-образных последовательной гибридных интегральных преобразований Фурье-Лежандра на декартовой оси, на ограниченной справа полупрямой и на полярной оси.

4. Доказательство теорем о структуре прямого и обратного гибридного интегрального преобразования Лежандра I-го рода - Фурье и Лежандра 2-го рода - Фурье на полярной оси.

5. Формулировки и доказательства теоремы о наличии основного тождества интегрального преобразования дифференциального оператора, позволяющего применять полученные интегральные преобразования для решения соответствующих сингулярных задач математической физики неоднородных структур.

6. Формулы интегрального представления кусочно-непрерывных абсолютно суммируемых с точно определенной весовой функцией и имеющих ограниченную вариацию функций через ядра гибридных интегральных преобразований.

7. Логическая схема применения гибридных интегральных преобразований Мелера-Фока, Фурье-Лежандра, Лежандра-Фурье для решения задач математической физики неоднородных структур:

а) задачи о структуре упругих полей, возникающих при кручении неоднородного цилиндрического стержня и неоднородного упругого слоя; о структуре динамических волн, возникающих при кручении неоднородного по глубине цилиндрического стержня;

б) задача о структуре в замкнутой форме точного решения уравнения Пуассона, описывающего свойства материального поля, возникающего в тороидальных объектах при различных воздействующих факторах.

8. Вычисление полипараметрических несобственных интегралов от дробно-рациональных функций методом гибридного интегрального преобразования Лежандра 2-го рода - Фурье.

ГЛАВА I. § I. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МЕЛЕРА – ФОКА I-ГО РОДА МЕТОДОМ δ-ОБРАЗНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Рассмотрим для $x \geq 1$ уравнение Лежандра [19]

$$(x^2-1)\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + 2x\frac{dv(x)}{dx} - \nu(\nu+1)v(x) - \frac{\mu^2}{sh^2\tau}v(x) = 0. \qquad (I.I)$$

Заменой независимого переменного $x = ch\tau$ уравнение (I.I) приводится к виду

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + cth\tau\frac{dv}{d\tau} - \nu(\nu+1)v - \frac{\mu^2}{sh^2\tau}v = 0. \qquad (I.2)$$

Фундаментальную систему решений для уравнения (I.2) образуют функции $v_1 = P_\nu^{\pm\mu}(ch\tau)$ и $v_2 = Q_\nu^{\pm\mu}(ch\tau)$.

Если потребовать, чтобы

$$v(0) < \infty, \; v(\infty) < \infty, \qquad (I.3)$$

то краевая задача (I.2), (I.3) обладает непрерывным спектром собственных значений, заполняющих полосу [7]

$$-1 < Re\,\nu \leq 0. \qquad (I.4)$$

Если положить $\nu = -\frac{1}{2} + i\lambda \; (\lambda \geq 0)$, то собственные значения $\tau = \lambda^2 + \frac{1}{4}$ и собственные функции $P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)$ становятся вещественными. Наличие собственной (спектральной) функции, спектральной плотности и весовой функции позволяет написать интегральное представление меры Дирака. Последнее порождает прямое и обратное интегральное преобразование, ядрами которых являются функции Лежандра.

В работе методом дельтаобразных последовательностей проведено обобщение интегральных преобразований Мелера-Фока I-го рода на случай $m=\mu \geqslant -\frac{1}{2}$, μ - действительное число.

Получим интегральное разложение функции $f(\tau)$, обладающей определенными свойствами, по собственным функциям $P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\,\tau)$ методом δ - образных последовательностей. В качестве последней примем фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial v(t,\tau)}{\partial t} - \Lambda_{\mu}\left[v(t,\tau)\right]=0, \quad v(t,\tau)\Big|_{t=0}=f(\tau), \tag{I.5}$$

$$\Lambda_{\mu} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + cth\,\tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{sh^2\tau}.$$

В изображениях по Лапласу [31] приходим к задаче построения ограниченного на $(0,\infty)$ решения уравнения Лежандра

$$\left(\Lambda_{\mu} - p\right) v^{*}(p,\tau) = -f(\tau). \tag{I.6}$$

Фундаментальную систему решений для уравнения $(\Lambda_{\mu}-p)v^{*}(p,\tau)=0$ образуют функции $P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,\tau)$ и $Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,\tau)$, где из асимптотических разложений

$$P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,\tau) \approx \frac{2^{\nu}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\mu)} (ch\,\tau)^{\mu}, \quad \nu = -\frac{1}{2}+q,$$

$$Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,\tau) \approx e^{i\mu\pi}\, 2^{-(1-\nu)} \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma(1+\nu+\mu)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})} (ch\,\tau)^{-\nu-1} \tag{I.7}$$

следует, что при $Re\,q>0$

$$P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,\tau) \approx e^{\tau Re\,q}, \quad Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,\tau) \approx e^{-\tau Re\,q} \quad (\tau\to\infty).$$

Это позволяет отыскивать фундаментальную функцию для уравнения (I.6) по правилу

$$E^*(p,\tau,\rho)=\begin{cases} A P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(ch\tau), & 0<\tau<\rho<\infty, \\ B Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(ch\tau), & 0<\rho<\tau<\infty. \end{cases} \qquad (I.8)$$

Для определения постоянных A и B в силу свойств функции E^* получаем два уравнения:

$$\begin{cases} BQ^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(ch\rho)-AP^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(ch\rho)=0, \\ BQ^{\mu'}_{-\frac{1}{2}+q}(ch\rho)-AP^{\mu'}_{-\frac{1}{2}+q}(ch\rho)=-\dfrac{1}{sh^2\rho}. \end{cases} \qquad (I.9)$$

Определителем алгебраической системы (I.9) является определитель Вронского фундаментальной системы решений [19]

$$W\left\{P^{\mu}_{\frac{\nu}{2}+q}(ch\rho),Q^{\mu}_{\frac{\nu}{2}+q}(ch\rho)\right\}=-\frac{e^{i\mu\pi}2^{2\mu}}{sh^2\rho}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu-\mu}{2}\right)}=-\frac{e^{i\mu\pi}}{sh^2\rho}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\sqrt{p}+\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\sqrt{p}-\mu\right)} \qquad (I.10)$$

Здесь использованы известные соотношения [1]

$$z\Gamma(z)=\Gamma(1+z),\ \Gamma(2z)=\pi^{-\frac{1}{2}}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right). \qquad (I.11)$$

В результате определения из алгебраической системы (I.9) величин A, B и подстановки в (I.8) получаем фундаментальную функцию

$$E^*(p,\tau,\rho)=\frac{e^{-i\mu\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\sqrt{p}-\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\sqrt{p}+\mu\right)}\begin{cases} P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+\sqrt{p}}(ch\tau)Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+\sqrt{p}}(ch\rho), & 0<\tau<\rho<\infty, \\ P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+\sqrt{p}}(ch\rho)Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+\sqrt{p}}(ch\tau), & 0<\rho<\tau<\infty. \end{cases} \qquad (I.12)$$

Непосредственно проверяется, что решением уравнения (I.6) является функция

$$v^*(p,\tau)=\int_0^\infty E^*(p,\tau,\rho)f(\rho)sh\rho\,d\rho. \qquad (I.13)$$

Возвращаясь в формуле (I.13) к оригиналу по Лапласу [31], имеем решение задачи Коши [68]:

$$v(t,\tau)=\int_0^\infty E(t,\tau,\rho)f(\rho)\,sh\rho\,d\rho. \tag{I.I4}$$

Здесь фундаментальное решение задачи Коши (I.5)

$$E(t,\tau,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}E^*(p,\tau,\rho)e^{pt}dp,\ \operatorname{Re}p=\sigma>0. \tag{I.I5}$$

Особыми точками функции $E^*(p,\tau,\rho)$ являются точки ветвления $p=0$ и $p=\infty$. Поэтому в силу свойств функций $P^\mu_{-\frac{1}{2}+q}(ch\tau)$ и $Q^\mu_{-\frac{1}{2}+q}(ch\tau)$, теоремы Коши и леммы Жордана контурный интеграл (I.I5) можно привести к виду [31]:

$$E(t,\tau,\rho)=-\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty\left(E^*(p,\tau,\rho)\Big|_{\sqrt{p}=i\lambda}-E^*(p,\tau,\rho)\Big|_{\sqrt{p}=-i\lambda}\right)e^{-\lambda^2t}\lambda\,d\lambda. \tag{I.I6}$$

Покажем, что

$$E^*(p,\tau,\rho)\big|_{q=i\lambda}-E^*(p,\tau,\rho)\big|_{q=-i\lambda}=$$

$$=-i\,sh\pi\lambda\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\lambda-\mu\right)\right|^2P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\rho). \tag{I.I7}$$

Поскольку [5]

$$P^\mu_\nu(z)=P^\mu_{-\nu-1}(z),\ \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},\ \Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z},$$

$$Q^\mu_{-\nu-1}(z)=-\frac{\pi\cos\nu\pi}{\sin\pi(\nu-\mu)}e^{i\mu\pi}P^\mu_\nu(z)+\frac{\sin\pi(\nu+\mu)}{\sin\pi(\nu-\mu)}Q^\mu_\nu(z), \tag{I.I8}$$

то при $\nu=-\frac{1}{2}+i\lambda$ $\left(-\nu-1=-\frac{1}{2}-i\lambda\right)$ и $\tau<\rho$ получаем:

$$J=e^{-i\mu\pi}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\lambda-\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\lambda+\mu\right)}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)Q^\mu_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\rho)-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\lambda-\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\lambda+\mu\right)}P^\mu_{-\frac{1}{2}-i\lambda}(ch\tau)\times\right.$$

$$\left.\times Q^\mu_{-\frac{1}{2}-i\lambda}(ch\rho)\right\}=e^{-i\mu\pi}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\lambda-\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\lambda+\mu\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\lambda-\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\lambda+\mu\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\sin\pi\left(-\frac{1}{2}+i\lambda+\mu\right)}{\sin\pi\left(-\frac{1}{2}+i\lambda-\mu\right)}\right]Q^\mu_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\rho)+\frac{\pi\cos\nu\pi\left(-\frac{1}{2}+i\lambda\right)}{\sin\pi\left(-\frac{1}{2}+i\lambda-\mu\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\lambda-\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\lambda+\mu\right)}e^{i\mu\pi}P^\mu_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\rho). \tag{I.I9}$$

Так как в силу четвертого равенства соотношений (I.I8)

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-i\lambda-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-i\lambda+\mu)}\frac{\sin\pi(\frac{1}{2}-i\lambda-\mu)}{\sin\pi(\frac{1}{2}-i\lambda+\mu)}=\frac{\pi}{\cos\pi(i\lambda+\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda+\mu)}\times$$

$$\times\frac{\cos\pi(-i\lambda+\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda-\mu)}{\pi}\frac{\cos\pi(i\lambda+\mu)}{\cos\pi(\mu-i\lambda)}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda+\mu)}, \tag{I.20}$$

то коэффициент возле $Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}$ обращается в ноль.

Далее имеем (в силу того же равенства):

$$\frac{\pi\cos\pi(i\lambda-\frac{1}{2})}{\sin\pi(-\frac{1}{2}+i\lambda-\mu)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-i\lambda-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}-i\lambda+\mu)}=-\frac{\pi\sin i\pi\lambda}{\cos\pi(\mu-i\lambda)}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu-i\lambda)\times$$

$$\times\Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu+i\lambda)\frac{\cos\pi(\mu-i\lambda)}{\pi}=-i\,sh\pi\lambda\left|\Gamma(\tfrac{1}{2}+i\lambda-\mu)\right|^2 \tag{I.2I}$$

Подставляя (I.20) и (I.2I) в (I.I9), получаем (I.I7).

Таким образом, фундаментальное решение задачи Коши (I.5) имеет структуру:

$$E(t,\tau,\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\rho)\left|\Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu+i\lambda)\right|^2 sh\pi\lambda\cdot\lambda\,d\lambda. \tag{I.22}$$

Из формул (I.I4) и (I.22) при $t\to 0+$ в силу начального условия, получаем интегральное представление

$$f(\tau)=\int_0^\infty\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\infty P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\rho)\lambda sh\pi\lambda\left|\Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu+i\lambda)\right|^2 d\lambda\right)f(\rho)sh\rho\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left|\Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu+i\lambda)\right|^2 P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)\lambda sh\pi\lambda\left(\int_0^\infty f(\rho)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\rho)sh\rho\,d\rho\right)d\lambda. \tag{I.23}$$

Класс функций $f(\rho)$, для которых разложение (I.23) имеет место, описывает теорема [74]:

ТЕОРЕМА: I. Пусть функция $f(\tau)$ – кусочно-непрерывная и имеет ограниченную вариацию в открытом промежутке $(0,\infty)$;

2. $|f(\tau)|e^{\frac{\tau}{2}}\in L_1(0,\infty)$.

Тогда имеет место разложение

$$\frac{1}{2}\left[f(\tau-0)+f(\tau+0)\right]=\int_0^\infty\frac{1}{\pi}\int_0^\infty P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\rho)\lambda sh\pi\lambda\left|\Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu+i\lambda)\right|^2 d\lambda f(\rho)sh\rho\,d\rho.$$

Из интегрального представления (I.23) следует:

а) интегральное представление на множестве $I^+=\{\tau:\tau\in(0,\infty)\}$ меры Дирака

$$\frac{\delta(\tau-\rho)}{sh\rho}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda\, sh\pi\lambda \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+i\lambda\right)\right|^2 P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\rho)\,d\lambda; \tag{I.24}$$

б) прямое $\mathfrak{M}_{\mu,10}$ и обратное $\mathfrak{M}^{-1}_{\mu,10}$ обобщенные интегральные преобразования Мелера-Фока

$$\mathfrak{M}_{\mu,10}[f(\tau)]=\int_0^\infty f(\tau)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)sh\tau\,d\tau\equiv\tilde{f}(\lambda), \tag{I.25}$$

$$\mathfrak{M}^{-1}_{\mu,10}[\tilde{f}(\lambda)]=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tilde{f}(\lambda)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+i\lambda\right)\right|^2\lambda\, sh\pi\lambda\,d\lambda\equiv f(\tau); \tag{I.26}$$

в) тождество интегрального преобразования дифференциального оператора Λ_μ

$$\mathfrak{M}_{\mu,10}[\Lambda_\mu[f(\tau)]]=-\lambda^2\tilde{f}(\lambda). \tag{I.27}$$

Последнее равенство устанавливается непосредственно методом интегрирования по частям в предположении, что функция дважды непрерывно дифференцируемая на множестве I^+, ограниченная при $\tau\to 0$ и стремится при $\tau\to\infty$ к нолю вместе со своей первой производной как функция $g(\tau)=f(\tau)\exp\left(\frac{1}{2}\tau\right)$.

<u>Следствие I</u>: Пусть $\mu=0$. В силу равенства [5]

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\lambda\right)\right|^2=\frac{\pi}{ch\lambda\pi} \tag{I.28}$$

из (I.25), (I.26) получаем интегральные преобразования Мелера-Фока:

$$\mathfrak{M}_{0,10}[f(\tau)]=\int_0^\infty f(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)sh\tau\,d\tau\equiv\tilde{f}(\lambda), \tag{I.29}$$

$$\mathfrak{M}^{-1}_{0,10}[\tilde{f}(\lambda)]=\int_0^\infty \tilde{f}(\lambda)P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)\lambda\, th\pi\lambda\,d\lambda\equiv f(\tau). \tag{I.30}$$

<u>Следствие 2</u>: Пусть $\mu=m=I,2,3\ldots$. В силу равенств [5]

$$P^{m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\rho)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda+m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda-m)}P^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\rho), \tag{I.3I}$$

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda+m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda-m)}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\lambda-m\right)\right|^2=\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\lambda+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\lambda-m\right)=\frac{(-1)^m\pi}{ch\pi\lambda} \tag{I.32}$$

из (I.25),(I.26) получаем обобщенные интегральные преобразования Мелера-Фока [74]:

$$\mathfrak{M}_{m,10}[f(\tau)]=\int\limits_0^\infty f(\tau)P^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)sh\tau d\tau\equiv\tilde{f}(\lambda), \tag{I.33}$$

$$\mathfrak{M}^{-1}_{\mu,10}[\tilde{f}(\lambda)]=(-1)^m\int\limits_0^\infty\tilde{f}(\lambda)P^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\tau)th\pi\lambda\cdot\lambda d\lambda\equiv f(\tau). \tag{I.34}$$

Тождество (I.27) позволяет применять полученные интегральные преобразования для решения соответствующих задач математической физики.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МЕЛЕРА-ФОКА 2-ГО РОДА МЕТОДОМ δ-ОБРАЗНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ.

Рассмотрим спектральную задачу

$$\Lambda_\mu[v(\tau)]=\left(\nu(\nu+1)+\tfrac{1}{4}\right)v(\tau), \tag{2.1}$$

$$\left(\alpha^0_{10}\frac{d}{d\tau}+\beta^0_{10}\right)v(\tau)\Big|_{\tau=R_0}=0,\ v(\infty)<\infty,\ (\alpha^0_{10})^2+(\beta^0_{10})^2\neq0. \tag{2.2}$$

При $\nu=-\frac{1}{2}+i\lambda$ $(\lambda\geq0)$ собственные значения $\tau=\lambda^2+\frac{1}{4}$ – вещественные [6,7]. Найдем структуру вещественных собственных функций, соответствующих собственным значениям τ.

Из интегральных представлений [5]

$$P^{-\mu}_\nu(z)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})(z^2-1)^{\mu/2}}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\int\limits_0^\infty\frac{ch(\nu+\frac{1}{2})t\,dt}{(z+ch\,t)^{\mu+\frac{1}{2}}}, \tag{2.3}$$

$$(\mathrm{Re}(\nu+\mu)>-1,\ \mathrm{Re}(\mu-\nu)>0);$$

$$Q^\mu_\nu(z)=e^{\mu\pi i}\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi}}(z^2-1)\left[\int\limits_0^\pi\frac{\cos(\nu+\frac{1}{2})t\,dt}{(z-\cos t)^{\mu+\frac{1}{2}}}-\right.$$

$$\left.-\cos\nu\pi\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(\nu+\frac{1}{2})t}\,dt}{(z+ch\,t)^{\mu+\frac{1}{2}}}\right],\ \mathrm{Re}\,\mu>-\frac{1}{2},\ \mathrm{Re}(\nu+\mu)>-1 \tag{2.4}$$

и соотношений

$$P^\mu_\nu(z)=\frac{2}{\pi}e^{-i\mu\pi}\sin\mu\pi\,Q^\mu_\nu(z)+\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P^{-\mu}_\nu(z), \tag{2.5}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},\quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z}. \tag{2.6}$$

Получаем интегральное представление

$$P_{\nu}^{\mu}(z)=\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(z^2-1\right)^{\frac{\mu}{2}}\left\{\sin\mu\pi\left[\int_0^{\pi}\frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\,dt}{(z-\cos t)^{\mu+\frac{1}{2}}}+\right.\right.$$

$$\left.+\cos\nu\pi\int_0^{\infty}\frac{sh\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\,dt}{(z+ch\,t)^{\mu+\frac{1}{2}}}\right]-\cos\pi\mu\sin\pi\nu\int_0^{\infty}\frac{ch\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\,dt}{(z+ch\,t)^{\mu+\frac{1}{2}}}. \qquad (2.7)$$

Если ввести в рассмотрение функции

$$A_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu}(ch\,\tau)=\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)sh^{\mu}\tau\left[\int_0^{\pi}\frac{ch\,t\lambda\,dt}{(ch\,\tau-\cos t)^{\mu+\frac{1}{2}}}-\right.$$

$$\left.-sh\,\pi\lambda\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda t\,dt}{(ch\,\tau+ch\,t)^{\mu+\frac{1}{2}}}\right], \qquad (2.8)$$

$$B_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu}(ch\,\tau)=\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)sh^{\mu}\tau\,ch\,\pi\lambda\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda t\,dt}{(ch\,\tau+ch\,t)^{\mu+\frac{1}{2}}}, \qquad (2.9)$$

то для присоединенных функций Лежандра получаем интегральное представление:

$$P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu}(ch\,\tau)=\sin\mu\pi\,A_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu}(ch\,\tau)+\cos\mu\pi\,B_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu}(ch\,\tau), \qquad (2.10)$$

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu}(ch\,\tau)=\frac{\pi}{2}e^{\mu\pi i}\left[A_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu}(ch\,\tau)-i\,th\,\pi\lambda\,B_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu}(ch\,\tau)\right]. \qquad (2.11)$$

Положим

$$y_{ij,-\frac{1}{2}+i\lambda}^{m1,\mu_n}(ch\,R_m)\equiv\left(\alpha_{ij}^{m}\frac{d}{d\tau}+\beta_{ij}^{m}\right)A_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu_n}(ch\,\tau)\Big|_{\tau=R_m}=$$

$$=\alpha_{ij}^{m}sh\,R_m\,A_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu_n'}(ch\,R_m)+\beta_{ij}^{m}A_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu_n}(ch\,R_m),$$

$$y_{ij,-\frac{1}{2}+i\lambda}^{m2,\mu_n}(ch\,R_m)\equiv\left(\alpha_{ij}^{m}\frac{d}{d\tau}+\beta_{ij}^{m}\right)B_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu_n}(ch\,R_m)=$$

$$=\alpha_{ij}^{m}sh\,R_m\,B_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu_n'}(ch\,R_m)+\beta_{ij}^{m}B_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu_n}(ch\,R_m), \qquad (2.12)$$

$$U_{ij,1}^{mn,\mu_n}(ch\,R_m)\equiv\left(\alpha_{ij}^{m}\frac{d}{d\tau}+\beta_{ij}^{m}\right)P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu_n}(ch\,\tau)\Big|_{\tau=R_m}=$$

$$=\sin\mu_n\pi\,y_{-\frac{1}{2}+i\lambda,ij}^{m1,\mu_n}(ch\,R_m)+\cos\mu_n\pi\,y_{ij,-\frac{1}{2}+i\lambda}^{m2,\mu_n}(ch\,R_m),$$

$$U_{ij,2}^{m n,\mu_n}(\operatorname{ch}R_m)\equiv\left(\alpha_{ij}^{m}\frac{d}{d\tau}+\beta_{ij}^{m}\right)Q_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu_n}(\operatorname{ch}\tau)\Big|_{\tau=R_m}=$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{\mu\pi i}\left[Y_{ij,-\frac{1}{2}+i\lambda}^{m1,\mu_n}(\operatorname{ch}R_m)-i\operatorname{th}\pi\lambda\, Y_{ij,-\frac{1}{2}+i\lambda}^{m2,\mu_n}(\operatorname{ch}R_m)\right].$$

Непосредственно проверяется, что функция

$$V_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu}(\operatorname{ch}\tau,\operatorname{ch}R_0)=\frac{e^{-i\mu\pi}}{\cos(\mu-i\lambda)\pi}\left[Q_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu}(\operatorname{ch}\tau)U_{10,1}^{0,\mu}(\operatorname{ch}R_0)-P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu}(\operatorname{ch}\tau)U_{10,2}^{0,\mu}(\operatorname{ch}R_0)\right] \quad (2.13)$$

вещественная и может быть принята в качестве собственной функции задачи (2.1) – (2.2).

Получим теперь интегральное разложение функции $f(\tau)$, обладающей определенными свойствами, по собственным функциям $V_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\mu}(\operatorname{ch}\tau,\operatorname{ch}R_0)$ методом δ – образных последовательностей. В качестве последней примем функцию Коши смешанной задачи: построить в области $\mathcal{D}=\{(t,\tau): t\geqslant 0, \tau\in[R_0,\infty), R_0>0\}$ ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Lambda_\mu\right)v(\tau,t)=0 \quad (2.14)$$

по начально-краевым условиям

$$v(\tau,t)\Big|_{t=0}=f(\tau),\ \left(\alpha_{10}^{0}\frac{d}{d\tau}+\beta_{10}^{0}\right)v(\tau,t)\Big|_{\tau=R_0}=0,\ v(\tau,t)\Big|_{\tau=\infty}<\infty. \quad (2.15)$$

В изображениях по Лапласу [31] приходим к задаче построения ограниченного на полупрямой $\tau\geqslant R_0$ решения уравнения Лежандра

$$(\Lambda_\mu-q^2)v^*(p,\tau)=-f(\tau),\ q^2=p \quad (2.16)$$

по краевым условиям

$$\left(\alpha_{10}^{0}\frac{d}{d\tau}+\beta_{10}^{0}\right)v^*(p,\tau)\Big|_{\tau=R_0}=0,\ v^*(p,\tau)\Big|_{\tau=\infty}<\infty. \quad (2.17)$$

В силу свойств функций $P_\nu^{\mu}(\operatorname{ch}\tau)$ и $Q_\nu^{\mu}(\operatorname{ch}\tau)$, образующих фундаментальную систему решений для уравнения (2.16), фундаментальную функцию задачи (2.16), (2.17) будем строить по правилу

$$\mathcal{E}^*(p,\tau,\rho)=\begin{cases} AP^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\tau)+BQ^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\tau), & R_0<\tau<\rho<\infty,\\ CQ^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\tau), & R_0<\rho<\tau<\infty. \end{cases} \qquad (2.18)$$

Для определения постоянных A, B и C в силу свойств функции $\mathcal{E}^*(p,\tau,\rho)$ получаем алгебраическую систему трех уравнений:

$$\begin{gathered} -AP^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\rho)+(C-B)Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\rho)=0,\\ -AP^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\rho)+(C-B)Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\rho)=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2\rho},\\ AU^{0,\mu}_{10,1}(\operatorname{ch}R_0)+BU^{0,\mu}_{10,2}(\operatorname{ch}R_0)=0. \end{gathered} \qquad (2.19)$$

Решая алгебраическую систему (2.19) с учетом (1.10), получаем

$$C=-\frac{e^{-i\mu\pi}\Gamma(\frac{1}{2}+q-\mu)}{U^{0,\mu}_{10,2}(\operatorname{ch}R_0)\Gamma(\frac{1}{2}+q+\mu)}\Big[U^{0,\mu}_{10,1}(\operatorname{ch}R_0)Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\rho)-$$

$$-U^{0,\mu}_{10,2}(\operatorname{ch}R_0)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\rho)\Big]\equiv-\frac{e^{-i\mu\pi}\Gamma(\frac{1}{2}+q-\mu)}{U^{0,\mu}_{10,2}(\operatorname{ch}R_0)\Gamma(\frac{1}{2}+q+\mu)}\mathcal{F}^{0}_{10,-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\rho,\operatorname{ch}R_0).$$

Этим фундаментальная функция $\mathcal{E}^*(p,\tau,\rho)$ определена и в силу симметрии относительно диагонали $\tau=\rho$ имеет структуру

$$\mathcal{E}^*(p,\tau,\rho)=-\frac{e^{-i\mu\pi}\Gamma(\frac{1}{2}+q-\mu)}{U^{0,\mu}_{10,2}(\operatorname{ch}R_0)\Gamma(\frac{1}{2}+q+\mu)}\begin{cases}\mathcal{F}^{0}_{10,-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau,\operatorname{ch}R_0)Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\rho), & R_0<\tau<\rho<\infty,\\ \mathcal{F}^{0}_{10,-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\rho,\operatorname{ch}R_0)Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\tau), & R_0<\rho<\tau<\infty. \end{cases} \qquad (2.20)$$

Непосредственно проверяется, что решением задачи (2.16), (2.17) является функция

$$v^*(p,\tau)=\int_{R_0}^{\infty}\mathcal{E}^*(p,\tau,\rho)f(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho. \qquad (2.21)$$

Возвращаясь в формуле (2.21) к оригиналу по Лапласу [31], имеем решение смешанной задачи (2.14), (2.15)

$$V(t,r)=\int_{R_0}^{\infty}\mathcal{E}(t,r,\rho)f(\rho)\,\mathrm{sh}\,\rho\,d\rho. \qquad (2.22)$$

Здесь функция Коши $\mathcal{E}(t,r,\rho)$ задачи (2.14), (2.15) определяется по формуле [31]

$$\mathcal{E}(t,r,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathcal{E}^*(p,r,\rho)e^{pt}dp,\ \mathrm{Re}\,p=\sigma>\sigma_0, \qquad (2.23)$$

где σ_0 – абсцисса сходимости интеграла Лапласа [31].

Особыми точками функции $\mathcal{E}^*(p,r,\rho)$ являются точки ветвления $p=0$ и $p=\infty$. Поэтому в силу свойств функции $P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\mathrm{ch}\,r)$ и $Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\mathrm{ch}\,r)$, теоремы Коши и леммы Жордана контурный интеграл (2.23) можна привести к виду [31]

$$\mathcal{E}(t,r,\rho)=-\frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty}\left(\mathcal{E}^*(p,r,\rho)\Big|_{\sqrt{p}=i\lambda}-\mathcal{E}^*(p,r,\rho)\Big|_{\sqrt{p}=-i\lambda}\right)e^{-\lambda^2 t}\lambda\,d\lambda. \qquad (2.24)$$

Для вычисления функции

$$J=\mathcal{E}^*(p,r,\rho)\Big|_{\sqrt{p}=i\lambda}-\mathcal{E}^*(p,r,\rho)\Big|_{\sqrt{p}=-i\lambda}$$

заметим, что:

а) $A^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\mathrm{ch}\,r)=A^{\mu}_{-\frac{1}{2}-i\lambda}(\mathrm{ch}\,r),\ B^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\mathrm{ch}\,r)=B^{\mu}_{-\frac{1}{2}-i\lambda}(\mathrm{ch}\,r),$

$$U^{0,\mu}_{10,2}(\mathrm{ch}\,R_0)=e^{2\mu\pi i}V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\mathrm{ch}\,R_0);$$

б) в силу соотношений [19]

$$P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(x)=P^{\mu}_{-\frac{1}{2}-i\lambda}(x),\ Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}-i\lambda}(x)=\frac{1}{\cos\pi(i\lambda-\mu)}\Big[i\pi\,\mathrm{sh}\,\pi\lambda\, e^{i\mu\pi}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(x)+$$
$$+\cos\pi(i\lambda+\mu)\,Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(x)\Big]$$

функция

$$\mathcal{F}^{0}_{10,-\frac{1}{2}-i\lambda}(x,x_0)=\frac{\cos\pi(i\lambda+\mu)}{\cos\pi(i\lambda-\mu)}\mathcal{F}^{0}_{10,-\frac{1}{2}+i\lambda}(x,x_0).$$

Поэтому при $r<\rho$ функция

$$J=-\frac{\pi^2 i\,\mathrm{sh}\,\pi\lambda}{|\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda+\mu)|^2|U^{0,\mu}_{10,2}(\mathrm{ch}\,R_0)|^2}V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\mathrm{ch}\,r,\mathrm{ch}\,R_0)V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\mathrm{ch}\,\rho,\mathrm{ch}\,R_0).$$

Таким образом, функция Коши

$$\mathcal{E}(t,\tau,\rho)=\int\limits_0^\infty \frac{\pi V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau,\operatorname{ch}R_0)\,V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\rho,\operatorname{ch}R_0)}{|\Gamma(\frac{1}{2}+i\lambda+\mu)|^2\,|U^{0,\mu}_{10,2}(\operatorname{ch}R_0)|^2}\, e^{-\lambda^2 t}\,\lambda\operatorname{sh}\pi\lambda\, d\lambda. \qquad (2.25)$$

Из формул (2.22) и (2.25) при $t\to 0+$ в силу начального условия получаем интегральное представление

$$f(\tau)=\int\limits_{R_0}^\infty\left(\pi\int\limits_0^\infty V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau,\operatorname{ch}R_0)\,V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\rho,\operatorname{ch}R_0)\frac{\lambda\operatorname{sh}\pi\lambda}{\omega_\mu(\lambda)}d\lambda\right)f(\rho)\operatorname{sh}\rho\, d\rho =$$

$$=\pi\int\limits_0^\infty V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau,\operatorname{ch}R_0)\frac{\lambda\operatorname{sh}\pi\lambda}{\omega_\mu(\lambda)}\left(\int\limits_{R_0}^\infty V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\rho,\operatorname{ch}R_0)f(\rho)\operatorname{sh}\rho\, d\rho\right)d\lambda,$$

$$\omega_\mu(\lambda)=|\Gamma(\tfrac{1}{2}+i\lambda+\mu)|^2\,|U^{0,\mu}_{10,2}(\operatorname{ch}R_0)|^2. \qquad (2.26)$$

Класс функций $f(\rho)$, для которых разложение (2.26) имеет место, описывает теорема [74]:

ТЕОРЕМА: 1. Пусть функция $f(\tau)$ – кусочно-непрерывная и имеет ограниченную вариацию в открытом промежутке (R_0,∞).

2. $|f(\tau)|e^{\frac{\tau}{2}}\in L_1(R_0,\infty)$.

Тогда имеет место разложение (2.26).

Из интегрального представления (2.26) следует:

а) интегральное представление на множестве $I^+=\{\tau:\tau\in(R_0,\infty), R_0>0\}$

$$\frac{\delta(\tau-\rho)}{\operatorname{sh}\rho}=\pi\int\limits_0^\infty V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau,\operatorname{ch}R_0)\,V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\rho,\operatorname{ch}R_0)\frac{\lambda\operatorname{sh}\pi\lambda}{\omega_\mu(\lambda)}d\lambda; \qquad (2.27)$$

б) прямое $\mathfrak{M}_{\mu,2_0}$ и обратное $\mathfrak{M}^{-1}_{\mu,2_0}$ интегральные преобразования типа Мелера-Фока на полупрямой I^+

$$\mathfrak{M}_{\mu,2_0}[f(\tau)]=\int\limits_{R_0}^\infty f(\tau)V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau,\operatorname{ch}R_0)\operatorname{sh}\tau\, d\tau\equiv\tilde{f}(\lambda), \qquad (2.28)$$

$$\mathfrak{M}^{-1}_{\mu,2_0}[\tilde{f}(\lambda)]=\pi\int\limits_0^\infty\tilde{f}(\lambda)V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau,\operatorname{ch}R_0)\frac{\lambda\operatorname{sh}\pi\lambda}{\omega_\mu(\lambda)}d\lambda\equiv f(\tau); \qquad (2.29)$$

в) тождество интегрального преобразования дифференциального оператора Λ_μ

$$\mathfrak{M}_{\mu,2\sigma}[\Lambda_\mu[f(\tau)]]=-\lambda^2 f(\tau)-\frac{\operatorname{sh}R_0}{\alpha_{10}}V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}R_0)\left(\alpha_{10}\frac{df}{d\tau}+\beta_{10}f\right)\Big|_{\tau=R_0} \quad (2.30)$$

Равенство (2.30) устанавливается непосредственно методом интегрирования по частям в предположении, что функция $f(\tau)$ дважды непрерывно дифференцируемая на множестве I^+ и стремится при $\tau\to\infty$ к нолю вместе со своей первой производной как функция

$$g(\tau)=f(\tau)e^{\frac{\tau}{2}}.$$

Следствие I: При $\alpha_{10}=0,\ \beta_{10}=1$ получаем результат работы [74]

$$V^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau,\operatorname{ch}R_0)=\left[Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)-Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)\right]\frac{e^{-i\mu\pi}}{\cos\pi(\mu-i\lambda)},$$

$$\omega_\mu(\lambda)=\left|Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)\right|^2\left|\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+i\lambda+\mu\right)\right|^2.$$

Следствие 2: Пусть $\alpha_{10}=0,\ \beta_{10}=1$ и $\mu=m=0,1,2,3,\ldots$. Тогда в силу интегральных представлений [5,19]

$$P^{m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{(-1)^m\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\Gamma\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\operatorname{sh}^m\tau\operatorname{ch}\pi\lambda\int_0^\infty\frac{\cos\lambda t\,dt}{(\operatorname{ch}\tau+\operatorname{ch}t)^{\mu+1/2}},$$

$$Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{(-1)^m\operatorname{sh}^m\tau}{\sqrt{2\pi}}\Gamma\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\left[\int_0^\pi\frac{\operatorname{ch}\lambda t\,dt}{(\operatorname{ch}\tau-\cos t)^{m+\frac{1}{2}}}-\right. \quad (2.31)$$

$$\left.-\operatorname{sh}\pi\lambda\int_0^\infty\frac{\sin\lambda t\,dt}{(\operatorname{ch}\tau+\operatorname{ch}t)^{\mu+\frac{1}{2}}}\right]-i\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\pi\lambda\,P^{m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)\equiv L^{m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)-$$

$$-i\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\pi\lambda\,P^{m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau),\quad P^{m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\lambda+m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\lambda-m\right)}P^{-m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)$$

получаем:

$$V^{m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau,\operatorname{ch}R_0)=\frac{1}{\operatorname{ch}\pi\lambda}\left[L^{m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)P^{m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)-L^{m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)P^{m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)\right],$$

$$\omega_\mu(\lambda)=\left\{\left[L^{m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)\right]^2+\frac{\pi^2}{4}\operatorname{th}^2\pi\lambda\left[P^{m}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)\right]^2\right\}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\lambda+m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\lambda-m\right)}\cdot\frac{\pi}{(-1)^m\operatorname{ch}\lambda\pi}.$$

Подставляя в формулу разложения (2.26) получаем результат работы [71]:

$$f(r)=(-1)^m\int_0^\infty \frac{\left[L^m_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}r)P^m_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)-L^m_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)P^m_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}r)\right]}{\left[L^m_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)\right]^2+\frac{\pi^2}{4}\operatorname{th}^2\pi\lambda\left[P^m_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)\right]^2}\times$$

$$\times\lambda\operatorname{th}\pi\lambda d\lambda\int_{R_0}^\infty f(\rho)\left[L^m_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}\rho)P^{-m}_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)-L^m_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)P^{-m}_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}\rho)\right]\operatorname{sh}\rho d\rho.$$

Равенство (2.30) позволяет применять полученные интегральные преобразования для решения соответствующих задач математической физики.

§ 3. ГИБРИДНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЕРА-ФОКА I-ГО РОДА НА ПОЛЯРНОЙ ОСИ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ СОПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим задачу о конструкции органиченного в области $\mathcal{D}_+=\{(t,r): t\in(0,\infty),\ r\in I_1^+=(0,R_1)\cup(R_1,\infty)\}$ решения сепаратной системы $\Lambda_{\mu j}$ – параболических уравнений

$$\frac{1}{a_j^2}\frac{\partial v_j(t,r)}{\partial t}+\frac{\gamma_j^2}{a_j^2}v_j(t,r)-\Lambda_{\mu j}\left[v_j(t,r)\right]=0,\ (t,r)\in\mathcal{D}_+,\ j=1,2 \qquad (3.1)$$

по начальным условиям

$$v_1(t,r)\big|_{t=0}=g_1(r),\ r\in(0,R_1);\ v_2(t,r)\big|_{t=0}=g_2(r),\ r\in(R_1,\infty) \qquad (3.2)$$

и условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha^1_{j1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^1_{j1}\right)v_1(t,r)-\left(\alpha^1_{j2}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^1_{j2}\right)v_2(t,r)\right]\Big|_{r=R_1}=0,\ j=1,2 \qquad (3.3)$$

Здесь $\alpha^1_{jk}\geqslant0,\ \beta^1_{jk}\geqslant0,\ \gamma_j\geqslant0,\ C_{j1}\equiv\alpha^1_{2j}\beta^1_{1j}-\alpha^1_{1j}\beta^1_{2j}\neq0,\ j=1,2.$

Предположим, что искомые функции $v_j(t,r)$ являются оригиналами по Лапласу относительно временной переменной t [31]. В изображениях по Лапласу имеем задачу построения ограниченного на множестве I_1^+ решения сепаратной системы уравнений Лежандра

$$(\Lambda_{\mu j}-q_j^2)v_j^*(p,r)=-\bar g_j(r),\ j=1,2,\ q_j^2=\frac{p+\gamma_j^2}{a_j^2},\ \bar g_j=\frac{g_j(r)}{a_j^2} \qquad (3.4)$$

по условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{1}\frac{d}{d\tau}+\beta_{j1}^{1}\right)v_1^*(p,\tau)-\left(\alpha_{j2}^{1}\frac{d}{d\tau}+\beta_{j2}^{1}\right)v_2^*(p,\tau)\right]\Big|_{\tau=R_1}=0,\ j=1,2. \tag{3.5}$$

Фундаментальную систему решений для уравнения Лежандра

$$(\Lambda_\mu-q^2)v^*(p,\tau)\equiv\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\operatorname{cth}\frac{d}{d\tau}+\frac{1}{4}-\frac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2\tau}-q^2\right)v^*(p,\tau)=0 \tag{3.6}$$

образуют функции $P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\tau)$ и $Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\tau)$.

Равенство (2.II) показывает, что удобно пользоваться функцией

$$\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{2}{\pi}e^{-i\mu\pi}Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(\operatorname{ch}\tau).$$

Из равенств (2.I0), (2.II) следует при $q=i\lambda$, что

$$A^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{i\operatorname{th}\pi\lambda\, P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)+\cos\mu\pi\,\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)}{\cos\mu\pi+i\operatorname{th}\pi\lambda\sin\mu\pi},$$

$$B^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)=\frac{P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)-\sin\mu\pi\,\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\tau)}{\cos\mu\pi+i\operatorname{th}\pi\lambda\sin\mu\pi}.$$

В силу свойств функций, образующих фундаментальную систему решений для уравнения (3.6), при $\operatorname{Re}q>0$ решение задачи (3.4), (3.5) будем отыскивать по правилам [68]

$$v_1^*(p,\tau)=A_1P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\tau)+\int_0^{R_1}\mathcal{E}_1^*(p,\tau,\rho)\bar{g}_1(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho,$$

$$v_2^*(p,\tau)=B_2\mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)+\int_{R_1}^{\infty}\mathcal{E}_2^*(p,\tau,\rho)\bar{g}_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho. \tag{3.7}$$

Здесь $\mathcal{E}_j^*(p,\tau,\rho)$ – функции Коши

$$\mathcal{E}_1^*(p,\tau,\rho)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{U^{11,\mu_1}_{11,1}(p,\operatorname{ch}R_1)}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1-\mu_1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1+\mu_1)}\begin{cases}P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\tau)\Phi^{*11}_{11}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\rho),\\ \qquad 0<\tau<\rho<R_1;\\ P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\rho)\Phi^{*11}_{11}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\tau),\\ \qquad 0<\rho<\tau<R_1,\end{cases} \tag{3.8}$$

$$\mathscr{E}_2^*(p,\tau,\rho)=-\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_2-\mu_2\right)}{U_{12,2}^{12,\mu_2}(\operatorname{ch}R_1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_2+\mu_2\right)}\begin{cases}\mathcal{I}^{\mu_2}_{\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\rho)\,\mathfrak{F}^{*12}_{12}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\tau), \\ \qquad R_1<\tau<\rho<\infty, \\ \mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)\,\mathfrak{F}^{*12}_{12}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\rho), \\ \qquad R_1<\rho<\tau<\infty.\end{cases} \tag{3.9}$$

Обратимся к построению решения задачи (3.4), (3.5) по формулам (3.7). Условия сопряжения (3.5) для определения постоянных A_1 и B_2 дают алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned}&A_1U_{11,1}^{11,\mu_1}(p,\operatorname{ch}R_1)-B_2U_{12,2}^{12,\mu_2}(\operatorname{ch}R_1,p)=0,\\ &A_1U_{21,1}^{11,\mu_1}(p,\operatorname{ch}R_1)-B_2U_{22,2}^{12,\mu_2}(p,\operatorname{ch}R_1)=G_{12}^*.\end{aligned} \tag{3.10}$$

В системе (3.10) функция

$$G_{12}^*=\int_0^{R_1}\frac{c_{11}P^{\mu_1}_{\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\rho)}{U_{11,1}^{11,\mu_1}(p,\operatorname{ch}R_1)\operatorname{sh}R_1}\bar{g}_1(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho+\int_{R_1}^{\infty}\frac{c_{21}\mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\rho)}{U_{12,2}^{12,\mu_1}(p,\operatorname{ch}R_1)}\bar{g}_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho.$$

Предположим, что выполнено условие неограниченной разрешимости задачи (3.4), (3.5): для $p=\sigma+i\tau$ с $\operatorname{Re}p=\sigma\geq\sigma_0$, где σ_0 – абсциса сходимости интеграла Лапласа, $\operatorname{Im}p=\tau\in(-\infty,\infty)$ – определитель алгебраической системы (3.10)

$$\Delta_{12}^*(p)=U_{11,1}^{11,\mu_1}(p,\operatorname{ch}R_1)U_{22,2}^{12,\mu_2}(p,\operatorname{ch}R_1)-U_{12,2}^{12,\mu_2}(p,\operatorname{ch}R_1)U_{21,1}^{11,\mu_1}(p,\operatorname{ch}R_1)\neq 0. \tag{3.11}$$

Введем в рассмотрение функции влияния:

$$\mathscr{H}_{11}^*(p,\tau,\rho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_1-\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_1+\mu_1\right)\Delta_{12}^*(p)}\begin{cases}P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\tau)\left[\Delta_{12}^*(p)\mathcal{I}^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\rho)-\right.\\ \qquad \left.-\Delta_{22}^*(p)P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\rho)\right],\ 0<\tau<\rho<R_1,\\ P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\rho)\left[\Delta_{12}^*(p)\mathcal{I}^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\tau)-\right.\\ \qquad \left.-\Delta_{22}^*(p)P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\tau)\right],\ 0<\rho<\tau<R_1,\end{cases} \tag{3.12}$$

$$\mathcal{H}^*_{12}(p,\tau,\rho)=-\frac{c_{21}}{\operatorname{sh}R_1\,\Delta^*_{12}(p)}P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\tau)\mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\rho),$$

$$\mathcal{H}^*_{21}(p,\tau,\rho)=-\frac{c_{11}}{\operatorname{sh}R_1\,\Delta^*_{12}(p)}P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\rho)\mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau),$$

$$\mathcal{H}^*_{22}(p,\tau,\rho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2-\mu_2)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2+\mu_2)}\begin{cases}\mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\rho)\left[\Delta^*_{12}(p)P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)-\right.\\ \left.\quad-\Delta^*_{11}(p)\mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)\right],\ R_1<\tau<\rho<\infty,\\ \mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)\left[\Delta^*_{12}(p)P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\rho)-\right.\\ \left.\quad-\Delta^*_{11}(p)\mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\rho)\right],\ R_1<\rho<\tau<\infty,\end{cases}$$

$$\Delta^*_{jk}(p)=U^{11,\mu_1}_{11,j}(p,\operatorname{ch}R_1)U^{12,\mu_2}_{22,k}(p,\operatorname{ch}R_1)-U^{11,\mu_1}_{21,j}(p,\operatorname{ch}R_1)U^{12,\mu_2}_{12,k}(p,\operatorname{ch}R_1),\quad j,k=1,2.$$

В результате однозначной разрешимости системы (3.10), подстановки найденных значений A_1, B_2 в формулы (3.7) и элементарных преобразований получаем решение задачи (3.4), (3.5):

$$v^*_j(p,\tau)=\int_0^{R_1}\mathcal{H}^*_{j1}(p,\tau,\rho)\bar{g}_1(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho+\int_{R_1}^{\infty}\mathcal{H}^*_{j2}(p,\tau,\rho)\bar{g}_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho,\quad j=1,2. \qquad (3.13)$$

В силу свойств функций Лежандра, точки $p=-\gamma_j^2$ и $p=\infty$ для функций влияния $\mathcal{H}^*_{jk}(p,\tau,\rho)$ являются точками ветвления. Предположим, что $k_1^2\equiv\gamma_2^2-\gamma_1^2\geq 0$. Полагая $q_2=i\frac{\lambda}{a_2}\equiv i\frac{b_2(\lambda)}{a_2}$, имеем $p=-\lambda^2-\gamma_2^2$, $q_1=a_1^{-1}\sqrt{p+\gamma_1^2}=ia_1^{-1}\sqrt{\lambda^2+k_1^2}\equiv ia_1^{-1}b_1(\lambda^2)$,

$$\Delta^*_{12}(p)=\sin\mu_1\pi\left[\omega_{11}(\lambda)-i\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\omega_{12}(\lambda)\right]+\cos\mu_1\pi\left[\omega_{21}(\lambda)-i\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\omega_{22}(\lambda)\right],$$

$$\omega_{jk}(\lambda)=Y^{1j,\mu_1}_{11,-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}R_1)Y^{1k,\mu_2}_{22,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_2)-Y^{1j,\mu_2}_{21,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_2)Y^{1k,\mu_2}_{12,-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}R_1).$$

На основании леммы Жордана и теоремы Коши [31] устанавливаем равенство

$$\mathcal{H}_{jk}(t,\tau,\rho)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\operatorname{Im}\left\{\mathcal{H}^*_{jk}\left((\lambda^2+\gamma_2^2)e^{\pi i},\tau,\rho\right)\right\}e^{-(\lambda^2+\gamma_2^2)t}\lambda\,d\lambda. \qquad (3.14)$$

Определим функции:

$$V_1(\tau,\rho)=\frac{2}{\pi^2}\frac{C_{21}}{\operatorname{sh}R_1}\operatorname{ch}\pi\frac{b_2}{a_2}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu_2+i\frac{b_2}{a_2}\right)\right|^2 P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}\tau),$$

$$V_2(\tau,\rho)=[\omega_{12}(\lambda)\sin\mu_1\pi+\omega_{22}(\lambda)\cos\mu_1\pi]\,A^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\tau)-$$

$$-[\omega_{11}(\lambda)\sin\mu_1\pi+\omega_{21}(\lambda)\cos\mu_1\pi]\,B^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\tau),$$

$$\omega(\lambda)=[\omega_{11}(\lambda)\sin\mu_1\pi+\omega_{21}(\lambda)\cos\mu_1\pi]^2+\left[\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\right]^2\times$$

$$\times[\omega_{12}(\lambda)\sin\mu_1\pi+\omega_{22}(\lambda)\cos\mu_1\pi]^2.$$

Согласно формуле (3.I4) в результате элементарных преобразований получаем, что

$$\mathcal{H}_{jk}(t,\tau,\rho)=\int_0^\infty V_j(\tau,\lambda)V_k(\rho,\lambda)e^{-(\lambda^2+\gamma_2^2)t}\times\frac{\pi\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\lambda\,d\lambda}{\operatorname{ch}\pi\frac{b_2}{a_2}\omega(\lambda)\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu_2+i\frac{b_2}{a_2}\right)\right|^2}\times$$

$$\times\sigma_k a_k^2;\quad j,k=1,2,\quad \sigma_1=\frac{C_{11}}{a_1^2 C_{21}},\quad \sigma_2=\frac{1}{a_2^2}. \tag{3.I5}$$

Здесь $b_1=\sqrt{\lambda^2+k_1^2}$, $b_2=\lambda$. Если окажется, что $\gamma_1^2-\gamma_2^2=k_2^2\geq 0$, то $b_1=\lambda$, $b_2=\sqrt{\lambda^2+k_2^2}$ и в формулах (3.I5) вместо $\exp\{-(\lambda^2+\gamma_2^2)t\}$ надо писать $\exp\{-(\lambda^2+\gamma_1^2)t\}$.

Возвращаясь в формулах (3.I3) к оригиналу, будем иметь решение задачи (3.I) – (3.3):

$$v_j(t,\tau)=\int_0^{R_1}\mathcal{H}_{j1}(t,\tau,\rho)\bar g_1(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho+\int_{R_1}^\infty\mathcal{H}_{j2}(t,\tau,\rho)\bar g_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho=$$

$$=\int_0^{R_1}\left[\int_0^\infty V_j(\tau,\lambda)V_1(\rho,\lambda)e^{-(\lambda^2+\gamma_2^2)t}\Omega(\lambda)d\lambda\right]g_1(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho\,\sigma_1+ \tag{3.I6}$$

$$+\int_{R_1}^\infty\left[\int_0^\infty V_j(\tau,\lambda)V_2(\rho,\lambda)e^{-(\lambda^2+\gamma_2^2)t}\Omega(\lambda)d\lambda\right]g_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho\,\sigma_2,\quad j=1,2.$$

Из формул (3.I6) в силу начальных условий (3.2) имеем интегральные представления:

$$g_1(\tau)=\int_0^{R_1}\int_0^\infty V_1(\tau,\lambda)V_1(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)g_1(\rho)\operatorname{sh}\rho\,\sigma_1\,d\lambda\,d\rho,$$

$$g_2(\tau)=\int_{R_1}^\infty\int_0^\infty V_2(\tau,\lambda)V_2(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)g_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\,\sigma_2\,d\lambda\,d\rho. \tag{3.I7}$$

Пусть $\Theta(\tau)$ – единичная функция Хевисайда [81]. Положим

$$V(\tau,\lambda) = V_1(\tau,\lambda)\,\Theta(R_1-\tau) + V_2(\tau,\lambda)\,\Theta(\tau-R_1),$$

$$\sigma(\tau) = \sigma_1\Theta(R_1-\tau) + \sigma_2\Theta(\tau-R_1); \quad \varkappa(\tau) = a_1^2\Theta(R_1-\tau) + a_2^2\Theta(\tau-R_1).$$

Из формул (3.17) следует интегральное представление меры Дирака [81] на множестве $I_1^+ = \{\tau;\ \tau\in(0,R_1)\cup(R_1,\infty)\}$

$$\frac{\delta(\tau-\rho)}{\operatorname{sh}\rho\,\sigma(\rho)} = \int_0^\infty V(\tau,\lambda)\,V(\rho,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda. \tag{3.18}$$

Последнее поражает прямое $\mathfrak{M}_{\mu,11}$ и обратное $\mathfrak{M}_{\mu,11}^{-1}$ интегральное представление Мелера-Фока I-го рода на полярной оси с одной точкой сопряжения:

$$\mathfrak{M}_{\mu,11}[f(\tau)] = \int_0^\infty f(\tau)\,V(\tau,\lambda)\operatorname{sh}\tau\,\sigma(\tau)\,d\tau \equiv \tilde f(\lambda), \tag{3.19}$$

$$\mathfrak{M}_{\mu,11}^{-1}[\tilde f(\lambda)] = \int_0^\infty \tilde f(\lambda)\,V(\tau,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda \equiv f(\tau). \tag{3.20}$$

Имеют место утверждения.

ТЕОРЕМА I. Пусть функция $f(\tau)e^{\tau/2}$ кусочно-непрерывная на промежутке $(0,\infty)$, абсолютно суммируемая и имеет там ограниченную вариацию. Тогда для $\tau\in I_1^+$ имеет место интегральное разложение

$$\frac{f(\tau+0)+f(\tau-0)}{2} = \int_0^\infty V(\tau,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda\int_0^\infty f(\rho)\,V(\rho,\lambda)\operatorname{sh}\rho\,\sigma(\rho)\,d\rho. \tag{3.21}$$

ТЕОРЕМА 2. Если функция $f(\tau)$ дважды непрерывно дифференцируемая на множестве I_1^+, ограниченная вместе с первой производной в точке $\tau=0$, удовлетворяет условиям сопряжения (3.5) в точке $\tau=R_1$, и исчезает (вместе со своей первой производной) при $\tau\to\infty$, то имеет место основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора

$$\mathfrak{M}_{\mu,11}[\aleph(\tau)\Lambda_{\mu}[f(\tau)]]\equiv a_1^2\int_0^{R_1}\Lambda_{\mu_1}[f(\tau)]V_1(\tau,\lambda)\operatorname{sh}\tau\,\sigma_1 d\tau+$$

$$+a_2^2\int_{R_1}^{\infty}\Lambda_{\mu_2}[f(\tau)]V_2(\tau,\lambda)\operatorname{sh}\tau\,\sigma_2 d\tau=-\lambda^2\tilde{f}(\lambda)- \tag{3.22}$$

$$-k_1^2\int_0^{R_1} f(\tau)V_1(\tau,\lambda)\sigma_1\operatorname{sh}\tau\,d\tau-k_2^2\int_{R_1}^{\infty} f(\tau)V_2(\tau,\lambda)\operatorname{sh}\tau\,\sigma_2 d\tau.$$

Доказательство: Обозначим $m_1=\alpha_{11}^1\alpha_{22}^1-\alpha_{21}^1\alpha_{12}^1$, $m_2=\alpha_{11}^1\beta_{22}^1-\alpha_{21}^1\beta_{12}^1$,

$m_3=\beta_{11}^1\alpha_{22}^1-\beta_{21}^1\alpha_{12}^1$, $m_4=\beta_{11}^1\beta_{22}^1-\beta_{21}^1\beta_{12}^1$, $f^{\pm}(R_1)=\lim\limits_{\tau\to R_1\pm 0} f(\tau)$.

Из тождественных равенств

$$\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{d\tau}+\beta_{j1}^1\right)V_1(\tau,\lambda)\Big|_{\tau=R_1}=\left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{d\tau}+\beta_{j2}^1\right)V_2(\tau,\lambda)\Big|_{\tau=R_1},\quad j=1,2. \tag{3.23}$$

Следуют соотношения

$$V_1(R_1,\lambda)=-\frac{1}{c_{11}}\left[m_1\frac{dV_2(R_1,\lambda)}{d\tau}+m_2V_2(R_1,\lambda)\right], \tag{3.24}$$

$$\frac{dV_1(R_1,\lambda)}{d\tau}=\frac{1}{c_{11}}\left[m_3\frac{dV_2(R_1,\lambda)}{d\tau}+m_4V_2(R_1,\lambda)\right].$$

В силу свойств функции $f(\tau)$ соотношения (3.24) остаются справедливыми, если $V_1(R_1,\lambda)$ заменить на $f^-(R_1)$, а $V_2(R_1,\lambda)$ заменить на $f^+(R_1)$ (и соответственно производные по τ).

Наличие соотношений (3.24) дает возможность получить равенство:

$$\frac{df^-(R_1)}{d\tau}V_1(R_1,\lambda)-f^-(R_1)\frac{dV_1(R_1,\lambda)}{d\tau}=\frac{c_{21}}{c_{11}}\left[\frac{df^+(R_1)}{d\tau}V_2(R_1,\lambda)-f^+(R_1)\frac{dV_2(R_1,\lambda)}{d\tau}\right] \tag{3.25}$$

Интегрируя в (3.22) под знаком интеграла по частям в силу тождества

$$\left(\Lambda_{\mu_j}+\frac{\lambda^2+k_j^2}{a_j^2}\right)V_j(\tau,\lambda)=0,\quad j=1,2$$

и тождества (3.25) получим, что

$$\int_0^{R_1}a_1^2\Lambda_{\mu_1}[f(\tau)]V_1(\tau,\lambda)\sigma_1\operatorname{sh}\tau\,d\tau+\int_{R_1}^{\infty}a_2^2\Lambda_{\mu_2}[f(\tau)]V_2(\tau,\lambda)\sigma_2\operatorname{sh}\tau\,d\tau=$$

$$=-\lambda^2\tilde{f}(\lambda)-K_1^2\int_0^{R_1} f(z)V_1(z,\lambda)\,\mathrm{sh}\,z\,\sigma_1\,dz-K_2^2\int_{R_1}^{\infty} f(z)V_2(z,\lambda)\times$$

$$\times\,\mathrm{sh}\,z\,\sigma_2\,dz-\left(a_1^2\sigma_1\,\mathrm{sh}\,R_1\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2\,\mathrm{sh}\,R_1\right)\left(\frac{df^{+}(z)}{dz}V_2(z,\lambda)+\right. \tag{3.26}$$

$$\left.+f^{+}(z)\frac{dV_2(z,\lambda)}{dz}\right)\Big|_{z=R_1}.$$

В силу конструкции функций σ_j

$$a_1^2\sigma_1\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2=a_1^2\frac{c_{11}}{c_{21}}\cdot\frac{1}{a_1^2}\;\frac{c_{21}}{c_{11}}-\frac{a_2^2}{a_2^2}\equiv 0. \tag{3.27}$$

С учетом (3.27), левая часть равенства (3.26) совпадает с левой частью равенства (3.22).

Наличие тождества (3.22) позволяет применять полученные интегральные преобразования для решения соответствующих задач математической физики.

Следствие I: При $\mu_1=\mu_2=0$

$$V_1(z,\lambda)=\frac{2}{\pi^2}\frac{c_{21}}{\mathrm{sh}R_1}\,\mathrm{ch}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}\right)\right|^2 P_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(\mathrm{ch}\,z)\equiv$$

$$\equiv\frac{2}{\pi}\frac{c_{21}}{\mathrm{sh}R_1}P_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(\mathrm{ch}\,z),\quad \Omega(\lambda)=\frac{\lambda\,\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}}{\omega(\lambda)},$$

$$V_2(z,\lambda)=\omega_{22}(\lambda)A_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\mathrm{ch}\,z)-\omega_{21}(\lambda)B_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\mathrm{ch}\,z),$$

$$\omega(\lambda)=\omega_{21}^2(\lambda)+\left(\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\right)^2\omega_{22}^2(\lambda),$$

$$\omega_{jk}(\lambda)=Y^{1j,0}_{11,-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(\mathrm{ch}R_1)Y^{1k,0}_{22,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\mathrm{ch}R_1)-Y^{1j,0}_{21,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a^2}}(\mathrm{ch}R_1)Y^{1k,0}_{12,-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(\mathrm{ch}R_1),$$

$$A_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\mathrm{ch}\,z)=\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{ch}\,\lambda t\,dt}{(\mathrm{ch}\,z-\cos t)^{1/2}}-\mathrm{sh}\,\pi\lambda\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda t\,dt}{(\mathrm{ch}\,z+\mathrm{ch}\,t)^{1/2}}\right], \tag{3.28}$$

$$B_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\mathrm{ch}\,z)=\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{ch}\,\pi\lambda\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda t\,dt}{(\mathrm{ch}\,z+\mathrm{ch}\,t)^{1/2}} \tag{3.29}$$

из (3.19), (3.20) получаем

$$\mathfrak{M}_{0,11}[f(\tau)]=\int_0^\infty f(\tau)V(\tau,\lambda)\,\mathrm{sh}\,\tau\,\sigma(\tau)\,d\tau\equiv\tilde{f}(\lambda),$$

$$\mathfrak{M}^{-1}_{0,11}[\tilde{f}(\lambda)]=\int_0^\infty \tilde{f}(\lambda)V(\tau,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda\equiv f(\tau). \tag{3.30}$$

В частности, при $\alpha^1_{11}=0,\beta^1_{11}=1,\alpha^1_{12}=0,\beta^1_{12}=1,\alpha^1_{21}=1,\beta^1_{21}=0,$ $\alpha^1_{22}=\nu_0>0,\beta^1_{22}=0$ имеем: $c_{11}=1, c_{21}=\nu_0>0$ и данные формулы значительно упрощаются.

<u>Следствие 2</u>: Пусть $\mu_1=m_1=0,1,2,\ldots,\ \mu_2=m_2=0,1,2,\ldots$. Тогда в силу (2.25)

$$V_1(\tau,\lambda)=\frac{2}{\pi^2}\frac{c_{21}}{\mathrm{sh}R_1}\mathrm{ch}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}+m_2\right)\right|^2 P^{m_1}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(\mathrm{ch}\,\tau),$$

$$V_2(\tau,\lambda)=(-1)^{m_2}\left[\omega_{22}(\lambda)A^{m_2}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\mathrm{ch}\,\tau)-\omega_{21}(\lambda)B^{m_2}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\mathrm{ch}\,\tau)\right],$$

$$\omega(\lambda)=\omega^2_{21}(\lambda)+\left(\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\right)^2\omega^2_{22}(\lambda)$$

из (3.19), (3.20) получаем:

$$\mathfrak{M}_{m,11}[f(\tau)]=\int_0^\infty f(\tau)V(\tau,\lambda)\,\mathrm{sh}\,\tau\,\sigma(\tau)\,d\tau\equiv\tilde{f}(\lambda),$$

$$\mathfrak{M}^{-1}_{m,11}[\tilde{f}(\lambda)]=\int_0^\infty \tilde{f}(\lambda)V(\tau,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda\equiv f(\tau).$$

Приведенные следствия показывают, что из общих структур можно непосредственно выписать аналитические выражения ядер операторов $\mathfrak{M}_{\mu,11}$ и $\mathfrak{M}^{-1}_{\mu,11}$ для любой комбинации из $\mu_1=m_1$ и $\mu_2=m_2$.

§ 4. ГИБРИДНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЕРА-ФОКА 2-ГО РОДА НА ПОЛЯРНОЙ ОСИ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ СОПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим спектральную задачу Штурма-Лиувилля о конструкции на множестве $I_1=\{\tau:\tau\in(R_0,R_1)\cup(R_1,\infty),R_0>0\}$ решения сепаратной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

Пусть $\Theta(\tau)$ – единичная функция Хевисайда [81]. Введем в рассмотрение спектральную плотность

$$\Omega(\lambda)=\frac{\pi\lambda\, th\,\pi\frac{b_2}{a_2}\left(\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}+\mu_2\right)\right|^2\right)^{-1}}{ch\,\pi\frac{b_2}{a_2}\left[\omega_1^2(\lambda)+th^2\pi\frac{b_2}{a_2}\omega_2^2(\lambda)\right]}, \tag{4.5}$$

спектральную функцию

$$V(\tau,\lambda)=V_1(\tau,\lambda)\Theta(\tau-R_0)\Theta(R_1-\tau)+V_2(\tau,\lambda)\Theta(\tau-R_1),$$

весовую функцию

$$\sigma(\tau)=\left[\sigma_1\Theta(\tau-R_0)\Theta(R_1-\tau)+\sigma_2\Theta(\tau-R_1)\right]sh\,\tau\equiv$$

$$\equiv\left[\frac{c_{11}}{c_{21}}\frac{1}{a_1^2}\Theta(\tau-R_0)\Theta(R_1-\tau)+\frac{1}{a_2^2}\Theta(\tau-R_1)\right]sh\,\tau$$

и характеристическую функцию

$$\chi(\tau)=a_1^2\Theta(\tau-R_0)\Theta(R_1-\tau)+a_2^2\Theta(\tau-R_1).$$

Наличие спектральной функции $V(\tau,\lambda)$, спектральной плотности $\Omega(\lambda)$ и весовой функции $\sigma(\tau)$ позволяет написать интегральное представление меры Дирака на множестве I_1 [81]

$$\frac{\delta(\tau-\rho)}{\sigma(\rho)}=\int_0^\infty V(\tau,\lambda)V(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda. \tag{4.6}$$

Полученное интегральное представление дельта-функции порождает прямое $\mathfrak{M}_{\mu,21}$ и обратное $\mathfrak{M}^{-1}_{\mu,21}$ интегральное преобразование Мелера-Фока 2-го рода на полярной оси с одной точкой сопряжения:

$$\mathfrak{M}_{\mu,21}[f(\tau)]=\int_{R_0}^\infty f(\tau)V(\tau,\lambda)\sigma(\tau)d\tau\equiv\tilde{f}(\lambda), \tag{4.7}$$

$$\mathfrak{M}^{-1}_{\mu,21}[\tilde{f}(\lambda)]=\int_0^\infty\tilde{f}(\lambda)V(\tau,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\equiv f(\tau). \tag{4.8}$$

При этом имеют место утверждения.

ТЕОРЕМА I. Пусть функция $f(r)e^{r/2}$ кусочно-непрерывная, абсолютно интегрируемая в промежутке (R_0, ∞) и имеет там ограниченную вариацию. Тогда для $r \in I_1^+$ справедливое интегральное разложение

$$\frac{1}{2}[f(r+0)+f(r-0)] = \int_0^\infty V(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \int_{R_0}^\infty f(\rho)V(\rho,\lambda)\sigma(\rho)d\rho. \qquad (4.9)$$

Доказательство проведем методом дельтаобразных последовательностей. С этой целью рассмотрим задачу построения ограниченного в области $\mathcal{D}_+ = \{(t,r): t \in (0,\infty), r \in I_1^+ = (R_0, R_1) \cup (R_1, \infty), R_0 > 0\}$ решения сепаратной системы Λ_{μ_j} - параболических уравнений

$$\frac{1}{a_j^2}\frac{\partial v_j(t,r)}{\partial t} + \frac{\gamma_j^2}{a_j^2} v_j(t,r) - \Lambda_{\mu_j}[v_j(t,r)] = 0, \; (t,r) \in \mathcal{D}_+, \; j = 1,2 \qquad (4.10)$$

по начальным условиям

$$v_1(t,r)\Big|_{t=0} = g_1(r), \; r \in (R_0, R_1); \; v_2(t,r)\Big|_{t=0} = g_2(r), \; r \in (R_1, \infty), \qquad (4.11)$$

условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^1\right)v_1(t,r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^1\right)v_2(t,r)\right]\Big|_{r=R_1} = 0, \; j = 1,2, \qquad (4.12)$$

и краевым условиям

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right)v_1(t,r)\Big|_{r=R_0} = 0, \; \frac{\partial v_2(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=\infty} = 0. \qquad (4.13)$$

Предположим, что искомые функции $v_j(t,r)$ являются оригиналами по Лапласу относительно временной переменной t [31]. В изображениях по Лапласу задаче (4.10) - (4.13) соответствует задача построения ограниченного на множестве I_1^+, решения сепаратной системы уравнений Лежандра

$$(\Lambda_{\mu_j} - q_j^2)v_j^*(p,r) = -\bar{g}_j(r), \; j = 1,2 \qquad (4.14)$$

по условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha^1_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^1_{j1}\right)v^*_1(p,r)-\left(\alpha^1_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^1_{j2}\right)v^*_2(p,r)\right]\Big|_{r=R_1}=0,\ j=1,2 \qquad (4.15)$$

и краевым условиям

$$\left(\alpha^0_{11}\frac{d}{dr}+\beta^0_{11}\right)v^*_1(p,r)\Big|_{r=R_0}=0,\quad \frac{dv^*_2(p,r)}{dr}\Big|_{r=\infty}=0. \qquad (4.16)$$

В (4.14) - (4.16) приняты обозначения:

$$\bar{g}_j(r)=a_j^{-2}g_j(r),\quad q^2_{\gamma_j}=a_j^{-2}(p+\gamma_j^2),\quad v^*(p,r)=\int\limits_0^\infty v(t,r)e^{-pt}dt.$$

Фундаментальную систему решений для уравнения $(\Lambda_{\mu_j}-q_j)v^*(p,r)=0$ образуют функции $P^{\mu_j}_{-\frac12+q}(\mathrm{ch}\,r)$ и $\mathcal{L}^{\mu_j}_{-\frac12+q}(\mathrm{ch}\,r)=\frac{2}{\pi}e^{-\mu\pi i}Q^{\mu_j}_{-\frac12+q}(\mathrm{ch}\,r)$.

В силу свойств функций P^μ_ν и Q^μ_ν ограниченное на множестве решение задачи (4.14) - (4.16) будем отыскивать по правилам:

$$v^*_1(p,r)=A_1P^{\mu_1}_{-\frac12+q_1}(\mathrm{ch}\,r)+B_1\mathcal{L}^{\mu_1}_{-\frac12+q_1}(\mathrm{ch}\,r)+\int\limits_{R_0}^{R_1}\mathcal{E}^*_1(p,r,\rho)\bar{g}_1(\rho)\,\mathrm{sh}\rho\,d\rho,$$

$$v^*_2(p,r)=\qquad B_2\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac12+q_2}(\mathrm{ch}\,r)+\int\limits_{R_1}^{\infty}\mathcal{E}^*_2(p,r,\rho)\bar{g}_2(\rho)\,\mathrm{sh}\rho\,d\rho. \qquad (4.17)$$

Здесь $\mathcal{E}^*_j(p,r,\rho)$ – функции Коши [68]

$$\mathcal{E}^*_1(p,r,\rho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac12+q_1-\mu_1)}{\Gamma(\frac12+q_1+\mu_1)\Delta^*_{11}(p)}\begin{cases}\Phi^{*01}_{11}(p,\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}\,r)\Phi^{*11}_{11}(p,\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\rho), \\ \qquad R_0<r<\rho<R_1, \\ \Phi^{*01}_{11}(p,\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}\rho)\Phi^{*11}_{11}(p,\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\,r), \\ \qquad R_0<\rho<r<R_1;\end{cases} \qquad (4.18)$$

$$\mathcal{E}^*_2(p,r,\rho)=-\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac12+q_2-\mu_2)}{\Gamma(\frac12+q_2+\mu_2)U^{12,\mu_2}_{12,2}(p,\mathrm{ch}R_1)}\begin{cases}\Phi^{*12}_{12}(p,\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\,r)\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac12+q_2}(\mathrm{ch}\rho), \\ \qquad R_1<r<\rho<\infty, \\ \Phi^{*12}_{12}(p,\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\rho)\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac12+q_2}(\mathrm{ch}\,r), \\ \qquad R_1<\rho<r<\infty.\end{cases} \qquad (4.19)$$

Обратимся к формулам (4.17) построения решения задачи

(4.14) - (4.16). Условия сопряжения (4.15) и краевые условия (4.16) для определения постоянных A_1, B_1 и B_2 дают алгебраическую систему трех уравнений:

$$U_{11,1}^{01,\mu_1}(p,\operatorname{ch}R_0)A_1+U_{11,2}^{01,\mu_1}(p,\operatorname{ch}R_0)B_1=0,$$

$$U_{11,1}^{11,\mu_1}(p,\operatorname{ch}R_1)A_1+U_{11,2}^{11,\mu_1}(p,\operatorname{ch}R_1)B_1-U_{12,2}^{12,\mu_2}(p,\operatorname{ch}R_1)B_2=0, \tag{4.20}$$

$$U_{21,1}^{11,\mu_1}(p,\operatorname{ch}R_1)A_1+U_{21,2}^{11,\mu_1}B_1-U_{22,2}^{12,\mu_2}(p,\operatorname{ch}R_1)B_2=G_{12}^*$$

В системе (4.23) функция

$$G_{12}^*=\frac{c_{11}}{\operatorname{sh}R_1}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Phi_{11}^{*01}(p,\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}\rho)}{\Delta_{11}^*(p)}\bar g_1(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho+ \tag{4.21}$$

$$+\frac{c_{21}}{\operatorname{sh}R_1}\int_{R_1}^{\infty}\frac{\mathcal{I}_{-\frac12+q_2}^{\mu_2}(\operatorname{ch}\rho)}{U_{12,2}^{12,\mu_2}(p,\operatorname{ch}R_1)}\bar g_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho.$$

Предположим, что выполнено условие неограниченной разрешимости задачи: для $p=\sigma+i\tau$ с $\operatorname{Re}p=\sigma\geq\sigma_0$, где σ_0 - абсцисса сходимости интеграла Лапласа, и $\operatorname{Im}p=\tau\in(-\infty,\infty)$ - определитель алгебраической системы (4.20)

$$\Delta_2^*(p)=U_{12,2}^{12,\mu_2}(p,\operatorname{ch}R_1)\Delta_{21}^*(p)-U_{22,2}^{12,\mu_2}(p,\operatorname{ch}R_1)\Delta_{11}^*(p)\neq0. \tag{4.22}$$

Введем в рассмотрение функции влияния:

$$\mathcal{H}_{11}^*(p,z,\rho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac12+q_1-\mu)}{\Gamma(\frac12+q_1+\mu_2)\Delta_2^*(p)}\begin{cases}\Phi_{11}^{*01}(p,\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}z)\times\\ \Phi_{11}^{*01}(p,\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}\rho)\times\end{cases}$$

$$\times\left[U_{12,2}^{12,\mu_2}(p,\operatorname{ch}R_1)\Phi_{21}^{*11}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\rho)-U_{22,2}^{12,\mu_2}(p,\operatorname{ch}R_1)\Phi_{11}^{*11}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\rho)\right],\ R_0<z<\rho<R_1;$$

$$\times\left[U_{12,2}^{12,\mu_2}(p,\operatorname{ch}R_1)\Phi_{21}^{*11}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}z)-U_{22,2}^{12,\mu_2}(p,\operatorname{ch}R_1)\Phi_{11}^{*11}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}z)\right],\ R_0<\rho<z<R_1;$$

$$\mathcal{H}_{12}^*(p,z,\rho)=\frac{c_{21}}{\operatorname{sh}R_1}\frac{1}{\Delta_2^*(p)}\Phi_{11}^{*01}(p,\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}z)\mathcal{I}_{-\frac12+q_2}^{\mu_2}(\operatorname{ch}\rho),$$

$$\mathcal{H}^*_{21}(p,\tau,\rho)=\frac{c_{11}}{\operatorname{sh}R_1}\,\frac{1}{\Delta^*_2(p)}\,\Phi^{*01}_{11}(p,\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}\rho)\,\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau), \tag{4.23}$$

$$\mathcal{H}^*_{22}(p,\tau,\rho)=\frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2-\mu_2)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2+\mu_2)\Delta^*_2(p)}\begin{cases}\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\rho)\Big[\Delta^*_2(p)P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)-\\ \mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)\Big[\Delta^*_2(p)P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\rho)-\end{cases}$$

$$-\Delta^*_1(p)\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)\Big],\ R_2<\tau<\rho<\infty;$$

$$-\Delta^*_1(p)\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\rho)\Big],\ R_2<\rho<\tau<\infty;$$

$$\Delta^*_1(p)=\Delta^*_{21}(p)U^{12,\mu}_{12,1}(p,\operatorname{ch}R_1)-\Delta^*_{11}(p)U^{12,\mu_2}_{22,1}(p,\operatorname{ch}R_1).$$

В результате однозначной разрешимости алгебраической системы (4.20), подстановки найденных значений A_1, B_1, B_2 в формулы (4.17) и элементарных преобразований получаем решение задачи (4.14) – (4.16):

$$v^*_j(p,\tau)=\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}^*_{j1}(p,\tau,\rho)\bar{g}_1(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho+\int_{R_1}^{\infty}\mathcal{H}^*_{j2}(p,\tau,\rho)\bar{g}_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho. \tag{4.24}$$

В силу свойств присоединенных функций Лежандра точки $p=-\gamma_j^2$ и $p=\infty$ являются точками ветвления для функций влияния $\mathcal{H}^*_{jk}(p,\tau,\rho)$. Можно показать, что других особых точек у функций влияния нет [48]. Используя лемму Жордана и теорему Коши [31], приходим к формуле обращения

$$\mathcal{H}_{jk}(t,\tau,\rho)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\operatorname{Im}\left\{\mathcal{H}^*_{jk}\left((\lambda^2+\gamma_2^2)e^{\pi i},\tau,\rho\right)\right\}e^{-(\lambda^2+\gamma_2^2)t}\lambda\,d\lambda,\ j,k=1,2. \tag{4.25}$$

Здесь предположено, что $\gamma_2^2-\gamma_1^2\equiv k_1^2\geq 0$. В противном случае $(\gamma_1^2-\gamma_2^2\equiv k_2^2\geq 0)$ формула (4.25) имела бы вид:

$$\mathcal{H}_{jk}(t,\tau,\rho)=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \operatorname{Jm}\left\{\mathcal{H}^*_{jk}\left((\lambda^2+\gamma_2^2)e^{\pi i},\tau,\rho\right)\right\}e^{-(\lambda^2+\gamma_1^2)t}\lambda\, d\lambda,\ j,k=1,2. \quad (4.26)$$

При $q_j = iz_j \ (z_j = a_j^{-1} b_j,\ b_2=\lambda,\ b_1=\sqrt{\lambda^2+\kappa_1^2})$ имеем:

$$\mathcal{F}^{*kn}_{j1}=(\cos\mu_n\pi+i\sin\mu_n\pi\, \operatorname{th}\pi z_n)\Big[Y^{k2,\mu_n}_{j1,-\frac12+iz_n}(\operatorname{ch}R_m)A^{\mu_n}_{-\frac12+iz_n}(\operatorname{ch}\tau)-$$

$$-Y^{k_1,\mu_n}_{j1,-\frac12+iz_n}(\operatorname{ch}R_m)B^{\mu_n}_{-\frac12+iz_n}(\operatorname{ch}\tau)\Big]\equiv\gamma_n(\lambda)\mathcal{F}^{kn}_{j1}(\lambda,\operatorname{ch}R_m,\operatorname{ch}\tau),$$

$$(4.27)$$

$$\Delta^*_{j1}(\rho)=\gamma_1(\lambda)\Big[Y^{02,\mu_1}_{11,-\frac12+iz_1}(\operatorname{ch}R_0)Y^{11,\mu_1}_{j1,-\frac12+iz}(\operatorname{ch}R_1)-Y^{01,\mu_1}_{11,-\frac12+iz_1}(\operatorname{ch}R_0)\times$$

$$\times Y^{12,\mu_1}_{j1,-\frac12+iz_1}(\operatorname{ch}R_1)\Big]\equiv\gamma_1(\lambda)\Delta_{j1}(\lambda,\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}R_1)\equiv\gamma_1(\lambda)\Delta_{j1}(\lambda),$$

$$\Delta^*_2(\rho)=\gamma_1(\lambda)\Big\{\Big[Y^{11,\mu_2}_{12,-\frac12+iz_2}(\operatorname{ch}R_1)\Delta_{21}(\lambda)-Y^{11,\mu_2}_{22,-\frac12+iz_2}(\operatorname{ch}R_1)\Delta_{11}(\lambda)\Big]-$$

$$-i\operatorname{th}\pi z_2\Big[Y^{12,\mu_2}_{12,-\frac12+iz_2}(\operatorname{ch}R_1)\Delta_{21}(\lambda)-Y^{12,\mu_2}_{22,-\frac12+iz_2}(\operatorname{ch}R_1)\Delta_{11}(\lambda)\Big]\Big\}\equiv$$

$$\equiv\gamma_1(\lambda)\left[\omega_1(\lambda)-i\operatorname{th}\pi z_2\,\omega_2(\lambda)\right].$$

Согласно формуле (4.25) в результате элементарных преобразований получаем:

$$\mathcal{H}_{jk}(t,\tau,\rho)=\int\limits_0^\infty V_j(\tau,\lambda)V_k(\rho,\lambda)e^{-(\lambda^2+\gamma_2^2)t}\Omega(\lambda)\,d\lambda\,\sigma_k a_k^2,\ j,k=1,2. \quad (4.28)$$

Возвращаясь в формулах (4.24) к оригиналу, будем иметь решение задачи (4.10) - (4.13):

$$v_j(t,\tau)=\int\limits_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}_{j1}(t,\tau,\rho)g_1(\rho)\operatorname{sh}\rho\, d\rho+$$

$$+\int\limits_{R_1}^\infty\mathcal{H}_{j2}(t,\tau,\rho)g_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\, d\rho,\ j=1,2. \quad (4.29)$$

В силу начальных условий (4.11) приходим к интегральным представлениям:

$$g_1(r)=\int_{R_0}^{R_1}\left(\int_0^\infty V_1(r,\lambda)V_1(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\right)g_1(\rho)\,\mathrm{sh}\rho\,\sigma_1\,d\rho,$$

$$g_2(r)=\int_{R_1}^{\infty}\left(\int_0^\infty V_2(r,\lambda)V_2(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\right)g_2(\rho)\,\mathrm{sh}\rho\,\sigma_2\,d\rho. \tag{4.30}$$

Отсюда следует интегральное представление (4.6) меры Дирака.

В силу свойств фундаментального решения задачи Коши для уравнения теплопроводности (4.10) как дельтаобразной последовательности, имеем (4.9).

ТЕОРЕМА 2. Для дважды непрерывно дифференцируемой на множестве I_1^+ функции $f(r)$, удовлетворяющей краевому условию

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0\right)f(r)\Big|_{r=R_0}=g_0 \tag{4.31}$$

условиям сопряжения (4.12) и исчезающей на бесконечности вместе со своей первой производной как функция $g(r)\exp\left(\frac{r}{2}\right)$, имеет место основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора

$$\mathfrak{M}_{\mu,21}\left[\mathcal{X}(r)\Lambda_\mu[f(r)]\right]=\int_{R_0}^{R_1}a_1^2\Lambda_{\mu_1}[f(r)]V_1(r,\lambda)\sigma_1\,\mathrm{sh}r\,dr+$$

$$+\int_{R_1}^{\infty}a_2^2\Lambda_{\mu_2}[f(r)]V_2(r,\lambda)\sigma_2\,\mathrm{sh}r\,dr=-\lambda^2\tilde f(\lambda)-a_1^2\sigma_1\,\mathrm{sh}R_0\times \tag{4.32}$$

$$\times\frac{V_1(R_0,\lambda)}{\alpha_{11}^0}g_0-k_1^2\int_{R_0}^{R_1}f(r)V_1(r,\lambda)\,\mathrm{sh}r\,\sigma_1\,dr-k_2^2\int_{R_1}^{\infty}f(r)V_2(r,\lambda)\,\mathrm{sh}r\,\sigma_2\,dr.$$

Доказательство: Обозначим $m_1=\alpha_{11}^1\alpha_{22}^1-\alpha_{21}^1\alpha_{12}^1$, $m_2=\alpha_{11}^1\beta_{22}^1-\alpha_{21}^1\beta_{12}^1$, $m_3=\beta_{11}^1\alpha_{22}^1-\beta_{21}^1\alpha_{12}^1$, $m_4=\beta_{11}^1\beta_{22}^1-\beta_{21}^1\beta_{12}^1$, $f^{\pm}(R_1)=\lim\limits_{r\to R_1\pm 0}f(r)$.

Из тождественных равенств

$$\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^1\right)V_1(r,\lambda)\Big|_{r=R_1}=\left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^1\right)V_2(r,\lambda)\Big|_{r=R_1},\ j=1,2 \tag{4.33}$$

следуют соотношения:

$$V_1(R_1,\lambda)=-\frac{1}{c_{11}}\left[m_1\frac{dV_2(R_1,\lambda)}{dr}+m_2V_2(R_1,\lambda)\right],$$

$$\frac{dV_1(R_1,\lambda)}{d\tau}=\frac{1}{c_{11}}\left[m_3\frac{dV_2(R_1,\lambda)}{d\tau}+m_4V_2(R_1,\lambda)\right]. \quad (4.34)$$

В силу свойств функции $f(\tau)$ соотношения (4.34) остаются справедливыми, если $V_1(R_1,\lambda)$ заменить на $f^-(R_1)$, а $V_2(R_1,\lambda)$ заменить на $f^+(R_1)$ (и соответственно производные по τ).

Наличие соотношений (4.34) дает возможность получить равенство

$$\frac{df^-(R_1)}{d\tau}V_1(R_1,\lambda)-f^-(R_1)\frac{dV_1(R_1,\lambda)}{d\tau}=\frac{c_{21}}{c_{11}}\left[\frac{df^+(R_1)}{d\tau}V_2(R_1,\lambda)-f^+(R_1)\frac{dV_2(R_1,\lambda)}{d\tau}\right]. \quad (4.35)$$

Интегрируя в (4,32) под знаком интеграла по частям в силу тождеств

$$\left(\Lambda_{\mu_j}+\frac{\lambda^2+k_j^2}{a_j^2}\right)V_j(\tau,\lambda)\equiv 0,\ j=1,2 \quad (4.36)$$

и тождества (4.34) получаем, что

$$\int_{R_0}^{R_1}a_1^2\Lambda_{\mu_1}[f(\tau)]V_1(\tau,\lambda)\sigma_1 sh\tau\,d\tau+\int_{R_1}^{\infty}a_2^2\Lambda_{\mu_2}[f(\tau)]V_2(\tau,\lambda)\sigma_2 sh\tau\,d\tau=$$

$$=-\lambda^2\tilde{f}(\lambda)-k_1^2\int_{R_0}^{R_1}f(\tau)V_1(\tau,\lambda)sh\tau\,\sigma_1 d\tau-k_2^2\int_{R_1}^{\infty}f(\tau)V_2(\tau,\lambda)sh\tau\,\sigma_2 d\tau-$$

$$-a_1^2\sigma_1 sh R_0\left(\frac{df(R_0)}{d\tau}V_1(R_0,\lambda)-\frac{dV_1(R_0,\lambda)}{d\tau}f(R_0)\right)- \quad (4.37)$$

$$-a_1^2\sigma_1 sh R_1\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2 sh R_1\left(\frac{df^+(\tau)}{d\tau}V_2(\tau,\lambda)-f^+(\tau)\frac{dV_2(\tau,\lambda)}{d\tau}\right)\Big|_{\tau=R_1}$$

В силу конструкций функций σ_j

$$a_1^2\sigma_1\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2=a_1^2\frac{c_{11}}{c_{21}}\cdot\frac{1}{a_1^2}\frac{c_{21}}{c_{11}}-\frac{a_2^2}{a_2^2}\equiv 0. \quad (4.38)$$

В силу краевого условия (4.31) при $\alpha_{11}^0\neq 0$

$$\left(\frac{df(\tau)}{d\tau}V_1(\tau,\lambda)-f(\tau)\frac{dV_1(\tau,\lambda)}{d\tau}\right)\Big|_{\tau=R_0}=\left[\frac{1}{\alpha_{11}^0}\left(\alpha_{11}^0\frac{df(\tau)}{d\tau}+\beta_{11}^0 f(\tau)\right)V_1(\tau,\lambda)-\right.$$

$$-f(r)\frac{dV_1(r,\lambda)}{dr}\Big]\Big|_{r=R_0}=\frac{V_1(R_0,\lambda)}{\alpha_{11}^0}g_0-\frac{1}{\alpha_{11}^0}f(R_0)\Big(\alpha_{11}^0\frac{dV_2(r,\lambda)}{dr}+ \qquad (4.39)$$

$$+\beta_{11}^0V_2(r,\lambda)\Big)\Big|_{r=R_0}=V_1(R_0,\lambda)\cdot g_0(\alpha_{11}^0)^{-1}.$$

С учетом (4.38), (4.39) левая часть равенства (4.37) совпадает с левой частью (4.32).

Следствие I: При $\mu_1=\mu_2=0$

$$V_1(r,\lambda)=\frac{2}{\pi}\frac{C_{21}}{\operatorname{sh}R_1}\Phi_{11}^{01}(\lambda,\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}r), \qquad (4.40)$$

$$V_2(r,\lambda)=\omega_1(\lambda)B_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}r)-\omega_2(\lambda)A_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}r)$$

получим

$$\mathfrak{M}_{0,21}[f(r)]=\int_{R_0}^{\infty}f(r)V(r,\lambda)\sigma(r)dr\equiv\tilde{f}(\lambda), \qquad (4.41)$$

$$\mathfrak{M}_{0,21}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)]=\int_0^{\infty}\tilde{f}(\lambda)V(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\equiv f(r).$$

Следствие 2: Пусть $\mu_1=m_1=0,1,2,\ldots$, $\mu_2=m_2=0,1,2,\ldots$.

Тогда в силу (2.3I), (4.4) получим

$$V_1(r,\lambda)=\frac{2}{\pi^2}\frac{C_{21}}{\operatorname{sh}R_1}\operatorname{ch}\pi\frac{b_2}{a_2}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}+m_2\right)\right|^2\Phi_{11}^{01}(\lambda,\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}r),$$

$$V_2(r,\lambda)=\omega_1(\lambda)B^{m_2}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}r)-\omega_2(\lambda)A^{m_2}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}r), \qquad (4.42)$$

$$\mathfrak{M}_{m,21}[f(r)]=\int_{R_0}^{\infty}f(r)V(r,\lambda)\sigma(r)dr\equiv\tilde{f}(\lambda),$$

$$\mathfrak{M}_{m,21}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)]=\int_0^{\infty}\tilde{f}(\lambda)V(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\equiv f(r). \qquad (4.43)$$

§ 5. ГИБРИДНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЕРА-ФОКА I-ГО РОДА НА ПОЛЯРНОЙ ОСИ С ДВУМЯ ТОЧКАМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим спектральную задачу Штурма-Лиувилля о конструкции на множестве $I_2^+=\{r: r\in(0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty)\}$ решения сепаратной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$L_j[v_j(\tau)] = \left(\Lambda_{\mu_j} + \frac{b_j^2(\lambda)}{a_j^2}\right) v_j(\tau) = 0, \quad j=1,2,3 \qquad (5.1)$$

по условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{d\tau} + \beta_{j1}^k\right) v_k(\tau) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{d\tau}+\beta_{j2}^k\right) v_{k+1}(\tau)\right]\Big|_{\tau=R_k} = 0, \quad j,k=1,2. \qquad (5.2)$$

Непосредственно проверяется, что решением спектральной задачи Штурма-Лиувилля (5.1), (5.2) являются функции

$$v_1(\tau,\lambda) = \left[\sin\mu_1\pi\, A^{\mu_1}_{-\frac12+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}\tau) + \cos\mu_1\pi\, B^{\mu_1}_{-\frac12+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}\tau)\right]\frac{2^2}{\pi^3}\,\frac{c_{21}\,c_{22}}{\operatorname{sh}R_1\operatorname{sh}R_2}\,\operatorname{sh}\pi\frac{b_3}{a_3}\times$$

$$\times\operatorname{ch}\pi\frac{b_3}{a_3}\left|\Gamma\left(\frac12+i\frac{b_2}{a_2}+\mu_2\right)\right|^2\left|\Gamma\left(\frac12+i\frac{b_3}{a_3}+\mu_3\right)\right|^2,$$

$$v_2(\tau,\lambda)=\frac{2}{\pi}\Big[A^{\mu_2}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\tau)\left(\sin\mu_1\pi\, f_{12}(\operatorname{ch}R_1,\lambda)+\cos\mu_1\pi\, f_{22}(\operatorname{ch}R_1,\lambda)\right)-$$

$$-B^{\mu_2}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\tau)\left(\sin\mu_1\pi\, f_{11}(\operatorname{ch}R_1,\lambda)+\cos\mu_1\pi\, f_{21}(\operatorname{ch}R_1,\lambda)\right)\operatorname{sh}\pi\frac{b_3}{a_3}\left|\Gamma\left(\frac12+i\frac{b_3}{a_3}+\mu_3\right)\right|^2,$$

$$v_3(\tau,\lambda)=\pi\left[\omega_2(\lambda)\,A^{\mu_3}_{-\frac12+i\frac{b_3}{a_3}}(\operatorname{ch}\tau)+\omega_1(\lambda)\operatorname{th}\pi\frac{b_3}{a_3}\,B^{\mu_3}_{-\frac12+i\frac{b_3}{a_3}}(\operatorname{ch}\tau)\right]$$

Здесь приняты обозначения:

$$f_{jk}(\operatorname{ch}R_1,\lambda)=Y^{1j,\mu_1}_{11,-\frac12+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}R_1)\,Y^{1k,\mu_2}_{22,-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_1)-Y^{1j,\mu_1}_{21,-\frac12+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}R_1)\,Y^{1k,\mu_2}_{12,-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_1),$$

$$\omega_1(\lambda)=\sin\mu_1\pi\left(f_{11}(\operatorname{ch}R_1,\lambda)\,Z_{12}(\operatorname{ch}R_2,\lambda)-f_{12}(\operatorname{ch}R_1,\lambda)\,Z_{11}(\operatorname{ch}R_2,\lambda)\right)+$$

$$+\cos\mu_1\pi\times\left(f_{21}(\operatorname{ch}R_1,\lambda)\,Z_{12}(\operatorname{ch}R_2,\lambda)-f_{22}(\operatorname{ch}R_1,\lambda)\,Z_{11}(\operatorname{ch}R_2,\lambda)\right),$$

$$\omega_2(\lambda)=\operatorname{th}\pi\frac{b_3}{a_3}\Big[\sin\mu_1\pi\left(f_{12}(\operatorname{ch}R_1,\lambda)\,Z_{21}(\operatorname{ch}R_2,\lambda)-f_{11}(\operatorname{ch}R_1,\lambda)\,Z_{22}(\operatorname{ch}R_1,\lambda)\right)+$$

$$+\cos\mu_1\pi\left(f_{22}(\operatorname{ch}R_1,\lambda)\,Z_{21}(\operatorname{ch}R_2,\lambda)-f_{21}(\operatorname{ch}R_1,\lambda)\,Z_{22}(\operatorname{ch}R_2,\lambda)\right),$$

$$Z_{kj}(chR_2,\lambda)=\mathcal{Y}^{2j,\mu_2}_{11,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(chR_2)\mathcal{Y}^{2k,\mu_3}_{22,-\frac{1}{2}+i\frac{b_3}{a_3}}(chR_2)-\mathcal{Y}^{2j,\mu_2}_{21,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(chR_2)\mathcal{Y}^{2k,\mu_3}_{12,-\frac{1}{2}+i\frac{b_3}{a_3}}(chR_2).$$

Введем в рассмотрение спектральную плотность

$$\Omega(\lambda)=\frac{\lambda\left[\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)\right]^{-1}}{\pi\, sh\pi\frac{b_3}{a_3}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{b_3}{a_3}+\mu_3\right)\right|^2},\tag{5.3}$$

спектральную функцию

$$V(\tau,\lambda)=V_1(\tau,\lambda)\theta(R_1-\tau)+V_2(\tau,\lambda)\theta(\tau-R_1)\theta(R_2-\tau)+V_3(\tau,\lambda)\theta(\tau-R_2),$$

весовую функцию

$$\sigma(\tau)=\sigma_1 sh\tau\,\theta(R_1-\tau)+\sigma_2 sh\tau\,\theta(\tau-R_1)\theta(R_2-\tau)+\sigma_3 sh\tau\,\theta(\tau-R_2)\equiv$$

$$\equiv\frac{c_{11}c_{12}}{a_1^2c_{22}c_{21}}sh\tau\,\theta(R_1-\tau)+\frac{c_{12}}{a_2^2c_{22}}sh\tau\,\theta(\tau-R_1)\theta(R_2-\tau)+\frac{1}{a_3^2}sh\tau\,\theta(\tau-R_2)$$

и характеристическую функцию

$$\aleph(\tau)=a_1^2\theta(R_1-\tau)+a_2^2\theta(\tau-R_1)\theta(R_2-\tau)+a_3^2\theta(\tau-R_2).$$

Наличие спектральной функции $V(\tau,\lambda)$, спектральной плотности $\Omega(\lambda)$ и весовой функции $\sigma(\tau)$ позволяет написать интегральное представление меры Дирака на множестве I_2

$$\frac{\delta(\tau-\rho)}{\sigma(\rho)}=\int_0^\infty V(\tau,\lambda)V(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda.\tag{5.4}$$

Интегральное представление (5.4) меры Дирака порождает прямое $\mathfrak{M}_{\mu,12}$ и обратное $\mathfrak{M}^{-1}_{\mu,12}$ интегральное преобразование Мелера-Фока I-го рода на полярной оси с двумя точками сопряжения по правилам [48]:

$$\mathfrak{M}_{\mu,12}[f(\tau)]=\int_0^\infty f(\tau)V(\tau,\lambda)\sigma(\tau)sh\tau d\tau\equiv\tilde{f}(\lambda)=$$

$$=\int_0^{R_1}f(\tau)V_1(\tau,\lambda)\sigma_1 sh\tau d\tau+\int_{R_1}^{R_2}f(\tau)V_2(\tau,\lambda)\sigma_2 sh\tau d\tau+$$

$$+\int_{R_2}^{\infty} f(\tau)\mathcal{V}_3(\tau,\lambda)\sigma_3 \operatorname{sh}\tau d\tau, \qquad (5.5)$$

$$\mathfrak{M}^{-1}_{\mu,12}[\tilde{f}(\lambda)] = \int_0^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\mathcal{V}(\tau,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda. \qquad (5.6)$$

При этом имеют место утверждения.

ТЕОРЕМА I. Пусть функция $\tau f(\tau)e^{\tau/2}$ кусочно-непрерывная, абсолютно интегрируемая в промежутке $(0, \infty)$ и имеет там ограниченную вариацию. Тогда для $\tau \in I_2^+$, справедливое интегральное разложение:

$$\frac{1}{2}[f(\tau+0)+f(\tau-0)] = \int_0^{\infty}\mathcal{V}(\tau,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\int_0^{\infty} f(\rho)\mathcal{V}(\rho,\lambda)\sigma(\rho)\operatorname{sh}\rho d\rho. \qquad (5.7)$$

Доказательство проведем методом дельтаобразных последовательностей [41].

С этой целью рассмотрим задачу построения ограниченного в области

$$\mathcal{D}_+ = \left\{(t,\tau): t\in(0,\infty), \tau\in I_2^+ = (0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty)\right\}$$

решения сепаратной системы $\Lambda_{\mu j}$ - параболических уравнений

$$\frac{1}{a_j^2}\frac{\partial u_j(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\gamma_j^2}{a_j^2}u_j(t,\tau) - \Lambda_{\mu_j}[u_j(t,\tau)] = 0, \ (t,\tau)\in\mathcal{D}_+, \ j=\overline{1,3} \qquad (5.8)$$

по начальным условиям

$$u_j(t,\tau)\Big|_{t=0} = g_j(\tau), \ \tau\in(R_{j-1},R_j), \ j=\overline{1,3}, \ R_0=0, \ R_3=\infty \qquad (5.9)$$

и условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial\tau}+\beta_{j1}^1\right)u_k(t,\tau) - \left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial\tau}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(t,\tau)\right]\Big|_{\tau=R_k} = 0, \ j,k=1,2. \qquad (5.10)$$

Здесь $\alpha_{jm}^k \geq 0, \beta_{jm}^k \geq 0, \ c_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k \neq 0,$

$$\Lambda_{\mu_j} = \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \operatorname{cth}\tau\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{1}{4} - \frac{\mu_j^2}{\operatorname{sh}^2\tau}$$

- оператора Лежандра.

Если предположить, что искомые функции $v_j(t,r)$ являются оригиналами по Лапласу относительно временной переменной t, то в изображениях по Лапласу имеем задачу построения ограниченного на множестве I_2^+ решения сепаратной системы уравнений Лежандра

$$\left(\Lambda_{\mu_j} - q_j^2\right) U_j^* = -\bar{g}_j(r), \quad q_j^2 = \frac{p+\gamma_j^2}{a_j^2}, \quad \bar{g}_j(r) = \frac{g_j(r)}{a_j^2}, \quad j = \overline{1,3} \qquad (5.11)$$

по условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) U_k^*(p,r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) U_{k+1}^*(p,r)\right]\Big|_{r=R_k} = 0, \ j,k = 1,2. \qquad (5.12)$$

В силу свойств функций $P^{\mu_j}_{-\frac{1}{2}+q_j}(\operatorname{ch} r)$ и $\mathcal{I}^{\mu_j}_{-\frac{1}{2}+q_j}(\operatorname{ch} r)$ образующих фундаментальную систему решений для уравнения $(\Lambda_{\mu_j} - q_j^2) U_j^*(p,r) = 0$, ограниченное на множестве I_2^+, решение задачи (5.11), (5.12) будем отыскивать по правилам:

$$\begin{aligned}
U_1^*(p,r) &= A_1 P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch} r) + \int_0^{R_1} \mathcal{E}_1^*(p,r,\rho)\bar{g}_1(\rho)\operatorname{sh}\rho\, d\rho, \\
U_2^*(p,r) &= A_2 P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch} r) + B_2 \mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch} r) + \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{E}_2^*(p,r,\rho)\bar{g}_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\, d\rho, \qquad (5.13) \\
U_3^*(p,r) &= B_3 \mathcal{I}^{\mu_3}_{-\frac{1}{2}+q_3}(\operatorname{ch} r) + \int_{R_2}^{\infty} \mathcal{E}_3^*(p,r,\rho)\bar{g}_3(\rho)\operatorname{sh}\rho\, d\rho.
\end{aligned}$$

Если положить

$$\mathcal{E}_1^*(p,r,\rho) = \begin{cases} \overset{+}{\mathcal{E}}{}_1^* \equiv C_{11} P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch} r), & 0<r<\rho<R_1, \\ \overset{+}{\mathcal{E}}{}_2^* \equiv C_{12} P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch} r) + \mathcal{D}_{12} \mathcal{I}^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch} r), & 0<\rho<r<R_1 \end{cases}$$

и потребовать, чтобы

$$\left(\alpha_{11}^{1}\frac{d}{d\tau}+\beta_{11}^{1}\right)\overset{*}{\mathcal{E}}_{1}(p,\tau,\rho)\Big|_{\tau=R_1}\equiv C_{12}U_{11,1}^{11}(p,\operatorname{ch}R_1)+\mathcal{D}_{12}U_{11,2}^{11}(p,\operatorname{ch}R_1)=0,$$

то для определения постоянных C_{11}, C_{12} и $\mathcal{D}_{12}$ в силу свойств функции Коши получаем алгебраическую систему:

$$\begin{cases}(C_{12}-C_{11})P_{-\frac{1}{2}+q_1}^{\mu_1}(\operatorname{ch}\rho)+\mathcal{D}_{12}\mathcal{I}_{-\frac{1}{2}+q_1}^{\mu_1}(\operatorname{ch}\rho)=0,\\ (C_{12}-C_{11})P_{-\frac{1}{2}+q_1}^{\mu_1'}(\operatorname{ch}\rho)+\mathcal{D}_{12}\mathcal{I}_{-\frac{1}{2}+q_1}^{\mu_1'}(\operatorname{ch}\rho)=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2\rho},\\ C_{12}U_{11,1}^{11}(p,\operatorname{ch}R_1)+\mathcal{D}_{12}U_{11,2}^{11}(p,\operatorname{ch}R_1)=0.\end{cases}\tag{5.14}$$

Отсюда в силу соотношения

$$W\left[P_{-\frac{1}{2}+q_1}^{\mu_1}(\operatorname{ch}\rho),\mathcal{I}_{-\frac{1}{2}+q_1}^{\mu_1}(\operatorname{ch}\rho)\right]=-\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_1+\mu_1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_1-\mu_1\right)}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}^2\rho}\tag{5.15}$$

находим, что

$$C_{11}=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_1-\mu_1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_1+\mu_1\right)}\cdot\frac{\Phi_{11}^{*11}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\rho)}{U_{11,1}^{11}(p,\operatorname{ch}R_1)},$$

$$\Phi_{11}^{*11}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\rho)=U_{11,1}^{11}(p,\operatorname{ch}R_1)\mathcal{I}_{-\frac{1}{2}+q_1}^{\mu_1}(\operatorname{ch}\rho)-U_{11,2}^{11}(p,\operatorname{ch}R_1)P_{-\frac{1}{2}+q_1}^{\mu_1}(\operatorname{ch}\rho).$$

Этим функция Коши $\overset{*}{\mathcal{E}}_1(p,\tau,\rho)$ определена и в силу симметрии относительно точки $\tau=\rho$ имеет вид:

$$\overset{*}{\mathcal{E}}_1(p,\tau,\rho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_1-\mu_1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_1+\mu_1\right)U_{11,1}^{11}(p,\operatorname{ch}R_1)}\begin{cases}P_{-\frac{1}{2}+q_1}^{\mu_1}(\operatorname{ch}\tau)\Phi_{11}^{*11}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\rho),\\ \qquad 0<\tau<\rho<\infty,\\ P_{-\frac{1}{2}+q_1}^{\mu_1}(\operatorname{ch}\rho)\Phi_{11}^{*11}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\tau),\\ \qquad 0<\rho<\tau<\infty.\end{cases}\tag{5.16}$$

Предположим, что функция Коши

$$\overset{+}{\mathcal{E}}_2(\rho,\tau,\varrho)=\begin{cases}\overset{-}{\mathcal{E}}{}^*_2\equiv C_{21}P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\tau)+\mathcal{D}_{21}\mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\tau),\ R_1<\tau<\varrho<R_2,\\ \overset{+}{\mathcal{E}}{}^*_2\equiv C_{22}P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\tau)+\mathcal{D}_{22}\mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\tau),\ R_1<\varrho<\tau<R_2\end{cases}$$

и потребуем, чтоб

$$\left(\alpha^1_{12}\frac{\partial}{\partial\tau}+\beta^1_{12}\right)\overset{-}{\mathcal{E}}{}^*_2(\rho,\tau,\varrho)\Big|_{\tau=R_1}=0,\quad\left(\alpha^2_{11}\frac{\partial}{\partial\tau}+\beta^2_{11}\right)\overset{+}{\mathcal{E}}{}^*_2(\rho,\tau,\varrho)\Big|_{\tau=R_2}=0.$$

Для определения постоянных C_{2j} и $\mathcal{D}_{2j}$ $(j=1,2)$ имеем алгебраическую систему четырех уравнений:

$$\begin{gathered}(C_{22}-C_{21})P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\varrho)+(\mathcal{D}_{22}-\mathcal{D}_{21})\mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\varrho)=0,\\ (C_{22}-C_{21})P^{\mu_2'}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\varrho)+(\mathcal{D}_{22}-\mathcal{D}_{21})\mathcal{I}^{\mu_2'}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\varrho)=-\frac{1}{sh^2\varrho},\\ C_{21}U^{12}_{12,1}(p,chR_1)+\mathcal{D}_{21}U^{12}_{12,2}(p,chR_1)=0,\\ C_{22}U^{22}_{11,1}(p,chR_2)+\mathcal{D}_{22}U^{22}_{11,2}(p,chR_2)=0.\end{gathered}\tag{5.I7}$$

Из первых двух уравнений системы (5.I7) в силу соотношения (5.I6) находим, что

$$C_{22}-C_{21}=-\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2-\mu_2)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2+\mu_2)}\mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\varrho),\quad \mathcal{D}_{22}-\mathcal{D}_{21}=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2-\mu_2)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2+\mu_2)}P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\varrho).$$

Тогда для постоянных C_{21} и $\mathcal{D}_{21}$ третье и четвертое уравнения системы (5.I7) дают:

$$\begin{gathered}C_{21}U^{12}_{12,1}(p,chR_1)+\mathcal{D}_{21}U^{12}_{12,2}(p,chR_1)=0,\\ C_{21}U^{22}_{11,1}(p,chR_2)+\mathcal{D}_{21}U^{22}_{11,2}(p,chR_2)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2-\mu_2)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2+\mu_2)}\Phi^{*22}_{11}(p,chR_2,ch\varrho).\end{gathered}$$

При условии, что

$$\Delta^*(\rho)\equiv U^{12}_{12,1}(\rho,ch R_1)U^{22}_{11,2}(\rho,ch R_2)-U^{12}_{12,2}(\rho,ch R_1)U^{22}_{11,1}(\rho,ch R_2)\neq 0.$$

получаем:

$$C_{21}=-\frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2-\mu_2)\,U^{12}_{12,2}(\rho,ch R_1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2+\mu_2)\quad\Delta^*(\rho)}\,\mathfrak{F}^{*22}_{11}(\rho,ch R_2,ch\rho),$$

$$\mathcal{D}_{21}=\frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2-\mu_2)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2+\mu_2)}\,\frac{U^{12}_{12,2}}{\Delta^*(\rho)}\,\mathfrak{F}^{*22}_{11}(\rho,ch R)$$

Этим функция Коши $\mathcal{E}^*_2(\rho,\tau\rho)$ определена и в силу симметрии относительно диагонали $\tau=\rho$ имеет структуру:

$$\mathcal{E}^*_2(\rho,\tau,\rho)=\frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2-\mu_2)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2+\mu_2)}\begin{cases}\mathfrak{F}^{*12}_{12}(\rho,ch R_1,ch\tau)\mathfrak{F}^{*22}_{11}(\rho,ch R_2,ch\rho),\\ \qquad R_1<\tau<\rho<R_2,\\ \mathfrak{F}^{*12}_{12}(\rho,ch R_1,ch\rho)\mathfrak{F}^{*22}_{11}(\rho,ch R_2,ch\tau),\\ \qquad R_1<\rho<\tau<R_2.\end{cases}\tag{5.I8}$$

Пусть функция Коши

$$\mathcal{E}^*_3(\rho,\tau,\rho)=\begin{cases}\bar{\mathcal{E}}^*_3\equiv C_{31}P^{\mu_3}_{-\frac{1}{2}+q_3}(ch\tau)+\mathcal{D}_{31}\mathcal{I}^{\mu_3}_{-\frac{1}{2}+q_3}(ch\tau),\ R_2<\tau<\rho<\infty,\\ \bar{\bar{\mathcal{E}}}^*_3\equiv \qquad \mathcal{D}_{32}\mathcal{I}^{\mu_3}_{-\frac{1}{2}+q_3}(ch\tau),\ R_2<\rho<\tau<\infty.\end{cases}$$

Если потребовать, чтобы

$$\left(\alpha^2_{12}\frac{d}{d\tau}+\beta^2_{12}\right)\bar{\mathcal{E}}^*_3(\rho,\tau,\rho)\Big|_{\tau=R_2}=0,$$

то для определения постоянных C_{31} и $\mathcal{D}_{3j}$ $(j=1,2)$ имеем алгебраическую систему трех уравнений:

$$-C_{31}P^{\mu_3}_{-\frac{1}{2}+q_3}(ch\rho)+(\mathcal{D}_{32}-\mathcal{D}_{31})\mathcal{I}^{\mu_3}_{-\frac{1}{2}+q_3}(ch\rho)=0,$$

$$-C_{31}P^{\mu'_3}_{-\frac{1}{2}+q_3}(ch\rho)+(\mathcal{D}_{32}-\mathcal{D}_{31})\mathcal{I}^{\mu'_3}_{-\frac{1}{2}+q_3}(ch\rho)=-\frac{1}{sh^2\rho},$$

$$C_{31}U^{23}_{12,1}(\rho,ch R_2)+\mathcal{D}_{31}U^{23}_{12,2}(\rho,ch R_2)=0.$$

В результате находим, что

$$\mathcal{G}^*_3(p,\tau,\rho)=-\frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_3-\mu_3\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_3+\mu_3\right)U^{23}_{12,2}(p,\mathrm{ch}R_2)}\begin{cases}\mathcal{I}^{\mu_3}_{-\frac{1}{2}+q_3}(\mathrm{ch}\rho)\,\mathcal{F}^{*23}_{12}(p,\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\tau), \\ \quad R_2<\tau<\rho<\infty, \\ \mathcal{I}^{\mu_3}_{-\frac{1}{2}+q_3}(\mathrm{ch}\tau)\,\mathcal{F}^{*23}_{12}(p,\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\rho), \\ \quad R_2<\rho<\tau<\infty.\end{cases}$$

Обратимся к формулам (5.13). Условия сопряжения (5.12) для определения постоянных A_1, A_2, B_2 и B_3 дают алгебраическую систему четырех уравнений:

$$\begin{aligned}
&A_1U^{11}_{11,1}(p,\mathrm{ch}R_1)-A_2U^{12}_{12,1}(p,\mathrm{ch}R_1)-B_2U^{12}_{12,2}(p,\mathrm{ch}R_1)=0,\\
&A_1U^{11}_{21,1}(p,\mathrm{ch}R_1)-A_2U^{12}_{22,1}(p,\mathrm{ch}R_1)-B_2U^{12}_{22,2}(p,\mathrm{ch}R_1)=G^*_{12},\\
&A_2U^{22}_{11,1}(p,\mathrm{ch}R_2)+B_2U^{22}_{11,2}(p,\mathrm{ch}R_2)-B_3U^{23}_{12,2}(p,\mathrm{ch}R_2)=0,\\
&A_2U^{22}_{21,1}(p,\mathrm{ch}R_2)+B_2U^{22}_{21,2}(p,\mathrm{ch}R_2)-B_3U^{23}_{22,2}(p,\mathrm{ch}R_2)=G^*_{23}.
\end{aligned}\tag{5.19}$$

В системе (5.19) принимают участие функции:

$$G^*_{12}=\frac{c_{11}}{\mathrm{sh}R_1}\int_0^{R_1}\frac{P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\mathrm{ch}\rho)}{U^{11}_{11,1}(p,\mathrm{ch}R_1)}\bar{g}_1(\rho)\,\mathrm{sh}\rho\,d\rho-\frac{c_{21}}{\mathrm{sh}R_1}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathcal{F}^{*22}_{11}(p,\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\rho)}{\Delta^*(p)}\bar{g}_2(\rho)\,\mathrm{sh}\rho\,d\rho,$$

$$G^*_{23}=\frac{c_{12}}{\mathrm{sh}R_2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathcal{F}^{*12}_{12}(p,\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\rho)}{\Delta^*(p)}\bar{g}_2(\rho)\,\mathrm{sh}\rho\,d\rho+\frac{c_{22}}{\mathrm{sh}R_2}\int_{R_2}^{\infty}\frac{\mathcal{I}^{\mu_3}_{-\frac{1}{2}+q_3}(\mathrm{ch}\rho)\,\bar{g}_3(\rho)}{U^{23}_{12,2}(p,\mathrm{ch}R_2)}\mathrm{sh}\rho\,d\rho.$$

Предположим, что выполнено условие неограниченной разрешимости задачи (5.8) - (5.10): для $p=\sigma+i\tau$ с $\mathrm{Re}\,p=\sigma\geq\sigma_0$, где σ_0 - абсцисса сходимости интеграла Лапласа, и $\mathrm{Im}\,p=\tau\in(-\infty,\infty)$ определитель системы (5.19)

$$\Delta^*(p)=\Delta^*_{11}(p)\,Z^*_{22}(p,\mathrm{ch}R_2)-\Delta^*_{12}(p)\,Z^*_{12}(p,\mathrm{ch}R_2)\neq 0. \tag{5.20}$$

Здесь введены обозначения:

$$\Delta^*_{kj}(\rho)=U^{11}_{11,k}(\rho,\operatorname{ch}R_1)U^{12}_{22,j}(\rho,\operatorname{ch}R_1)-U^{11}_{21,k}(\rho,\operatorname{ch}R_1)U^{12}_{12,j}(\rho,\operatorname{ch}R_1),\ k,j=1,2,$$

$$Z^*_{jk}(\rho,\operatorname{ch}R_2)=U^{22}_{11,j}(\rho,\operatorname{ch}R_2)U^{23}_{22,k}(\rho,\operatorname{ch}R_2)-U^{22}_{21,j}(\rho,\operatorname{ch}R_2)U^{23}_{12,k}(\rho,\operatorname{ch}R_2)$$

Введем в рассмотрение функции влияния:

$$\mathcal{H}^*_{11}(\rho,\tau,\varrho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_1-\mu_1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_1+\mu_2\right)}\frac{1}{\Delta^*(\rho)}\begin{cases} P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\tau)\Big[\left(\Delta^*_{11}Z^*_{22}(\rho,\operatorname{ch}R_2)-\Delta^*_{12}Z^*_{12}(\rho,\operatorname{ch}R_2)\right)\times \\ P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\varrho)\Big[\left(\Delta^*_{11}Z^*_{22}(\rho,\operatorname{ch}R_2)-\Delta^*_{12}Z^*_{12}(\rho,\operatorname{ch}R_2)\right)\times \end{cases}$$

$$\times\mathcal{L}^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\varrho)-\left(\Delta^*_{21}(\rho)Z^*_{22}(\rho,\operatorname{ch}R_2)-\Delta^*_{22}(\rho)Z^*_{12}(\rho,\operatorname{ch}R_2)\right)P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\varrho)\Big],\ 0<\tau<\varrho<R_1, \quad (5.21)$$

$$\times\mathcal{L}^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\tau)-\left(\Delta^*_{21}(\rho)Z^*_{22}(\rho,\operatorname{ch}R_2)-\Delta^*_{22}(\rho)Z^*_{12}(\rho,\operatorname{ch}R_2)\right)P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\tau)\Big],\ 0<\varrho<\tau<R_1;$$

$$\mathcal{H}^*_{12}(\rho,\tau,\varrho)=\frac{C_{21}}{\operatorname{sh}R_1\,\Delta^*(\rho)}P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\tau)\left[Z^*_{12}(\rho,\operatorname{ch}R_2)\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\varrho)-Z^*_{22}(\rho,\operatorname{ch}R_2)P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\varrho)\right],$$

$$\mathcal{H}^*_{12}(\rho,\tau,\varrho)=-\frac{2}{\pi}\frac{C_{21}C_{22}}{\operatorname{sh}R_1\operatorname{sh}R_2}\cdot\frac{1}{\Delta^*(\rho)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_2+\mu_2\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_2-\mu_2\right)}P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\tau)\mathcal{L}^{\mu_3}_{-\frac{1}{2}+q_3}(\operatorname{ch}\varrho),$$

$$\mathcal{H}^*_{21}(\rho,\tau,\varrho)=\frac{C_{11}}{\operatorname{sh}R_1}\cdot\frac{1}{\Delta^*(\rho)}P^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\varrho)\left[Z^*_{12}(\rho,\operatorname{ch}R_2)\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)-Z^*_{22}(\rho,\operatorname{ch}R_2)P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)\right],$$

$$\mathcal{H}^*_{22}(\rho,\tau,\varrho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_2-\mu_2\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_2+\mu_2\right)\Delta^*(\rho)}\begin{cases}\left[\Delta^*_{11}(\rho)\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)-\Delta^*_{12}(\rho)P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)\right]\times \\ \left[\Delta^*_{11}(\rho)\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\varrho)-\Delta^*_{12}(\rho)P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\varrho)\right]\times\end{cases}$$

$$\times\left[Z^*_{12}(\rho,\operatorname{ch}R_2)\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\varrho)-Z^*_{22}(\rho,\operatorname{ch}R_2)P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\varrho)\right],\ R_1<\tau<\varrho<\infty,$$

$$\times\left[Z^*_{12}(\rho,\operatorname{ch}R_2)\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)-Z^*_{22}(\rho,\operatorname{ch}R_2)P^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)\right],\ R_1<\varrho<\tau<\infty;$$

$$\mathcal{H}^*_{23}(\rho,\tau,\varrho)=\frac{C_{22}}{\operatorname{sh}R_2}\frac{\mathcal{L}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\operatorname{ch}\varrho)}{\Delta^*(p)}\left[\Delta^*_{12}(p)P^{\mu_2}_{-\frac12+q_2}(\operatorname{ch}\tau)-\Delta^*_{11}(p)\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac12+q_2}(\operatorname{ch}\tau)\right],$$

$$\mathcal{H}^*_{31}(\rho,\tau,\varrho)=-\frac{2}{\pi}\frac{C_{11}C_{12}}{\operatorname{sh}R_1\operatorname{sh}R_2}\frac{\Gamma(\frac12+q_2+\mu_2)}{\Gamma(\frac12+q_2-\mu_2)}\frac{1}{\Delta^*(p)}P^{\mu_1}_{-\frac12+q_1}(\operatorname{ch}\varrho)\mathcal{L}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\operatorname{ch}\tau),$$

$$\mathcal{H}^*_{32}(\rho,\tau,\varrho)=\frac{C_{12}}{\operatorname{sh}R_2}\cdot\frac{1}{\Delta^*(p)}\left[\Delta^*_{12}(p)P^{\mu_2}_{-\frac12+q_2}(\operatorname{ch}\varrho)-\Delta^*_{11}(p)\mathcal{L}^{\mu_2}_{-\frac12+q_2}(\operatorname{ch}\varrho)\right]\mathcal{L}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\operatorname{ch}\tau),$$

$$\mathcal{H}^*_{33}(\rho,\tau,\varrho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac12+q_3-\mu_3)}{\Gamma(\frac12+q_3+\mu_3)}\frac{1}{\Delta^*(p)}\begin{cases}\mathcal{L}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\operatorname{ch}\varrho)\Big[\big(Z^*_{11}(p,\operatorname{ch}R_2)\Delta^*_{12}-Z^*_{21}(p,\operatorname{ch}R_2)\times\\ \mathcal{L}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\operatorname{ch}\tau)\Big[\big(Z^*_{11}(p,\operatorname{ch}R_2)\Delta^*_{12}-Z^*_{21}(p,\operatorname{ch}R_2)\times\end{cases}$$

$$\times\Delta^*_{11}(p)\big)\mathcal{L}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\operatorname{ch}\tau)-\big(Z^*_{12}(p,\operatorname{ch}R_2)\Delta^*_{12}(p)-Z^*_{22}(p,\operatorname{ch}R_2)\Delta^*_{11}(p)\big)P^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\operatorname{ch}\tau)\Big],\ R_2<\tau<\varrho<\infty,$$

$$\times\Delta^*_{11}(p)\big)\mathcal{L}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\operatorname{ch}\varrho)-\big(Z^*_{12}(p,\operatorname{ch}R_2)\Delta^*_{12}(p)-Z^*_{22}(p,\operatorname{ch}R_2)\Delta^*_{11}(p)\big)P^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\operatorname{ch}\varrho)\Big],\ R_2<\varrho<\tau<\infty.$$

В результате однозначной разрешимости алгебраической системы (5.I9), подстановки найденных значений A_j и B_K в формулы (5.I3) и элементарных преобразований, получаем решение задачи (5.II),(5.I2):

$$u^*_j(p,\tau)=\int_0^{R_1}\mathcal{H}^*_{j1}(p,\tau,\varrho)\bar g_1(\varrho)\operatorname{sh}\varrho\, d\varrho+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}^*_{j2}(p,\tau,\varrho)\bar g_2(\varrho)\operatorname{sh}\varrho\, d\varrho+$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}^*_{j3}(p,\tau,\varrho)\bar g_3(\varrho)\operatorname{sh}\varrho\, d\varrho\equiv\sum_{k=1}^{3}\int_{R_{k-1}}^{R_k}\mathcal{H}^*_{jk}(p,\tau,\varrho)\bar g_k(\varrho)\operatorname{sh}\varrho\, d\varrho, \tag{5.22}$$

$j=\overline{1,3}$, $R_0=0$, $R_3=\infty$

Особыми точками функций влияния $\mathcal{H}^*_{jk}(p,\tau,\varrho)$ являются точки ветвления $p=-\gamma_j^2$, $p=\infty$. Используя лемму Жордана и теорему Коши [31], в предположении, что $k_j^2\equiv\bar\gamma_3^2-\bar\gamma_2^2\geqslant 0$, $j=1,2$ для оригиналов функций влияния устанавливаем формулу обращения:

$$\mathcal{H}_{jk}(t,z,\rho) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left\{\mathcal{H}_{jk}^*\left((\lambda^2+\bar{\gamma}_3^2)e^{\pi i}, z, \rho\right)\right\} e^{-(\lambda^2+\bar{\gamma}_3^2)t}\lambda\, d\lambda, \quad j,k = \overline{1,3}. \quad (5.23)$$

Полагая $\sqrt{p+\bar{\gamma}_3^2} = i\lambda$, находим:

$$q_3 = \frac{1}{a_3}\sqrt{p+\bar{\gamma}_3^2} = \frac{i\lambda}{a_3} \equiv \frac{ib_3(\lambda)}{a_3};$$

$$q_2 = \frac{1}{a_2}\sqrt{p+\bar{\gamma}_2^2} = \frac{1}{a^2}\sqrt{-\lambda^2-\bar{\gamma}_3^2+\bar{\gamma}_2^2} = \frac{i}{a_2}\sqrt{\lambda^2+k_2^2} \equiv \frac{ib_2(\lambda)}{a_2};$$

$$q_1 = \frac{1}{a_1}\sqrt{p+\bar{\gamma}_1^2} = \frac{1}{a_1}\sqrt{-\lambda^2-\bar{\gamma}_3^2+\gamma_1^2} = \frac{i}{a_1}\sqrt{\lambda^2+k_1^2} \equiv \frac{ib_1(\lambda)}{a_1};$$

$$\Delta_{11}^*\left((-\lambda^2-\bar{\gamma}_3^2)\right) = \sin\mu\pi\sin\mu_2\pi f_{11}(p,\operatorname{ch}R_1) + \sin\mu_1\pi\cos\mu_2\pi f_{12}(p,\operatorname{ch}R_1) +$$
$$+\sin\mu_2\pi\cos\mu_1\pi f_{21}(p,\operatorname{ch}R_1) + \cos\mu_1\pi\cos\mu_2\pi f_{22}(p,\operatorname{ch}R_1),$$

$$\Delta_{12}^*(-\lambda^2-\bar{\gamma}_3^2) = \left\{\sin\mu_1\pi f_{11}(p,\operatorname{ch}R_1) + \cos\mu_1\pi f_{21}(p,\operatorname{ch}R_1)\right\} -$$
$$-i\left\{\sin\mu_1\pi f_{12}(p,\operatorname{ch}R_1) + \cos\mu_1\pi f_{22}(p,\operatorname{ch}R_1)\right\}\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2},$$

$$Z_{12}^*(-\lambda^2-\bar{\gamma}_3^2) = \left\{\sin\mu_2\pi Z_{11}(p,\operatorname{ch}R_2) + \cos\mu_2\pi Z_{12}(p,\operatorname{ch}R_2)\right\} -$$
$$-i\left\{\sin\mu_2\pi Z_{21}(p,\operatorname{ch}R_2) + \cos\mu_2\pi Z_{22}(p,\operatorname{ch}R_2)\right\}\operatorname{th}\pi\frac{b_3}{a_3},$$

$$Z_{22}^*(-\lambda^2-\bar{\gamma}_3^2) = \left\{Z_{11}(p,\operatorname{ch}R_2) - \operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\operatorname{th}\pi\frac{b_3}{a_3}Z_{22}(p,\operatorname{ch}R_2)\right\} -$$
$$-i\left\{\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}Z_{12}(p,\operatorname{ch}R_2) + \operatorname{th}\pi\frac{b_3}{a_3}Z_{21}(p,\operatorname{ch}R_2)\right\},$$

$$\Delta_{22}^*(-\lambda^2-\bar{\gamma}_3^2) = \left\{f_{11}(p,\operatorname{ch}R_1) - \operatorname{th}\pi\frac{b_1}{a_1}\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}f_{22}(p,\operatorname{ch}R_1)\right\} -$$
$$-i\left\{\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}f_{12}(p,\operatorname{ch}R_1) + \operatorname{th}\pi\frac{b_1}{a_1}f_{21}(p,\operatorname{ch}R_1)\right\},$$

$$\Delta^*(-\lambda^2-\bar{\gamma}_3^2)=\left[\cos\mu_2\pi+i\sin\mu_2\pi\, th\pi\frac{b_2}{a_2}\right]\left[\omega_1(\lambda)+i\omega_2(\lambda)\right],$$

$$\Delta^*_{21}(-\lambda^2-\bar{\gamma}_3^2)=\left\{\sin\mu_2\pi f_{11}(\rho,chR_1)+\cos\mu_2\pi f_{12}(\rho,chR_1)\right\}-$$

$$-i\,th\pi\frac{b_1}{a_1}\left\{\sin\mu_2\pi f_{21}(\rho,chR_1)+\cos\mu_2\pi f_{22}(\rho,chR_1)\right\},$$

$$Z^*_{11}(-\lambda^2-\bar{\gamma}_3^2)=\sin\mu_2\pi\sin\mu_3\pi\, Z_{11}(\rho,chR_2)+\sin\mu_2\pi\cos\mu_3\pi\, Z_{21}(\rho,chR_2)+$$

$$+\cos\mu_2\pi\sin\mu_3\pi\, Z_{12}(\rho,chR_2)+\cos\mu_2\pi\cos\mu_3\pi\, Z_{22}(\rho,chR_2),$$

$$Z^*_{21}(-\lambda^2-\bar{\gamma}_3^2)=\left\{\sin\mu_3\pi\, Z_{11}(\rho,chR_2)+\cos\mu_3\pi\, Z_{21}(\rho,chR_2)\right\}+$$

$$+i\,th\pi\frac{b_2}{a_2}\left\{-\sin\mu_3\pi\, Z_{12}(\rho,chR_2)-\cos\mu_3\pi\, Z_{22}(\rho,chR_2)\right\}.$$

Согласно формуле (5.23) в результате элементарных преобразований имеем:

$$\mathcal{H}_{j,k}(t,z,\rho)=\int_0^\infty e^{-(\lambda^2+\bar{\gamma}_3^2)t}\, v_j(z,\lambda)\, v_k(\rho,\lambda)\,\Omega(\lambda)\, d\lambda\, \sigma_k a_k^2,$$

$$j,k=\overline{1,3}. \tag{5.24}$$

Возвращаясь в формулах (5.22) к оригиналу, будем иметь решение задачи (5.8) - (5.10):

$$u_j(t,z)=\int_0^{R_1}\mathcal{H}_{j1}(t,z,\rho)g_1(\rho)\, sh\rho\, d\rho\,\sigma_1+\int_{R_1}^{R_1}\mathcal{H}_{j2}(t,z,\rho)g_2(\rho)\times$$

$$\times sh\rho\, d\rho\,\sigma_2+\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}_{j3}(t,z,\rho)g_3(\rho)\, sh\rho\, d\rho\,\sigma_3,\quad j=\overline{1,3}. \tag{5.25}$$

В силу начальных условий (5.9) получаем интегральное представления

$$g_1(r)=\int_0^{R_1}\Big(\int_0^{\infty}v_1(r,\lambda)v_1(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\Big)g_1(\rho)\sigma_1 \operatorname{sh}\rho\, d\rho,$$

$$g_2(r)=\int_{R_1}^{R_2}\Big(\int_0^{\infty}v_2(r,\lambda)v_2(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\Big)g_2(\rho)\sigma_2 \operatorname{sh}\rho\, d\rho,$$

$$g_3(r)=\int_{R_2}^{\infty}\Big(\int_0^{\infty}v_3(r,\lambda)v_3(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\Big)g_3(\rho)\sigma_3 \operatorname{sh}\rho\, d\rho.$$

Отсюда следует интегральное представление (5.4) меры Дирака.

В силу свойств фундаментального решения задачи Коши для уравнения теплопроводности (5.8) как дельтаобразной последовательности, имеем (5.7).

ТЕОРЕМА 2. Для дважды непрерывно дифференцируемой на множестве I_2 функции $f(r)$, исчезающей на плюс бесконечности вместе со своей первой производной, удовлетворяющей условиям сопряжения (5.10), имеет место основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора

$$\mathcal{M}_{\mu,12}[\aleph(r)\Lambda_{\mu}[f(r)]]=a_1^2\int_0^{R_1}\Lambda_{\mu_1}[f(r)]v_1(r,\lambda)\sigma_1 \operatorname{sh} r\, dr+$$

$$+a_2^2\int_{R_1}^{R_2}\Lambda_{\mu_2}[f(r)]v_2(r,\lambda)\sigma_2 \operatorname{sh} r\, dr+a_3^2\int_{R_2}^{\infty}\Lambda_{\mu_3}[f(r)]v_3(r,\lambda)\times \tag{5.26}$$

$$\times\sigma_3 \operatorname{sh} r\, dr=-a_1^2(\lambda^2+\gamma_1^2)\int_0^{R_1}f(r)v_1(r,\lambda)\sigma_1 \operatorname{sh} r\, dr-a_2^2(\lambda^2+k_2^2)\times$$

$$\times\int_{R_1}^{R_2}f(r)v_2(r,\lambda)\sigma_2 \operatorname{sh} r\, dr-a_3^2(\lambda^2+k_3^2)\int_{R_2}^{\infty}f(r)v_3(r,\lambda)\sigma_3 \operatorname{sh} r\, dr.$$

Доказательство: Обозначим

$$k_{1j}=\alpha_{11}^j\alpha_{22}^j-\alpha_{21}^j\alpha_{12}^j,\quad k_{2j}=\alpha_{11}^j\beta_{22}^j-\alpha_{21}^j\beta_{12}^j,\quad k_{3j}=\beta_{11}^j\alpha_{22}^j-\beta_{22}^j\alpha_{12}^j,$$

$$k_{4j}=\beta_{11}^j\beta_{22}^j-\beta_{21}^j\beta_{12}^j,\quad f^{\pm}(R_j)=\lim_{r\to R_j\pm 0}f(r),\ j=1,2.$$

Из тождественных равенств

$$\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{d\tau}+\beta_{j1}^{k}\right)v_k(\tau,\lambda)\Big|_{\tau=R_k}=\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{d\tau}+\beta_{j2}^{k}\right)v_{k+1}(\tau,\lambda)\Big|_{\tau=R_k},\quad k,j=1,2. \qquad (5.27)$$

Следуют соотношения:

$$v_k(R_k,\lambda)=-\frac{1}{c_{12}}\left[K_{1k}\frac{dv_{k+1}(R_k,\lambda)}{d\tau}+K_{2k}v_{k+1}(R_k,\lambda)\right],$$

$$\frac{dv_k(R_k,\lambda)}{d\tau}=\frac{1}{c_{12}}\left[K_{3k}\frac{dv_{k+1}(R_k,\lambda)}{d\tau}+K_{4k}v_{k+1}(R_k,\lambda)\right]. \qquad (5.28)$$

В силу предположений на функцию $f(\tau)$ соотношения (5.28) остаются справедливыми, если $v_k(R_k,\lambda)$ заменить на $f^-(R_k)$, а $v_{k+1}(R_k,\lambda)$ заменить на $f^+(R_k)$, $k=1,2$ (и соответственно производные).

Наличие соотношений (5.28) дает возможность получить равенства

$$\frac{df^-(R_k)}{d\tau}v_k(R_k,\lambda)-f^-(R_k)\frac{dv_k(R_k,\lambda)}{d\tau}=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}\left[\frac{df^+(R_k)}{d\tau}v_{k+1}(R_k,\lambda)-f^+\frac{dv_{k+1}}{d\tau}\right]. \qquad (5.29)$$

Интегрируя (5.26) под знаком интеграла по частям в силу тождества

$$\left(\Lambda_{\mu_k}+\frac{\lambda^2+k_k^2}{a_k^2}\right)v_k(\tau,\lambda)\equiv 0,\quad k=\overline{1,3}$$

и тождества (5.29) получаем, что

$$\int_0^\infty \theta(\tau)\Lambda_\mu[f(\tau)]v(\tau,\lambda)\sigma(\tau)d\tau=-a_1^2(\lambda^2+\gamma_1^2)\int_0^{R_1}f(\tau)v_1(\tau,\lambda)\sigma_1\operatorname{sh}\tau\,d\tau-$$

$$-a_2^2(\lambda^2+\gamma_2^2)\int_{R_1}^{R_2}f(\tau)v_2(\tau,\lambda)\sigma_2\operatorname{sh}\tau\,d\tau-a_3^2(\lambda^2+\gamma_3^2)\int_{R_2}^{\infty}f(\tau)v_3(\tau,\lambda)\times$$

$$\times\sigma_3\operatorname{sh}\tau\,d\tau+\left[\frac{\partial f^+(R_1)}{\partial\tau}v_2(R_1,\lambda)-f^+(R_1)\frac{\partial v_2(R_1,\lambda)}{\partial\tau}\right]\times\left(\frac{a_1^2\operatorname{sh}R_1\sigma_1}{c_{11}}c_{21}-\right. \qquad (5.30)$$

$$\left.-a_2^2\sigma_2\operatorname{sh}R_1\right)+\left[\frac{\partial f^+(R_2)}{\partial\tau}v_3(R_2,\lambda)-f^+(R_2)\frac{\partial v_3(R_2,\lambda)}{\partial\tau}\right]\left(\frac{a_2^2\operatorname{sh}R_2\sigma_2}{c_{12}}c_{22}-a_3^2\sigma_3\operatorname{sh}R_2\right).$$

В силу конструкции функций σ_j

$$\frac{a_1^2\sigma_1}{c_{11}}c_{21}\operatorname{sh}R_1-a_2^2\sigma_2\equiv\frac{a_1^2c_{12}c_{21}}{a_1^2c_{22}c_{21}c_{11}}\operatorname{sh}R_1-\frac{a_2^2c_{12}}{a_2^2c_{22}}\operatorname{sh}R_1\equiv 0\ ;$$

$$\frac{a_2^2\operatorname{sh}R_2\sigma_2}{c_{12}}c_{22}-a_3^2\sigma_3\operatorname{sh}R_2\equiv\frac{a_2^2c_{12}c_{22}}{a_2^2c_{22}c_{12}}\operatorname{sh}R_2-\frac{a_3^2\operatorname{sh}R_2}{a_3^2}\equiv 0 \qquad (5.3I)$$

С учетом (5.3I) левая часть равенства (5.30) совпадает с левой частью равенства (5.26).

Следствие I: При $\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$

$$\mathcal{V}_1(\tau,\lambda)=\frac{2^2}{\pi}\frac{c_{21}c_{22}}{\operatorname{sh}R_1\operatorname{sh}R_2}\operatorname{th}\pi\frac{b_3}{a_3}B_{-\frac12+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}\tau),$$

$$\mathcal{V}_2(\tau,\lambda)=2\operatorname{th}\pi\frac{b_3}{a_3}\left[f_{22}(\rho,\operatorname{ch}R_1)A_{-\frac12+i\frac{b^2}{a^2}}(\operatorname{ch}\tau)-f_{21}(\rho,\operatorname{ch}R_1)B_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\tau)\right], \qquad (5.32)$$

$$\mathcal{V}_3(\tau,\lambda)=\pi\left[\omega_2(\lambda)A_{-\frac12+i\frac{b_3}{a_3}}(\operatorname{ch}\tau)+\omega_1(\lambda)\operatorname{th}\pi\frac{b_3}{a_3}B_{-\frac12+i\frac{b_3}{a_3}}(\operatorname{ch}\tau)\right]$$

получим

$$\mathcal{M}_{0,12}[f(\tau)]=\int_0^\infty f(\tau)\mathcal{V}(\tau,\lambda)\sigma(\tau)\operatorname{sh}\tau\,d\tau\equiv\tilde f(\lambda),$$

$$\mathcal{M}^{-1}_{0,12}[\tilde f(\lambda)]=\int_0^\infty\tilde f(\lambda)\mathcal{V}(\tau,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda\equiv f(\tau). \qquad (5.33)$$

Следствие 2: При $\mu_1=m_1=1,2,3,\ldots$, $\mu_2=m_2=1,2,3,\ldots$, $\mu_3=m_3=1,2,3,\ldots$ и

$$\mathcal{V}_1(\tau,\lambda)=\frac{2^2}{\pi^3}\frac{c_{21}c_{22}}{\operatorname{sh}R_1\operatorname{sh}R_2}\operatorname{sh}\pi\frac{b_3}{a_3}\operatorname{ch}\pi\frac{b_2}{a_2}\left|\Gamma\left(\frac12+i\frac{b_2}{a_2}+m_2\right)\right|^2\left|\Gamma\left(\frac12+i\frac{b_3}{a_3}+m_3\right)\right|^2,$$

$$\mathcal{V}_2(\tau,\lambda)=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi\frac{b_3}{a_3}\left|\Gamma\left(\frac12+i\frac{b_3}{a_3}+\mu_3\right)\right|^2(-1)^{m_1}\left[f_{22}(\rho,\operatorname{ch}R_1)A^{m_2}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\tau)-\right. \qquad (5.34)$$

$$\left.-f_{21}(\rho,\operatorname{ch}R_1)B^{m_2}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\tau)\right],$$

$$\mathcal{V}_3(\tau,\lambda)=\pi\left[\omega_2(\lambda)A^{m_3}_{-\frac12+i\frac{b_3}{a_3}}(\operatorname{ch}\tau)+\omega_1(\lambda)\operatorname{th}\pi\frac{b_3}{a_3}B^{m_3}_{-\frac12+i\frac{b_3}{a_3}}(\operatorname{ch}\tau)\right]$$

имеем

$$\mathcal{M}_{m,12}[f(\tau)]=\int_0^\infty f(\tau)\mathcal{V}(\tau,\lambda)\operatorname{sh}\tau\,\sigma(\tau)\,d\tau\equiv\tilde f(\lambda),$$

$$\mathcal{M}^{-1}_{m,12}[\tilde f(\lambda)]=\int_0^\infty\tilde f(\lambda)\mathcal{V}(\tau,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda\equiv f(\tau). \qquad (5.35)$$

§ 6. ГИБРИДНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЕРА-ФОКА II-ГО РОДА НА ПОЛЯРНОЙ ОСИ С ДВУМЯ ТОЧКАМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим задачу построения ограниченного в области $\mathcal{D}_+=\{(t,r): t\in(0,\infty), r\in I_2^+=(R_0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty)\}$ решение сепаратной системы Λ_{μ_j} – параболических уравнений

$$\frac{1}{a_j^2}\frac{\partial v_j(t,r)}{\partial t}+\frac{\gamma_j^2}{a_j^2}v_j(t,r)-\Lambda_{\mu_j}[v_j(t,r)]=0,\ (t,r)\in\mathcal{D}_+,\ j=\overline{1,3} \tag{6.1}$$

по начальным условиям

$$v_j(t,r)\big|_{t=0}=g_j(r),\ r\in(R_{j-1},R_j),\ j=\overline{1,3},\ R_3=\infty, \tag{6.2}$$

условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k\right)v_k(t,r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k\right)v_{k+1}(t,r)\right]\Big|_{r=R_k}=0,\quad j,k=1,2. \tag{6.3}$$

и краевым условиям

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0\right)v_1(t,r)\big|_{r=R_0}=0. \tag{6.4}$$

Здесь $\alpha_{jm}^k\geqslant 0,\ \beta_{jm}^k\geqslant 0,\ c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k\neq 0$.

Если предположить, что искомые функции $v_j(t,r)$ являются оригиналами по Лапласу относительно временной переменной t, то в изображениях по Лапласу имеем задачу построения ограниченного на множестве I_2^+ решения сепаратной системы уравнений Лежандра

$$(\Lambda_{\mu_j}-q_j^2)v_j^*(p,r)=-\bar{g}_j(r),\ \bar{g}_j(r)=\frac{g_j(r)}{a_j^2},\ q_j^2=\frac{p+\gamma_j^2}{a_j^2},\ j=\overline{1,3} \tag{6.5}$$

по условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{d\tau}+\beta_{j1}^{k}\right)v_{k}^{*}(p,\tau)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{d\tau}+\beta_{j2}^{k}\right)v_{k+1}^{*}(p,\tau)\right]\Big|_{\tau=R_k}=0,\ j,k=1,2 \tag{6.6}$$

и краевым условиям

$$\left(\alpha_{11}^{0}\frac{d}{d\tau}+\beta_{11}^{0}\right)v_{1}^{*}(p,\tau)\Big|_{\tau=R_0}=0. \tag{6.7}$$

Ограниченное решение задачи (6.5), (6.6), (6.7) будем отыскивать по правилам:

$$v_1^*(p,\tau)=A_1P^{\mu_1}_{-\frac12+q_1}(ch\tau)+B_1\mathcal{I}^{\mu_1}_{-\frac12+q_1}(ch\tau)+\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{E}_1^*(p,\tau,\rho)\bar g_1(\rho)sh\rho\,d\rho,$$

$$v_2^*(p,\tau)=A_2P^{\mu_2}_{-\frac12+q_2}(ch\tau)+B_2\mathcal{I}^{\mu_2}_{-\frac12+q_2}(ch\tau)+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{E}_2^*(p,\tau,\rho)\bar g_2(\rho)sh\rho\,d\rho, \tag{6.8}$$

$$v_3^*(p,\tau)=\qquad B_3\mathcal{I}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(ch\tau)+\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{E}_3^*(p,\tau,\rho)\bar g_3(\rho)sh\rho\,d\rho.$$

Определим функции Коши $\mathcal{E}_j^*(p,\tau,\rho)$ [48]

$$\mathcal{E}_1^*(p,\tau,\rho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac12+q_1-\mu_1)}{\Gamma(\frac12+q_1+\mu_2)}\cdot\frac{1}{\Delta_{11}^*(p)}\begin{cases}\Phi_{11}^{*11}(p,chR_1,ch\rho)\Phi_{11}^{*01}(p,chR_0,ch\tau), & R_0<\tau<\rho<R_1,\\ \Phi_{11}^{*11}(p,chR_1,ch\tau)\Phi_{11}^{*01}(p,chR_0,ch\rho), & R_0<\rho<\tau<R_1;\end{cases} \tag{6.9}$$

$$\mathcal{E}_2^*(p,\tau,\rho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac12+q_2-\mu_2)}{\Gamma(\frac12+q_2+\mu_2)}\frac{1}{d_{11}^*(p)}\begin{cases}\Phi_{12}^{*12}(p,chR_1,ch\tau)\Phi_{11}^{*22}(p,chR_2,ch\rho), & R_1<\tau<\rho<R_2,\\ \Phi_{12}^{*12}(p,chR_1,ch\rho)\Phi_{11}^{*22}(p,chR_2,ch\tau), & R_1<\rho<\tau<R_2;\end{cases}$$

$$\overset{*}{\mathcal{G}}_3(p,\tau,\rho) = -\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_3-\mu_3)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_3+\mu_3)}\frac{1}{U^{23}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_2)}\begin{cases} \mathcal{I}^{\mu_3}_{-\frac{1}{2}+q_3}(\operatorname{ch}\rho)\mathcal{F}^{*23}_{12}(p,\operatorname{ch}R_2,\operatorname{ch}\tau), \\ R_2<\tau<\rho<\infty, \\ \mathcal{I}^{\mu_3}_{-\frac{1}{2}+q_3}(\operatorname{ch}\tau)\mathcal{F}^{*23}_{12}(p,\operatorname{ch}R_2,\operatorname{ch}\rho), \\ R_2<\rho<\tau<\infty, \end{cases}$$

где

$$\mathcal{F}^{*mk}_{ij}(p,\operatorname{ch}R_m,\operatorname{ch}\tau) = U^{mk}_{ij,1}(p,\operatorname{ch}R_m)\mathcal{I}^{\mu_k}_{-\frac{1}{2}+q_k}(\operatorname{ch}\tau) -$$
$$-U^{mk}_{ij,2}(p,\operatorname{ch}R_m)P^{\mu_k}_{-\frac{1}{2}+q_k}(\operatorname{ch}\tau), \qquad (6.10)$$

$$\Delta^*(p) = U^{01}_{11,1}(p,\operatorname{ch}R_0)U^{11}_{11,2}(p,\operatorname{ch}R_1) - U^{01}_{11,2}(p,\operatorname{ch}R_0)U^{11}_{11,1}(p,\operatorname{ch}R_1),$$

$$d^*_{1j}(p) = U^{12}_{12,1}(p,\operatorname{ch}R_1)U^{22}_{j1,2}(p,\operatorname{ch}R_2) - U^{12}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_1)U^{22}_{j1,1}(p,\operatorname{ch}R_2),$$
$$j=1,2.$$

Обратимся к формулам (6.8). Условия сопряжения (6.6) и краевые условия (6.7) для определения постоянных A_1, B_1, A_2, B_2, B_3 дают алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&A_1U^{01}_{11,1}(p,\operatorname{ch}R_0) + B_1U^{01}_{11,2}(p,\operatorname{ch}R_0) = 0, \\
&A_1U^{11}_{11,1}(p,\operatorname{ch}R_1) + B_1U^{11}_{11,2}(p,\operatorname{ch}R_1) - A_2U^{12}_{12,1}(p,\operatorname{ch}R_1) - B_2U^{12}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_1) = 0, \\
&A_1U^{11}_{21,1}(p,\operatorname{ch}R_1) + B_1U^{11}_{21,2}(p,\operatorname{ch}R_1) - A_2U^{12}_{22,1}(p,\operatorname{ch}R_1) - B_2U^{12}_{22,2} = G^*_{12} \qquad (6.11) \\
&A_2U^{22}_{11,1}(p,\operatorname{ch}R_2) + B_2U^{22}_{11,2}(p,\operatorname{ch}R_2) - B_3U^{23}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_2) = 0 \\
&A_2U^{22}_{21,1}(p,\operatorname{ch}R_2) + B_2U^{22}_{21,2}(p,\operatorname{ch}R_2) - B_3U^{23}_{22,2}(p,\operatorname{ch}R_2) = G^*_{23}
\end{aligned}$$

В системе (6.11) принимают участие функции:

$$G^*_{12} = -\frac{c_{11}}{\operatorname{sh}R_1}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\mathcal{F}^{*01}_{11}(p,\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}\rho)}{\Delta^*_{11}(p)}\bar{g}_1(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho - \frac{c_{21}}{\operatorname{sh}R_1}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathcal{F}^{*22}_{11}(p,\operatorname{ch}R_2,\operatorname{ch}\rho)}{d^*_{11}(p)}\bar{g}_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho,$$

$$G^*_{23}=\frac{C_{12}}{\operatorname{sh} R_2}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\mathcal{F}^{*12}_{12}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\rho)}{d^*_{11}(p)}\bar g_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho+\frac{C_{22}}{\operatorname{sh}\rho}\int\limits_{R_2}^{\infty}\frac{\mathcal{I}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\operatorname{ch}\rho)}{R_2 U^{23}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_2)}\bar g_3(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho .$$

Предположим, что выполнено условие неограниченной разрешимости задачи (6.I) - (6.4): для $p=\sigma+i\tau$ с $\operatorname{Re}p=\sigma\geqslant\sigma_0$, где σ_0 - абсцисса сходимости интеграла Лапласа, и $\operatorname{Im}p=\tau\in(-\infty,\infty)$ - определитель системы (6.II):

$$\Delta^*(p)=\Delta^*_{11}(p)\left[U^{23}_{22,2}(p,\operatorname{ch}R_2)d^*_{21}(p)-U^{23}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_2)d^*_{22}(p)\right]-$$

$$-\Delta^*_{21}(p)\left[U^{23}_{22,2}(p,\operatorname{ch}R_2)d^*_{11}(p)-U^{23}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_2)d^*_{12}(p)\right]\neq 0, \qquad (6.I2)$$

где

$$\Delta^*_{21}(p)=U^{01}_{11,1}(p,\operatorname{ch}R_0)U^{11}_{21,2}(p,\operatorname{ch}R_1)-U^{01}_{11,2}(p,\operatorname{ch}R_0)U^{11}_{21,1}(p,\operatorname{ch}R_1),$$

$$d^*_{2j}(p)=U^{22}_{j1,1}(p,\operatorname{ch}R_2)U^{12}_{22,2}(p,\operatorname{ch}R_1)-U^{22}_{j1,2}(p,\operatorname{ch}R_2)U^{12}_{22,1}(p,\operatorname{ch}R_1).$$

Введем в рассмотрение функции влияния:

$$\mathcal{H}^*_{11}(p,z,\rho)=-\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac12+q_1-\mu_1)}{\Gamma(\frac12+q_1+\mu_1)}\frac{1}{\Delta^*(p)}\begin{cases}\mathcal{F}^{*01}_{11}(p,\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}z)\Big\{\left[U^{23}_{22,2}(p,\operatorname{ch}R_2)d^*_{21}(p)-\right.\\ \mathcal{F}^{*01}_{11}(p,\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}\rho)\Big\{\left[U^{23}_{22,2}(p,\operatorname{ch}R_2)d^*_{21}(p)-\right.\end{cases}$$

$$-U^{23}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_2)d^*_{22}(p)\big]\mathcal{F}^{*11}_{11}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\rho)-\big[U^{23}_{22,2}(p,\operatorname{ch}R_2)d^*_{11}(p)-$$

$$-U^{23}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_2)d^*_{22}(p)\big]\mathcal{F}^{*11}_{11}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}z)-\big[U^{23}_{22,2}(p,\operatorname{ch}R_2)d^*_{11}(p)-$$

$$-U^{23}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_2)d^*_{12}(p)\big]\mathcal{F}^{*11}_{21}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\rho)\Big\},\ R_0<z<\rho<R_1, \qquad (6.I3)$$

$$-U^{23}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_2)d^*_{12}(p)\big]\mathcal{F}^{*11}_{21}(p,\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}z)\Big\},\ R_0<\rho<z<R_1;$$

$$\mathcal{H}^*_{12}(p,z,\rho)=\frac{C_{21}}{\operatorname{sh}R_1}\frac{1}{\Delta^*(p)}\left[U^{23}_{22,2}(p,\operatorname{ch}R_2)\mathcal{F}^{*22}_{11}(p,\operatorname{ch}R_2,\operatorname{ch}\rho)-\right.$$

$$-U^{23}_{12,2}(p,\mathrm{ch}R_2)\Phi^{*22}_{21}(p,\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\rho)\Big]\Phi^{*01}_{11}(p,\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\tau),$$

$$\mathcal{H}^*_{13}(p,\tau,\rho)=-\frac{2}{\pi}\frac{C_{21}\,C_{22}}{\mathrm{sh}R_1\,\mathrm{sh}R_2}\frac{1}{\Delta^*(p)}\frac{\Gamma(\frac12+q_2+\mu_2)}{\Gamma(\frac12+q_2-\mu_2)}\Phi^{*01}_{11}(p,\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}\tau)\mathcal{L}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\mathrm{ch}\rho),$$

$$\mathcal{H}^*_{21}(p,\tau,\rho)=-\frac{C_{11}}{\mathrm{sh}R_1}\frac{1}{\Delta^*(p)}\Big[U^{23}_{22,2}(p,\mathrm{ch}R_2)\Phi^{*22}_{11}(p,\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\tau)-$$

$$-U^{23}_{12,2}(p,\mathrm{ch}R_2)\Phi^{*22}_{21}(p,\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\tau)\Big]\Phi^{*01}_{11}(p,\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}\rho),$$

$$\mathcal{H}^*_{22}(p,\tau,\rho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac12+q_2-\mu_2)}{\Gamma(\frac12+q_2+\mu_2)}\cdot\frac{1}{\Delta^*(p)}\begin{cases}\Big[\Delta^*_{11}(p)\Phi^{*12}_{22}(p,\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\tau)-\Delta^*_{21}\Phi^{*12}_{12}\Big]\times\\ \Big[\Delta^*_{11}(p)\Phi^{*12}_{22}(p,\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\rho)-\Delta^*_{21}\Phi^{*12}_{12}\Big]\times\end{cases}$$

$$\times\Big[U^{23}_{22,2}(p,\mathrm{ch}R_2)\Phi^{*22}_{11}(p,\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\rho)-U^{23}_{12,2}(p,\mathrm{ch}R_2)\Phi^{*22}_{21}(p,\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\rho)\Big],\ R_1<\tau<\rho<R_2;$$

$$\times\Big[U^{23}_{22,2}(p,\mathrm{ch}R_2)\Phi^{*22}_{11}(p,\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\tau)-U^{23}_{12,2}(p,\mathrm{ch}R_2)\Phi^{*22}_{21}(p,\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\tau)\Big],\ R_1<\rho<\tau<R_2;$$

$$\mathcal{H}^*_{23}(p,\tau,\rho)=-\frac{C_{22}}{\mathrm{sh}R_2}\frac{1}{\Delta^*(p)}\Big[\Delta^*_{11}(p)\Phi^{*12}_{22}(p,\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\tau)-\Delta^*_{21}(p)\Phi^{*12}_{12}(p,\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\tau)\Big]\mathcal{L}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\mathrm{ch}\rho),$$

$$\mathcal{H}^*_{31}(p,\tau,\rho)=\frac{C_{11}}{\mathrm{sh}R_1}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{C_{12}}{\mathrm{sh}R_2}\frac{\Gamma(\frac12+q_2+\mu_2)}{\Gamma(\frac12+q_2-\mu_2)}\cdot\frac{1}{\Delta^*(p)}\Phi^{*01}_{11}(p,\mathrm{ch}R_0,\mathrm{ch}\rho)\mathcal{L}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\mathrm{ch}\tau),$$

$$\mathcal{H}^*_{32}(p,\tau,\rho)=-\frac{C_{12}}{\mathrm{sh}R_2\,\Delta^*(p)}\Big[\Delta^*_{11}(p)\Phi^{*12}_{22}(p,\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\rho)-\Delta^*_{21}(p)\Phi^{*12}_{12}(p,\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\rho)\Big]\mathcal{L}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\mathrm{ch}\tau),$$

$$\mathcal{H}^*_{33}(p,\tau,\rho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac12+q_3-\mu_3)}{\Gamma(\frac12+q_3+\mu_3)}\begin{cases}\mathcal{L}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\mathrm{ch}\rho)\Big[(\Delta^*_{21}(p)\alpha^*_{11}(p)-\Delta^*_{11}(p)\alpha^*_{22}(p))\times\\ \mathcal{L}^{\mu_3}_{-\frac12+q_3}(\mathrm{ch}\tau)\Big[(\Delta^*_{21}(p)\alpha^*_{11}(p)-\Delta^*_{11}(p)\alpha^*_{22}(p))\times\end{cases}$$

$$\times\Phi^{*23}_{22}(p,\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\tau)-\big(\Delta^*_{21}\alpha^*_{12}(p)-\Delta^*_{11}(p)\alpha^*_{21}(p)\big)\Phi^{*23}_{12}(p,\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\tau)\Big)\Big],\ R_2<\tau<\rho<\infty;$$

$$\times\Phi^{*23}_{22}(p,\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\rho)-\big(\Delta^*_{21}\alpha^*_{12}(p)-\Delta^*_{11}(p)\alpha^*_{21}(p)\big)\Phi^{*12}_{12}(p,\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\rho)\Big],\ R_2<\rho<\tau<\infty.$$

$$d^*_{jk}(-\lambda^2-\gamma_3^2)=\left(\cos\mu_2\pi+i\,th\,\pi\frac{b_2}{a_2}\sin\mu_2\pi\right)\Big\{\mathcal{Y}^{21,\mu_2}_{k1,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_2)\,\mathcal{Y}^{12,\mu_2}_{j2,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1)-$$

$$-\mathcal{Y}^{22,\mu_2}_{k1,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_2)\,\mathcal{Y}^{11,\mu_2}_{j2,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1)\Big\},$$

$$\omega_j(\lambda)=\mathcal{Y}^{2j,\mu_3}_{22,-\frac{1}{2}+i\frac{b_3}{a_3}}(ch R_2)\left[\varphi_2(ch R_0,ch R_1)f_{21}(\lambda)-\varphi_1(ch R_0,ch R_1)f_{11}(\lambda)\right]-$$

$$-\mathcal{Y}^{2j,\mu_2}_{12,-\frac{1}{2}+i\frac{b_3}{a_3}}(ch R_2)\left[\varphi_2(ch R_0,ch R_1)f_{22}(\lambda)-\varphi_1(ch R_0,ch R_1)f_{12}(\lambda)\right],$$

$$\Delta^*(-\lambda^2-\gamma_3^2)=\left(\cos\mu_1\pi+i\,th\,\pi\frac{b_1}{a_1}\sin\mu_1\pi\right)\left(\cos\mu_2\pi+i\,th\,\pi\frac{b_2}{a_2}\sin\mu_2\pi\right)\left(\omega_1(\lambda)-i\omega_2(\lambda)\right),$$

$$f_{jk}(\lambda)=\mathcal{Y}^{21,\mu_2}_{k1,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_2)\,\mathcal{Y}^{12,\mu_2}_{j2,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1)-\mathcal{Y}^{11,\mu_2}_{j2,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1)\,\mathcal{Y}^{22,\mu_2}_{k1,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_2)$$

Введем в рассмотрение спектральную плотность $\Omega(\lambda)$, спектральные функции $V_j(r,\lambda)$ и весовые функции $\sigma_j(r)$:

$$\Omega(\lambda)=\frac{\lambda}{\pi[\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)]\,sh\,\pi\frac{b_3}{a_3}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{b_3}{a_3}+\mu_3\right)\right|^2},$$

$$\sigma_1=\frac{c_{11}c_{22}}{a_1^2c_{22}c_{21}},\quad \sigma_2=\frac{c_{12}}{a_2^2c_{22}},\quad \sigma_3=\frac{1}{a_3^2},$$

$$V_1(r,\lambda)=\frac{2^2}{\pi^3}\Big[\mathcal{Y}^{02,\mu_1}_{11,-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(ch R_0)\,A^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(ch r)-$$

$$-\mathcal{Y}^{01,\mu_1}_{11,-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(ch R_0)\,B^{\mu_1}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(ch r)\Big]\,sh\,\pi\frac{b_3}{a_3}\,ch\,\pi\frac{b_2}{a_2}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}+\mu_2\right)\right|^2\times$$

$$\times\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{b_3}{a_3}+\mu_3\right)\right|^2\frac{c_{21}c_{22}}{sh R_1\,sh R_2},$$

$$V_2(r,\lambda)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{22}}{sh R_2}\,sh\,\pi\frac{b_3}{a_3}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{b_3}{a_3}+\mu_3\right)\right|^2\Big[A^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch r)\Big(\varphi_2(ch R_0,ch R_1)\times$$

$$\times\mathcal{Y}^{12,\mu_2}_{22,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1)-\varphi_1(ch R_0,ch R_1)\,\mathcal{Y}^{11,\mu_2}_{22,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1)\Big)-$$

$$-B^{\mu_2}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\tau)\left(\varphi_2(\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}R_1)\mathcal{Y}^{11,\mu_3}_{22,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_1)-\varphi_1(\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}R_1)\mathcal{Y}^{11,\mu_2}_{12,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_1)\right),$$

$$V_3(\tau,\lambda)=\pi\left[\omega_2(\lambda)A^{\mu_3}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_3}{a_3}}(\operatorname{ch}\tau)-\omega_1(\lambda)\operatorname{th}\pi\frac{b_3}{a_3}B^{\mu_3}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_3}{a_3}}(\operatorname{ch}\tau)\right].$$

Согласно формуле (6.I5) в результате элементарных преобразований получаем оригиналы функций влияния:

$$\mathcal{H}_{jk}(t,\tau,\rho)=\int_0^\infty V_j(\tau,\lambda)V_k(\rho,\lambda)e^{-(\lambda^2+\gamma_3^2)t}\Omega(\lambda)d\lambda\, a_k^2\sigma_k,\quad j=k=\overline{1,3}. \qquad (6.I6)$$

Возвращаясь в формулах (6.I4) к оригиналу по Лапласу, будем иметь решение исходной задачи (6.I) - (6.4):

$$v_j(t,\tau)=\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}_{j1}(t,\tau,\rho)g_1(\rho)\operatorname{sh}\rho\, d\rho+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{j2}(t,\tau,\rho)g_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\, d\rho+ \qquad (6.I7)$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}_{j3}(t,\tau,\rho)g_3(\rho)\operatorname{sh}\rho\, d\rho,\quad j=\overline{1,3}$$

В силу начальных условий получаем равенства:

$$g_1(\tau)=\int_{R_0}^{R_1}\left(\int_0^\infty V_1(\tau,\lambda)V_1(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\right)g_1(\rho)\sigma_1\operatorname{sh}\rho\, d\rho,$$

$$g_2(\tau)=\int_{R_1}^{R_2}\left(\int_0^\infty V_2(\tau,\lambda)V_2(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\right)g_2(\rho)\sigma_2\operatorname{sh}\rho\, d\rho, \qquad (6.I8)$$

$$g_3(\tau)=\int_{R_2}^{\infty}\left(\int_0^\infty V_3(\tau,\lambda)V_3(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\right)g_3(\rho)\sigma_3\operatorname{sh}\rho\, d\rho$$

Полагая

$$V(\tau,\lambda)=V_1(\tau,\lambda)\theta(R_1-\tau)+V_2(\tau,\lambda)\theta(R_2-\tau)\theta(\tau-R_1)+$$

$$+V_3(\tau,\lambda)\theta(\tau-R_2),$$

$$\sigma(\tau)=\sigma_1 \operatorname{sh}\tau\,\theta(R_1-\tau)+\sigma_2 \operatorname{sh}\tau\,\theta(\tau-R_1)\theta(R_2-\tau)+\sigma_3 \operatorname{sh}\tau\,\theta(\tau-R_2).$$

получаем интегральное представление меры Дирака на множестве I_2^+

$$\frac{\delta(\tau-\rho)}{\sigma(\rho)}=\int_0^\infty V(\tau,\lambda)V(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda. \tag{6.I9}$$

Интегральное представление (6.I9) позволяет ввести в рассмотрение интегральное преобразование Мелера-Фока 2-го рода на полярной оси с двумя точками сопряжения:

$$\mathfrak{M}_{\mu,22}[f(\tau)]=\int_{R_0}^\infty f(\tau)V(\tau,\lambda)\sigma(\tau)\operatorname{sh}\tau\, d\tau\equiv\tilde f(\lambda), \tag{6.20}$$

$$\mathfrak{M}^{-1}_{\mu,22}[\tilde f(\lambda)]=\int_0^\infty \tilde f(\lambda)V(\tau,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\equiv f(\tau). \tag{6.2I}$$

При этом имеет место утверждение.

ТЕОРЕМА I. Пусть функция $f(\tau)e^{\tau/2}$ кусочно-непрерывная, абсолютно интегрируемая в промежутке (R_0,∞) и имеет там ограниченную вариацию. Тогда для $\tau\in I_2^+$ справедливо разложение

$$\frac{1}{2}[f(\tau+0)+f(\tau-0)]=\int_0^\infty V(\tau,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\int_{R_0}^\infty f(\rho)V(\rho,\lambda)\sigma(\rho)\operatorname{sh}\rho\, d\rho. \tag{6.22}$$

Доказательство проводится аналогично методом дельтаобразных последовательностей [48].

ТЕОРЕМА 2. Для дважды непрерывно дифференцируемой на множестве I_2^+ функции $f(\tau)$, исчезающей на плюс бесконечности вместе со своей первой производной, удовлетворяющей краевому условию

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{d\tau}+\beta_{11}^0\right)f(\tau)\Big|_{\tau=R_0}=g_0$$

и условию сопряжения (4.3), имеет место основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора

$$\mathfrak{M}_{\mu}[\aleph(r)\Lambda_{\mu}[f(r)]] = a_1^2\int_{R_0}^{R_1}\Lambda_{\mu_1}[f(r)]V_1(r,\lambda)\sigma_1 \operatorname{sh} r\,dr + a_2^2\int_{R_1}^{R_2}\Lambda_{\mu_2}[f(r)]V_2(r,\lambda)\sigma_2 \operatorname{sh} r\,dr + a_3^2\int_{R_2}^{\infty}\Lambda_{\mu_3}[f(r)]V_3(r,\lambda)\times$$

$$\times\sigma_3 \operatorname{sh} r\,dr = -(\lambda^2+\gamma_1^2)\int_{R_0}^{R_1}f(r)V_1(r,\lambda)\sigma_1 \operatorname{sh} r\,dr - \tag{6.23}$$

$$-(\lambda^2+\gamma_2^2)\int_{R_1}^{R_2}f(r)V_2(r,\lambda)\sigma_2 \operatorname{sh} r\,dr - (\lambda^2+\gamma_3^2)\int_{R_2}^{\infty}f(r)V_3(r,\lambda)\times$$

$$\times\sigma_3 \operatorname{sh} r\,dr - \sigma_1 \operatorname{sh} R_0 (\alpha_{11}^0)^{-1} g_0 V_1(R_0,\lambda).$$

Доказательство производится аналогично доказательству теоремы 2 § 5.

<u>Следствие I:</u> При $\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$ имеем

$$V_1(r,\lambda) = \frac{2}{\pi}\frac{C_{21}C_{22}}{\operatorname{sh}R_1 \operatorname{sh}R_2}\operatorname{th}\pi\frac{b_3}{a_3}\Big[Y^{02,0}_{11,-\frac12+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}R_0)A_{-\frac12+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}r) -$$

$$-Y^{01,0}_{11,-\frac12+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}R_0)B_{-\frac12+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}r)\Big],$$

$$V_2(r,\lambda) = 2\frac{C_{22}}{\operatorname{sh}R_2}\operatorname{th}\pi\frac{b_3}{a_3}\Big[A_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}r)\Big\{\varphi_2(\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}R_1)Y^{12,0}_{22,-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_1) -$$

$$-\varphi_1(\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}R_1)Y^{11,0}_{22,-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_1)\Big\} - B_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}r)\Big\{\varphi_2(\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}R_1)Y^{11,0}_{22,-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_1) -$$

$$-\varphi_1(\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}R_1)Y^{11,0}_{12,-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_1)\Big\}\Big],$$

$$V_3(r,\lambda) = \pi\Big[\omega_2(\lambda)A_{-\frac12+i\frac{b_3}{a_3}}(\operatorname{ch}r) - \omega_1(\lambda)\operatorname{th}\pi\frac{b_3}{a_3}B_{-\frac12+i\frac{b_3}{a_3}}(\operatorname{ch}r)\Big].$$

Тогда

$$\mathfrak{M}_{0,22}[f(r)] = \int_{R_0}^{\infty}f(r)V(r,\lambda)\sigma(r)\operatorname{sh}r\,dr \equiv \tilde f(\lambda),$$

$$\mathfrak{M}^{-1}_{0,22}[\tilde f(\lambda)] = \int_0^{\infty}\tilde f(\lambda)V(r,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda = f(r). \tag{6.24}$$

ГЛАВА 2

§ 7. ПОСТРОЕНИЕ ГИБРИДНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ - ЛЕЖАНДРА НА ПРЯМОЙ

Рассмотрим задачу о конструкции ограниченного в области $\mathcal{D}=\{(t,z)\,;\,t>0, z\in(-\infty,R_1)\cup(R_1,\infty), R_1>0\}$ решения системы уравнений параболического типа

$$\left(-\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\gamma_1^2}{a_1^2}\right)v_1(t,z)=0,\quad z\in(-\infty,R_1), \tag{7.1}$$

$$\left(-\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial}{\partial t}+\Lambda_\mu-\frac{\gamma_2^2}{a_2^2}\right)v_2(t,z)=0,\quad z\in(R_1,\infty) \tag{7.2}$$

по начальным условиям

$$v_j(t,z)\Big|_{t=0}=g_j(z),\quad j=1,2 \tag{7.3}$$

и условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^1\right)v_1(t,z)-\left(\alpha_{j2}^1\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^1\right)v_2(t,z)\right]\Big|_{z=R_1}=0. \tag{7.4}$$

Здесь $\gamma_j\geq 0,\ a_j>0,\ \alpha_{jk}^1\geq 0,\ \beta_{jk}^1\geq 0,\ c_{j1}=\alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1-\alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1\neq 0,$

$$\Lambda_\mu=\frac{1}{\operatorname{sh} z}\frac{d}{dz}\left(\operatorname{sh} z\frac{d}{dz}\right)-\frac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2 z}+\frac{1}{4}.$$

Предположим, что искомые функции $v_j(t,z)$ являются оригиналами Лапласа по переменной t [31].

Если положить

$$v_j^*(p,z)=\int_0^\infty v_j(t,z)e^{-pt}dt,\quad j=1,2, \tag{7.5}$$

то для построения функций $v_j^*(p,z)$ получим задачу о конструкции ограниченного на множестве $I=(-\infty,R_1)\cup(R_1,\infty)$ решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [68]

$$L_1[v_1^*(\rho,\tau)] \equiv \left(\frac{d^2}{d\tau^2} - q_1^2\right) v_1^*(\rho,\tau) = -\bar{g}_1(\tau), \quad q_j^2 = \frac{p+\gamma_j^2}{a_j^2}, \tag{7,6}$$

$$L_2[v_2^*(\rho,\tau)] \equiv \left(\Lambda_\mu - q_2^2\right) v_2^*(\rho,\tau) = -\bar{g}_2(\tau), \quad j = 1,2 \tag{7.7}$$

по условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{d\tau} + \beta_{j1}^1\right) v_1^*(\rho,\tau) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{d\tau} + \beta_{j2}^1\right) v_2^*(\rho,\tau)\right]\Big|_{\tau=R_1} = 0, \; j = 1,2. \tag{7.8}$$

Поскольку фундаментальную систему решений для уравнения $L_1[v_1^*(\rho,\tau)] = 0$ образуют функции $v_{11}^* = e^{q_1\tau}$ и $v_{12}^* = e^{-q_1\tau}$, а для уравнения $L_2[v_2^*(\rho,\tau)] = 0$ – функции $v_{21}^* = P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\,\tau)$ и $v_{22}^* = \frac{2}{\pi} e^{-i\mu\pi} Q^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\,\tau) = \mathcal{L}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\,\tau)$, то ограниченное на множестве I решение системы (7.6) – (7.7) имеет вид [68]

$$v_1^*(\rho,\tau) = A_1 e^{q_1\tau} + \int_{-\infty}^{R_1} \mathcal{E}_1^*(\rho,\tau,\rho)\,\bar{g}_1(\rho)\,d\rho, \tag{7.9}$$

$$v_2^*(\rho,\tau) = B_2 \mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\,\tau) + \int_{R_1}^{\infty} \mathcal{E}_2^*(\rho,\tau,\rho)\,\bar{g}_2(\rho)\, sh\rho\, d\rho. \tag{7.10}$$

Здесь $\mathcal{E}_j^*(\rho,\tau,\rho)$ – функции Коши.

Функция Коши $\mathcal{E}_1^*(\rho,\tau,\rho)$ определена [50] и имеет вид:

$$\mathcal{E}_1^*(\rho,\tau,\rho) = \frac{1}{q_1 \Delta_{11}^*(\rho)} \begin{cases} e^{q_1\tau}\left[V_{11}^{12}(q_1 R_1)\, ch\, q_1\rho - V_{11}^{11}(q_1 R_1)\, sh\, q_1\rho\right], & -\infty < \tau < \rho < R_1, \\ e^{q_1\rho}\left[V_{11}^{12}(q_1 R_1)\, ch\, q_1\tau - V_{11}^{11}(q_1 R_1)\, sh\, q_1\tau\right], & -\infty < \rho < \tau < R_1. \end{cases} \tag{7.11}$$

Здесь принимают участие функции:

$$V_{jk}^{11}(q_1 R_1) = \left(\alpha_{jk}^1 \frac{d}{d\tau} + \beta_{jk}^1\right) ch\, q_1\tau \Big|_{\tau=R_1} = \alpha_{jk}^1 q_1\, sh\, q_1 R_1 + \beta_{jk}^1\, ch\, q_1 R_1,$$

$$V_{jk}^{12}(q_1 R_1) = \left(\alpha_{jk}^1 \frac{d}{d\tau} + \beta_{jk}^1\right) sh\, q_1\tau \Big|_{\tau=R_1} = \alpha_{jk}^1 q_1\, ch\, q_1 R_1 + \beta_{jk}^1\, sh\, q_1 R_1,$$

$$\Delta_{11}^*(\rho)=V_{11}^{11}(q_1R_1)+V_{11}^{12}(q_1R_1)\equiv(\alpha_{11}^1q_1+\beta_{11}^1)e^{q_1R_1}.$$

Пусть функция Коши

$$\mathcal{E}_2^*(\rho,\tau,\rho)=\begin{cases}A_1P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\tau)+B_1\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\tau), & R_1<\tau<\rho<\infty,\\ B_2\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\tau), & R_1<\rho<\tau<\infty.\end{cases} \qquad (7.12)$$

Для определения постоянных A_1, B_1, B_2 в силу свойств функции Коши получаем алгебраическую систему трех уравнений:

$$\begin{cases}-A_1P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\rho)+(B_2-B_1)\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\rho)=0,\\ -A_1P^{\mu'}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\rho)+(B_2-B_1)\mathcal{I}^{\mu'}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\rho)=-\dfrac{1}{sh^2\rho},\\ A_1U^{12,\mu}_{12,1}(chR_1)+B_1U^{12,\mu}_{12,2}(chR_1)=0.\end{cases} \qquad (7.13)$$

Решать алгебраическую систему (7.13) получаем, что

$$B_2=-\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2+\mu)U^{12,\mu}_{12,1}(\rho,chR_1)}\Big[U^{12,\mu}_{12,1}(\rho,chR_1)\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\rho)-$$

$$-U^{12,\mu}_{12,2}(\rho,chR_1)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\rho)\Big]\equiv-\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2+\mu)U^{12,\mu}_{12,2}(\rho,chR_1)}\Phi^*_{12}(\rho,chR_1,ch\rho). \qquad (7.14)$$

Этим фундаментальная функция $\mathcal{E}_2^*(\rho,\tau,\rho)$ определена и в силу симметрии относительно диагонали $\tau=\rho$ имеет структуру:

$$\mathcal{E}_2^*(\rho,\tau,\rho)=-\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2+\mu)U^{12,\mu}_{12,2}(\rho,chR_1)}\begin{cases}\Phi^*_{12}(\rho,chR_1,ch\tau)\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\rho), & R_1<\tau<\rho<\infty,\\ \Phi^*_{12}(\rho,chR_1,ch\rho)\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\tau), & R_1<\rho<\tau<\infty.\end{cases} \qquad (7.15)$$

Обратимся к формулам (7.9), (7.10). Условия сопряжения

(7.8) для определения постоянных A_1 , B_2 дают алгебраическую систему двух уравнений:

$$A_1(\alpha_{11}^1 q_1+\beta_{11}^1)e^{q_1R_1} - B_2 U_{12,2}^{12,\mu}(ch R_1)=0,$$

$$A_1(\alpha_{21}^1 q_1+\beta_{21}^1)e^{q_1R_1} - B_2 U_{22,2}^{12,\mu}(ch R_1)=G_{21}^*. \qquad (7.I6)$$

В алгебраической системе (7.I6) функция

$$G_{21}^* = \frac{C_{11}}{\Delta_{11}^*(p)}\int_{-\infty}^{R_1} e^{q_1\rho}\bar{g}_1(\rho)d\rho + \frac{C_{21}}{sh R_1 U_{12,2}^{12,\mu}(p, ch R_1)}\int_{R_1}^{\infty} \mathcal{L}_{-\frac12+q_2}^{\mu}(ch\rho) sh\rho\, \bar{g}_2(\rho)d\rho.$$

Предположим, что выполнено условие дополнительности (условие неограниченной разрешимости) задачи: для $p=\sigma+i\tau$ с $Re\, p=\sigma\geq\sigma_0$, где σ_0 - абсцисса сходимости интеграла Лапласа, и $Im\, p=\tau\in(-\infty,\infty)$ - определитель системы (7.I6)

$$\Delta^*(p)=\Delta_{21}^*(p)e^{q_1R_1}U_{12,2}^{12,\mu}(ch R_1)-\Delta_{11}^*(p)U_{22,2}^{12,\mu}(p, ch R_1)\neq 0. \qquad (7.I7)$$

Введем в рассмотрение функции влияния:

$$\mathcal{H}_{11}^*(p,\tau,\rho)=\frac{1}{q_1\Delta^*(p)}\begin{cases} e^{q_1\tau}[\varphi_{12}^*(q_1R_1, q_2R_1)ch\, q_1\rho - \\ \quad -\varphi_{11}^*(q_1R_1,q_2R_1)sh\, q_1\rho], \ -\infty<\tau<\rho<R_1, \\ e^{q_1\rho}[\varphi_{12}^*(q_1R_1, q_2R_1)ch\, q_1\tau - \\ \quad -\varphi_{11}^*(q_1R_1,q_2R_1)sh\, q_1\tau], \ -\infty<\rho<\tau<R_1; \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{12}^*(p,\tau,\rho)=\frac{C_{21}e^{q_1\tau}}{sh R_1\Delta^*(p)}\mathcal{L}_{-\frac12+q_2}^{\mu}(ch\rho),$$

$$\mathcal{H}^*_{21}(p,\tau,\rho)=\frac{c_{11}}{\Delta^*(p)}e^{q_1\rho}\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau), \tag{7.18}$$

$$\mathcal{H}^*_{22}(p,\tau,\rho)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\Delta^*(p)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_2-\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+q_2+\mu\right)}\begin{cases}\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\rho)\left[P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)\varphi^*_{22}(q_1R_1,q_2R_1)-\right.\\ \mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)\left[P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\rho)\varphi^*_{22}(q_1R_1,q_2R_1)-\right.\end{cases}$$

$$\left.-\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\tau)\varphi^*_{21}(q_1R_1,q_2R_1)\right],\quad R_1<\tau<\rho<\infty,$$

$$\left.-\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(\operatorname{ch}\rho)\varphi^*_{21}(q_1R_1,q_2R_1)\right],\quad R_1<\rho<\tau<\infty.$$

В формулах (7.18) приняты обозначения:

$$\varphi^*_{1j}(q_1R_1,q_2R_1)=V^{1j}_{21}(q_1R_1)U^{12,\mu}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_1)-V^{1j}_{11}(q_1R_1)U^{12,\mu}_{22,2}(\operatorname{ch}R_1),$$

$$\varphi^*_{2j}(q_1R_1,q_2R_1)=\Delta^*_{21}(p)U^{1j,\mu}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_1)-\Delta^*_{11}(p)U^{1j,\mu}_{22,2}(p,\operatorname{ch}R_1).$$

Непосредственно проверяется, что решением краевой задачи (7.6) - (7.8) являются функции

$$V_j(p,\tau)=\int_{-\infty}^{R_1}\mathcal{H}^*_{j1}(p,\tau,\rho)\bar{g}_1(\rho)\,d\rho+\int_{R_1}^{\infty}\mathcal{H}^*_{j2}(p,\tau,\rho)\bar{g}_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho. \tag{7.19}$$

Особыми точками функций $\mathcal{H}^*_{jk}(p,\tau,\rho)$ являются точки ветвления $p=-\gamma_j^2$, $(j=1,2)$ и $p=\infty$. Используя лемму Жордана и теорему Коши [31], устанавливаем формулу обращения

$$\mathcal{H}_{jk}(t,\tau,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\mathcal{H}^*_{jk}(p,\tau,\rho)e^{pt}dp=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\operatorname{Im}\left[\mathcal{H}^*_{jk}(p,\tau,\rho)\times\right.$$

$$\left.\left.\times e^{-(\lambda^2+\gamma_1^2)t}\right]\right|_{p=(\lambda^2+\gamma_1^2)e^{\pi i}}\lambda\,d\lambda. \tag{7.20}$$

В силу соотношений

$$sh\, ix = i \sin x, \quad ch\, ix = \cos x \quad \text{при } p = -(\lambda^2 + \gamma_1^2),\ b_1 = \lambda,\ b_2 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_2^2}$$

имеем

$$V^{11}_{jk}(q, R_1) = -\alpha^1_{jk}\frac{b_1}{a_1}\sin\frac{b_1}{a_1}R_1 + \beta^1_{jk}\cos\frac{b_1}{a_1}R_1 \equiv v^{11}_{jk}(\lambda),$$

$$V^{12}_{jk}(q, R_1) = \alpha^1_{jk}\frac{ib_1}{a_1}\cos\frac{b_1}{a_1}R_1 + i\beta^1_{jk}\sin\frac{b_1}{a_1}R_1 \equiv i v^{12}_{jk}(\lambda),\ j = 1,2,\ k = 1,2,$$

$$U^{m1,\mu}_{ij,1}(p, ch R_1) = \sin\mu\pi\, Y^{m1,\mu}_{ij,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1) + \cos\mu\pi\, Y^{m2,\mu}_{ij,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1),$$

$$U^{m2,\mu}_{ij,2}(p, ch R_1) = Y^{m1,\mu}_{ij,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1) - i\, th\pi\frac{b_2}{a_2}\, Y^{m2,\mu}_{ij,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1),$$

$$\Delta^*(-\lambda^2 - \gamma_1^2) = \Big\{ v^{11}_{21}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1\Big) Y^{11,\mu}_{12,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1) + v^{12}_{21}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1\Big) th\pi\frac{b_2}{a_2} \times$$

$$\times Y^{12,\mu}_{12,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1) - v^{11}_{11}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1\Big) Y^{11,\mu}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2},22}(ch R_1) -$$

$$- th\pi\frac{b_2}{a_2}\, v^{12}_{11}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1\Big) Y^{12,\mu}_{22,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1) +$$

$$+ i\Big\{ v^{12}_{21}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1\Big) Y^{11,\mu}_{12,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1) - th\pi\frac{b_2}{a_2}\, v^{11}_{21}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1\Big) Y^{12,\mu}_{12,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1) + \tag{7.21}$$

$$+ v^{11}_{11}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1\Big) th\pi\frac{b_2}{a_2}\, Y^{12,\mu}_{22,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1) - v^{12}_{11}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1\Big) Y^{11,\mu}_{22,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1)\Big\} \equiv$$

$$\equiv \omega_1(\lambda) + i\omega_2(\lambda);$$

$$g_{11}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1, \frac{b_2}{a_2}R_1\Big) = \Big[v^{12}_{21}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1\Big) Y^{12,\mu}_{12,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1) - v^{12}_{11}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1\Big) Y^{12,\mu}_{22,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(ch R_1)\Big],$$

$$g_{12}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)=\upsilon_{21}^{12}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1\right)Y^{11,\mu}_{12,-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_1)-\upsilon_{11}^{12}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1\right)Y^{11,\mu}_{22,-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_1),$$

$$g_{21}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)=\upsilon_{21}^{11}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1\right)Y^{11,\mu}_{12,-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_1)-\upsilon_{11}^{11}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1\right)Y^{11,\mu}_{22,-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_1),$$

$$g_{22}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)=\upsilon_{11}^{11}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1\right)Y^{11,\mu}_{22,-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_1)-\upsilon_{21}^{11}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1\right)Y^{11,\mu}_{12,-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R_1)$$

Возвращаясь в равенствах (7.18) к оригиналу по формуле (7.20) с использованием соотношений (7.21), получаем:

$$\mathcal{H}_{11}(t,z,\rho)=\frac{2}{\pi}a_1\int_0^\infty\Big\{\Big[\omega_2(\lambda)g_{12}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)+\omega_1(\lambda)g_{11}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\Big]\times$$
$$\times\cos\frac{b_1}{a_1}z\cos\frac{b_1}{a_1}\rho+\Big[\omega_1(\lambda)g_{21}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)+\omega_2(\lambda)g_{22}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\Big]\times$$
$$\times\sin\frac{b_1}{a_1}z\sin\frac{b_1}{a_1}\rho+\Big[\omega_1(\lambda)g_{22}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}-\omega_2(\lambda)g_{21}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)\Big]\times$$
$$\times\sin\frac{b_1}{a_1}(z+\rho)\Big\}e^{-(\lambda^2+\gamma_1^2)t}\frac{\lambda\,d\lambda}{b_1(\lambda)\,\omega(\lambda)},$$

$$\mathcal{H}_{12}(t,z,\rho)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{21}}{\operatorname{sh}R_1}\int_0^\infty\Big\{A^{\mu}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\rho)\Big[\omega_2(\lambda)\cos\frac{b_1}{a_1}z-\omega_1(\lambda)\sin\frac{b_1}{a_1}z\Big]+$$
$$+\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}B^{\mu}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\rho)\Big[\omega_1(\lambda)\cos\frac{b_1}{a_1}z+\omega_2(\lambda)\sin\frac{b_1}{a_1}z\Big]e^{-(\lambda^2+\gamma_1^2)t}\frac{\lambda\,d\lambda}{\omega(\lambda)},$$

$$\mathcal{H}_{21}(t,z,\rho)=\frac{2}{\pi}c_{11}\int_0^\infty\Big\{A^{\mu}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}z)\Big[\omega_2(\lambda)\cos\frac{b_1}{a_1}\rho-\omega_1(\lambda)\sin\frac{b_1}{a_1}\rho\Big]+\tag{7.22}$$
$$+\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}B^{\mu}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}z)\Big[\omega_1(\lambda)\cos\frac{b_1}{a_1}\rho+\omega_2(\lambda)\sin\frac{b_1}{a_1}\rho\Big]e^{-(\lambda^2+\gamma_1^2)t}\frac{\lambda\,d\lambda}{\omega(\lambda)},$$

$$\mathcal{H}_{22}(t,z,\rho)=\pi\int_0^\infty\frac{1}{\operatorname{ch}\pi\frac{b_2}{a_2}\left|\Gamma\left(\frac12+i\frac{b_2}{a_2}+\mu\right)\right|^2}\Big\{A^{\mu}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}z)A^{\mu}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\rho)\times$$

$$\Big[\omega_2(\lambda) g_{22}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)+\omega_1(\lambda) g_{11}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\Big]+\Big[A^{\mu}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\tau)B^{\mu}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\rho)+$$

$$+A^{\mu}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\rho)B^{\mu}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\tau)\Big]\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\Big[\omega_1(\lambda)g_{22}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)-\omega_2(\lambda)g_{11}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\Big]+$$

$$+B^{\mu}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\tau)B^{\mu}_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}\rho)\Big[\omega_1(\lambda)g_{21}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)+\omega_2(\lambda)g_{12}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\Big]\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}e^{-(\lambda^2+\gamma_1^2)t}\frac{\lambda\,d\lambda}{\omega(\lambda)}.$$

При этом имеют место непосредственно устанавливаемые равенства

$$g_{21}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)g_{11}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)+g_{22}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)g_{12}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\equiv$$

$$\equiv\frac{2}{\pi}\frac{c_{11}c_{21}b_1\operatorname{ch}\pi\frac{b_2}{a_2}\Big|\Gamma\Big(\frac12+i\frac{b_2}{a_2}+\mu\Big)\Big|^2}{a_1\operatorname{sh}R_1}\equiv\bar K(\lambda),$$

$$\Big[g_{21}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\omega_1(\lambda)+g_{22}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\omega_2(\lambda)\Big]\cdot\Big[g_{12}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\times$$

$$\times\omega_2(\lambda)+g_{11}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\omega_1(\lambda)\Big]-\Big[g_{22}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_2\Big)\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\omega_1(\lambda)-$$

$$-g_{21}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\omega_2(\lambda)\Big]^2\equiv\big(\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)\big)\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\Big[g_{21}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\times$$

$$\times g_{11}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)+g_{22}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)g_{12}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\Big].$$

Положим

$$\sigma_1=\frac{c_{11}}{a_1^2},\quad\sigma_2=\frac{c_{21}}{\operatorname{sh}R_1 a_2^2},\quad\sigma(\tau)=\sigma_1\theta(R_1-\tau)+\sigma_2\theta(\tau-R_1),$$

$$V_1(\tau,\lambda)=\sqrt{\frac{a_1}{b_1c_{11}}}\Big\{\sqrt{g_{12}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\omega_2(\lambda)+g_{11}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\omega_1(\lambda)}\times$$

$$\times\cos\frac{b_1}{a_1}\tau+\frac{g_{22}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\omega_1(\lambda)-g_{21}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\omega_2(\lambda)}{\sqrt{g_{12}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\omega_2(\lambda)+g_{11}\Big(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\Big)\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\omega_1(\lambda)}}\sin\frac{b_1}{a_1}\tau+$$

$$+i\sqrt{\frac{\omega(\lambda)\,\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\,\overline{K}(\lambda)}{g_{12}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)\omega_2(\lambda)+g_{11}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)\omega_1(\lambda)\,\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}}}\,\sin\frac{b_1}{a_1}r\Bigg\},$$

$$V_2(r,\lambda)=\sqrt{\frac{b_1c_{11}}{a_1}}\Bigg\{\frac{\omega_2(\lambda)A^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\mathrm{ch}\,r)+\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\,\omega_1(\lambda)B^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\mathrm{ch}\,r)}{\sqrt{g_{12}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)\omega_2(\lambda)+g_{11}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\,\omega_1(\lambda)}}-$$

$$-i\sqrt{\frac{\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\,\omega(\lambda)}{g_{12}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)\omega_2(\lambda)+g_{11}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\,\omega_1(\lambda)\overline{K}(\lambda)}}\times \tag{7.23}$$

$$\times\left(g_{11}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)A^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\mathrm{ch}\,r)-g_{12}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1,\frac{b_2}{a_2}R_1\right)B^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\mathrm{ch}\,r)\right]\Bigg\};$$

$$V(r,\lambda)=V_1(r,\lambda)\,\theta(R_1-r)+V_2(r,\lambda)\,\theta(r-R_1).$$

Оригиналы функций влияния, определенные по формулам (7.22), представим так:

$$\mathcal{H}_{j1}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left\{V_j(r,\lambda)\overline{V_1(\rho,\lambda)}\right\}e^{-(\lambda^2+\gamma_1^2)t}\frac{\lambda d\lambda}{\omega(\lambda)}\sigma_1a_1^2,\; j=1,2,$$

$$\mathcal{H}_{j2}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left\{V_j(r,\lambda)\overline{V_2(\rho,\lambda)}\right\}e^{-(\lambda^2+\gamma_1^2)t}\frac{\lambda d\lambda}{\omega(\lambda)}\sigma_2a_2^2,\; j=1,2. \tag{7.24}$$

Здесь $\overline{V_j(r,\lambda)}$ есть комплексно-сопряженная к функции $V_j(r,\lambda)$.

Возвращаясь в формулах (7.19) к оригиналам, будем иметь решение задачи (7.I) - (7.4):

$$v_j(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{R_1}\mathcal{H}_{j1}(t,r,\rho)g_1(\rho)d\rho+\int_{R_1}^{\infty}\mathcal{H}_{j2}(t,r,\rho)g_2(\rho)\,\mathrm{sh}\rho\, d\rho=$$

$$=\int_{-\infty}^{R_1}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left\{V_j(r,\lambda)\overline{V_1(\rho,\lambda)}\right\}e^{-(\lambda^2+\gamma_1^2)t}\frac{\lambda d\lambda}{\omega(\lambda)}\right)g_1(\rho)\,\mathrm{sh}\rho\, d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left\{V_j(r,\lambda)\overline{V_2(\rho,\lambda)}\right\}e^{-(\lambda^2+\gamma_1^2)t}\frac{\lambda d\lambda}{\omega(\lambda)}\right)g_2(\rho)\,\sigma_2\,\mathrm{sh}\rho\, d\rho,\quad j=1,2. \tag{7.25}$$

В силу начальных условий (7.3) получаем:

$$g_1(z)=\int_{-\infty}^{R_1}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left\{V_1(z,\lambda)\overline{V_1(\rho,\lambda)}\right\}\frac{\lambda d\lambda}{\omega(\lambda)}\right)g_1(\rho)\sigma_1 d\rho,\ z\in(-\infty,R_1),$$

$$g_2(z)=\int_{R_1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left\{V_2(z,\lambda)\overline{V_2(\rho,\lambda)}\right\}\frac{\lambda d\lambda}{\omega(\lambda)}\right)g_2(\rho)\,\mathrm{sh}\rho\,\sigma_2 d\rho,\ z\in(R_1,\infty). \tag{7.26}$$

Соотношения (7.26) показывают, что в смысле теории обобщенных функций

$$\lim_{t\to 0+}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left\{V(z,\lambda)\overline{V(\rho,\lambda)}\right\}e^{-(\lambda^2+\chi_1^2)t}\frac{\lambda d\lambda}{\omega(\lambda)}\right]=\frac{\delta(z-\rho)}{\sigma(\rho)}. \tag{7.27}$$

Формулы (7.26) и (7.27) позволяют ввести гибридное интегральное преобразование Фурье-Лежандра на прямой с одной точкой сопряжения по правилам:

$$\mathfrak{M}_\Lambda[f(z)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\overline{V(z,\lambda)}\sigma(z)dz\equiv\tilde{f}(\lambda)=$$

$$=\int_{-\infty}^{R_1}f(z)\overline{V_1(z,\lambda)}\sigma_1 dz+\int_{R_1}^{\infty}f(z)\overline{V_2(z,\lambda)}\sigma_2\,\mathrm{sh}z\,dz, \tag{7.28}$$

$$\mathfrak{M}_\Lambda^{-1}[\tilde{f}(\lambda)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[V(z,\lambda)\tilde{f}(\lambda)\right]\frac{\lambda d\lambda}{\omega(\lambda)}\equiv f(z) \tag{7.29}$$

Предположим, что функция $f(z)$ дважды непрерывно дифференцируемая на каждом из интервалов $(-\infty,R_1),(R_1,\infty)$, удовлетворяет условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dz}+\beta_{j1}^1\right)f^-(z)-\left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dz}+\beta_{j2}^1\right)f^+(z)\right]\Big|_{z=R_1}=0,\quad j=1,2 \tag{7.30}$$

и исчезает в минус бесконечности вместе со своей первой производной, а при $z\to\infty$ стремится вместе со своей первой производной к нолю как функция $g(z)=e^{z/2}f(z)$. Тогда имеет место равенство:

$$\mathfrak{M}_{\Lambda}\left[\mathcal{S}(r)L[f(r)]\right] \equiv a_1^2\int_{-\infty}^{R_1}\frac{d^2f(r)}{dr^2}V_1(r,\lambda)\sigma_1\,dr +$$

$$+a_2^2\int_{R_1}^{\infty}\Lambda_{\mu}[f(r)]\,V_2(r,\lambda)\sigma_2\,\mathrm{sh}\,r\,dr = -\lambda^2\tilde{f}(\lambda). \qquad (7.31)$$

Доказательство можно провести аналогично доказательству теоремы 2 § I первой главы.

Отметим, что функция $V(r,\lambda)$ является решением такой сингулярной задачи Штурма-Лиувилля:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{b_1^2(\lambda)}{a_1^2}\right)V_1(r,\lambda)=0,\quad r\in(-\infty,R_1),$$

$$\left(\Lambda_{\mu}+\frac{b_2(\lambda)}{a_2^2}\right)V_2(r,\lambda)=0,\quad r\in(R_1,\infty)$$

$$\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^1\right)V_1(r,\lambda)\Big|_{r=R_1-0}=\left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^1\right)V_2(r,\lambda)\Big|_{r=R_1+0},\quad j=1,2. \qquad (7.23)$$

Параметры $\alpha_{ij}^1, \beta_{ij}^1$ $(i,j=1,2)$ дают возможность выделить наиболее распространенные в практике условия сопряжения: неидеальный тепловой контакт $(\alpha_{11}^1=r_0, \beta_{11}^1=1, \alpha_{12}^1=0, \beta_{12}^1=1, \alpha_{21}^1=\lambda_1,$ $\beta_{21}^1=0, \alpha_{22}^1=\lambda_2, \beta_{22}^1=0)$ и идеальный механический контакт $(\alpha_{11}^1=\alpha_{12}^1=0,$ $\beta_{11}^1=\beta_{12}^1=1, \alpha_{21}^1=1, \beta_{21}^1=h_1, \alpha_{22}^1=\beta_{22}^1=\nu_{12}>0)$ встречающиеся при решении задач термоупругости для кусочно-однородных элементов конструкций.

§8. ГИБРИДНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ-ЛЕЖАНДРА НА ОГРАНИЧЕННОЙ СПРАВА ПОЛУПРЯМОЙ

Рассмотрим спектральную задачу Штурма-Лиувилля о конструкции на множестве $I_1=\{r: r\in(-\infty,R_1)\cup(R_1,R_2), R_1>0, R_2<\infty\}$ решения сепаратной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$L_1[v_1(\tau)] \equiv \left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\frac{b_1^2(\lambda)}{a_1^2}\right)v_1(\tau)=0,\quad \tau\in(-\infty,R_1),$$

$$L_2[v_2(\tau)] \equiv \left(\Lambda_\mu+\frac{b_2^2(\lambda)}{a_2^2}\right)v_2(\tau)=0,\quad \tau\in(R_1,R_2) \tag{8.1}$$

по краевым условиям

$$v_1(\tau)\Big|_{\tau=-\infty}<\infty,\quad \left(\alpha_{22}^2\frac{d}{d\tau}+\beta_{22}^2\right)v_2(\tau)\Big|_{\tau=R_2}=0 \tag{8.2}$$

и условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{d\tau}+\beta_{j1}^1\right)v_1(\tau)-\left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{d\tau}+\beta_{j2}^1\right)v_2(\tau)\right]\Big|_{\tau=R_1}=0,\quad j=1,2. \tag{8.3}$$

Здесь $\alpha_{jk}^m\geqslant 0,\ \beta_{jk}^m\geqslant 0,\ b_j=\sqrt{\lambda^2+\gamma_j^2},\ \gamma_j\geqslant 0,\ j=1,2,$

$C_{j1}=\alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1-\alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1\neq 0,\ \Lambda_\mu=\dfrac{d^2}{d\tau^2}+\operatorname{cth}\tau\dfrac{d}{d\tau}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2\tau}$ – оператор Лежандра.

Фундаментальную систему решения для уравнения $L_1[v_1(\tau)]=0$ образуют функции $v_{11}=\cos s_1\tau$ и $v_{12}=\sin s_1\tau$, а для уравнения $L_2[v_2(\tau)]=0$ – функции $v_{21}=P^\mu_{-\frac12+is_2}(\operatorname{ch}\tau)$ и $v_{22}=\mathcal{L}^\mu_{-\frac12+is_2}(\operatorname{ch}\tau)\equiv$ $\equiv\frac{2}{\pi}e^{-i\mu\pi}Q^\mu_{-\frac12+is_2}(\operatorname{ch}\tau)$, где $P^\mu_{-\frac12+is_2}(\operatorname{ch}\tau)$ и $Q^\mu_{-\frac12+is_2}(\operatorname{ch}\tau)$ – присоединенные функции Лежандра I-го и 2-го рода [19], $s_j=a_j^{-1}b_j$.

Непосредственно проверяется, что решением спектральной задачи Штурма-Лиувилля (8.1) – (8.3) являются функции

$$v_1(\tau,\lambda)=\omega_2(\lambda)\cos s_1\tau-\omega_1(\lambda)\sin s_1\tau,$$

$$v_2(\tau,\lambda)=C_{11}s_1\left[B^\mu_{-\frac12+is_2}(\operatorname{ch}\tau)\,Y^{21,\mu}_{22,-\frac12+is_2}(\operatorname{ch}R_2)-A^\mu_{-\frac12+is_2}(\operatorname{ch}\tau)\,Y^{22,\mu}_{22,-\frac12+is_2}(\operatorname{ch}R_2)\right]. \tag{8.4}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\omega_j(\lambda) = \mathcal{V}_{21}^{1j}(s_1R_1)\delta_{12}(ch R_1, ch R_2) - \mathcal{V}_{11}^{1j}(s_1R_1)\delta_{22}(ch R_1, ch R_2),$$

$$\delta_{jk}(ch R_1, ch R_2) = \mathcal{Y}^{12,\mu}_{jk,-\frac{1}{2}+is_2}(ch R_1)\,\mathcal{Y}^{21,\mu}_{22,-\frac{1}{2}+is_2}(ch R_2) - \mathcal{Y}^{11,\mu}_{jk,-\frac{1}{2}+is_2}(ch R_1)\,\mathcal{Y}^{22,\mu}_{22,-\frac{1}{2}+is_2}(ch R_2),$$

$$j=1,\ k=2;\quad j=2,\ k=2.$$

Пусть $\Theta(\tau)$ – единичная функция Хевисайда [81]. Введем в рассмотрение спектральную плотность

$$\Omega(\lambda) = \frac{\lambda}{b_1(\lambda)\,\omega(\lambda)} = \frac{\lambda}{b_1(\lambda)\left(\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)\right)}, \tag{8.5}$$

спектральную функцию

$$\mathcal{V}(\tau,\lambda) = \mathcal{V}_1(\tau,\lambda)\,\Theta(R_1-\tau) + \mathcal{V}_2(\tau,\lambda)\,\Theta(\tau-R_1)\,\Theta(R_2-\tau),$$

весовую функцию

$$\sigma(\tau) = \sigma_1\Theta(R_1-\tau) + \sigma_2\, sh\tau\,\Theta(\tau-R_1)\,\Theta(R_2-\tau) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{a_1^2}\Theta(R_1-\tau) + \frac{c_{21}\,a_1\, sh\tau}{c_{11}\,a_2^2\, sh R_1}\Theta(\tau-R_1)\,\Theta(R_2-\tau)$$

и характеристическую функцию

$$\gamma(\tau) = a_1^2\,\Theta(R_1-\tau) + a_2^2\,\Theta(\tau-R_1)\,\Theta(R_2-\tau).$$

Наличие спектральной функции $\mathcal{V}(\tau,\lambda)$, спектральной плотности $\Omega(\lambda)$ и весовой функции $\sigma(\tau)$ позволяет написать интегральное представление меры Дирака на множестве I_1

$$\frac{\delta(\tau-\rho)}{\sigma(\rho)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathcal{V}(\tau,\lambda)\,\mathcal{V}(\rho,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda. \tag{8.6}$$

Интегральное представление (8.6) меры Дирака порождает прямое $\mathfrak{M}_\mu$ и обратное $\mathfrak{M}_\mu^{-1}$ гибридное интегральное преобразование Фурье-Лежандра на ограниченной справа оси по правилам [83]:

$$\mathfrak{M}_\mu[f(r)] = \int_{-\infty}^{R_1} f(r)V(r,\lambda)\sigma(r)\,dr \equiv \tilde{f}(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{R_1} f(r)V_1(r,\lambda)\sigma_1\,dr + \int_{R_1}^{\infty} f(r)V_2(r,\lambda)\sigma_2\,\mathrm{sh}\,r\,dr, \tag{8.7}$$

$$\mathfrak{M}_\mu^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{f}(\lambda)V(r,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda.$$

При этом имеют место утверждения.

ТЕОРЕМА I. Пусть функция $f(r)e^{r/2}$ кусочно непрерывная, абсолютно интегрируемая в промежутке $(-\infty, R_2)$ и имеет там ограниченную вариацию. Тогда для $r \in I_1$, справедливое интегральное разложение

$$\frac{1}{2}[f(r+0)+f(r-0)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V(r,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda \int_{-\infty}^{R_2} f(\rho)V(\rho,\lambda)\sigma(\rho)\,d\rho. \tag{8.9}$$

Доказательство проведем методом дельтаобразных последовательностей [41]. С этой целью рассмотрим задачу построения ограниченного в области $\mathcal{D}=\{(t,r): t\in(0,\infty), r\in I_1\}$ решения сепаратной системы уравнений параболического и   - параболического типа

$$\left(\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{\gamma}_1^2}{a_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_1(t,r) = 0,\ t>0,\ r\in(-\infty, R_1),$$

$$\left(\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{\gamma}_2^2}{a_2^2} - \Lambda_\mu\right)u_2(t,r) = 0,\ t>0,\ r\in(R_1, R_2) \tag{8.10}$$

по начальным условиям

$$u_1(t,r)\big|_{t=0} = g_1(r),\ r\in(-\infty,R_1);\ \ u_2(t,r)\big|_{t=0} = g_2(r),\ r\in(R_1,R_2), \tag{8.11}$$

краевым условиям

$$\frac{\partial^k u_1(t,r)}{\partial r^k}\bigg|_{r=-\infty}=0,\ (k=0,1),\ \left(\alpha^2_{22}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^2_{22}\right)u_2(t,r)\bigg|_{r=R_2}=0 \qquad (8.12)$$

и условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha^1_{j1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^1_{j1}\right)u_1(t,r)-\left(\alpha^1_{j2}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^1_{j2}\right)u_2(t,r)\right]\bigg|_{r=R_1}=0,\ j=1,2. \qquad (8.13)$$

Предполагая, что искомые функции $u_j(t,r)$ являются оригиналами по Лапласу относительно переменной t [31], в изображениях по Лапласу получаем задачу построения ограниченного на множестве I_1 решения сепаратной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$R_1[u_1^*(p,r)]\equiv\left(\frac{d^2}{dr^2}-q^2_{j1}\right)u_1^*(p,r)=-\bar g_1(r),\ r\in(-\infty,R_1),$$

$$R_2[u_2^*(p,r)]\equiv\left(\Lambda_\mu-q^2_{j2}\right)u_2^*(p,r)=-\bar g_2(r),\ r\in(R_1,R_2) \qquad (8.14)$$

по краевым условиям

$$\frac{d^k u_1^*(p,r)}{dr^k}\bigg|_{r=-\infty}=0,\ (k=0,1),\ \left(\alpha^2_{22}\frac{d}{dr}+\beta^2_{22}\right)u_2^*(p,r)\bigg|_{r=R_2}=0 \qquad (8.15)$$

и условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha^1_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^1_{j1}\right)u_1^*(p,r)-\left(\alpha^1_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^1_{j2}\right)u_2^*(p,r)\right]\bigg|_{r=R_1}=0,\ j=1,2. \qquad (8.16)$$

Фундаментальную систему решений для уравнения $R_1[u_1^*(p,r)]=0$ образуют функции $\exp(-q_1 r)$ и $\exp(q_1 r)$, а для уравнения $R_2[u_2^*(p,r)]=0$ – функции $P^\mu_{-\frac12+q_2}(\operatorname{ch} r)$ и $\mathcal{L}^\mu_{-\frac12+q_2}(\operatorname{ch} r)$ [51].

Предполагая $\operatorname{Re} q_j>0$, ограниченное на множестве I_1 решение задачи (8.14) – (8.16) будем отыскивать по формулам

$$u_1^*(\rho,\tau)=A_1 e^{q_1\tau}+\int\limits_{-\infty}^{R_1}\mathcal{E}_1^*(\rho,\tau,\varrho)\bar{g}_1(\varrho)\,d\varrho,$$

$$u_2^*(\rho,\tau)=A_2 P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\tau)+B_2 \mathcal{L}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(ch\tau)+\int\limits_{R_1}^{R_2}\mathcal{E}_2^*(\rho,\tau,\varrho)g_2(\varrho)\,sh\varrho\,d\varrho \qquad (8.17)$$

Здесь $\mathcal{E}_1^*(\rho,\tau,\varrho)$ – функция Коши

$$\mathcal{E}_1^*(\rho,\tau,\varrho)=\frac{1}{q_1\Delta_{11}^*(\rho)}\begin{cases} e^{q_1\tau}[V_{11}^{12}(q_1R_1)ch\,q_1\varrho-V_{11}^{11}(q_1R_1)sh\,q_1\varrho], & -\infty<\tau<\varrho<R_1,\\ e^{q_1\varrho}[V_{11}^{12}(q_1R_1)ch\,q_1\tau-V_{11}^{11}(q_1R_1)sh\,q_1\tau], & -\infty<\varrho<\tau<R_1,\end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2^*(\rho,\tau,\varrho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_2+\mu)\Delta_1^*(\rho)}\begin{cases}\Psi_{\mu,1}(chR_1,ch\tau)\Psi_{\mu,2}(chR_2,ch\varrho), & R_1<\tau<\varrho<R_2,\\ \Psi_{\mu,1}(chR_1,ch\varrho)\Psi_{\mu,2}(chR_2,ch\tau), & R_1<\varrho<\tau<R_2.\end{cases} \qquad (8.18)$$

В равенствах (8.18) приняты обозначения:

$$\Delta_{j1}^*(q_1R_1)=V_{j1}^{11}(q_1R_1)+V_{j1}^{12}(q_1R_1)\equiv(\alpha_{j1}^1 q_1+\beta_{j1})e^{q_1R_1}$$

$$\Delta_j^*(q_1R_1,q_2R_2)=U_{j2,1}^{12,\mu}(chR_1)U_{22,2}^{22,\mu}(\rho,chR_2)-U_{j2,2}^{12,\mu}(\rho,chR_1)U_{22,1}^{22,\mu}(\rho,chR_2),$$

$$\Psi_{\mu,j}(x,y)=P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(x)U_{j2,2}^{12,\mu}(y)-\mathcal{L}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_2}(x)U_{j2,1}^{12,\mu}(y).$$

Краевые условия (8.15) и условия сопряжения (8.16) для определения постоянных A_1, A_2 и B_2 дают алгебраическую систему трех уравнений:

$$\Delta_{11}^*(q_1R_1)A_1-U_{12,1}^{12,\mu}(\rho,chR_1)A_2-U_{12,2}^{12,\mu}(\rho,chR_1)B_2=0,$$

$$\Delta_{21}^*(q_1R_1)A_1-U_{22,1}^{12,\mu}(\rho,chR_1)A_2-U_{22,2}^{12,\mu}(\rho,chR_1)B_2=G_{12}^*, \qquad (8.19)$$

$$U^{22,\mu}_{22,1}(p,\operatorname{ch}R_2)A_2+U^{22,\mu}_{22,2}(p,\operatorname{ch}R_2)B_2=0.$$

Здесь функция

$$G^*_{21}=\frac{c_{11}}{\Delta^*_{11}(p)}\int\limits_{-\infty}^{R_1}e^{q_1\rho}\bar g_1(\rho)d\rho+\frac{c_{21}}{\operatorname{sh}R_1\Delta^*_1(p)}\int\limits_{R_1}^{R_2}\Psi_{\mu,2}(\operatorname{ch}R_2,\operatorname{ch}\rho)\bar g_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\, d\rho.$$

Пусть выполнено условие неограниченной разрешимости задачи (8.I4) - (8.I6): для $p=\sigma+i\tau$ с $\operatorname{Re}p=\sigma\geqslant\sigma_0$, где σ_0 - абсцисса сходимости интеграла Лапласа, и $\operatorname{Im}p=\tau\in(-\infty,\infty)$ - определитель системы (2.I9)

$$\Delta^*(p)=\Delta^*_{21}(p)\Delta^*_1(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2)-\Delta^*_{11}(p)\Delta^*_2(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2)\neq 0. \tag{8.20}$$

Введем в рассмотрение функции влияния:

$$\mathcal{H}^*_{11}(p,\tau,\rho)=\frac{1}{q_1\Delta^*(p)}\begin{cases}e^{q_1\tau}[\Phi^*_{12}(p,q_1R_1)\operatorname{ch}q_1\rho-\Phi^*_{11}(p,q_1R_1)\operatorname{sh}q_1\rho],-\infty<\tau<\rho<R_1,\\ e^{q_1\rho}[\Phi^*_{12}(p,q_1R_1)\operatorname{ch}q_1\tau-\Phi^*_{11}(p,q_1R_1)\operatorname{sh}q_1\tau],-\infty<\rho<\tau<R_1;\end{cases}$$

$$\mathcal{H}^*_{12}(p,\tau,\rho)=\frac{c_{21}e^{q_1\tau}}{\operatorname{sh}R_1\Delta^*(p)}\Psi_{\mu,2}(\operatorname{ch}R_2,\operatorname{ch}R_1),$$

$$\mathcal{H}^*_{21}(p,\tau,\rho)=\frac{c_{11}e^{q_1\rho}}{\Delta^*(p)}\Psi_{\mu,2}(\operatorname{ch}R_2,\operatorname{ch}R_1),$$

$$\mathcal{H}^*_{22}(p,\tau,\rho)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac12+q_2-\mu)}{\Gamma(\frac12+q_2+\mu)\Delta^*(p)}\begin{cases}[P^{\mu}_{-\frac12+q_2}(\operatorname{ch}\tau)(\Delta^*_{21}(p)U^{12,\mu}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_1)-\\ [P^{\mu}_{-\frac12+q_2}(\operatorname{ch}\rho)(\Delta^*_{21}(p)U^{12,\mu}_{12,2}(p,\operatorname{ch}R_1)-\end{cases}$$

$$-\Delta^*_{11}(p)U^{12,\mu}_{22,2}(p,\operatorname{ch}R_1))-\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac12+q_2}(\operatorname{ch}\tau)(\Delta^*_{21}(p)U^{12,\mu}_{12,1}(p,\operatorname{ch}R_1)-$$

$$-\Delta^*_{11}(p)U^{12,\mu}_{22,2}(p,\operatorname{ch}R_1))-\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac12+q_2}(\operatorname{ch}\rho)(\Delta^*_{21}(p)U^{12,\mu}_{12,1}(p,\operatorname{ch}R_1)-$$

$$-\Delta_{11}^*(p)U_{22,1}^{12,\mu}(p,\operatorname{ch}R_1)\Big]\times\Psi_{\mu,2}(\operatorname{ch}R_2,\operatorname{ch}\rho),\ R_1<\tau<\rho<R_2,$$

$$-\Delta_{11}^*(p)U_{22,1}^{12,\mu}(p,\operatorname{ch}R_1)\Big]\times\Psi_{\mu,2}(\operatorname{ch}R_2,\operatorname{ch}\tau),\ R_1<\rho<\tau<R_2;$$

$$\mathcal{F}_{ij}^*(p,q_1R_1)=\Delta_1^*(p)V_{21}^{1j}(q_1R_1)-\Delta_2^*(p)V_{11}^{1j}(q_1R_1).$$

В результате однозначной разрешимости алгебраической системы (8.I9) (в силу условия (8.20)), подстановки найденных значений A_1, A_2, B_2 в формулы (8.I7) и элементарных преобразований, получаем решение задачи (8.I4) - (8.I6):

$$u_j^*(p,\tau)=\int_{-\infty}^{R_1}\mathcal{H}_{j1}^*(p,\tau,\rho)\bar g_1(\rho)d\rho+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{j2}^*(p,\tau,\rho)\bar g_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho,\quad j=1,2. \tag{8.21}$$

Особыми точками функций влияния $\mathcal{H}_{jk}^*(p,\tau,\rho)$ являются точки ветвления $p=-\bar\gamma_j^2$, $p=\infty$. Используя лемму Жордана и теорему Коши [31], в предположении, что $\bar\gamma_1^2-\bar\gamma_2^2=\gamma_2^2\geqslant 0$, устанавливаем формулу обращения

$$\mathcal{H}_{jk}^*(t,\tau,\rho)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left\{\mathcal{H}_{jk}^*\left((\lambda^2+\bar\gamma_1^2)e^{\pi i},\tau,\rho\right)\right\}e^{-(\lambda^2+\bar\gamma_1^2)t}\lambda d\lambda,\quad j,k=1,2. \tag{8.22}$$

В силу соотношений $\operatorname{ch}ix=\cos x$, $\operatorname{sh}ix=i\sin x$ при $\sqrt{p+\bar\gamma_1^2}=i\lambda$ находим

$$q_1=\frac{1}{a_1}\sqrt{p+\bar\gamma_1^2}=\frac{i\lambda}{a_1}=\frac{ib_1(\lambda)}{a_1},\ q_2=\frac{1}{a_2}\sqrt{p+\bar\gamma_1^2}=\frac{1}{a_2}\sqrt{-\lambda^2-\bar\gamma_1^2+\bar\gamma_2^2}=$$

$$=\frac{i}{a_2}\sqrt{\lambda^2+\gamma_2^2}=\frac{ib_2(\lambda)}{a_2},$$

$$\Delta^*(-\lambda^2-\bar\gamma_1^2)=\left[\cos\mu\pi+i\sin\mu\pi\operatorname{th}\pi\frac{b_2}{a_2}\right]\Big\{\left(v_{21}^{11}(q_1R_1)\delta(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2)-\right.$$

$$\left.-v_{11}^{11}(q_1R_1)\delta_{22}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2)\right)+i\left(v_{21}^{12}(q_1R_1)\delta_{12}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2)-v_{11}^{12}(q_1R_1)\delta_{22}\right)\Big\}=$$

$$=\left[\cos\mu\pi+i\sin\mu\pi\,\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\right]\left[\omega_1(\lambda)+i\omega_2(\lambda)\right],$$

$$\Delta_1^*(\rho)=\left[\cos\mu\pi+i\sin\mu\pi\,\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\right]\delta_{12}(\rho,\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}R_2),$$

$$\Delta_2^*(\rho)=\left[\cos\mu\pi+i\sin\mu\pi\,\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\right]\delta_{22}(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}R_2),$$

$$\Phi_{11}^*=\left[\cos\mu\pi+\sin\mu\pi\,\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\right]\omega_1(\lambda),$$

$$\Phi_{12}^*=\left[\cos\mu\pi+i\sin\mu\pi\,\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\right]i\omega_2(\lambda),$$

$$\psi_{\mu,2}(\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\rho)=\left[\cos\mu\pi+i\sin\mu\pi\,\mathrm{th}\,\pi\frac{b_2}{a_2}\right]\Big[B^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\mathrm{ch}\rho)\,Y^{21,\mu}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2},22}(\mathrm{ch}R_2)-$$

$$-A^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\mathrm{ch}\rho)\,Y^{22,\mu}_{22,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\mathrm{ch}R_2)\Big].$$

Если окажется, что $\bar\gamma_2^2-\bar\gamma_1^2\equiv\gamma_1^2\geq 0$ то $b_1=\sqrt{\lambda^2+\bar\gamma_1^2}$, $b_2=\lambda$ и вместо $(\lambda^2+\bar\gamma_1^2)$ в показателе экспоненциальной функции станет $(\lambda^2+\bar\gamma_2^2)$.

Согласно формуле (8.22) в результате элементарных преобразований имеем:

$$\mathcal{H}_{jk}(t,z,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\lambda^2+\bar\gamma_1^2)t}\,v_j(z,\lambda)\,v_k(\rho,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda\,\sigma_k a_k^2,\quad j,k=1,2,$$

где функции $v_1(z,\lambda), v_2(z,\lambda)$ и $\Omega(\lambda)$ определены по формулам (8.4), (8.5).

Возвращаясь в формулах (8.2I) к оригиналу, будем иметь решение задачи (8.I0) - (8.I3):

$$u_j(t,z)=\int_{-\infty}^{R_1}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\lambda^2+\bar\gamma_1^2)t}\,v_j(z,\lambda)\,v_1(\rho,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda\right)g_1(\rho)\,d\rho\,\sigma_1+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\lambda^2+\bar\gamma_1^2)t}\,v_j(z,\lambda)\,v_2(\rho,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda\right)g_1(\rho)\,\mathrm{sh}\rho\,d\rho\,\sigma_2,\quad j=1,2.$$

В силу начальных условий (8.II) получаем интегральные представления

$$g_1(\tau)=\int_{-\infty}^{R_1}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty v_1(\tau,\lambda)v_1(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\right)g_1(\rho)\sigma_1 d\rho,$$

$$g_2(\tau)=\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty v_2(\tau,\lambda)v_2(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\right)g_2(\rho)\operatorname{sh}\rho\, d\rho\,\sigma_2.$$

Отсюда следует интегральное представление (8.6) меры Дирака. В силу свойств фундаментального решения задачи Коши для уравнения теплопроводности (8.10) как дельтаобразной последовательности, имеем (8.9).

ТЕОРЕМА 2. Для дважды непрерывно дифференцируемой на множестве I_1 функции $f(\tau)$, исчезающей на минус бесконечности вместе со своей первой производной, удовлетворяющей краевому условию

$$\left(\alpha_{22}^2\frac{d}{d\tau}+\beta_{22}^2\right)f(\tau)\Big|_{\tau=R_2}=g_2 \tag{8.23}$$

и условиям сопряжения (8.3), имеет место основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора

$$\mathfrak{M}_\mu[X(\tau)R[f(\tau)]]=\int_{-\infty}^{R_1}a_1\frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2}v_1(\tau,\lambda)\sigma_1 d\tau+$$
$$+a_2^2\int_{R_1}^{R_2}\Lambda_\mu[f(\tau)]v_2(\tau,\lambda)\sigma_2\operatorname{sh}\tau\, d\tau=-\lambda^2\tilde f(\lambda)+$$
$$+a_2^2\sigma_2\operatorname{sh}R_2(\alpha_{22}^2)^{-1}v_2(R_2,\lambda)g_2-\gamma_1^2\int_{-\infty}^{R_1}f(\tau)v_1(\tau,\lambda)\sigma_1 d\tau-$$
$$-\gamma_2^2\int_{R_1}^{R_2}f(\tau)v_2(\tau,\lambda)\sigma_2\operatorname{sh}\tau\, d\tau. \tag{8.24}$$

Доказательство: Обозначим

$$k_1=\alpha_{11}^1\alpha_{22}^1-\alpha_{21}^1\alpha_{12}^1,\ k_2=\alpha_{11}^1\beta_{22}^1-\alpha_{21}^1\beta_{12}^1,\ k_3=\beta_{11}^1\alpha_{22}^1-\beta_{21}^1\alpha_{12}^1,$$

$$k_4=\beta_{11}^1\beta_{22}^1-\beta_{21}^1\beta_{12}^1,\ f^\pm(R_1)=\lim_{\tau\to R_1\pm 0}f(\tau).$$

Из тождественных равенств

$$\left(\alpha_{j1}^{1}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{1}\right)v_1(r,\lambda)\Big|_{r=R_1}=\left(\alpha_{j2}^{1}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{1}\right)v_2(r,\lambda)\Big|_{r=R_1},\ j=1,2$$

следуют соотношений (8.25)

$$v_1(R_1,\lambda)=-\frac{1}{c_{11}}\left[k_1\frac{dv_2(R_1,\lambda)}{dr}+k_2v_2(R_1,\lambda)\right],$$

$$\frac{dv_1(R_1,\lambda)}{dr}=\frac{1}{c_{11}}\left[k_1\frac{dv_2(R_2,\lambda)}{dr}+k_4v_2(R_1,\lambda)\right]. \tag{8.26}$$

В силу предположений на функцию $f(r)$ соотношения (8.26) остаются справедливыми, если $v_1(R_1,\lambda)$ заменить на $f^-(R_1)$, а $v_2(R_1,\lambda)$ заменить на $f^+(R_1)$ (и соответственно производные по r).

Наличие соотношений (8.26) дает возможность получить равенство

$$\frac{df^-(R_1)}{dr}v_1(R_1,\lambda)-f^-(R_1)\frac{dv_1(R_1,\lambda)}{dr}=\frac{c_{21}}{c_{11}}\left[\frac{df^+(R_1)}{dr}v_2(R_1,\lambda)-f^+(R_1)\frac{dv_2}{dr}\right]. \tag{8.27}$$

Интегрируя в (8.24) под знаком интеграла по частям в силу тождеств

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\lambda^2+\gamma_1^2}{a_1^2}\right)v_1(r,\lambda)\equiv 0,\quad \left(\Lambda_\mu+\frac{\lambda^2+\gamma_2^2}{a_2^2}\right)v_2(r,\lambda)\equiv 0$$

и тождества (8.27) получаем, что

$$\int_{-\infty}^{R_2}\theta(r)R[f(r)]v(r,\lambda)\sigma(r)\,dr=-\lambda^2\tilde f(\lambda)-\gamma_1^2\int_{-\infty}^{R_1}f(r)v_1(r,\lambda)\sigma_1\,dr-$$

$$-\gamma_2^2\int_{R_1}^{R_2}f(r)v_2(r,\lambda)\sigma_2\operatorname{sh}r\,dr+a_2^2\sigma_2\operatorname{sh}R_2\left[\frac{df(r)}{dr}v_2(r,\lambda)-\right. \tag{8.28}$$

$$\left.-f(r)\frac{dv_2(r,\lambda)}{dr}\right]\Big|_{r=R_2}+\left(a_1^2\sigma_1\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2\operatorname{sh}R_1\right)\left(\frac{df^+(R_1)}{dr}v_2(R_1,\lambda)-\right.$$

$$\left.-f^+(R_1)\frac{dv_2(R_1,\lambda)}{dr}\right).$$

В силу конструкции функций σ_j

$$a_1^2\sigma_1\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2\operatorname{sh}R_1=a_1\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\operatorname{sh}R_1\frac{a_1c_{21}}{a_2^2c_{11}\operatorname{sh}R_1}\equiv 0. \tag{8.29}$$

В силу краевого условия (8.23) при $\alpha_{22}^2 \neq 0$

$$\left(\frac{df^+(\tau)}{d\tau} v_2(\tau,\lambda) - f^+(\tau)\frac{dv_2(\tau,\lambda)}{d\tau}\right)\Bigg|_{\tau=R_2} = \left[\frac{1}{\alpha_{22}^2}\left(\alpha_{22}^2\frac{df(\tau)}{d\tau} + \beta_{22}^2 f(\tau)\right)v_2(\tau,\lambda) - \right.$$

$$\left. - f(\tau)\frac{dv_2(\tau,\lambda)}{d\tau}\right]\Bigg|_{\tau=R_2} = \frac{v_2(R_2,\lambda)}{\alpha_{22}^2} g_2 - \frac{1}{\alpha_{22}^2} f(R_2)\left(\alpha_{22}^2\frac{dv_2(\tau,\lambda)}{d\tau} + \beta_{22}^2 v_2\right)\Bigg|_{\tau=R_2} = \frac{v_2(R_1,\lambda)}{\alpha_{22}^2 g_2^{-1}}. \tag{8.30}$$

С учетом (8.29), (8.30) левая часть равенства (8.28) совпадает с левой частью равенства (8.24).

Отметим, что параметры γ_j, α_{jk}^m, β_{jk}^m и μ принимающие участие в формулировке задачи (8.I) - (8.3), позволяют получить непосредственно из общих выражений структуры ядер интегральных операторов $\mathfrak{M}_\mu$ и $\mathfrak{M}_\mu^{-1}$ для всех наиболее часто употребляемых в практике случаев условий сопряжения и краевых условий на границе $\tau = R_2$.

Наличие тождества (8.24) дает возможность применять полученные интегральные преобразования для решения соответствующих задач математической физики.

§ 9. ГИБРИДНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕЖАНДРА - ФУРЬЕ НА ПОЛЯРНОЙ ОСИ

Рассмотрим спектральную задачу Штурма-Лиувилля о конструкции на множестве $I_1 = \{\tau: \tau \in (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty), R_1 > 0\}$ решения сепаратной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$L_1[v_1(\tau,\lambda)] \equiv \left(\Lambda_\mu + \frac{b_1^2(\lambda)}{a_1^2}\right) v_1(\tau,\lambda) = 0, \quad \tau \in (R_1, R_2),$$

$$L_2[v_2(\tau,\lambda)] \equiv \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{b_2^2(\lambda)}{a_2^2}\right) v_2(\tau,\lambda) = 0, \quad \tau \in (R_2, \infty) \tag{9.I}$$

по краевым условиям

$$\left(\alpha_{11}^{0}\frac{d}{d\tau}+\beta_{11}^{0}\right)V_1(\tau)\Big|_{\tau=R_1}=0,\quad \frac{dV_2(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau=\infty}=0 \tag{9.2}$$

и условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{1}\frac{d}{d\tau}+\beta_{j1}^{1}\right)V_1(\tau)-\left(\alpha_{j2}^{1}\frac{d}{d\tau}+\beta_{j2}^{1}\right)V_2(\tau)\right]\Big|_{\tau=R_2}=0, \quad j=1,2. \tag{9.3}$$

Здесь $\alpha_{jk}^{m}\geq 0,\ \beta_{jk}^{m}\geq 0,\ b_j=\sqrt{\lambda^2+\gamma_j^2},\ \gamma_j\geq 0,\ j=1,2,$

$c_{j2}=\alpha_{2j}^{1}\beta_{1j}^{1}-\alpha_{1j}^{1}\beta_{2j}^{1}\neq 0,\ \Lambda_{\mu}=\dfrac{d^2}{d\tau^2}+\operatorname{cth}\tau\dfrac{d}{d\tau}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2\tau}$ — оператор Лежандра [19].

Фундаментальную систему решений для уравнений $L_1[V_1(\tau)]=0$ образуют функции $V_{11}=P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+is_1}(\operatorname{ch}\tau)$ и $V_{12}=\mathcal{L}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+is_2}(\operatorname{ch}\tau)$ а для уравнения $L_2[V_2(\tau)]=0$ – функции $V_{21}=\cos S_2(\tau-R_2)$ и $V_{22}=\sin S_2(\tau-R_2),\ S_2=a_2^{-1}b_2,\ s_1=a_1^{-1}b_1.$

Непосредственно проверяется, что решением спектральной задачи Штурма-Лиувилля (9.I) – (9.3) являются функции

$$V_1(\tau,\lambda)=\left[B^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}\tau)Y^{01,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}R_1)-A^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(\operatorname{ch}\tau)Y^{02,\mu}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1},11}(\operatorname{ch}R_1)\right]\frac{b_2}{a_2}c_{22}, \tag{9.4}$$

$$V_2(\tau,\lambda)=\omega_2(\lambda)\cos\frac{b_2}{a_2}(\tau-R_2)-\omega_1(\lambda)\sin\frac{b_2}{a_2}(\tau-R_2).$$

В формулах (9.4) приняты обозначения

$$\delta_{jk}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2)=Y^{12,\mu}_{j,-\frac{1}{2}+is_1}(\operatorname{ch}R_2)Y^{01,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+is_1}(\operatorname{ch}R_1)-Y^{11,\mu}_{jk,-\frac{1}{2}+is_1}(\operatorname{ch}R_2)Y^{02,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+is_1}(\operatorname{ch}R_1),$$

$$\omega_1(\lambda)=\beta_{22}^{1}\delta_{11}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2)-\beta_{12}^{1}\delta_{21}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2),$$

$$\omega_2(\lambda)=\alpha_{22}^{1}\delta_{11}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2)-\alpha_{12}^{1}\delta_{21}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2).$$

Пусть $\theta(\tau)$ – единичная функция Хевисайда. Введем в рассмотрение спектральную плотность

$$\Omega(\lambda)=\frac{-\lambda}{b_2(\lambda)\omega(\lambda)}=\frac{\lambda}{b_2(\lambda)[\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)]}, \tag{9.5}$$

спектральную функцию

$$V(\tau,\lambda)=V_1(\tau,\lambda)\theta(R_2-\tau)\theta(\tau-R_1)+V_2(\tau,\lambda)\theta(\tau-R_2),$$

весовую функцию

$$\sigma(\tau)=\sigma_1 \operatorname{sh}\tau\,\theta(R_2-\tau)\theta(\tau-R_1)+\sigma_2\theta(\tau-R_2)\equiv$$

$$\equiv\frac{a_2 c_{12}\operatorname{sh}\tau}{c_{22}\operatorname{sh}R_2 a_1^2}\theta(R_2-\tau)\theta(\tau-R_1)+\frac{1}{a_2^2}\theta(\tau-R_2)$$

и характеристическую функцию

$$\varkappa(\tau)=a_1^2\theta(R_2-\tau)\theta(\tau-R_1)+a_2^2\theta(\tau-R_2).$$

Наличие спектральной функции $V(\tau,\lambda)$, спектральной плотности $\Omega(\lambda)$ и весовой функции $\sigma(\tau)$ позволяет написать интегральное представление меры Дирака на множестве I_1

$$\frac{\delta(\tau-\rho)}{\sigma(\rho)}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V(\tau,\lambda)V(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda \tag{9.6}$$

интегральное представление (9.6) меры Дирака порождает прямое $\mathfrak{M}_\mu$ и обратное $\mathfrak{M}_\mu^{-1}$ гибридное интегральное преобразование Лежандра 2-го рода – Фурье на полярной оси:

$$\mathfrak{M}_\mu[f(\tau)]=\int_{R_1}^{R_2} f(\tau)V(\tau,\lambda)\sigma(\tau)\,d\tau\equiv\tilde f(\lambda)=$$

$$=\int_{R_1}^{R_2} f(\tau)V_1(\tau,\lambda)\sigma_1\operatorname{sh}\tau\,d\tau+\int_{R_2}^{\infty} f(\tau)V_2(\tau,\lambda)\sigma_2\,d\tau, \tag{9.7}$$

$$\mathfrak{M}_\mu^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \frac{2}{\pi}\int_{R_1}^{\infty}\tilde{f}(\lambda)v(\tau,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \equiv f(\tau). \qquad (9.8)$$

При этом имеет место утверждение.

ТЕОРЕМА I. Пусть функция $f(\tau)e^{\tau/2}$ непрерывная, абсолютно интегрируемая в промежутке (R_1,∞) и имеет там ограниченную вариацию. Тогда для $\tau\in I_1$ справедливое интегральное разложение

$$f(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}v(\tau,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\int_{R_1}^{\infty}f(\rho)v(\rho,\lambda)\sigma(\rho)d\rho. \qquad (9.9)$$

Доказательство: Рассмотрим две функции $v_j(\rho,\lambda)$ и $v_j(\rho,\beta)$ $(j=1,2)$, удовлетворяющие соответственно первому уравнению системы (9.I) (при $j=1$) и второму - (при $j=2$), т.е.

$$\left(\Lambda_\mu + \frac{b_1^2(\lambda)}{a_1^2}\right)v_1(\rho,\lambda)\equiv 0,$$

$$\left(\Lambda_\mu + \frac{b_1^2(\beta)}{a_1^2}\right)v_1(\rho,\beta)\equiv 0 \qquad (9.10)$$

и

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{b_2^2(\lambda)}{a_2^2}\right)v_2(\rho,\lambda)\equiv 0,$$

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{b_2^2(\beta)}{a_2^2}\right)v_2(\rho,\beta)\equiv 0. \qquad (9.11)$$

Если первое уравнение (9.I0) умножить на $v_1(\rho,\beta)\,\mathrm{sh}\,\rho$, а второе - $v_1(\rho,\lambda)\,\mathrm{sh}\,\rho$ и из первого вычтем второе, то в результате имеем:

$$v_1(\rho,\lambda)v_1(\rho,\beta)\,\mathrm{sh}\,\rho = \frac{a_1^2}{\beta^2-\lambda^2}\frac{d}{d\tau}\left[\mathrm{sh}\,\rho\left(v_1(\rho,\beta)\frac{dv_1(\rho,\lambda)}{d\rho} - v_1(\rho,\lambda)\frac{dv_1(\rho,\beta)}{d\rho}\right)\right]. \qquad (9.12)$$

Аналогично первое уравнение (9.II) умножим на $v_2(\rho,\beta)$, а второе – $\upsilon_2(\rho,\lambda)$ и из первого вычтем второе, то получим

$$\upsilon_2(\rho,\lambda)\upsilon_2(\rho,\beta)=\frac{a_2^2}{\beta^2-\lambda^2}\frac{d}{d\tau}\left[\upsilon_2(\rho,\beta)\frac{d\upsilon_2(\rho,\lambda)}{d\rho}-\upsilon_2(\rho,\lambda)\frac{d\upsilon_2(\rho,\beta)}{d\rho}\right]. \qquad (9.13)$$

Затем умножим равенство (9.12) на σ_1 и проинтегрируем по ρ в пределах от R_1 до R_2, а второе на σ_2 и проинтегрируем по ρ в пределах от R_2 до A (где A-const, $A>R_2$), и эти интегралы просуммируем:

$$\int_{R_1}^{R_2}\upsilon_1(\rho,\lambda)\upsilon_1(\rho,\beta)\,\mathrm{sh}\rho\,\sigma_1 d\rho+\int_{R_2}^{A_2}\upsilon_2(\rho,\lambda)\upsilon_2(\rho,\beta)d\rho\equiv\int_{R_1}^{A}\upsilon(\rho,\lambda)\upsilon(\rho,\beta)\times$$

$$\times\sigma(\rho)d\rho=\frac{a_1^2\,\mathrm{sh}\rho}{\beta^2-\lambda^2}\sigma_1\left[\upsilon_1(\rho,\beta)\frac{d\upsilon_1(\rho,\lambda)}{d\rho}-\upsilon_1(\rho,\lambda)\frac{d\upsilon_1(\rho,\beta)}{d\rho}\right]\Bigg|_{R_1}^{R_2}+$$

$$+\frac{a_2^2\sigma_2}{\beta^2-\lambda^2}\left[\upsilon_2(\rho,\beta)\frac{d\upsilon_2(\rho,\lambda)}{d\rho}-\upsilon_2(\rho,\lambda)\frac{d\upsilon_2(\rho,\beta)}{d\rho}\right]\Bigg|_{R_2}^{A}=$$

$$=\frac{a_2^2\sigma_2}{\beta^2-\lambda^2}\left[\upsilon_2(\rho,\beta)\frac{d\upsilon_2(\rho,\lambda)}{d\rho}-\upsilon_2(\rho,\lambda)\frac{d\upsilon_2(\rho,\beta)}{d\rho}\right]\Bigg|_{\rho=A}. \qquad (9.14)$$

Для произвольных положительных чисел c и $d\,(c<d)$ и произвольной конечной функции $\Psi(\lambda)$, заданной на $[c,d]$, найдем величину интеграла

$$\int_{R_1}^{\infty}\left(\int_c^d\Psi(\lambda)\upsilon(\rho,\lambda)d\lambda\right)\upsilon(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int_{R_1}^{A}\left(\int_c^d\Psi(\lambda)\upsilon(\rho,\lambda)d\lambda\right)\upsilon(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int_c^d\left(\int_{R_1}^{A}\upsilon(\rho,\lambda)\upsilon(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\right)\Psi(\lambda)d\lambda=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int_c^d\frac{a_2}{\beta^2-\lambda^2}\left(\upsilon_2(\rho,\beta)\frac{d\upsilon_2(\rho,\lambda)}{d\rho}-\upsilon_2(\rho,\lambda)\frac{d\upsilon_2(\rho,\beta)}{d\rho}\right)\Bigg|_{\rho=A}\Psi(\lambda)d\lambda=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int_c^d\frac{a_2}{\beta^2-\lambda^2}\left[(\omega_2(\lambda)\omega_2(\beta)\cos\frac{b_2(\lambda)}{a_2}(A-R_2)\sin\frac{b_2(\lambda)}{a_2}(A-R_2)+\right.$$

$$+\omega_2(\lambda)\omega_1(\beta)\cos\frac{b_2(\lambda)}{a_2}(A-R_2)\cos\frac{b_2(\beta)}{a_2}(A-R_2)-\omega_1(\lambda)\omega_2(\beta)\sin\frac{b_2}{a_2}(A-R_2)\times$$

$$\times\sin\frac{b_2}{a_2}(A-R_2)-\omega_1(\lambda)\omega_1(\beta)\sin\frac{b_2}{a_2}(A-R_2)\cos\frac{b_2}{a_2}(A-R_2)\Big)b_2(\beta)-$$

$$-\Big(\omega_2(\lambda)\omega_2(\beta)\cos\frac{b_2(\beta)}{a_2}(A-R_2)\sin\frac{b_2(\lambda)}{a_2}(A-R_2)+\omega_2(\beta)\omega_1(\lambda)\times$$

$$\times\cos\frac{b_2(\beta)}{a_2}(A-R_2)\cos\frac{b_2(\lambda)}{a_2}(A-R_2)-\omega_1(\beta)\omega_2(\lambda)\sin\frac{b_2(\beta)}{a_2}(A-R_2)\sin\frac{b_2(\lambda)}{a_2}(A-R_2)-$$

$$-\omega_1(\beta)\omega_1(\lambda)\sin\frac{b_2(\beta)}{a_2}(A-R_2)\cos\frac{b_2(\lambda)}{a_2}(A-R_2)\Big)b_2(\lambda)\Big]\Psi(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\int_c^d\frac{a_2}{\beta^2-\lambda^2}\Big\{\left[\omega_1(\lambda)\omega_1(\beta)+\omega_2(\lambda)\omega_2(\beta)\right]\left(\frac{b_2(\beta)}{a_2^2}+\frac{b_2(\lambda)}{a_2^2}\right)\times$$

$$\times\sin\left[\left(\frac{b_2(\beta)}{a_2^2}-\frac{b_2(\lambda)}{a_2^2}\right)(A-R_2)\right]+\left[\omega_1(\beta)\omega_2(\lambda)-\omega_1(\lambda)\omega_2(\beta)\right]\times$$

$$\times\left(\frac{b_2(\beta)}{a_2^2}-\frac{b_2(\lambda)}{a_2^2}\right)\cos\left[\left(\frac{b_2(\beta)}{a_2^2}-\frac{b_2(\lambda)}{a_2^2}\right)(A-R_2)\right]\Big\}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[b_2^2(\beta)-b_2^2(\lambda)\right]a_2}\Big\}\Psi(\lambda)\,d\lambda=\lim_{A\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_c^d\frac{\Psi(\lambda)\left(\omega_1^2(\beta)+\omega_2^2(\beta)\right)}{\Omega(\lambda)}\times$$

$$\times\frac{\pi}{2}\frac{\sin\left[\left(b_2(\beta)-b_2(\lambda)\right)\frac{A-R_2}{a_2}\right]}{b_2(\beta)-b_2(\lambda)}\,d\lambda=\Psi(\beta)\left[\omega_1^2(\beta)+\omega_2^2(\beta)\right].$$

В предположении, что функция $\Psi(\lambda)$ непрерывная, абсолютно интегрируемая и имеет ограниченную вариацию на $[c,d]$ с использованием леммы Римана и Дирихле [77] имеем:

$$\int_{R_1}^{\infty}\left(\int_c^d\Psi(\lambda)U(\rho,\lambda)\,d\lambda\right)U(\rho,\beta)\sigma(\rho)\,d\rho=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\Psi(\beta)\Omega(\beta), & \beta\in[c,d],\\ 0, & \beta\in[c,d].\end{cases}\tag{9.15}$$

Если функция $\Psi(\lambda)$ обладает указанными выше свойствами на множестве $[0,\infty)$, то

$$\int\limits_{R_1}^{\infty} d\rho \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathcal{V}(\rho,\lambda)\mathcal{V}(\rho,\beta)}{\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\beta)} \Psi(\lambda) d\lambda = \begin{cases} \Psi(\beta), \ \beta \in [0,\infty), \\ 0 \ , \ \beta \overline{\in} (0,\infty). \end{cases} \tag{9.16}$$

Пусть $f(r)$ удовлетворяет условиям теоремы I и представима в виде

$$f(r) = \int\limits_{0}^{\infty} \Psi(\lambda) \frac{\mathcal{V}(r,\lambda)}{\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)} d\lambda \tag{9.17}$$

Умножим (9.17) на $\mathcal{V}(r,\beta)$ и проинтегрируем по r от R_1 до ∞. Здесь β – произвольное положительное число.

В силу (9.16)

$$\int\limits_{R_1}^{\infty} f(r)\mathcal{V}(r,\beta) dr = \int\limits_{R_1}^{\infty} dr \int\limits_{0}^{\infty} \Psi(\lambda) \frac{\mathcal{V}(r,\lambda)\mathcal{V}(r,\beta)}{\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)} d\lambda = \Psi(\beta). \tag{9.18}$$

Отсюда

$$f(r) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathcal{V}(r,\lambda)}{\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)} \int\limits_{R_1}^{\infty} f(\rho)\mathcal{V}(\rho,\lambda)\sigma(\rho) d\rho \, d\lambda. \tag{9.19}$$

В случае кусочной непрерывности функции $f(r)$ в точке r в правой части равенства (9.19) вместо $f(r)$ должно быть

$$\frac{1}{2}\left[f(r-0)+f(r+0)\right].$$

Из формулы (9.19) следует, что функция $f(r)$ по своему образу

$$\tilde{f}(\lambda) = \mathcal{M}_{\mu}[f(r)] = \int\limits_{R_1}^{\infty} f(\rho)\mathcal{V}(\rho,\lambda)\sigma(\rho) d\rho \tag{9.20}$$

восстанавливается однозначно по формуле

$$f(r) = \mathcal{M}_{\mu}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \int\limits_{0}^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\mathcal{V}(r,\lambda)\Omega(\lambda) d\lambda. \tag{9.21}$$

ТЕОРЕМА 2. Для дважды непрерывно дифференцируемой на множестве I_1 функции $f(r)$, исчезающей на бесконечности вместе со своей первой производной, удовлетворяющей краевому условию

$$\left(\alpha_{11}^{0}\frac{d}{dr}+\beta_{11}^{0}\right)f(r)\Big|_{r=R_1}=g_1 \qquad (9.22)$$

и условиям сопряжения (9.3) имеет место основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора

$$\mathfrak{M}_{\mu}[\mathcal{X}(r)R[f(r)]]=\int_{R_1}^{R_2}a_1^2\Lambda_{\mu}[f(r)]v_1(r,\lambda)\sigma_1\operatorname{sh}r\,dr+$$

$$+a_2^2\int_{R_2}^{\infty}\frac{d^2f}{dr^2}v_2(r,\lambda)\sigma_2\,dr=-\lambda^2\tilde{f}(\lambda)+$$

$$+a_1^2\sigma_1\operatorname{sh}R_1(\alpha_{11}^{0})^{-1}v_1(R_1,\lambda)g_1-\gamma_1^2\int_{R_1}^{R_2}f(r)v_1(r,\lambda)\sigma_1\operatorname{sh}r\,dr-$$

$$-\gamma_2^2\int_{R_2}^{\infty}f(r)v_2(r,\lambda)\sigma_2\,dr. \qquad (9.23)$$

Доказательство: Обозначим

$$K_1=\alpha_{11}^1\alpha_{22}^1-\alpha_{21}^1\alpha_{12}^1,\quad K_2=\alpha_{11}^1\beta_{22}^1-\alpha_{21}^1\beta_{12}^1,\quad K_3=\beta_{11}^1\alpha_{22}^1-\beta_{21}^1\alpha_{12}^1,$$

$$K_4=\beta_{11}^1\beta_{22}^1-\beta_{21}^1\beta_{12}^1,\quad f^{\pm}(R_2)=\lim_{r\to R_2\pm 0}f(r).$$

Из тождественных равенств

$$\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^1\right)v_1(r,\lambda)\Big|_{r=R_2}=$$

$$=\left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^1\right)v_2(r,\lambda)\Big|_{r=R_2},\quad j=1,2 \qquad (9.24)$$

следуют соотношения:

$$v_1(R_2,\lambda)=-\frac{1}{c_{11}}\left[K_1\frac{dv_2(R_2,\lambda)}{dr}+K_2v_2(R_2,\lambda)\right],$$

$$\frac{dv_1(R_2,\lambda)}{dr}=\frac{1}{c_{11}}\left[K_3\frac{dv_2(R_2,\lambda)}{dr}+K_4v_2(R_2,\lambda)\right]. \qquad (9.25)$$

В силу предположений на функцию $f(r)$ соотношения (9.25) остаются справедливыми, если $\mathcal{V}_1(R_2,\lambda)$ заменить на $f^-(R_2)$ а $\mathcal{V}_2(R_2,\lambda)$ заменить на $f^+(R_2)$ (и соответственно производные по r).

Наличие соотношений (9.25) дает возможность получить равенство

$$\frac{df^-(R_2)}{dr}\mathcal{V}_1(R_2,\lambda)-f^-(R_2)\frac{d\mathcal{V}_1(R_2,\lambda)}{dr}=\frac{c_{21}}{c_{11}}\left[\frac{df^+(R_2)}{dr}\mathcal{V}_2(R_2,\lambda)-f^-(R_2)\frac{d\mathcal{V}_2(R_2,\lambda)}{dr}\right] \qquad (9.25)$$

Интегрируя в (9.23) под знаком интеграла по частям в силу тождества

$$\left(\Lambda_\mu+\frac{\lambda^2+\gamma_1^2}{a_1^2}\right)\mathcal{V}_1(r)=0,\quad \left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\lambda^2+\gamma_2^2}{a_2^2}\right)\mathcal{V}_2(r)=0 \qquad (9.26)$$

и тождества (9.25) получаем, что

$$\int_{R_1}^{\infty}\mathfrak{X}((r))R[f(r)]\mathcal{V}(r,\lambda)\sigma(r)dr=-\lambda^2\tilde{f}(\lambda)-\gamma_1^2\int_{R_1}^{R_2}f(r)\mathcal{V}_1(r,\lambda)\sigma_1\operatorname{sh}r\,dr-$$

$$-\gamma_2^2\int_{R_2}^{\infty}f(r)\mathcal{V}_2(r,\lambda)\sigma_2dr+a_1^2\sigma_1\operatorname{sh}R_1\left[\frac{df(r)}{dr}\mathcal{V}_2(r,\lambda)-f(r)\frac{d\mathcal{V}_2(r,\lambda)}{dr}\right]\Big|_{r=R_1}- \qquad (9.27)$$

$$-\left(a_1^2\sigma_1\frac{c_{22}}{c_{12}}\operatorname{sh}R_1-a_2^2\sigma_2\right)\left(\frac{df^+(r)}{dr}\mathcal{V}_2(r,\lambda)-f^+(r)\frac{d\mathcal{V}_2(r,\lambda)}{dr}\right)\Big|_{r=R_2}.$$

В силу конструкции функций σ_j

$$a_1^2\sigma_1\frac{c_{22}}{c_{12}}\operatorname{sh}R_2-a_2\sigma_2=a_1\frac{c_{12}a_2}{c_{22}\operatorname{sh}R_2}\operatorname{sh}R_2\frac{c_{22}}{c_{12}}\equiv 0. \qquad (9.28)$$

В силу краевого условия (9.22) при $\alpha_{11}^0\neq 0$

$$\left(\frac{df(r)}{dr}\mathcal{V}_2(r,\lambda)-f(r)\frac{d\mathcal{V}_2(r,\lambda)}{dr}\right)\Big|_{r=R_1}=\left(\frac{1}{\alpha_{11}^0}\left(\alpha_{11}^0\frac{df(R_1)}{dr}+\beta_{11}^0f(r)\right)\mathcal{V}_2(r,\lambda)-\right.$$

$$\left.-\frac{\beta_{11}^0}{\alpha_{11}^0}f(r)\mathcal{V}_2(r,\lambda)-f(r)\frac{d\mathcal{V}_2(r,\lambda)}{dr}\right)\Big|_{r=R_1}=\frac{\mathcal{V}_2(R_1,\lambda)}{\alpha_{11}^0}-\frac{1}{\alpha_{11}^0}f(r)\left(\alpha_{11}^0\frac{d\mathcal{V}_2}{dr}+\beta_{11}^0\mathcal{V}_2\right)\Big|_{r=R_1} \qquad (9.29)$$

С учетом (9.28), (9.29) левая часть равенства (9.27) совпадает с левой частью равенства (9.23).

Отметим, что параметры γ_j , $\alpha_{jk}^m, \beta_{jk}, \mu$ принимающие участие в формулировке задачи (9.I) - (9.3), позволяют получить непосредственно из общих выражений структуры ядер интегральных операторов $\mathfrak{M}_\mu$ и $\mathfrak{M}_\mu^{-1}$ для всех наиболее часто употребляемых в практике случаев условий сопряжения и краевых условий на границе $\tau=R_1$.

Следствие I. Если $R_1=0$, то решением спектральной задачи Штурма-Лиувилля (9.I), (9.3) являются функции

$$v_1(\tau,\lambda)=c_{21}\frac{b_2}{a_2}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1}}(ch\tau),$$

$$v_2(\tau,\lambda)=\omega_1(\lambda)\sin\frac{b_2}{a_2}(\tau-R_2)-\frac{b_2}{a_2}\omega_2(\lambda)\cos\frac{b_2}{a_2}(\tau-R_2), \tag{9.30}$$

где

$$\omega_1(\lambda)=\beta^1_{12}\delta_{21}\left(\frac{b_1}{a_1}R_2\right)-\beta^1_{22}\delta_{11}\left(\frac{b_1}{a_1}R_2\right),\ \omega_2(\lambda)=\alpha^1_{12}\delta_{21}\left(\frac{b_1}{a_1}R_2\right)-\alpha^1_{22}\delta_{11}\left(\frac{b_1}{a_1}R_2\right),$$

$$\delta_{j1}\left(\frac{b_1}{a_1}R_2\right)=\sin\mu\pi\, Y^{11,\mu}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1},j1}(chR_2)+\cos\mu\pi\, Y^{12,\mu}_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{a_1},j1}(chR_2).$$

Наличие спектральной плотности

$$\Omega(\lambda)=\lambda b_2(\lambda)\left[\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)\right]^{-1} \tag{9.3I}$$

весовой функции

$$\sigma(\tau)=\sigma_1 sh\tau\,\theta(R_2-\tau)+\sigma_2\theta(\tau-R_2)\equiv\frac{c_{11}a_2 sh\tau}{c_{21}a_1^2 shR}\theta(R_2-\tau)+\frac{1}{a_2^2}\theta(\tau-R_2)$$

и спектральной функции

$$v(\tau,\lambda)=v_1(\tau,\lambda)\,\theta(R_2-\tau)+v_2(\tau,\lambda)\,\theta(\tau-R_2)$$

позволяет написать интегральное представление меры Дирака, что порождает прямое $\mathfrak{M}_\mu$ и обратное $\mathfrak{M}_\mu^{-1}$ гибридные интегральные преобразования Лежандра-Фурье:

$$\mathfrak{M}_\mu[f(\tau)]=\int_0^\infty f(\tau)v(\tau,\lambda)\sigma(\tau)d\tau\equiv\tilde{f}(\lambda), \tag{9.32}$$

$$\mathfrak{M}_{\mu}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\tilde{f}(\lambda)V(\tau,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\equiv f(\tau). \tag{9.33}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $\tau e^{\tau/2}f(\tau)$ кусочно-непрерывная, абсолютно интегрированная на нитервале $(0,\infty)$ и имеет там ограниченную вариацию. Тогда для $\tau\in I_1^+$ справедливо интегральное разложение

$$\frac{1}{2}[f(\tau+0)+f(\tau-0)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}V(\tau,\lambda)\Omega(\lambda)\int_0^{\infty}f(\rho)V(\rho,\lambda)\sigma(\rho)d\rho d\lambda. \tag{9.34}$$

ТЕОРЕМА 4. Для дважды непрерывно дифференцируемой на множестве I_1 функции $f(\tau)$, что удовлетворяет условиям сопряжения и исчезает на бесконечности вместе со своей первой производной, имеет место основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора.

$$\mathfrak{M}_{\mu}[\gamma(\tau)R[f(\tau)]]=-\lambda^2\tilde{f}(\lambda)-\gamma_1^2\int_0^{R_1}f(\tau)V_1(\tau,\lambda)\sigma_1 sh\tau d\tau-$$

$$-\gamma_2^2\int_{R_1}^{\infty}f(\tau)V_2(\tau,\lambda)\sigma_2 d\tau. \tag{9.35}$$

Доказательство этих утверждений производится по схеме доказательства первой и второй теоремы.

§ 10. ГИБРИДНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ-ЛЕЖАНДРА НА ПОЛЯРНОЙ ОСИ

Рассмотрим спектральную задачу Штурма-Лиувилля о конструкции на множестве $I_1^+=\{\tau:\tau\in(0,R)\cup(R,\infty)\}$ решения сепаратной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$L_1[V_1(\tau)]\equiv\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\frac{b_1^2(\lambda)}{a_1^2}\right)V_1(\tau)=0,\quad \tau\in(0,R),$$

$$L_2[v_2(r)] \equiv \left(\Lambda_\mu + \frac{b_2^2(\lambda)}{a_2^2}\right) v_2(r) = 0, \quad r\in(R,\infty) \tag{10.1}$$

по условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha^1_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^1_{j1}\right)v_1(r) - \left(\alpha^1_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^1_{j2}\right)v_2(r)\right]\Big|_{r=R_1}=0, \quad j=1,2 \tag{10.2}$$

и краевым условиям

$$\left(-h_1\frac{d}{dr}+h_2\right)v_2(r)\Big|_{r=0}=0, \quad \frac{dv_2(r)}{dr}\Big|_{r=\infty}=0. \tag{10.3}$$

Здесь

$$a_j^2>0,\ \alpha^1_{jk}\ge 0,\ \beta^1_{jk}\ge 0,\ b_j=\sqrt{\lambda^2+\gamma_j^2},\ \gamma_j\ge 0,\ j,k=1,2;$$

$$h_j\ge 0,\ h_1^2+h_2^2\ne 0,\ c_{j1}=\alpha_{2j}\beta_{1j}-\alpha_{1j}\beta_{2j}\ne 0,$$

$$\Lambda_\mu = \frac{d^2}{dr^2}+\operatorname{cth} r\frac{d}{dr}+\frac14-\frac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2 r}$$

оператор Лежандра [19].

Фундаментальную систему решений для уравнения $L_1[v_1(r)]=0$ образуют функции $\cos q_1 r$ и $\sin q_1 r$, а для уравнения $L_2[v_2(r)]=0$ функции $P^\mu_{-\frac12+iq_2}(\operatorname{ch} r)$ и $\mathcal{Q}^\mu_{-\frac12+iq_2}(\operatorname{ch} r)$, $q_j=a_j^{-1}b_j(\lambda)$, $i^2=-1$.

Непосредственно проверяется, что решение задачи (10.1)-(10.3) имеет вид:

$$v_1(r,\lambda)=\frac{2c_{21}\left|\Gamma\left(\frac12+i\frac{b_2}{a_2}+\mu\right)\right|^2}{\pi^2\operatorname{sh}R}\operatorname{ch}\pi\frac{b_2}{a_2}\left[h_1\frac{b_1}{a_1}\cos\frac{b_1}{a_1}r+h_2\sin\frac{b_1}{a_1}r\right], \tag{10.4}$$

$$v_2(r,\lambda)=\omega_1(\lambda)B^\mu_{-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}r)-\omega_2(\lambda)A^\mu_{-\frac12+i\frac{b_2}{c_2}}(\operatorname{ch}r),$$

$$\omega_j(\lambda)=\left[h_1\frac{b_1}{a_1}v^{11}_{21}\left(\frac{b_1}{a_1}R\right)+h_2v^{12}_{21}\left(\frac{b_1}{a_1}R\right)\right]Y^{1j,\mu}_{12,-\frac12+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R)-$$

$$-\left[h_1\frac{b_1}{a_1}v_{11}^{11}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1\right)+h_2 v_{11}^{12}\left(\frac{b_1}{a_1}R_1\right)\right]y^{1j,\mu}_{22,-\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}}(\operatorname{ch}R).$$

Если ввести теперь спектральную плотность

$$\Omega(\lambda)=\frac{\lambda\pi \operatorname{th}^{1}\pi\frac{b_2}{a_2}\left[\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)\right]^{-1}}{\operatorname{sh}\frac{b_2}{a_2}\pi\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{b_2}{a_2}+\mu\right)\right|^2}, \qquad (10.5)$$

спектральную функцию

$$v(\tau,\lambda)=v_1(\tau,\lambda)\theta(R-\tau)+v_2(\tau,\lambda)\theta(\tau-R) \qquad (10.6)$$

и весовую функцию

$$\sigma(\tau)=\sigma_1\theta(R-\tau)+\sigma_2\operatorname{sh}\tau\,\theta(\tau-R)\equiv\frac{c_{11}\operatorname{sh}R}{a_1^2 c_{21}}\theta(R-\tau)+\frac{\operatorname{sh}\tau}{a_2^2}\theta(\tau-R), \qquad (10.7)$$

то можно написать интегральное представление на множестве меры Дирака

$$\frac{\delta(\tau-\rho)}{\sigma(\rho)}=\int_0^\infty v(\tau,\lambda)v(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda. \qquad (10.8)$$

Интегральное представление (10.8) порождает прямое $\mathfrak{M}_\mu$ и обратное $\mathfrak{M}_\mu^{-1}$ гибридное интегральное преобразование Фурье-Лежандра:

$$\mathfrak{M}_\mu[f(\tau)]=\int_0^\infty f(\tau)v(\tau,\lambda)\sigma(\tau)\,d\tau\equiv\tilde{f}(\lambda), \qquad (10.9)$$

$$\mathfrak{M}_\mu[\tilde{f}(\lambda)]=\int_0^\infty \tilde{f}(\lambda)v(\tau,\lambda)\Omega(\lambda)\,d\lambda\equiv f(\tau). \qquad (10.10)$$

При этом имеют место утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Если функция $\tau e^{\tau/2}f(\tau)$ кусочно-непрерывная, абсолютно интегрированная на интервале $(0,\infty)$ и имеет там ограниченную вариацию, то для $\tau\in I_1^+$ справедливо интегральное разложение

$$\frac{1}{2}\left[f(r+0)+f(r-0)\right]=\int_0^\infty V(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\int_0^\infty f(\rho)V(\rho,\lambda)\sigma(\rho)d\rho . \qquad (10.11)$$

Доказательство этой теоремы можно провести аналогично доказательству теоремы I § 2 или доказательству теоремы I § 9.

ТЕОРЕМА 2. Для дважды дифференцируемой на множестве I_1^+ функции $f(r)$, что удовлетворяет условиям сопряжения и исчезает на бесконечности вместе со своей первой производной как функция $g(r)=f(r)e^{r/2}$, имеет место основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора

$$\mathfrak{M}_\mu[\aleph(r)L[f(r)]]=a_1^2\int_0^R\frac{d^2f(r)}{dr^2}V_1(r,\lambda)\sigma_1dr+$$

$$+a_2^2\int_R^\infty\Lambda_\mu[f(r)]V_2(r,\lambda)\sigma_2 \operatorname{sh} r\,dr=-\lambda^2\tilde{f}(\lambda)+\frac{a_1^2}{h_1}\sigma_1V_1(R_1,\lambda)\times$$

$$\times\left(-h_1\frac{df(r)}{dr}+h_2f(r)\right)\Big|_{r=0}-\gamma_1^2\int_0^R f(r)V_1(r,\lambda)\sigma_1dr-$$

$$-\gamma_2^2\int_R^\infty f(r)V_2(r,\lambda)\sigma_2 \operatorname{sh} r\,dr. \qquad (10.12)$$

Доказательство производится методом интегрирования по частям с использованием свойств функций $f(r), V_j(r,\lambda)\,\sigma_j$ и равенства

$$\frac{df^-(R)}{dr}V_1(R,\lambda)-f^-(R)\frac{dV_1(R,\lambda)}{dr}=\frac{c_{21}}{c_{11}}\left[\frac{df^+(R)}{dr}V_2(R,\lambda)-f^+(R)\frac{dV_2(R,\lambda)}{dr}\right].$$

Здесь $f^\pm(R)=\lim\limits_{r\to R\pm 0}f(r)$.

ГЛАВА 3.

§ II. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ ГИБРИДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕЖАНДРА 2-ГО РОДА - ФУРЬЕ

Рассмотрим задачу построения ограниченного на множестве $I_1=\{r: r\in(R_0,R_1)\cup(R_1,\infty),\ R_0>0\}$ решения сепаратной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(\Lambda_\mu - q_1^2\right)U_1(r) = -f(r),\ r\in(R_0,R_1),$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2\right)U_2(r) = -f_2(r),\ r\in(R_1,\infty) \qquad (II.I)$$

по краевым условиям

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0\right)U_1(r)\Big|_{r=R_0} = g,\quad \frac{dU_2(r)}{dr}\Big|_{r=\infty} = 0 \qquad (II.2)$$

и условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^1\right)U_1(r) - \left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^1\right)U_2(r)\right]\Big|_{r=R_1} = 0. \qquad (II.3)$$

Фундаментальную систему решений для уравнения $\left(\Lambda_\mu - q_1^2\right)U_1(r)=0$ образуют функции $P^\mu_{-\frac12+q_1}(ch\,r)$ и $\mathcal{I}^\mu_{-\frac12+q_1}(ch\,r)$, а для уравнения $\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_2^2\right)U_2(r)=0$ – функции $\exp(-q_2 r)$ и $\exp(q_2 r)$ (или $ch\,q_2 r$ и $sh\,q_2 r$).

Ограниченное на множестве I_1 решение системы (II.I) будем отыскивать по правилам [68]:

$$U_1(r) = A_1 P^\mu_{-\frac12+q_1}(ch\,r) + B_1\mathcal{I}^\mu_{-\frac12+q_1}(ch\,r) + \int_{R_0}^{R_1}\mathcal{E}_1(r,\rho)f_1(\rho)\,sh\rho\,d\rho,$$

$$U_2(r) = B_2 e^{-q_1(r-R_1)} + \int_{R_1}^{\infty}\mathcal{E}_2(r,\rho)f_2(\rho)\,d\rho. \qquad (II.4)$$

Здесь $\mathcal{E}_j(r,\rho)$ – функции Коши.

Предположим, что функция Коши

$$\mathcal{E}_1(r,\rho) = \begin{cases} \bar{\mathcal{E}}_1 \equiv C_{11}P^\mu_{-\frac12+q_1}(ch\,r) + \mathcal{D}_{11}\mathcal{I}^\mu_{-\frac12+q_1}(ch\,r), & R_0<r<\rho<R_1, \\ \overset{+}{\mathcal{E}}_2 \equiv C_{12}P^\mu_{-\frac12+q_1}(ch\,r) + \mathcal{D}_{12}\mathcal{I}^\mu_{-\frac12+q_1}(ch\,r), & R_0<\rho<r<R_1. \end{cases} \qquad (II.5)$$

В силу свойств функции Коши для определения постоянных C_{1j}

и $\mathcal{D}_{1j}$ $(j=1,2)$ имеем алгебраическую систему четырех уравнений:

$$
\begin{gathered}
(C_{12}-C_{11})P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)+(\mathcal{D}_{12}-\mathcal{D}_{11})\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)=0,\\
(C_{12}-C_{11})P^{\mu'}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)+(\mathcal{D}_{12}-\mathcal{D}_{11})\mathcal{I}^{\mu'}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)=-\frac{1}{sh^2\rho}, \qquad (II.6)\\
U^{01,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_0)C_{11}+U^{02,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_0)\mathcal{D}_{11}=0,\\
U^{11,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_1)C_{12}+U^{12,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_1)\mathcal{D}_{12}=0.
\end{gathered}
$$

В алгебраической системе (II.6) приняты обозначения:

$$
U^{m1,\mu}_{ij,-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_m)=\left(\alpha^m_{ij}\frac{d}{dz}+\beta^m_{ij}\right)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch z)\Big|_{z=R_m}\equiv
$$

$$
\equiv\alpha^m_{ij}\,sh R_m\,P^{\mu'}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_m)+\beta^m_{ij}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_m),
$$

$$
U^{m2,\mu}_{ij,-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_m)=\left(\alpha^m_{ij}\frac{d}{dz}+\beta^m_{ij}\right)\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch z)\Big|_{z=R_m}\equiv
$$

$$
\equiv\alpha^m_{ij}\,sh R_m\,\mathcal{I}^{\mu'}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_m)+\beta^m_{ij}\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_m).
$$

Из алгебраической системы (II.6) в силу известного тождества [19]

$$
P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)\mathcal{I}^{\mu'}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)-P^{\mu'}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)=-\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1+\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1-\mu)}\frac{1}{sh^2\rho}
$$

находим

$$
C_{12}-C_{11}=-\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1+\mu)}\mathcal{I}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho),\quad \mathcal{D}_{12}-\mathcal{D}_{11}=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1+\mu)}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho),
$$

$$
C_{11}=-\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1+\mu)}\frac{\Psi^{1,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho, ch R_1)}{\Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1,1}(ch R_0, ch R_1)}U^{02,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_0),
$$

$$\mathcal{D}_{11}=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1+\mu)}\frac{\Psi^{1,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho, ch R_1)}{\Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_0, ch R_1)}\, U^{01,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_0),$$

$$\Psi^{1,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho, ch R_1)=U^{11,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_1)\mathcal{L}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)-U^{12,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_1)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho),$$

$$\Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1,j}(ch R_0, ch R_1)=U^{01,\mu}_{j1,-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_0)U^{12,\mu}_{j1,-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_1)-U^{02,\mu}_{j1,-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_0)U^{11,\mu}_{j1,-\frac{1}{2}+q_1}(ch R_1).$$

Этим функция Коши $\mathcal{E}(\tau,\rho)$ определена и в силу симметрии относительно $\tau=\rho$ имеет структуру:

$$\mathcal{E}_1(\tau,\rho)=-\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1+\mu)}\begin{cases}\Psi^{1,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho, ch R_1)\Psi^{0,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch\tau, ch R_0), \\ \qquad R_0<\tau<\rho<R_1, \\ \Psi^{1,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch\tau, ch R_1)\Psi^{0,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho, ch R_0), \\ \qquad R_0<\rho<\tau<R_1.\end{cases} \qquad (II.7)$$

Пусть функция Коши

$$\mathcal{E}_2(\tau,\rho)=\begin{cases}C_{21}ch\, q_2(\tau-R_1)+\mathcal{D}_{21}sh\, q_2(\tau-R_1), \; R_1<\tau<\rho<\infty, \\ \mathcal{D}_{22}e^{-q_2(\tau-R_2)}, \; R_1<\rho<\tau<\infty.\end{cases}$$

В силу свойств функции Коши для определения коэффициентов C_{21}, $\mathcal{D}_{21}$, $\mathcal{D}_{22}$ имеем алгебраическую систему трех уравнений:

$$C_{21}ch\, q_2(\rho-R_1)+\mathcal{D}_{22}e^{-q_2(\rho-R_1)}+\mathcal{D}_{21}sh\, q_2(\rho-R_1)=0,$$

$$C_{21}sh\, q_2(\rho-R_1)+\mathcal{D}_{22}e^{-q_2(\rho-R_1)}+\mathcal{D}_{21}ch\, q_2(\rho-R_1)=\frac{1}{q_2},$$

$$\left(\alpha^1_{12}\frac{d}{d\tau}+\beta^1_{12}\right)\mathcal{E}_2(\tau,\rho)\Big|_{\tau=R_1}\equiv\beta^1_{12}C_{21}+\alpha^1_{12}q_1\mathcal{D}_{21}=0. \qquad (II.8)$$

Из системы (II.8) находим:

$$C_{21} = \mathcal{D}_{22} - \frac{\operatorname{sh} q_2(\rho - R_1)}{q_2}, \quad \mathcal{D}_{21} = -\mathcal{D}_{22} + \frac{\operatorname{ch} q_2(\rho - R_1)}{q_2},$$

$$\mathcal{D}_{22} = \frac{\alpha_{12}^1 q_2 \operatorname{ch} q_2(\rho - R_1) - \beta_{12}^1 \operatorname{sh} q_2(\rho - R_1)}{q_2(\alpha_{12}^1 q_2 - \beta_{12}^1)}.$$

Этим функция $\mathcal{E}_2(\tau,\rho)$ определена и в силу симметрии относительно точки $\tau = \rho$ имеет вид:

$$\mathcal{E}_2(\tau,\rho) = \frac{1}{q_2(\alpha_{12}^1 q_2 - \beta_{12}^1)} \begin{cases} e^{-q_2(\rho - R_1)} [\alpha_{12}^1 q_2 \operatorname{ch} q_2(\tau - R_1) - \beta_{12}^1 \operatorname{sh} q_2(\tau - R_1)], \\ \qquad R_1 < \tau < \rho < \infty, \\ e^{-q_2(\tau - R_1)} [\alpha_{12}^1 q_2 \operatorname{ch} q_2(\rho - R_1) - \beta_{12}^1 \operatorname{sh} q_2(\rho - R_1)], \\ \qquad R_1 < \rho < \tau < \infty. \end{cases} \qquad (II.9)$$

Краевые условия (II.2) и условия сопряжения (II.3) для определения постоянных A_1, B_1 и B_2 дают алгебраическую систему трех уравнений:

$$A_1 U^{01,\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1,11}(\operatorname{ch} R_0) + B_1 U^{02,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch} R_0) = g,$$

$$A_1 U^{11,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch} R_1) + B_1 U^{12,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch} R_1) + (\alpha_{12}^1 q_2 - \beta_{12}^1) B_2 = 0, \qquad (II.10)$$

$$A_1 U^{11,\mu}_{21,-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch} R_1) + B_1 U^{12,\mu}_{21,-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch} R_1) + (\alpha_{22}^1 q_2 - \beta_{22}^1) B_2 = G_{12}.$$

В алгебраической системе (II.10) функция

$$G_{12} = \frac{C_{11}}{\operatorname{sh} R_1 \Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1,1}} \int_{R_0}^{R_1} \Psi^{0,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\rho, \operatorname{ch} R_0) f_1(\rho) \operatorname{sh}\rho\, d\rho - \frac{C_{21}}{\alpha_{12}^1 q_2 - \beta_{12}^1} \int_{R_1}^{\infty} e^{-q_2(\rho - R_1)} f_2(\rho)\, d\rho.$$

Предположим, что выполнено условие неограниченной разрешимости краевой задачи (II.I) - (II.3) определитель алгебраической системы (II.I0)

$$\Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1} \equiv (\alpha_{22}^1 q_2 - \beta_{22}^1) \Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1,1} - (\alpha_{12}^1 q_2 - \beta_{12}^1) \Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1,2} \neq 0. \qquad (II.11)$$

Введем в рассмотрение функции Грина

$$W_{11}(z)=\frac{1}{\Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}}\left[(\alpha^1_{12}q_2-\beta^1_{12})\Psi^{1,\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1,21}(\operatorname{ch}z,\operatorname{ch}R_1)-(\alpha^1_{22}q_2-\beta^1_{22})\Psi^{1,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}z,\operatorname{ch}R_1)\right],$$

$$W_{12}(z)=\frac{2}{\pi}\,\frac{C_{11}}{\operatorname{sh}R_1}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1+\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1-\mu)}\,\frac{e^{-q_2(z-R_1)}}{\Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}} \tag{II.12}$$

и функции влияния

$$\mathcal{H}_{11}(z,\rho)=\frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1+\mu)}\begin{cases}\Psi^{0,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}z,\operatorname{ch}R_0)\,W_{11}(\rho), & R_0<z<\rho<R_1,\\ \Psi^{0,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\rho,\operatorname{ch}R_0)\,W_{11}(z), & R_0<\rho<z<R_1,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{12}(z,\rho)=\frac{C_{21}}{\Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}}\,e^{-q_2(\rho-R_1)}\,\Psi^{0,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}z,\operatorname{ch}R_0),$$

(II.13)

$$\mathcal{H}_{21}(z,\rho)=\frac{C_{11}}{\operatorname{sh}R_1\,\Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}}\,e^{-q_2(z-R_1)}\,\Psi^{0,\mu}_{11,-\frac{1}{2}+q_1}(\operatorname{ch}\rho,\operatorname{ch}R_0),$$

$$\mathcal{H}_{22}(z,\rho)=\frac{1}{q_2\Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}}\begin{cases}e^{-q_2(\rho-R_1)}\left[\Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1,1}\left[\alpha^1_{22}q_2\operatorname{ch}q_2(z-R_1)-\beta^1_{22}\operatorname{sh}q_2(z-R_1)\right]-\Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1,2}\left[\alpha^1_{12}q_2\operatorname{ch}q_2(z-R_1)-\beta^1_{12}\operatorname{sh}q_2(z-R_1)\right]\right], & R_1<z<\rho<\infty,\\ e^{-q_2(z-R_1)}\left[\Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1,1}\left[\alpha^1_{22}q_2\operatorname{ch}q_2(\rho-R_1)-\beta^1_{22}\operatorname{sh}q_2(\rho-R_1)\right]-\Delta^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1,2}\left[\alpha^1_{12}q_2\operatorname{ch}q_2(\rho-R_1)-\beta^1_{12}\operatorname{sh}q_2(\rho-R_1)\right]\right], & R_1<\rho<z<\infty.\end{cases}$$

В результате однозначной разрешимости алгебраической системы (II.10), подстановки найденных значений A_1, A_2, B_2 в (II.4) и элементарных преобразований, получаем единственное решение краевой задачи (II.1) - (II.3):

$$U_j(z)=W_{1j}(z)g+\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}_{j1}(z,\rho)f_1(\rho)\operatorname{sh}\rho\,d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{\infty}\mathcal{H}_{j2}(r,\rho)f_2(\rho)d\rho,\ j=1,2. \qquad (II.I4)$$

Построим решение краевой задачи (II.I) - (II.3) методом гибридного интегрального преобразования Лежандра 2-го рода - Фурье (§ 9. гл.2-ая).

Запишем систему (II.I) в матричной форме

$$\begin{pmatrix}(\Lambda_\mu - q_1^2)u_1(r)\\ \left(\frac{d^2}{dr^2}-q_2^2\right)u_2(r)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}f_1(r)\\ f_2(r)\end{pmatrix}. \qquad (II.I5)$$

Применим к системе (II.I5) по правилу умножения матрицу операторную матрицу - строку

$$\mathcal{M}_\mu[\ldots]=\left(\int_{R_0}^{R_1}\ldots v_1(r,\lambda)\,\mathrm{sh}\,r\,\sigma_1 dr \quad \int_{R_1}^{\infty}\ldots v_2(r,\lambda)\sigma_2 dr\right). \qquad (II.I6)$$

В силу тождества (9.23) при $a_1=a_2=1$ имеем:

$$-\sigma_1\,\mathrm{sh}\,R_0\frac{v_1(R_0,\lambda)}{d_{11}^0}g-(\lambda^2+\gamma_1^2+q_1^2)\int_{R_0}^{R_1}u_1(r)v(r,\lambda)\,\mathrm{sh}\,r\,\sigma_1 dr-$$

$$-(\lambda^2+\gamma_2^2+q_2^2)\int_{R_1}^{\infty}u_2(r)v_2(r,\lambda)\sigma_2 dr=-\tilde{f}(\lambda). \qquad (II.I7)$$

Предположим, что $q_2^2-q_1^2\equiv\gamma^2\geq 0$ (в противном случае q_1^2 и q_2^2 меняются местами). Полагая в (II.I7) $\gamma_2^2=0,\ \gamma_1^2=q_2^2-q_1^2\equiv\gamma^2\geq 0$ получаем алгебраическое уравнение:

$$(\lambda^2+q_2^2)\tilde{u}(\lambda)=\tilde{f}(\lambda)-\sigma_1\,\mathrm{sh}\,R_0\frac{v_1(R_0,\lambda)}{d_{11}^0}g. \qquad (II.I8)$$

Отсюда находим, что

$$\tilde{\mathfrak{U}}(\lambda)=\frac{\tilde{f}(\lambda)}{\lambda^2+q_2^2}-\frac{\sigma_1 sh R_0 v_1(R_0,\lambda)}{d_{11}^{\circ}(\lambda^2+q_2^2)}g. \tag{II.19}$$

Применим к матрице-элементу $(\tilde{\mathfrak{U}}(\lambda))$ по правилу умножения матриц операторную матрицу-столбец

$$\mathfrak{M}_{\mu}^{-1}[\ldots]=\begin{pmatrix}\int_0^{\infty}\ldots v_1(r,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda\\ \int_0^{\infty}\ldots v_2(r,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda\end{pmatrix}. \tag{II.20}$$

В результате элементарных преобразований получаем единственное решение краевой задачи (II.I) - (II.3)

$$U_j(r)=A_{1j}(r)g+\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{B}_{j1}(r,\rho)f_1(\rho)\,sh\rho\,\sigma_1\,d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{\infty}\mathcal{B}_{j2}(r,\rho)f_2(\rho)\,\sigma_2\,d\rho,\quad j=1,2. \tag{II.2I}$$

В формулах (II.2I) принимают участие:

а) функции Грина

$$A_{1j}(r)=-\frac{\sigma_1 sh R_0}{d_{11}^{\circ}}\int_0^{\infty}\frac{v_1(R_0,\lambda)v_j(r,\lambda)}{(\lambda^2+q_2^2)}\Omega(\lambda)\,d\lambda,\quad j=1,2; \tag{II.22}$$

б) функции влияния

$$\mathcal{B}_{jm}(r,\rho)=\int_0^{\infty}\frac{v_j(r,\lambda)v_m(\rho,\lambda)}{\lambda^2+q_2^2}\Omega(\lambda)\,d\lambda,\quad j,m=1,2 \tag{II.23}$$

Сравнивая решения (II.I4) и (II.2I) в силу единственности, имеем значения полипараметрических несобственных интегралов, подинтегральные функции которых представляют собой комбинации тригонометрических функций и функций Лежандра:

$$-\frac{\sigma_1 \operatorname{sh} R_0}{\alpha_{11}^0}\int\limits_0^\infty \frac{v_1(R_0,\lambda)v_j(r,\lambda)}{\lambda^2+q_2^2}\Omega(\lambda)d\lambda = W_{1j}(r),\ j=1,2 \qquad (II.24)$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{v_j(r,\lambda)v_m(\rho,\lambda)}{\lambda^2+q_2^2}\Omega(\lambda)d\lambda = \frac{1}{\sigma_m}\mathcal{H}_{jm}(r,\rho),\ j,m=1,2. \qquad (II.25)$$

Поскольку W_{1j} и $\mathcal{H}_{jm}$ не зависят от неравенства $q_2^2-q_1^2\geq 0$ то не умаляя общности решения краевой задачи (II.I) - (II.3), можно положить $q_2=q_1=q$.

§ I2. КРУЧЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ

А. Кручение неоднородных стержней

Рассмотрим неоднородный стержень радиуса R , составленный из двух материалов:

$$G(z)=\begin{cases} G_1\equiv G_{10}\ , & z\in(0,\ell),\\ G_2\equiv G_{20}\operatorname{sh} z\ , & z\in(\ell,\infty)\end{cases}$$

Неоднородные участки стержня считаем спаянными между собой. Предположим, что I) торец $z=0$ стержня закреплен; 2) боковая поверхность нагружена осесимметричными крутящими усилиями; 3) на бесконечности перемещения ограничены.

Задача о кручении такого стержня математически приводит к построению ограниченного в области

$$\mathcal{D}=\{(r,z): r\in(0,R),\ z\in(0,\ell)\cup(\ell,\infty)\}$$

решения сепаратной системы уравнений

$$\left(B_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_1(r,z)\equiv\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}-\frac{u_1}{r^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}=-F_1(r,z)\ ,\ z\in(0,\ell),$$

$$\left(B_1-\Lambda_0+\frac{1}{4}\right)u_2(r,z)\equiv\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r}-\frac{u_2}{r^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}+\operatorname{cth} z\frac{\partial u_2}{\partial z}=-F_2(r,z) \qquad (I2.I)$$

по краевым условиям

$$u_1(r,z)\big|_{z=0}=0,\quad u_2(r,z)\big|_{z=\infty}<\infty, \tag{I2.2}$$

$$u_j(r,z)\big|_{r=0}=0,\quad \left(\frac{\partial u_j(r,z)}{\partial r}-\frac{1}{r}u_j(r,z)\right)\Big|_{r=R}=\frac{f(z)}{G_j(z)},\quad j=1,2 \tag{I2.3}$$

и условиям механического контакта

$$\left[u_1(r,z)-u_2(r,z)\right]\big|_{z=\ell}=0,\quad \left(\frac{\partial u_1(r,z)}{\partial z}-\frac{G_{20}}{G_{10}}\,sh\,\ell\,\frac{\partial u_2(r,z)}{\partial z}\right)\Big|_{z=\ell}=0. \tag{I2.4}$$

Решение задачи (I2.I) – (I2.4) построим методом гибридного интегрального преобразования Фурье-Лежандра [ ].

Запишем систему (I2.I) и краевые условия (I2.3) в матричной форме

$$\begin{pmatrix}\left(B_1+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_1(r,z)\\ \left(B_1+\Lambda_0-\dfrac{1}{4}\right)u_2(r,z)\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}F_1(r,z)\\ F_2(r,z)\end{pmatrix}, \tag{I2.5}$$

$$\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\Big|_{r=0}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\right)u_1(r,z)\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\right)u_2(r,z)\end{pmatrix}\Big|_{r=R}=\begin{pmatrix}f_1(z)\\ f_2(z)\end{pmatrix}. \tag{I2.6}$$

Согласно формул (I0.4) введем в рассмотрение функции:

$$v_1(z,\lambda)=\frac{2G_{20}}{\pi^2 G_{10}}\left|\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+i\lambda\right)\right|^2 ch\,\pi\lambda\,\sin\lambda z,$$

$$v_2(z,\lambda)=\omega_1(\lambda)B_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\,z)-\omega_2(\lambda)A_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\,z),$$

$$\omega_1(\lambda)=\lambda\cos\lambda\ell\,A_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\,\ell)-\sin\lambda\ell\,\frac{G_{20}}{G_{10}}\,sh^2\ell\,A'_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\,\ell). \tag{I2.7}$$

$$\omega_2(\lambda)=\lambda\cos\lambda\ell\, B_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\,\ell)-\sin\lambda\ell\frac{G_{20}}{G_{10}}sh^2\ell\, B'_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(ch\,\ell).$$

Определим операторную матрицу-строку

$$\mathfrak{M}_0[\ldots]=\left(\int_0^\ell \ldots v_1(z,\lambda)\frac{G_{10}}{G_{20}}dz\ \int_\ell^\infty \ldots v_2(z,\lambda)\,sh\,z\,dz\right). \qquad (12.8)$$

Применяя операторную матрицу-строку $\mathfrak{M}_0$ к системе (12.5) и краевым условиям (12.6) по правилу умножения матриц, в силу тождества (9.23) получаем задачу построения ограниченного на $(0,R)$ решения уравнения

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\left(q^2+\frac{1}{r^2}\right)\right]\tilde{u}(r,\lambda)=-\tilde{F}(r,\lambda) \qquad (12.9)$$

по краевым условиям

$$\tilde{u}(r,\lambda)\Big|_{r=0}=0,\ \left(\frac{d}{dr}-\frac{1}{r}\right)\tilde{u}(r,\lambda)\Big|_{r=R}=\tilde{f}(\lambda). \qquad (12.10)$$

В равенствах (12.9), (12.10) мы положим:

$$\gamma_2^2=0,\ \gamma_1^2=\frac{1}{4},\ q^2=\lambda^2+\frac{1}{4},\ \sigma_1=G_{10}(G_{20})^{-1},\ a_1=a_2=1,\ \sigma_2=1,$$

$$\tilde{u}(r,\lambda)=\int_0^\ell u_1(r,z)v_1(r,z)\sigma_1\,dz+\int_\ell^\infty u_2(r,z)v_2(z,\lambda)\,sh\,z\,dz,$$

$$\tilde{F}(r,\lambda)=\int_0^\ell F_1(r,z)v_1(z,\ell)\sigma_1\,dz+\int_\ell^\infty F_2(r,z)v_2(z,\lambda)\,sh\,z\,dz,$$

$$\tilde{f}(\lambda)=\int_0^\ell f_1(z)v_1(z,\lambda)\sigma_1\,dz+\int_\ell^\infty f_2(z)v_2(z,\lambda)\,sh\,z\,dz.$$

Непосредственно проверяется, что решением задачи (12.9), (12.10) является функция

$$\widetilde{\mathcal{U}}(r,\lambda)=\widetilde{W}(r,\lambda)\widetilde{f}(\lambda)+\int_0^R\widetilde{\mathcal{E}}(r,\rho,\lambda)\widetilde{F}(\rho,\lambda)\operatorname{sh}\rho\,d\rho. \qquad (12.11)$$

В формуле (12.11) участвуют функция Грина

$$\widetilde{W}(r,\lambda)=\frac{R I_1(qr)}{qRI_0(qR)-2I_1(qR)}$$

и фундаментальная функция

$$\widetilde{\mathcal{E}}(r,\rho,\lambda)=\frac{1}{qRI_0(qR)-2I_1(qR)}\begin{cases} I_1(qr)[(qRK_0(qR)+\\ +2K_1(qR_1))I_1(q\rho)+(qRI_0(qR)-2I_1(qR))K_1(q\rho)], & 0<r<\rho<R,\\ I_1(q\rho)[(qRK_0(qR)+\\ +2K_1(qR))I_1(qr)+(qRI_0(qR)-2I_1(qR))K_1(qr)], & 0<\rho<r<R.\end{cases}$$

краевой задачи (12.9), (12.10).

Для восстановления функции $\mathcal{U}(r,z)=\{u_1(r,z),u_2(r,z)\}$ по ее образу $\widetilde{\mathcal{U}}(r,\lambda)$ применим к матрице-элементу $(\widetilde{\mathcal{U}}(r,\lambda))$ по правилу умножения матриц операторную матрицу-столбец

$$\mathfrak{M}_0^{-1}[\ldots]=\begin{pmatrix}\int_0^\infty \ldots\, v_1(z,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\\ \int_0^\infty \ldots\, v_2(z,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\end{pmatrix} \qquad (12.12)$$

В результате элементарных преобразований получаем решение краевой задачи (12.1) – (12.3):

$$u_j(r,z)=\int_0^\ell W_{j1}(r,z,\xi)f_1(\xi)\sigma_1 d\xi+\int_\ell^\infty W_{j2}(r,z,\xi)f_2(\xi)\operatorname{sh}\xi\,d\xi+$$

$$+\int_0^R\Big(\int_0^\ell \mathcal{H}_{j1}(r,\rho,z,\xi)F_1(\rho,\xi)\sigma_1 d\xi+\int_\ell^\infty \mathcal{H}_{j2}(r,\rho,z,\xi)F_2(\rho,\xi)\times \qquad (12.13)$$

$$\times\operatorname{sh}\xi\,d\xi\Big)\operatorname{sh}\rho\,d\rho,\quad j=1,2.$$

Здесь введены в рассмотрение функции Грина

$$W_{jk}(r,z,\zeta)=\int_0^\infty \widetilde{W}(r,\lambda)v_j(z,\lambda)v_k(\zeta,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\,,\ j,k=1,2 \qquad (12.14)$$

$$\mathcal{H}_{jk}(r,z,\zeta)=\int_0^\infty \widetilde{\mathcal{E}}(r,\rho,\lambda)v_j(z,\ell)v_k(\zeta,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \qquad (12.15)$$

При заданных $f(z)$ и $F_j(r,z)$, $(j=1,2)$ положение рассматриваемого стержня становится известным.

В частности, при $F_1=F_2=0$, $f=f_0\delta(z-a)S_-(a-\ell)$ имеем

$$u_j(r,z)=f_0W_{j2}(r,z,a)S_-(a-\ell)\frac{1}{G_{20}}=$$

$$=S_-(a-\ell)\frac{f_0}{G_{20}}\int_0^\infty \widetilde{W}(r,\lambda)v_j(z,\lambda)v_2(a,\ell)\Omega(\lambda)d\lambda\,,\ j=1,2 \qquad (12.16)$$

Не умаляя общности решения задачи в даном случае, можем получить $a=\ell$.

Если положыть что

$a=10$, $\ell=5$, $f_0=1$, $r=\frac{1}{2}$, $R=10$

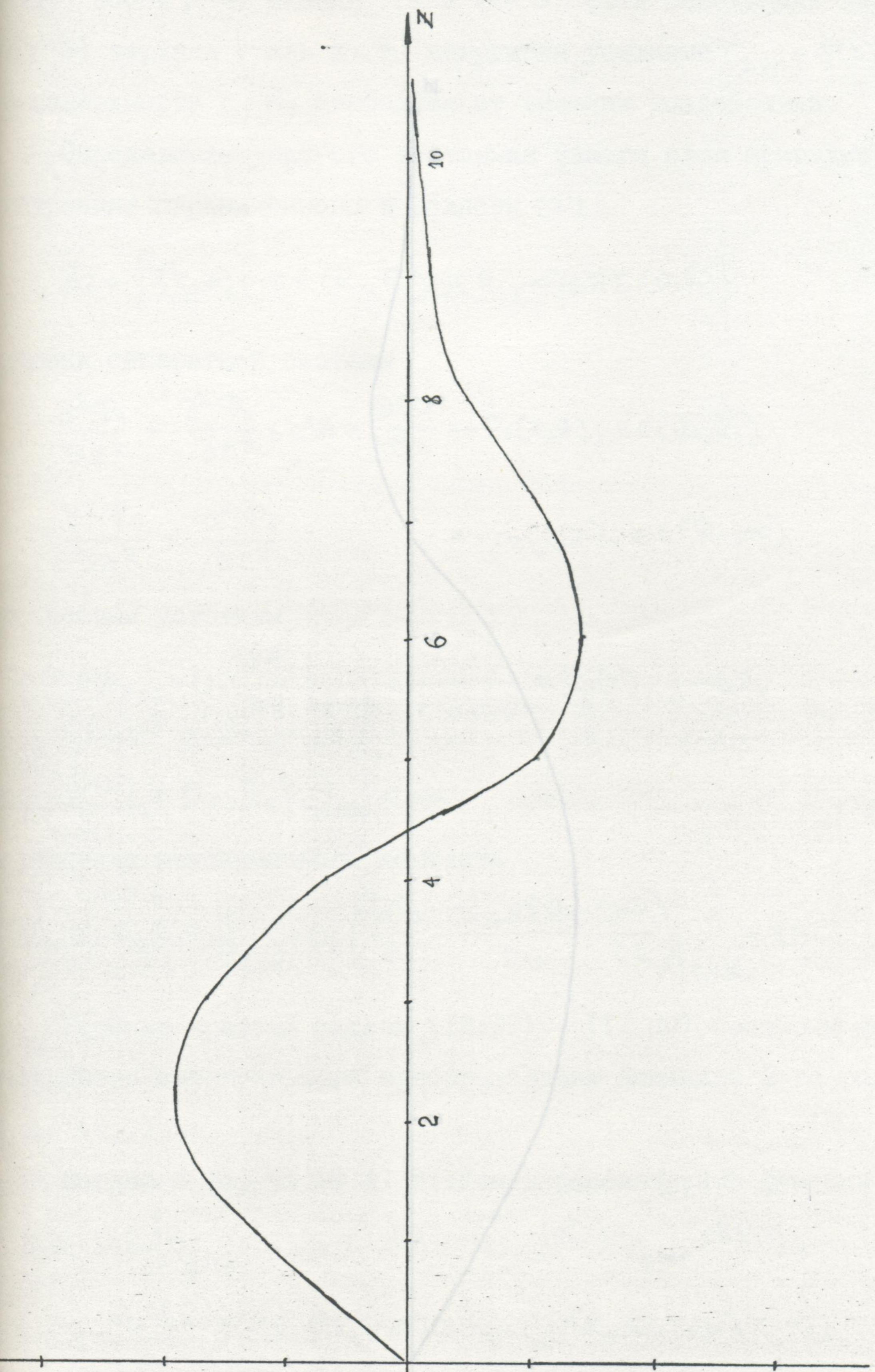
то получим зависимость перемещений $u_j(r,z)$ точек оси Oz от $G_0=G_{10}/G_{20}$.

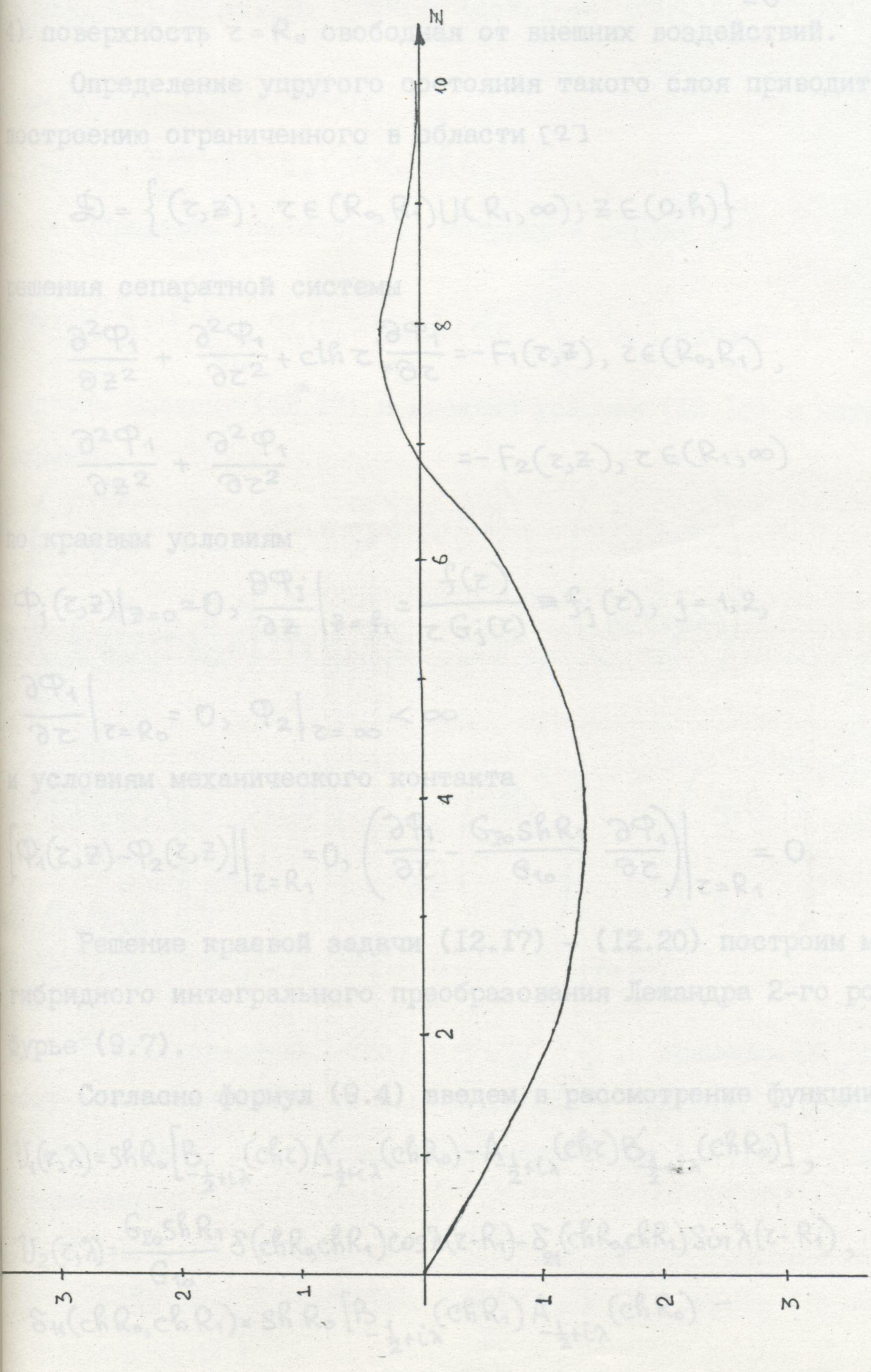
На рис. I,2 приведены графики зависимости $u_j(r,z)$ от z, когда $G_0=1$ и $G_0=0,2$ соответственно. Из графиков видно, что амплитуда вектора перемещений из положительного значения переходит к отрицательному значению и убывает на бесконечности, когда $G_0=1$. При $G_0=0,2$ – наоборот, причем амплитуда уменьшается.

Б. <u>Кручение неоднородного упругого слоя</u>.

Рассмотрим неоднородный упругий слой высоты h с круговым отверстием радиуса R_0, составленный из двух материалов:

$$G(r)=\begin{cases} G_1(r)\equiv G_{10}r^{-3}\operatorname{sh} r\,, & r\in(R_0,R_1)\\ G_2(r)\equiv G_{20}r^{-3}\,, & r\in(R_1,\infty)\end{cases}$$


z
2
4
6
8
10
3
2
1
-1
-2


z
2
4
6
8
10
1
2
3
1
2
3

Предположим, что: I) неоднородные участки слоя спаянные между собой; 2) нижняя грань $z=0$ слоя неподвижно закреплена; 3) верхняя грань $z=h$ нагружена усилиями $\tau_{z\theta}=f(r)$; 4) поверхность $r=R_0$ свободная от внешних воздействий.

Определение упругого состояния такого слоя приводит к построению ограниченного в области [2]

$$\mathcal{D}=\{(r,z):\ r\in(R_0,R_1)\cup(R_1,\infty);\ z\in(0,h)\}$$

решения сепаратной системы

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2}+\operatorname{cth} r\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=-F_1(r,z),\ r\in(R_0,R_1),$$

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2}=-F_2(r,z),\ r\in(R_1,\infty) \qquad (I2.I7)$$

по краевым условиям

$$\varphi_j(r,z)\big|_{z=0}=0,\ \frac{\partial\varphi_j}{\partial z}\Big|_{z=h}=\frac{f(r)}{rG_j(r)}\equiv f_j(r),\ j=1,2, \qquad (I2.I8)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=R_0}=0,\ \varphi_2\big|_{r=\infty}<\infty \qquad (I2.I9)$$

и условиям механического контакта

$$[\varphi_1(r,z)-\varphi_2(r,z)]\big|_{r=R_1}=0,\ \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}-\frac{G_{20}\operatorname{sh}R_1}{G_{10}}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)\Big|_{r=R_1}=0. \qquad (I2.20)$$

Решение краевой задачи (I2.I7) - (I2.20) построим методом гибридного интегрального преобразования Лежандра 2-го рода - Фурье (9.7).

Согласно формул (9.4) введем в рассмотрение функции

$$V_1(r,\lambda)=\operatorname{sh}R_0\left[B_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}r)A'_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)-A_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}r)B'_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)\right],$$

$$V_2(r,\lambda)=\frac{G_{20}\operatorname{sh}R_1}{G_{10}}\delta(\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}R_1)\cos\lambda(r-R_1)-\delta_{21}(\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}R_1)\sin\lambda(r-R_1),$$

$$\delta_{11}(\operatorname{ch}R_0,\operatorname{ch}R_1)=\operatorname{sh}R_0\left[B_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}R_1)A_{-\frac12+i\lambda}(\operatorname{ch}R_0)-\right. \qquad (I2.2I)$$

$$-A_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(chR_1)B_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(chR_0)],$$

$$\delta_{21}(chR_0,chR_1)=shR_1shR_0[B'_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(chR_1)A_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(chR_0)-A_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(chR_0)B_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(chR_0)],$$

$$\omega_1(\lambda)=\delta_{21}(chR_0,chR_1),$$

$$\omega_2(\lambda)=\frac{G_{20}}{G_{10}}shR_1\,\delta_{11}(chR_0,chR_1).$$

Определим операторную, матрицу - строку

$$\mathfrak{M}_0[\ldots]=\left(\int_{R_0}^{R_1}\ldots v_1(\tau,\lambda)\sigma_1 sh\tau d\tau \quad \int_{R_1}^{\infty}\ldots v_2(\tau,\lambda)\sigma_2 d\tau\right). \qquad (I2.22)$$

Запишем систему (I2.I7) и краевые условия (I2.I8) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}+cth\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\Phi_1(\tau,z)\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\Phi_2(\tau,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_1(\tau,z)\\ F_2(\tau,z)\end{pmatrix}, \qquad (I2.23)$$

$$\left.\begin{pmatrix}\Phi_1(\tau,z)\\ \Phi_2(\tau,z)\end{pmatrix}\right|_{z=0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \frac{\partial}{\partial z}\left.\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}\right|_{z=h}=\begin{pmatrix}f_1(\tau)\\ f_2(\tau)\end{pmatrix}. \qquad (I2.24)$$

В предположении, что $\gamma_1^2=0$, $\gamma_2^2=\frac{1}{4}$, применим $\mathfrak{M}_0$ по правилу умножения матриц к задаче (I2.23), (I2.24). В результате получим задачу построения ограниченного на $(0, h)$ решения уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-q^2\right)\tilde{\Phi}(\lambda,z)=-\tilde{F}(\lambda,z),\quad q^2=\lambda^2+\frac{1}{4} \qquad (I2.25)$$

по краевым условиям

$$\tilde{\Phi}(\lambda,z)\Big|_{z=0}=0,\quad \frac{d\tilde{\Phi}}{dz}\Big|_{z=h}=\tilde{f}(\lambda). \tag{I2.26}$$

Непосредственно проверяется, что решением краевой задачи (I2.25), (I2.26) является функция

$$\tilde{\Phi}(\lambda,z)=\tilde{W}(\lambda,z)\tilde{f}(\lambda)+\int_0^h \tilde{\mathcal{E}}(\lambda,z,\xi)\tilde{F}(\lambda,\xi)d\xi. \tag{I2.27}$$

В формуле (I2.27) участвует функция Грина

$$\tilde{W}(\lambda,z)=\frac{\operatorname{sh} qz}{q\operatorname{ch} qh},\quad q=\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{4}} \tag{I2.28}$$

и фундаментальная функция

$$\tilde{\mathcal{E}}(\lambda,z,\xi)=\frac{1}{q}\begin{cases}\operatorname{sh} qz\operatorname{ch} q\xi, & 0<z<\xi<h,\\ \operatorname{sh} q\xi\operatorname{ch} qz, & 0<\xi<z<h\end{cases} \tag{I2.29}$$

краевой задачи (I2.25), (I2.26).

Поскольку суперпозиция операторов $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_0^{-1}$ определяет единичный оператор, то

$$\mathfrak{M}_0^{-1}[\ldots]=\begin{pmatrix}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \ldots v_1(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \ldots v_2(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\end{pmatrix}. \tag{I2.30}$$

Применяя операторную матрицу-столбец $\mathfrak{M}_0^{-1}$ по правилу умножения матриц к матрице-элементу $(\tilde{\Phi}(\lambda,z))$, в результате элементарных преобразований получаем решение краевой задачи (I2.17)-(I2.20):

$$\Phi_j(r,z)=\int_{R_0}^{R_1} W_{j1}(r,\rho,z)f_1(\rho)\sigma_1\operatorname{sh}\rho\, d\rho+\int_{R_1}^{\infty} W_{j2}(r,\rho,z)f_2(\rho)\sigma_2\, d\rho+$$

$$+\int_0^h \Big[\int_{R_0}^{R_1} \mathcal{E}_{j1}(r,\rho,z,\xi)F_1(\rho,\xi)G_1 sh\rho\, d\rho + \int_{R_1}^{\infty} \mathcal{E}_{j2}(r,\rho,z,\xi)F_2(\rho,\xi)G_2\, d\rho\Big] d\xi. \qquad (I2.3I)$$

В формулах (I2.3I) введены в рассмотрение функции Грина

$$W_{jm}(r,\rho,z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \tilde{W}(\lambda,z)\,V_j(r,\lambda)\,V_m(\rho,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda, \; j,m = 1,2 \qquad (I2.32)$$

и функции влияния

$$\mathcal{E}_{jm}(r,\rho,z,\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \tilde{\mathcal{E}}(\lambda,z,\xi)\,V_j(r,\lambda)\,V_m(\rho,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda \qquad (I2.33)$$

краевой задачи (I2.I7) – (I2.20).

Упругое состояние рассматриваемого слоя описывают функции [2]:

$$u_{\theta,j}(r,z) = r\varphi(r,z), \quad \sigma_{r\theta,j}(r,z) = rG_j(r)\frac{\partial\varphi_j(r,z)}{\partial r},$$

$$\sigma_{z\theta,j}(r,z) = rG_j(r)\frac{\partial\varphi_j(r,z)}{\partial z}, \; j = 1,2.$$

Если нижняя грань $z=0$ нагруженная усилиями, а верхняя грань $z=h$ закреплена неподвижно, то вместо краевых условий (I2.I8) будут условия

$$\left.\frac{\partial\varphi_j(r,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = f_j(r), \quad \left.\varphi_j(r,z)\right|_{z=h} = 0. \qquad (I2.34)$$

В этом случае

$$\tilde{W}(\lambda,z) = -\frac{sh\, q(h-z)}{q}, \; q = \sqrt{\lambda^2 + \tfrac{1}{4}},$$

$$\tilde{\mathcal{E}}(\lambda,z,\xi) = \frac{1}{q\, ch\, qh}\begin{cases} ch\, qz\; sh\, q(h-\xi), & 0<z<\xi<h, \\ ch\, q\xi\; sh\, q(h-z), & 0<\xi<z<h. \end{cases}$$

Нетрудно построить решения задачи для случая, когда поверхность $r=R_0$ закреплена $\left(\varphi_1(r,z)\big|_{r=R_0} = 0\right)$ или подвергается силовому воздействию.

По вышеизложенной схеме решается задача кручения неограниченного слоя $(|z|<\infty$ или полубесконечного слоя $(0\le z<\infty)$.

В. <u>Кручение неоднородных по глубине подвижных стержней.</u>

Рассмотрим неоднородный стержень радиуса R, составленный из двух материалов, характеризующийся модулем сдвига

$$G(z)=\begin{cases} G_{10}\,\mathrm{sh}\,z, & z\in(0,\ell),\\ G_{20}, & z\in(\ell,\infty).\end{cases}$$

Будем предполагать, что

$$\frac{\rho}{G(z)}=\begin{cases} \dfrac{1}{C_1^2}, & z\in(0,\ell),\\ \dfrac{1}{C_2^2}, & z\in(\ell,\infty), \quad C_j=\mathrm{const},\end{cases}$$

где C_j – скорость распространения упругих волн.

Неоднородные участки стержня считаем спаянными между собой. Предположим, что: I) торец $z=0$ свободен от внешних воздействий; 2) боковая поверхность нагружена осесимметричными крутящими усилиями; 3) на бесконечности перемещения ограничены; 4) в начальный момент времени стержень находится в состоянии покоя.

Задача о кручении такого стержня математически приводит к построению ограниченного в области

$$\mathcal{D}=\{(t,r,z):\ t\in(0,T),\ r\in(0,R);\ z\in(0,\ell)\cup(\ell,\infty),\ T\le\infty\}$$

решения сепаратной системы уравнений движения [2].

$$\frac{\partial^2 u_1(t,r,z)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1(t,r,z)}{\partial r}-\frac{u_1(t,r,z)}{r^2}+\frac{\partial^2 u_1(t,r,z)}{\partial z^2}+\mathrm{cth}\,z\,\frac{\partial u_1(t,r,z)}{\partial z}=$$

$$=\frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2 u_1(t,r,z)}{\partial t^2}-F_1(t,r,z);$$

$$\frac{\partial^2 u_2(t,r,z)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2(t,r,z)}{\partial r}-\frac{u_2(t,r,z)}{r^2}+\frac{\partial^2 u_2(t,r,z)}{\partial z^2}=$$

$$=\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 u_2(t,r,z)}{\partial t^2}-F_2(t,r,z) \qquad (I2.35)$$

по краевым условиям

$$\left.\frac{\partial u_1(t,r,z)}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\ \left.u_2(t,r,z)\right|_{z=\infty}<\infty,$$

$$\left.u_j(t,r,z)\right|_{r=0}=0,\ \left.\left(\frac{\partial u_j(t,r,z)}{\partial r}-\frac{1}{r}u_j(t,r,z)\right)\right|_{r=R}=\frac{f(z)}{G_j(z)},\ j=1,2 \qquad (I2.36)$$

и начальным условиям

$$\left.u_j(t,r,z)\right|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial u_j(t,r,z)}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \qquad (I2.37)$$

и условиям механического контакта

$$\left.\left[u_1(t,r,z)-u_2(t,r,z)\right]\right|_{z=l}=0,\ \left.\left(\frac{G_{10}}{G_{20}}\operatorname{sh} l\,\frac{\partial u_1(t,r,z)}{\partial z}-\frac{\partial u_2(t,r,z)}{\partial z}\right)\right|_{z=l}=0. \qquad (I2.38)$$

Для решения данной задачи применим интегральные преобразования Ханкеля I-го рода [42]

$$H_1[f(r)]=\int_0^R f(r)J_1(\beta_n r)\,r\,dr\equiv f_n, \qquad (I2.39)$$

$$H_1^{-1}[f_n]=\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\frac{J_1(\beta_n r)}{J_1^2(\beta_n r)}\equiv f(r), \qquad (I2.40)$$

$$H_1^{-1}\left[\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}\right)f(r)\right]=-\beta_n^2 f_n+RJ_1(\beta_n R)\left.\left(\frac{d}{dr}-\frac{1}{r}\right)f(r)\right|_{r=R} \qquad (I2.4I)$$

В силу основного тождества интегрального преобразования дифференциального оператора (I2.4I), с учетом краевых условий (I2.36), (I2.37) для функций $u_{jn}(t,z)$ получим краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_{1n}(t,z)}{\partial t^2}+C_1^2\beta_n^2 u_{1n}(t,z)-C_1^2\left(\dfrac{\partial^2 u_{1n}(t,z)}{\partial z^2}+\operatorname{cth} z\dfrac{\partial u_{1n}(t,z)}{\partial z}\right)=\mathcal{F}_{1n}(t,z), \\ \dfrac{\partial^2 u_{2n}(t,z)}{\partial t^2}+C_2^2\beta_n^2 u_{2n}(t,z)-C_2^2\dfrac{\partial^2 u_{2n}(t,z)}{\partial z^2}=\mathcal{F}_{2n}(t,z), \end{cases} \qquad (I2.42)$$

$$\left.\frac{\partial u_{1n}(t,z)}{\partial z}\right|_{z=0}=0,\quad \left.u_{2n}(t,z)\right|_{z<\infty}<\infty, \qquad (I2.43)$$

$$\left.u_{jn}(t,z)\right|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u_{jn}(t,z)}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \qquad (I2.44)$$

$$\left.\left[u_{1n}(t,z)-u_{2n}(t,z)\right]\right|_{z=\ell}=0,\quad \left.\left(\frac{G_{10}}{G_{20}}\operatorname{sh}\ell\,\frac{\partial u_{1n}(t,z)}{\partial z}-\frac{\partial u_{2n}(t,z)}{\partial z}\right)\right|_{z=\ell}=0. \qquad (I2.45)$$

Решение краевой задачи (I2.42) - (I2.45) построим методом гибридного интегрального преобразования Лежандра-Фурье (3.32).

Запишем систему (I2.42) и начальные условия (I2.44) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u_{1n}(t,z)}{\partial t^2}+C_1^2\beta_n^2 u_{1n}(t,z)-C_1^2\left(\dfrac{\partial^2 u_{1n}(t,z)}{\partial z^2}+\operatorname{cth} z\dfrac{\partial u_{1n}(t,z)}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial^2 u_{2n}(t,z)}{\partial t^2}+C_2^2\beta_n^2 u_{2n}(t,z)-C_2^2\dfrac{\partial^2 u_{2n}(t,z)}{\partial z^2} \end{pmatrix}= \qquad (I2.46)$$

$$=\begin{pmatrix} \mathcal{F}_{1n}(t,z) \\ \mathcal{F}_{2n}(t,z) \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{pmatrix} u_{1n}(t,z) \\ u_{2n}(t,z) \end{pmatrix}\right|_{t=0}=0,\quad \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_{1n}(t,z)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u_{2n}(t,z)}{\partial t} \end{pmatrix}\right|_{t=0}=0, \qquad (I2.47)$$

$$\mathcal{F}_{jn}(t,z)=C_j^2\left(F_{jn}(t,z)+RJ_1(\beta_n R)\cdot\frac{f(z)}{G_j(z)}\right),\quad j=1,2.$$

Согласно формул (3.30), (3.3I) введем в рассмотрение функции:

$$\mathcal{V}_1(z,\lambda)=\frac{b_2(\lambda)}{C_2^2}P_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{c_1}}(ch z),\quad b_j=\sqrt{\lambda^2+\gamma_j^2},\quad \gamma_j^2>0,$$

$$\mathcal{V}_2(z,\lambda)=\omega_1(\lambda)\sin\frac{b_2}{c_2}(z-\ell)-\frac{b_2(\lambda)}{c_2}\omega_2(\lambda)\cos\frac{b_2}{c_2}(z-\ell), \tag{2.48}$$

$$\omega_1(\lambda)=\frac{G_{10}}{G_{20}}sh^2\ell\, B_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{c_1}}(ch\ell);\quad \omega_2(\lambda)=-B_{-\frac{1}{2}+i\frac{b_1}{c_1}}(ch\ell),$$

$$\Omega(\lambda)=\lambda b_2\lambda\cdot\frac{1}{\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)}.$$

Определим операторную матрицу-строку

$$\mathcal{M}_0[\ldots]=\left(\int_0^\ell\ldots\mathcal{V}_1(z,\lambda)sh z\frac{G_{10}}{G_{20}}\frac{c_2}{c_1^2}dz\quad\int_\ell^\infty\ldots\mathcal{V}_2(z,\lambda)\frac{1}{c_2^2}dz\right). \tag{I2.49}$$

Применяя операторную матрицу-строку $\mathcal{M}_0$ к системе (I2.46) по правилу умножения матриц, в силу тождества (3.35) получаем задачу Коши

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\lambda^2+\frac{1}{4}+c_1^2\beta_n^2\right)\tilde{U}_n(t,\lambda)=\tilde{\mathcal{F}}_n(t,\lambda), \tag{I2.50}$$

$$\tilde{U}_{jn}(t,\lambda)\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{d\tilde{U}_{jn}(t,\lambda)}{dt}\Big|_{t=0}=0. \tag{I2.5I}$$

В равенствах (I2.50), (I2.5I) мы положили:

$$\gamma_1^2=0,\ \gamma_2^2=(c_1^2-c_2^2)\beta_n^2+\frac{1}{4}\geqslant 0,\ q^2=\lambda^2+\frac{1}{4},$$

$$\sigma_1=sh z\frac{G_{10}c_2}{G_{20}c_1^2},\ \sigma_2=\frac{1}{c_2^2},\ a_1=c_1,\ a_2=c_2,$$

$$\tilde{U}_n(t,\lambda)=\int_0^\ell U_{1n}(z,\lambda)\mathcal{V}_1(t,z)\sigma_1dz+\int_\ell^\infty U_{2n}(z,\lambda)\mathcal{V}_2(t,z)\sigma_2dz,$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_n(t,\lambda)=\int_0^\ell\mathcal{F}_{1n}(z,t)\mathcal{V}_1(t,z)\sigma_1dz+\int_\ell^\infty\mathcal{F}_{2n}(t,z)\mathcal{V}_2(t,z)\sigma_2dz.$$

Непосредственно проверяется, что решением задачи (I2.50), (I2.5I) является функция

$$\tilde{u}_n(t,\lambda)=\int_0^t \frac{\sin\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{4}+c_1^2\beta_n^2}\,(t-\tau)}{\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{4}+c_1^2\beta_n^2}}\,\tilde{\mathcal{F}}_n(\tau,\lambda)\,d\tau. \tag{I2.52}$$

Для восстановления функции $u_n(t,z)=\{u_{1n}(t,z);\,u_{2n}(t,z)\}$ по ее образу $\tilde{u}_n(t,\lambda)$ применим к матрице-элементу $(\tilde{u}_n(t,\lambda))$ по правилу умножения матриц операторную матрицу-столбец

$$\mathfrak{M}_0^{-1}[\ldots]=\begin{pmatrix}\int_0^\infty \ldots\, v_1(z,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda\\ \int_0^\infty \ldots\, v_2(z,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda\end{pmatrix}. \tag{I2.53}$$

В результате элементарных преобразований получаем решение краевой задачи (I2.46), (I2.47):

$$u_{jn}(t,z)=\int_0^t\left(\int_0^\ell \mathcal{H}_{j1}(t,\tau,z,\xi)\,\sigma_1\,d\xi+\int_\ell^\infty \mathcal{H}_{j2}(t,\tau,z,\xi)\,\sigma_2\,d\xi\right)\times$$

$$\times\frac{\sin\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{4}+c_1^2\beta_n^2}\,(t-\tau)}{\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{4}+c_1^2\beta_n^2}}\,d\tau. \tag{I2.54}$$

Здесь

$$\mathcal{H}_{jk}(t,\tau,z,\xi)=\int_0^\infty \mathcal{F}_{jn}(t,z)\,v_j(\tau,z)\,v_k(\xi,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda.$$

Для восстановления функции $u_j(t,z,r)$ по ее образу $u_{jn}(t,z)$ воспользуемся интегральным преобразованием Ханкеля I-го рода (I2.40):

$$u_j(t,z,r)=\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} u_{jn}(t,z)\,\frac{J_1(\beta_n r)}{J_1^2(\beta_n r)}. \tag{I2.55}$$

§ 13. ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ

Уравнение Лапласа в тороидальных координатах имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\equiv 0. \tag{13.1}$$

В результате замены $u=\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}\,v$ приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\operatorname{cth}\alpha\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\frac{1}{4}v+\frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}=0. \tag{13.2}$$

Если обычный полярный угол $\varphi\in[0,2\pi]$, то применяя к уравнению (13.2) конечное интегральное преобразование Фурье по правилу

$$F_m[v(\alpha,\beta,\varphi)]=\int_0^{2\pi}v(\alpha,\beta,\varphi)e^{im\varphi}\,d\varphi\equiv v_m(\alpha,\beta), \tag{13.3}$$

получаем для функции $v_m(\alpha,\beta)$ уравнение

$$\Lambda_m[v_m(\alpha,\beta)]+\frac{\partial^2 v_m}{\partial\beta^2}=0 \tag{13.4}$$

Восстановление функции v по известной v_m осуществляется по правилу

$$F_m^{-1}[v_m]=\frac{\operatorname{Re}[\varphi]}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m v_m(\alpha,\beta)e^{im\varphi}\equiv v(\alpha,\beta,\varphi), \tag{13.5}$$

где $\operatorname{Re}[\varphi]$ – действительная часть от выражения по φ,

$$\varepsilon_0=1,\quad \varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_n=\ldots=2.$$

В результате применения к уравнению (13.4) оператора по правилу (1.33) в силу тождества (1.27) имеем задачу о конструкции решения уравнения

$$\frac{d^2\tilde{v}_m(\lambda,\beta)}{d\beta^2}-\lambda^2\tilde{v}_m(\lambda,\beta)=0 \qquad (13.6)$$

по краевым условиям относительно аргумента $\beta\in[0,2\pi]$ (или $|\beta|\le\pi$).

Если предположить, что [74]

$$u(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0}=f_1(\alpha,\varphi),\ \frac{\partial u(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\Big|_{\beta=\pi}=f_2(\alpha,\varphi), \qquad (13.7)$$

то к уравнению (13.6) присоединяются краевые условия

$$\tilde{v}_m(\lambda,\beta)\Big|_{\beta=0}\equiv \mathfrak{M}_m F_m\left[\frac{f_1(\alpha,\varphi)}{\sqrt{ch\alpha+1}}\right], \qquad (13.8)$$

$$\frac{d\tilde{v}_m(\alpha,\beta)}{d\beta}\Big|_{\beta=\pi}=\tilde{F}_{2m}(\lambda)\equiv\mathfrak{M}_m F_m\left[\frac{f_2(\alpha,\varphi)}{\sqrt{ch\alpha-1}}\right]. \qquad (13.9)$$

Непосредственно проверяется, что решением задачи (13.6), (13.8), (13,9) является функция

$$\tilde{v}_m(\lambda,\beta)=\frac{ch\lambda(\pi-\beta)}{ch\lambda\pi}\tilde{F}_{1m}(\lambda)+\frac{sh\lambda\beta}{\lambda ch\lambda\pi}\tilde{F}_{2m}(\lambda). \qquad (13.10)$$

Введем в распоряжение функции Грина:

$$W_{11}(\alpha,\beta,\tau,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\varepsilon_m\int_0^\infty\frac{ch\lambda[\pi-\beta]}{ch\lambda\pi}P^m_{-\frac12+i\lambda}(ch\alpha)\times \qquad (13.11)$$

$$\times P^{-m}_{-\frac12+i\lambda}(ch\tau)\,th\pi\lambda\cdot\lambda d\lambda\cdot\cos m\varphi,$$

$$W_{21}(\alpha,\beta,\tau,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\varepsilon_m\int_0^\infty\frac{sh\lambda\beta}{ch\lambda\pi}P^m_{-\frac12+i\lambda}(ch\alpha)\times \qquad (13.12)$$

$$\times P^{-m}_{-\frac12+i\lambda}(ch\tau)\,th\pi\lambda\, d\lambda\,\cos m\varphi.$$

Применяя к функции $\tilde{v}_m(\alpha,\beta)$ операторы F_n^{-1} и $\mathfrak{M}_m^{-1}$ соответственно по правилам (13.5) и (13.4) получаем решение задачи (13.1), (13.7):

$$\mathcal{U}(\alpha,\beta)=\sqrt{ch\alpha+\cos\beta}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\Big[W_{11}(\alpha,\beta,\tau,\varphi-\psi)\frac{f_1(\tau,\psi)}{\sqrt{ch\tau+1}}+ \tag{13.13}$$

$$+W_{21}(\alpha,\beta,\tau,\varphi-\psi)\frac{f_2(\tau,\psi)}{\sqrt{ch\tau-1}}\Big]sh\tau\, d\psi\, d\tau.$$

Отметим, что:

а) если краевые условия (13.7) заменить на краевые условия

$$\mathcal{U}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0}=f_1(\alpha,\varphi),\quad \mathcal{U}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\pi}=f_2(\alpha,\varphi), \tag{13.14}$$

то под знаками интегралов в формулах (13.11), (13.12) будут стоять функции

$$\widetilde{W}_{12}(\alpha,\beta)=\frac{sh\,\lambda(\pi-\beta)}{sh\,\lambda\pi},\quad \widetilde{W}_{22}(\alpha,\beta)=\frac{sh\,\lambda\beta}{sh\,\lambda\pi}; \tag{13.15}$$

б) если краевые условия (13.7) заменить на краевые условия

$$\frac{\partial\mathcal{U}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0}=f_1(\alpha,\varphi),\quad \mathcal{U}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\pi}=f_2(\alpha,\varphi), \tag{13.16}$$

то под знаками интегралов в формулах (13.11), (13.12) будут стоять функции

$$\widetilde{W}_{13}(\lambda,\beta)=-\frac{sh\,\lambda(\pi-\beta)}{\lambda\, ch\,\lambda\pi},\quad \widetilde{W}_{23}(\lambda,\beta)=\frac{ch\,\lambda\beta}{ch\,\lambda\pi}; \tag{13.17}$$

в) если краевые условия (13.7) заменить на краевые условия

$$\frac{\partial\mathcal{U}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0}=f_1(\alpha,\beta),\quad \frac{\partial\mathcal{U}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\Big|_{\beta=\pi}=f_2(\alpha,\varphi), \tag{13.18}$$

то в формулах (13.11), (13.12) под знаками интегралов будут стоять функции

$$\widetilde{W}_{14}(\lambda,\beta)=-\frac{ch\,\lambda(\pi-\beta)}{\lambda\, sh\,\lambda\pi},\quad \widetilde{W}_{24}(\lambda,\beta)=\frac{ch\,\lambda\beta}{\lambda\, sh\,\lambda\pi}. \tag{13.19}$$

Пусть теперь полярный угол $\varphi \in [0, \varphi_0]$. Известно, что собственные числа γ_m и соответствующие им собственные функции $U_m(\varphi)$ задач Штурма-Лиувилля.

$$\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}+\gamma^2\right)U(\varphi)=0,\ U(\varphi)\Big|_{\varphi=0}=0,\ U(\varphi)\Big|_{\varphi=\varphi_0}=0, \tag{I3.20}$$

$$\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}+\gamma^2\right)U(\varphi)=0,\ U(\varphi)\Big|_{\varphi=0}=0,\ \frac{dU(\varphi)}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0}=0, \tag{I3.2I}$$

$$\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}+\gamma^2\right)U(\varphi)=0,\ \frac{dU(\varphi)}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0}=0,\ U(\varphi)\Big|_{\varphi=\varphi_0}=0, \tag{I3.22}$$

$$\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}+\gamma^2\right)U(\varphi)=0,\ \frac{dU(\varphi)}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0}=0,\ \frac{dU(\varphi)}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0}=0 \tag{I3.23}$$

соответственно равны:

$$\gamma_{m,11}=\frac{\pi m}{\varphi_0},\ U_{m,11}(\varphi)=\sin(\gamma_{m,11}\varphi)\equiv\sin\frac{\pi m}{\varphi_0}\varphi, \tag{I3.24}$$

$$\gamma_{m,12}=\frac{2m+1}{2\varphi_0}\pi,\ U_{m,12}(\varphi)=\sin(\gamma_{m,12}\varphi)\equiv\sin\frac{2m+1}{2\varphi_0}\pi\varphi, \tag{I3.25}$$

$$\gamma_{m,21}=\gamma_{m,12},\ U_{m,21}(\varphi)=\cos\gamma_{m,12}\varphi\equiv\cos\frac{2m+1}{2\varphi_0}\pi\varphi, \tag{I3.26}$$

$$\gamma_{m,22}=\gamma_{m,11},\ U_{m,22}(\varphi)=\cos\gamma_{m,11}\varphi\equiv\cos\frac{\pi m}{\varphi_0}\varphi. \tag{I3.27}$$

Следуя [68], введем в рассмотрение прямое $F_{m,ik}$ и обратное $F^{-1}_{m,ik}$ интегральные преобразования Фурье по правилам:

$$F_{m,ik}[g(\varphi)]=\int_0^{\varphi_0} g(\varphi)U_{m,ik}(\varphi)\,d\varphi\equiv g_{m,ik}, \tag{I3.28}$$

$$F^{-1}_{m,ik}[g^{*}_{m,ik}]=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}\,g_{m,ik}\,U_{m,ik}(\varphi)\equiv g(\varphi), \tag{I3.29}$$

$$\varepsilon_m^{ik}=1,\ ik=11,12,21,\ m=0,1,2,\dots;\ \varepsilon_m^{22}=\frac{1}{2}\begin{cases}1, & m=0,\\ 2, & m=1,2,3,\dots\end{cases}$$

При этом имеют место тождества:

$$\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}+\gamma^2_{m,ik}\right]U_{m,ik}(\varphi)=0, \tag{13.30}$$

$$F_{m,ik}\left[\frac{d^2 g}{d\varphi^2}\right]=-\gamma^2_{2n,ik}\,g_{m,ik}+\mathcal{F}_{ik}(m).$$

В равенстве (13.30) функции $\mathcal{F}_{ik}(m)$ имеют вид:

$$\mathcal{F}_{11}(m)=\gamma_{m,11}\left[g(0)-(-1)^m g(\varphi_0)\right],$$

$$\mathcal{F}_{12}(m)=\gamma_{m,12}\left[g(0)+(-1)^m\frac{dg(\varphi_0)}{d\varphi}\right], \tag{13.31}$$

$$\mathcal{F}_{21}(m)=(-1)^m\gamma_{m,12}\left[g(\varphi_0)-\frac{dg(0)}{d\varphi}\right],$$

$$\mathcal{F}_{22}(m)=(-1)^m\frac{dg(\varphi_0)}{d\varphi}-\frac{dg(0)}{d\varphi}.$$

Предположим, что на гранях $\varphi=0$ и $\varphi=\varphi_0$ клина задано одно из следующих краевых условий:

$$v\big|_{\varphi=0}=g_{11}(\alpha,\beta),\quad v\big|_{\varphi=\varphi_0}=g_{21}(\alpha,\beta), \tag{13.32}$$

$$v\big|_{\varphi=0}=g_{12}(\alpha,\beta),\quad \frac{dv}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi_0}=-\frac{a\,\mathrm{sh}\,\alpha\, g_{22}(\alpha,\beta)}{(\mathrm{ch}\,\alpha+\cos\beta)^{3/2}}, \tag{13.33}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0}=\frac{a\,\mathrm{sh}\,\alpha\, g_{13}(\alpha,\beta)}{(\mathrm{ch}\,\alpha+\cos\beta)^{3/2}},\quad v\big|_{\varphi=\varphi_0}=g_{23}(\alpha,\beta), \tag{13.34}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0}=\frac{a\,\mathrm{sh}\,\alpha\, g_{14}(\alpha,\beta)}{(\mathrm{ch}\,\alpha+\cos\beta)^{3/2}},\quad \frac{\partial v}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi_0}=-\frac{a\,\mathrm{sh}\,\alpha\, g_{24}(\alpha,\beta)}{(\mathrm{ch}\,\alpha+\cos\beta)^{3/2}}. \tag{13.35}$$

Применяя к уравнению (13.2) преобразование $F_{m,ik}$ по правилу (13.28), в силу тождества (13.30) получаем неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 v_{m,ik}}{\partial\alpha^2}+\operatorname{cth}\alpha\,\frac{\partial v_{m,ik}}{\partial\alpha}+\frac{1}{4}v_{m,ik}-\frac{\gamma^2_{m,ik}}{\operatorname{sh}^2\alpha}v_{m,ik}+ \tag{13.36}$$

$$+\frac{\partial^2 v_{m,ik}}{\partial\beta^2}=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha}\mathfrak{F}_{ik}(m,\alpha,\beta)$$

и одно из краевых условий:

$$v_{m,ik}\Big|_{\beta=0}=\frac{f_{11m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}},\quad \frac{\partial v_{m,ik}}{\partial\beta}\Big|_{\beta=\pi}=\frac{f_{21m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-1}}, \tag{13.37}$$

$$v_{m,ik}\Big|_{\beta=0}=\frac{f_{12m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}},\quad v_{m,ik}\Big|_{\beta=\pi}=\frac{f_{22m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-1}}, \tag{13.38}$$

$$\frac{\partial v_{m,ik}}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0}=\frac{f_{13m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}},\quad v_{m,ik}\Big|_{\beta=\pi}=\frac{f_{23m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-1}}, \tag{13.39}$$

$$\frac{\partial v_{m,ik}}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0}=\frac{f_{14m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}},\quad \frac{\partial v_{m,ik}}{\partial\beta}\Big|_{\beta=\pi}=\frac{f_{24m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-1}}. \tag{13.40}$$

Полагая $\mu=\gamma_{m,ik}$ и совершая интегральное преобразование по правилу (1.25), приходим к задаче построения на сегменте решения обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2\tilde{v}_{m,ik}}{d\beta^2}-\lambda^2\tilde{v}_{m,ik}(\lambda,\beta)=-\tilde{f}_{ik}(m,\lambda,\beta) \tag{13.41}$$

по одному из следующих краевых условий:

$$\tilde{v}_{m,ik}(\lambda,\beta)\Big|_{\beta=0}=\mathfrak{M}_{\gamma_{m,ik}}\left[\frac{f_{11m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}}\right],$$

$$\frac{d\tilde{v}_{m,ik}(\lambda,\beta)}{d\beta}\Big|_{\beta=\pi}=\mathfrak{M}_{\gamma_{m,ik}}\left[\frac{f_{21m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-1}}\right], \tag{13.42}$$

$$\tilde{V}_{m,ik}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=0}=\mathfrak{M}_{j_m,ik}\left[\frac{f_{12m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}}\right],$$

$$\tilde{V}_{m,ik}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\pi}=\mathfrak{M}_{\gamma_m,ik}\left[\frac{f_{22m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-1}}\right], \tag{13.43}$$

$$\frac{d\tilde{V}_{m,ik}(\alpha,\beta)}{d\beta}\Big|_{\beta=0}=\mathfrak{M}_{\gamma_m,ik}\left[\frac{f_{13m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}}\right],$$

$$\tilde{V}_{m,ik}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\pi}=\mathfrak{M}_{\gamma_m,ik}\left[\frac{f_{23m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-1}}\right], \tag{13.44}$$

$$\frac{d\tilde{V}_{m,ik}(\alpha,\beta)}{d\beta}\Big|_{\beta=0}=\mathfrak{M}_{\gamma_m,ik}\left[\frac{f_{14m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}}\right], \tag{13.45}$$

$$\frac{d\tilde{V}_{m,ik}(\alpha,\beta)}{d\beta}\Big|_{\beta=\pi}=\mathfrak{M}_{j_m,ik}\left[\frac{f_{24m,ik}(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-1}}\right].$$

Для краевых условий (13.42) – (13.45) функции Грина $\tilde{W}_1(\lambda,\beta)$ и $\tilde{W}_1(\lambda,\beta)$ вычисляются соответственно по формулам

$$\tilde{W}_1(\lambda,\beta)=\frac{\operatorname{ch}\lambda(\pi-\beta)}{\operatorname{ch}\lambda\pi},\quad \tilde{W}_2(\lambda,\beta)=\frac{\operatorname{sh}\lambda\beta}{\operatorname{ch}\lambda\pi} \tag{13.46}$$

и (13.15), (13.17) и (13.19). Поэтому для решения краевых задач (13.41) -(13.45) необходимо построить их фундаментальные функции.

Непосредственно проверяется, что фундаментальные функции краевых задач (13.41), (13.42); (13.41), (13.43); (13.41), (13.44) и (13.41), (13.45) соответственно равны:

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(\lambda,\beta,\eta)=\frac{1}{\lambda\operatorname{ch}\lambda\pi}\begin{cases}\operatorname{sh}\lambda\beta\operatorname{ch}\lambda(\pi-\eta), & 0<\beta<\eta<\pi,\\ \operatorname{sh}\lambda\eta\operatorname{ch}\lambda(\pi-\beta), & 0<\eta<\beta<\pi;\end{cases} \tag{13.47}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_2(\lambda,\beta,\eta)=\frac{1}{\lambda\operatorname{sh}\lambda\pi}\begin{cases}\operatorname{sh}\lambda\beta\operatorname{sh}\lambda(\pi-\eta), & 0<\beta<\eta<\pi,\\ \operatorname{sh}\lambda\eta\operatorname{sh}\lambda(\pi-\beta), & 0<\eta<\beta<\pi;\end{cases} \tag{13.48}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_3(\lambda,\beta,\eta)=\frac{1}{\lambda ch\lambda\pi}\begin{cases} ch\lambda\beta\, sh\lambda(\pi-\eta), & 0<\beta<\eta<\pi,\\ ch\lambda\eta\, sh\lambda(\pi-\beta), & 0<\eta<\beta<\pi;\end{cases} \tag{13.49}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_4(\lambda,\beta,\eta)=\frac{1}{\lambda sh\lambda\pi}\begin{cases} ch\lambda\beta\, ch\lambda(\pi-\eta), & 0<\beta<\eta<\pi,\\ ch\lambda\eta\, ch\lambda(\pi-\beta), & 0<\eta<\beta<\pi.\end{cases} \tag{13.50}$$

Решением краевой задачи (13.41), (13.42) является функция

$$\tilde{v}_{m,ik}(\lambda,\beta)=\frac{ch\lambda(\pi-\beta)}{ch\lambda\pi}\mathcal{M}_{jm,ik}\left[\frac{f_{11m,ik}(\alpha)}{\sqrt{ch\alpha+1}}\right]+$$

$$+\frac{sh\lambda\beta}{ch\lambda\pi}\mathcal{M}_{jm,ik}\left[\frac{f_{21m,ik}(\alpha)}{\sqrt{ch\alpha-1}}\right]+\int_0^{\pi}\tilde{\mathcal{E}}_1(\lambda,\beta,\eta)\tilde{A}_{ik}(m,\lambda,\eta)d\eta. \tag{13.51}$$

Применение к функции $\tilde{v}_{m,ik}(\alpha,\beta)$ операторов $\mathcal{M}^{-1}_{jm}$ и $F^{-1}_{m,ik}$ определяет решение краевой задачи (13.2), (13.7) и (13.32) - (13.35):

$$v_{ik,1}(\alpha,\beta,\varphi)=\int_0^{\varphi_0}\int_0^{\infty}\left[W^{1k}_{11}(\alpha,x,\beta,\varphi,\psi)\frac{f_{11}(x,\psi)}{\sqrt{chx+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{f_{21}(x,\psi)}{\sqrt{chx-1}}W^{1k}_{21}(\alpha,x,\beta,\varphi,\psi)\right]shx\,dx\,d\psi+ \tag{13.52}$$

$$+\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\mathcal{J}_{ik,1}(\alpha,x,\beta,\eta,\varphi)shx\,dx\,d\eta.$$

Проанализируем функции $\mathcal{J}_{ik,1}$ в зависимости от краевых условий на гранях $\varphi=0$ и $\varphi=\varphi_0$ клина.

Если на гранях $\varphi=0$ и $\varphi=\varphi_0$ заданы краевые условия (13.32), (13.33), (13.34), (13.35) соответственно функции $\mathcal{J}_{ik,1}$ имеют такие выражения:

$$\mathcal{I}_{11,1}(\alpha,x,\beta,\eta,\varphi)=\mathcal{E}_{1,11}(\alpha,x,\beta,\eta;\varphi)\frac{g_{11}(x,\eta)}{sh^2x}+$$

$$+\mathcal{E}_{1,21}(\alpha,x,\beta,\eta;\varphi)\frac{g_{21}(x,\eta)}{sh^2x};$$

$$\mathcal{I}_{12,1}(\alpha,x,\beta,\eta,\varphi)=\mathcal{E}_{1,12}(\alpha,x,\beta,\eta;\varphi)\frac{g_{12}(x,\eta)}{sh^2x}+ \qquad (I3.53)$$

$$+\mathcal{E}_{1,22}(\alpha,x,\beta,\eta;\varphi)\frac{a\,g_{22}(x,\eta)}{shx(chx+\cos\eta)^{3/2}},$$

$$\mathcal{I}_{21,1}(\alpha,x,\beta,\eta,\varphi)=\mathcal{E}_{1,13}(\alpha,x,\beta,\eta;\varphi)\frac{a\,g_{13}(x,\eta)}{shx(chx+\cos\eta)^{3/2}}+$$

$$+\mathcal{E}_{1,23}(\alpha,x,\beta,\eta;\varphi)\frac{g_{23}(x,\eta)}{sh^2x},$$

$$\mathcal{I}_{22,1}(\alpha,x,\beta,\eta,\varphi)=\mathcal{E}_{1,14}(\alpha,x,\beta,\eta;\varphi)\frac{a\,g_{14}(x,\eta)}{shx(chx+\cos\eta)^{3/2}}+$$

$$+\mathcal{E}_{1,24}(\alpha,x,\beta,\eta;\varphi)\frac{a\,g_{24}(x,\eta)}{shx(chx+\cos\beta)^{3/2}}.$$

Здесь функции $\mathcal{E}_{1,1j}$ и $\mathcal{E}_{1,2j}$ имеют вид:

$$\mathcal{E}_{1,11}=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{m,11}u_{m,11}(\varphi)\int_0^\infty\tilde{\mathcal{E}}_1(\lambda,\beta,\eta)\omega_{m,11}(\alpha,x,\lambda)\,d\lambda,$$

$$\mathcal{E}_{1,21}=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\gamma_{m,11}u_{m,11}(\varphi)\int_0^\infty\tilde{\mathcal{E}}_1(\lambda,\beta,\eta)\omega_{m,11}(\alpha,x,\lambda)\,d\lambda,$$

$$\mathcal{E}_{1,12}=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{m,12}u_{m,12}(\varphi)\int_0^\infty\tilde{\mathcal{E}}_1(\lambda,\beta,\eta)\omega_{m,12}(\alpha,x,\lambda)\,d\lambda,$$

$$\mathcal{E}_{1,22}=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}u_{m,12}(\varphi)\int_0^\infty\tilde{\mathcal{E}}_1(\lambda,\beta,\eta)\omega_{m,12}(\alpha,x,\lambda)\,d\lambda,$$

$$\mathcal{E}_{1,13}=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}\gamma_{m,21}u_{m,21}(\varphi)\int_0^\infty\tilde{\mathcal{E}}_1(\lambda,\beta,\eta)\omega_{m,21}(\alpha,x,\lambda)\,d\lambda, \qquad (I3.54)$$

$$\mathcal{E}_{1,23}=-\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=1}^{\infty}U_{m,21}(\varphi)\int_0^{\infty}\tilde{\mathcal{E}}_1(\lambda,\beta,\eta)\omega_{m,22}(\alpha,x,\lambda)d\lambda,$$

$$\mathcal{E}_{1,14}=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{22}U_{m,22}(\varphi)\int_0^{\infty}\tilde{\mathcal{E}}_1(\lambda,\beta,\eta)\omega_{m,22}(\alpha,x,\lambda)d\lambda,$$

$$\mathcal{E}_{1,24}=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{22}U_{m,22}(\varphi)\int_0^{\infty}\tilde{\mathcal{E}}_1(\lambda,\beta,\eta)\omega_{m,22}(\alpha,x,\lambda)d\lambda,$$

$$\omega_{m,ik}(\alpha,x,\lambda)=P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\gamma_{m,ik}}(\operatorname{ch}\alpha)P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^{\gamma_{m,ik}}(\operatorname{ch}x)\left|\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+i\lambda-\gamma_{m,ik}\right)\right|^2\lambda\operatorname{sh}\pi\lambda.$$

При этом

$$W_{11}^{ik}(\alpha,x,\beta,\varphi,\psi)=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}U_{m,ik}(\varphi)U_{m,ik}(\psi)\int_0^{\infty}\tilde{W}_{11}(\lambda,\beta)\omega_{m,ik}d\lambda,$$

$$W_{21}^{ik}(\alpha,x,\beta,\varphi,\psi)=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}U_{m,ik}(\varphi)U_{m,ik}(\psi)\int_0^{\infty}\tilde{W}_{21}(\lambda,\beta)\omega_{m,ik}d\lambda,$$

$$\tilde{W}_{11}(\lambda,\beta)=\frac{\operatorname{ch}\lambda(\pi-\beta)}{\operatorname{ch}\lambda\pi},\quad \tilde{W}_{21}(\lambda,\beta)=\frac{\operatorname{sh}\lambda\beta}{\operatorname{ch}\lambda\beta}. \tag{I3.55}$$

Решения краевых задач (I3.2), (I3.I4), (I3.32) - (I3.35) определяется по формулах (I3.52) - (I3.55) при замене $\tilde{\mathcal{E}}_1$ на $\tilde{\mathcal{E}}_2$ и $\tilde{W}_{j1}$ на $\tilde{W}_{j2}$ $(j=1,2)$.

Решения краевых задач (I3.2), (I3.I6), (I3.32) - (I3.35) определяются по формулам (I3.52) - (I3.55), где $\tilde{\mathcal{E}}_1$ заменено на $\tilde{\mathcal{E}}_3$ а функции $\tilde{W}_{j1}(\lambda,\beta)$ на $\tilde{W}_{j3}(\lambda,\beta)$ $(j=1,2)$.

Решения краевых задач ЭI3.2), (I3.I8), (I3.32) - (I3.35) определяются по формулам (I3.52) - (I3.55), в которых вместо $\tilde{\mathcal{E}}_1$, стоит $\tilde{\mathcal{E}}_4$, а вместо функций $\tilde{W}_{j1}(\lambda,\beta)$ стоят функции $\tilde{W}_{j4}(\lambda,\beta)$.

Таким образом, мы получаем в замкнутой форме решения всевозможных краевых задач для тороидальных клиновидных тел допускающих точное решение. Нетрудно усмотреть изменения в формулах (I3.52) - (I3.55) для тех случаев когда уравнения (I3.2) неоднородное.

ВЫВОДЫ

Основные результаты, полученные в диссертационной работе, состоят в следующем:

I. Построены методом дельта-образных последовательностей нтегральные преобразования Мелера-Фока I-го и 2-го рода и гиб-ридные интегральные преобразования Мелера-Фока I-го и 2-го рода на полярной оси с одной и двумя точками сопряжения.

При этом доказаны формулы интегрального представления ку-сочно-непрерывных, абсолютно суммируемых с точно определенной весовой функцией и имеющих ограниченную вариацию функций через дра гибридных интегральных преобразований.

2. Методом дельтаобразных последовательностей получены гиб-ридные интегральные преобразования Фурье-Лежандра на декартовой оси, на ограниченной справа полупрямой и на полярной оси.

3. Доказаны теоремы о структуре прямого и обратного гибрид-ного интегрального преобразования Лежандра I-го рода - Фурье и ежандра 2-го рода - Фурье на полярной оси и формулы интеграль-ого представления функций через ядра соответствующих гибридных нтегральных преобразований.

4. Сформулированы и доказаны теоремы о наличии основного ождества интегрального преобразования дифференциального опера-ора, позволяющего применять полученные интегральные преобразо-ания для решения соответствующих задач математической физики еоднородных структур.

5. Логическая схема применения полученных гибридных интег-альных преобразований показана на задаче вычисления значений олипараметрических несобственных интегралов, на задаче о струк-уре статических и динамических волн, возникающих при кручении

неоднородного по глубине цилиндрического стержня и неоднородного слоя, на задаче о структуре стационарного материального поля, возникающего в тороидальных объектах при различных механизмах воздействия.

Приведен численный анализ распределения перемещений, возникающих в полуограниченном кусочно-неоднородном по глубине цилиндре, в результате мгновенно сосредоточенного силового воздействия.

6. Теоретические результаты работы состоят в следующем:

а) обобщение интегральных преобразований Мелера-Фока I-го и 2-го рода на случай действительного $\mu \geq -\frac{1}{2}$;

б) получены гибридные интегральные преобразования Мелера-Фока I-го и 2-го рода на полярной оси с одной и двумя точками сопряжения и гибридные интегральные преобразования Фурье-Лежандра и Лежандра-Фурье на декартовой оси;

в) предложена логическая схема применения гибридных интегральных преобразований для построения точных аналитических решений соответствующих задач математической физики.

7. Практическое значение полученных результатов состоит в том, что они могут быть использованы как математический аппарат для решения достаточно широкого класса сингулярных задач математической физики неоднородных структур. Записанное при этом решение в замкнутой форме может быть использовано (с помощью ЭВМ) для инженерных расчетов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

НАУКОВО-ВИРОБНИЧЕ ОБ'ЄДНАННЯ • НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ

•ВАТРА•

ІМЕНІ 60-РІЧЧЯ РАДЯНСЬКОЇ УКРАЇНИ

282000, м. Тернопіль (обл.)
вул. Генерала Люднікова, 46.

ИМЕНИ 60-ЛЕТИЯ СОВЕТСКОЙ УКРАИНЫ

282000, г. Тернополь (обл.)
ул. Генерала Людникова, 46.

0214263 0200200

07.05.90 № 677

На №

СПРАВКА

Настоящая составлена в том, что полученные тов. Шинкариком Н.И. результаты научных исследований, касающиеся решения задач о структуре упругих полей, возникающих при кручении неоднородных цилиндрических стержней и неоднородного упругого слоя (статическая и динамическая задача) предполагается внедрить в ВПКТИ "Свет" НПО "Ватра" при конструировании цилиндрических эксцентриковых валов, работающих при несимметричных знакопеременных нагрузках, разработка которых предусмотрена планом модернизации оборудования на НПО "Ватра".

Главный инженер НПО "Ватра" Гуров И.А.

Утверждаю

Проректор ТИНХ по научной работе

проф. Яремчук И.Ф.

"__7__" ______ 1990г.

А К Т

о внедрении результатов диссертационной работы Шинкарика Николая Ивановича "Гибридные интегральные преобразования (Фурье, Лежандра) с применением к задачам математической физики".

Внедрение результатов диссертационной работы преподавателя кафедры математических методов в экономике, младшего научного сотрудника отраслевой научно-исследовательской лаборатории автоматизированных систем сбора и обработки информации (ОНИЛ АСОИ) Шинкарика Н.И. в научно-исследовательские работы института осуществлялось в процессе выполнения хоздоговора ВТ-22-82, "Разработка специализированной микропроцессорной информационно-измерительной системы для АСУ ТП", акт внедрения №9 от 26.12.86г.), а также проведения НИР, входящих в Комплексную программу метрологического обеспечения НИС и АСУ ТП в отраслях народного хозяйства на 1986-1990г.г.

Основные выводы и практические рекомендации диссертационной работы Шинкарика Н.И. связаны с разработкой методов решения краевых задач уравнений теплопроводности, использованных в разработках ОНИЛ АСОИ при расчете количественных характеристик температурных полей в термическом оборудовании.

На основе практических рекомендаций и выводов диссертационной работы Шинкарика Н.И. обеспечен учет методических погрешностей теплового происхождения, что позволило повысить точность в разработанной ОНИЛ АСОИ специализированной микропроцессорной информационноизмерительной системе температуры.

Годовой экономический эффект от внедрения результатов диссертационной работы Шинкарика Н.И. составил 8,1 тыс.руб.

Научный руководитель ОНИЛ АСОИ, д.т.н., доцент — А.А.Саченко

Зав. ОНИЛ АСОИ — А.Ф.Карачка

Руководитель группы внедрения НИС ТИНХ — В.И.Пысьменный

Утверждаю

Проректор по научной работе

Тернопольского института

народного хозяйства

профессор

И.Г.Яремчук

" " 1990г.

Акт долевого участия

Мы, нижеподписавшиеся, зав. кафедрой ИВСУ, научный руководитель ОНИЛ АСОИ, д.т.н., доц. Саченко А.А., заведующий ОНИЛ АСОИ Карачка А.Ф. и старший преподаватель кафедры ИВСУ Чирка М.И. составили настоящий акт в том, что долевое участие разработок Шинкарика Н.И. в законченной НИР по хоздоговору ВТ-22-82 (акт внедрения №9 от 26.12.86г.) составляет II,1% или 8,I тыс.руб.

Зав. кафедрой ИВСУ,

Научный руководитель ОНИЛ АСОИ, А.А.Саченко

д.т.н., доц.

Зав. ОНИЛ АСОИ А.Ф.Карачка

Ст. преподаватель каф. ИВСУ, М.И.Чирка

с.н.с.

ЛИТЕРАТУРА

I. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям.– М.: Наука, 1979. – 832 с.

2. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. – М.: Физматгиз, 1963. – 688 с.

3. Ахиезер Н.И. Лекции об интегральных преобразованиях. – – Харьков: Вища школа, 1984. – 120 с.

4. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве – М.: Наука, 1966. –243 с.

5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1965. – Т.I. – 296 с.

6. Белова Н.А. Об одном разложении в интеграл по сферическим функциям первого и второго рода // Диф.уравн. – 1969. – Т.5. – Вып. II. – С. 2096–2100.

7. Белова Н.А., Уфлянд Я.С. О разложении по собственным функциям одной сингулярной краевой задачи для уравнения Лежандра // Диф.уравн. – 1967. – Т.3. – Вып.8. – С. 1397–1399.

8. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.

9. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. – М.: Физматгиз, 1962. – 360 с.

10. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Мат.анализ. – 1982. – Т.20. – С. 78–115.

11. Буневич В.В., Шинкарик Н.И. О некоторых интегральных преобразованиях Лежандра / Чернов.гос.ун-т. – Черновцы, 1984.– 24 с. – Деп. в Укр.НИИНТИ 21.12.84, № 2155.

12. Быблив О.Я., Ленюк М.П. Гибридные интегральные преобразования Вебера для кусочно-однородной полярной оси. // Изв. вузов. Математика. - 1987. - № 8. - С.3-11.
13. Быблив О.Я., Ленюк М.П. Интегральные преобразования Ханкеля - II рода для кусочно-однородных сегментов. // Изв. вузов. Математика. - 1987. - № 5. - С.82-85.
14. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. Ч.I. - М.: Иностр. лит., 1949 - 799 с.
15. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. - М.: Наука, 1965. - 588 с.
16. Вирченко Н.А. Об одном свойстве обобщенной присоединенной функции Лежандра I-го рода // Вычисл. и прикл.мат. Киев, 1982. - № 48. - С.34-38.
17. Вирченко Н.А. Парные (тройные) интегральные уравнения. - К.: Выща шк. Изд-во при Киев. ун - те, 1989. - 160 с.
18. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1976. - 528 с.
19. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций.- - М.: Иностр.лит., 1952. - 476 с.
20. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа - М.: ГИФМЛ, 1958. -237 с.
21. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. - М.: Наука, 1966. - 672 с.
22. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. - М.: Наука, 1974. - 542 с.
23. Ефимова И.Т. Некоторые задачи теории теплопроводности для двухслойной среды // МФК. - 1968. - Т.Х. - № I. - С.

24. Ефимова И.Т. Некоторые интегральные преобразования на составном промежутке и их приложения к решению краевых задач для слоистых сред: Дис.канд.физ.- мат.наук. - Л., 1972. - 150 с.

25. Ефимова И.Т. Об одном классе сингулярных задач, разрешимых с помощью специальных интегральных преобразований по цилиндрическим функциям // Диф.уравн. - 1972. - Т.III. - Вып. 5. - С. 817-822.

26. Ефимова И.Т., Уфлянд Я.С. О кручении составных цилиндрических стержней // Изв. АН Арм.ССР. Механика. - Т.XXIII. - № 3. - 1970. - С. 23-26.

27. Журина М.И., Кармазина Л.Н. Таблицы функций Лежандра. $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$. - М.: Изд-во АН СССР, 1962. - Т.I. - 678 с.

28. Земанян А.Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. - М.: Наука, 1974. - 399 с.

29. Камынин Л.И. О существовании решений краевых задач для параболических уравнений с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Математика. - 1964. - 28, № 4. - С.28-31.

30. Канторович Л.В., Акимов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1984. - 752 с.

31. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1973. - 736 с.

32. Лебедев Н.Н. Некоторые интегральные представления для произведений сферических функций // Докл. АН СССР. - 1950. - 73, № 3. - С. 449.

33. Лебедев Н.Н. Некоторые интегральные преобразования математической физики: Автореф.дис.докт.физ.- мат.наук. - Л., 1951. - 18 с.

34. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. - М.: Физматгиз, 1963. - 358 с.

35. Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Интегральные разложения, родственные преобразованиям Мелера - Фока // Диф.уравн. - 1986. - 22, № 9. - С. I5I5-I523.
36. Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям // Прикл. матем. и механ. - I966. - Т.30. - Вып.2. - С. 52-55.
37. Лебедев Н.Н., Скальская И.П. О разложении произвольной функции в интеграл по присоединенным сферическим функциям// Прикл.матем. и механ. - I968. - 32, № 3. - С.42I-427.
38. Ленюк М.П. Гибридные интегральные преобразования Бесселя (случай двух точек сопряжения). - Киев, I987. - С. I2-33 - (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; № 87.43).
39. Ленюк М.П. Гибридные интегральные преобразования (Бесселя-- Фурье - Бесселя) // Мат.физика и нелинейн.мех. - I989. - № I2 (46). - С. 68-74.
40. Ленюк М.П. Гибридные интегральные преобразования Вебера (случай двух точек сопряжения). - Киев, I987. - С.34-59 - (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики ; № 87.43).
4I. Ленюк М.П. Гибридные интегральные преобразования (Фурье - Бесселя, Бесселя - Фурье, Бесселя - Бесселя, Вебера - Фурье, Вебера - Бесселя). - Киев, I985. - 60 с. - (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики ; № 85.28).
42. Ленюк М.П. Интегральные преобразования Фурье - Бесселя и Вебера для кусочно-однородной полярной оси. - Киев, I985. - 64 с. - (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; № 85.30).
43. Ленюк М.П. Интегральные преобразования Фурье для кусочно-однородных неограниченных и полуограниченных сред. - Киев, I985. - 60 с. - (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики ; № 85.29).

44. Ленюк М.П. Интегральные преобразования Фурье на кусочно-однородной полупрямой. // Изв.вузов. Математика. - 1989. - № 4. - С.14-18.

45. Ленюк М.П. Один класс непрерывных гибридных интегральных преобразований // Докл. АН УССР. Сер.А. - 1985. - № 5. - С. 14-18.

46. Ленюк М.П., Быблив О.Я. Интегральные преобразования Ханкеля I-го рода для кусочно-однородных сегментов с применением к задачам математической физики. // Вычисл. и прикл. мат. Киев, 1988. - № 65. - С. 24-34.

47. Ленюк М.П., Настасиев П.П., Шинкарик Н.И. Теоремы разложимости для многочленов Лежандра / Черков.гос.ун-т. - Черновцы, 1982. - 43 с. - Деп. в ВИНИТИ 2.07.82, № 3460.

48. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Лежандра. - Львов, 1989. - 60 с. (Препринт/ Ин-т прикл. проблем механики и математики АН УССР).

49. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Фурье - Лежандра на ограниченной справа прямой I / Изв.вузов. Математика. - Казань, 1989. - 20 с. Деп. в ВИНИТИ 03.11.89, № 6702.

50. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Фурье - Лежандра на прямой с применением к задачам математической физики / Терноп.фин. - эк.ин-т. - Тернополь, 1986. - 23 с. - Деп.в Укр. НИИНТИ 18.03.86, № 810.

51. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Построение интегральных преобразований Мелера - Фока на полупрямой $\tau \geqslant 0$ методом δ - образных последовательностей / Терноп.фин. - эк.ин-т. - Тернополь, 1987. - 18 с. - Деп. в Укр. НИИНТИ 05.01.88, № 78.

52. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Построение интегральных преобразований Мелера - Фока на полупрямой $r \geq R_0 > 0$ методом δ - образных последовательностей / Терноп.фин. - эк.ин-т.- Тернополь, 1987. - 27 с. - Деп. в Укр. НИИНТИ 04.05.87, № 1355.

53. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Применение гибридных интегральных преобразований Фурье - Лежандра к решению задач математической физики // Тез.докл.конф. "Применение вычислительной техники, математических методов и моделирования в автоматизации экспериментальных исследованиях - Киев, 1987. - С. 67-68.

54. Лозановская И.Т., Уфлянд Я.С. Об одном классе задач математической физики со смешанным спектором собственных значений // Докл. АН СССР. - 1965. - Т. 164. - № 5. - С. 1005- - 1007.

55. Ляшко И.И., Вирченко Н.А., Ромашенко В.А. Об одном обобщении интегрального преобразования Лежандра // Докл.АН УССР. Сер. А. - 1981. - № 12. - С. 12-15.

56. Мурадов Р.И., Намазов Г.К.,Краевая задача для уравнений смешанного типа с разрывными коэффициентами // Докл. АН Азерб.ССР - 1969. - 25, № 8. - С. 15-18.

57. Найда Л.С. Гибридное интегральное преобразование типа Ханкеля - Лежандра. // Мат.методы анализа динам.систем. Харьков, 1983. - № 7. - С. 40-42.

58. Найда Л.С. Гибридное интегральное преобразование типа Ханкеля - Лежандра. // Мат.методы анализа динам.систем. Харьков, 1984. - № 8. - С.132-135.

59. Олвер Ф. Введение в ассимптотические методы и специальные функции. - М.: Наука, 1978. - 375 с.

60. Проценко В.С., Головченко А.В. Обобщенное интегральное преобразование типа Фурье - Лежандра // Мат.методы анализа динам.систем. Харьков, 1982. - № 6. - С. 26-28.

61. Проценко В.С., Кощавец П.Т. Гибридные интегральные преобразования Фурье - Ханкеля и некоторые задачи кручения кусочно - однородных тел. // Динамика систем, несущих подвижную распредел.нагрузку. Харьков, 1978. - № I. - С. I20-I24.

62. Проценко В.С., Соловьев А.И. Некоторые гибридные интегральные преобразования и их приложение в теории упругости неоднородных сред. // Прикл.механика. - 1982. - Т.XIII. - № I.- С. 62-67.

63. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. - Киев: Наук. думка, 1984. - 264 с.

64. Романович Т.Н., Шинкарик Н.И. Новый класс гибридных интегральных преобразований (Фурье, Бесселя, Лежандра) с применением к задачам математической физики // Тез.докл.Второй Всесоюз.конф. "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений, Дрогобыч, 30 мая - I июня 1989". - М., 1989. - С. I40.

65. Русакова О.Я. Гибридные интегральные преобразования и задачи теплопроводности многослойных цилиндрических сред: Дис.... канд.физ. - мат. наук. - Черновцы, 1988. - I52 с.

66. Слесаренко А.П., Бузько Я.П. Определение функции напряжений в зависимости от параметра точечного усиливающего покрытия в задачах кручения стержней // Численные методы расчета тонкостенных пространственных конструкций. Киев, 1988. - С.I80.

67. Снеддон И. Преобразования Фурье. - М.: Иностр.лит., 1955. - 668 с.

68. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1959. - 468 с.

69. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. - М.: Иностр.лит., 1960. - Т.I. - 278 с.

70. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. -М.: Физматгиз, 1963. - Т.2. - 516 с.

71. Улитко А.Ф. Об одном обобщении интегрального преобразования Мелера - Фока // Прикл.механика. - 1967. - Т.III. - Вып. 5.- С. 45-49.

72. Улитко А.Ф., Вовкодав И.Ф. Одно разложение произвольной функции в интеграл по функциям Лежандра // Докл. АН УССР. Сер.А. - 1985. - № 2. - С. 14-17.

73. Уфлянд Я.С. Ассиметричная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий.// Докл. АН СССР. - 1956. - 110, № 4. - С. 531-533.

74. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. - Л.: Наука, 1967. - 402 с.

75. Уфлянд Я.С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики. // Вопросы математической физики. Ленинград, 1976. - С. 93-106.

76. Федорюк М.В. Интегральные преобразования обобщенных функций.// Итоги науки и техники ВИНИТИ. Мат.анализ. - 1982. - № 20. - С. 78-115.

77. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М.: Физматгиз, 1969. - Т.3. - Т.3. - 658 с.

78. Фок В.А. О разложении произвольной функции в интеграл по функциям Лежандра с комплексным значком // Докл. АН СССР. - I943. - 39, № 7. - С. 253-256.

79. Фохт А.С. Оценки производных присоединенных функций Лежандра и ультрасферических многочленов в метрике L_p, $1 < p < \infty$, // Диф.уравнения. - I983. - I9, № 4. - С. 718-720.

80. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. - М.: Иностр.лит., I986. - Т.I. - 464 с.

81. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, I965. - 328 с.

82. Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Лежандра - Фурье на полярной оси. // Вычисл. и прикл.матем. Киев, I989. - Вып. 69. - С. 51-56.

83. Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Фурье - - Лежандра на ограниченной справа прямой./ Терноп.фин. - эк. ин-т. - Тернополь, I987. - II с. - Деп.в Укр.НИИНТИ I9.02.87, № 795.

84. Шинкарик Н.И. Один класс гибридных интегральных преобразований (Фурье - Лежандра, Лежандра - Фурье) // Докл. АН УССР. Сер. А. - I989. - № 7. - С. 26-3I.

85. Шинкарик Н.И. Применение гибридных интегральных преобразований Лежандра - Лежандра и Лежандра - Фурье к решению задач неоднородных структур. // Тез.докл.конф. "Применение выч. техн. и мат.методов в научн. и экон. исслед.". - Киев, I989. С.48.

86. Шинкарик Н.И. Решение задач математической физики для неоднородных структур методом гибридных интегральных преобразований // Тез.докл.Всесоюзной конференции "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики. Тернополь, I2-I5 сентября I989 ч.II. - Тернополь, I989. - С.477-479.

87. Шинкарик Н.И., Ленюк М.П. Построение интегральных преобразований типа Мелера - Фока на полупрямой $r \geqslant R_0 > 0$ методом δ - образных последовательностей с применением к задачам математической физики. //Тез.докл.Всесоюз.сем. "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики" - Кемерово, I988. - С. I27-I28.

88. Янке Е., Эмде., Леш Ф. Специальные функции. - М.: Наука, I968. - 344 с.

89. Barnes E.W. On Generalized Legendre functions // Quart. T.Math., Oxford Ser. - 1908.-39.-p.97-204.

90. Erdeiyi A., Magnus W., Oberhettinger, Tricomi F.G. Higher Trancendental Functions. 1..- New York; Toronto; London, 1953.-p. 200 - 302.

9I. Belevitch V., Boersma T. Some electrical problems for a torus // Philips T. Res. -1983.-38,N3.-p.79-137.

92. Kuipers L., Menlenbeld B., On a generalization of Legendre's associated differential equation. // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet.-1957.-60,N4.-p.436-443.

93. Magnus W., Oberhettinger F., Soni R.P. Formulas and Theorems for the special functions of Mathematical Phusics.- B.-Heidelberg.; N.Y.:Springer, 1966.-508p.

94. Mehler F.G. Ueber eine mit Kugel und Cylinder Funktionen

Vervandte Function und ihre Anvendung in der Theorie der Elekctricitats - Verteilung Math. Annalen, 18, 161, 1881.

95. Ursell F. Integrals with a lager parameter Legendre functions of large degree and fixed order // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. - 1984.-95, N2.-p.367-380.

96. Watson G.N. Asymptotic Expansions of Hypergeometric Functions // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. - 1922.- V.XXII.-p.277-309.

97. Kimp T. A class of integrals transforms. // Proc. Edinburgh Math. Soc.- 1964.-V.14, NI.- p.33-40.