UDC 517.925; 517.93

Robust stability of linear control system with matrix uncertainty

Andrii Aliluiko, Ruslana Ruska

Ternopil National Economic University, Ternopil, Ukraine

Resume. *The work is devoted to working out of new methods for analysis of robust stability and robust stabilization of linear dynamic systems. Sufficient stability conditions of the zero solution are formulated for a linear system with uncertain coefficient matrices and a measured output feedback. In addition, a common quadratic Lyapunov function and ellipsoidal set of stabilizing matrixes of amplification factors of a output feedback are given for the whole set of system. Application of the results is reduced to a solution of systems of linear matrix inequalities.*

Keywords: *control system, output feedback, robust stability, matrix uncertainty, ellipsoid.*

Received

Постановка проблеми. В прикладних задачах аналізу і синтезу реальних об'єктів використовуються диференціальні та різницеві системи з невизначеними параметрами і функціональною структурою (див., наприклад, [1] – [4]). При цьому основна увага приділяється задачам робастної стійкості і робастної стабілізації.

Під множиною робастної стійкості динамічних систем будемо розуміти параметричну або функціональну множину, що характеризує невизначеність заданої структури системи та її елементів керування. Зокрема, в невизначених лінійних моделях матриці коефіцієнтів та зворотного зв'язку можуть належати деяким заданим множинам у відповідних просторах (політопи, еліпсоїди, матричні інтервали, тощо).

Задача стабілізації системи керування полягає у побудові статичного або динамічного регуляторів, що забезпечують асимптотичну стійкість стану рівноваги замкненої системи при довільних значеннях невизначених елементів. Зазвичай ця задача зводиться до розв’язування систем лінійних матричних нерівностей (ЛМН).

Аналіз останніх досліджень та публікацій. При описі невизначеностей та умов робастної стійкості систем використовуються матричні інтервали та політопи [1, 5, 6]. В роботах [3, 7] в термінах лінійних матричних нерівностях отримано достатні умови стійкості лінійних керованих систем з невизначеними матрицями коефіцієнтів і зворотного зв'язку. З оглядом задач і відомих методів аналізу робастної стійкості та стабілізації систем керування з зворотним зв'язком можна ознайомитися в [8, 9].

Метою роботи є розробка нових методів аналізу робастної стійкості та робастної стабілізації лінійних динамічних систем з обмеженими по нормі матричними невизначеностями і статичним зворотним зв’язком по вимірному виходу.

Робастна стабілізація систем керування. Розглянемо лінійну неперервну динамічну систему керування:

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t))x + (B + \Delta B(t))u, \quad u = Ky, \quad y = Cx + Du, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ – вектори відповідно стану, керування та спостереження об’єкта, A, B, C і D – сталі матриці відповідних розмірів $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$ і $l \times m$, а

$$\Delta A(t) = F_A \Delta_A(t) H_A, \quad \Delta B(t) = F_B \Delta_B(t) H_B, \tag{2}$$

де F_A, F_B, H_A, H_B – сталі матриці відповідних розмірів, а матричні невизначеності $\Delta_A(t)$ і $\Delta_B(t)$ задовольняють обмеження

$$\|\Delta_A(t)\| \le 1, \ \|\Delta_B(t)\| \le 1 \text{ або } \|\Delta_A(t)\|_F \le 1, \ \|\Delta_B(t)\|_F \le 1, \quad t \ge 0. \tag{3}$$

Тут і далі $\|\cdot\|$ – евклідова норма вектора і спектральна норма матриці, $\|\cdot\|_F$ – матрична норма Фробеніуса, I – одинична матриця відповідних розмірів. Для спрощення записів залежність матриць від t будемо упускати.

Відмітимо, що при $\Delta_A(t)=0$, $\Delta_B(t)=0$ система перетворюється в систему без невизначеностей, яка розглядалася в [10].

Сформулюємо відомі критерії додатної та невід'ємної визначеностей блочних матриць.

Лема 1. [11] *Має місце така еквівалентність:*

$$\begin{bmatrix} U & Z \\ Z^T & V \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow V > 0, \;\; U - ZV^{-1}Z^T > 0 . \tag{4}$$

Якщо блок V невироджений, то

$$\begin{bmatrix} U & Z \\ Z^T & V \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow V > 0, \;\; U - ZV^{-1}Z^T \geq 0 . \tag{5}$$

Лема 2. [12] *Нехай виконується система матричних нерівностей*

$$\begin{bmatrix} R - P^{-1} & D^T \\ D & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 , \;\; \begin{bmatrix} W & U^T & V^T \\ U & R - P^{-1} & D^T \\ V & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 \; (< 0) , \tag{6}$$

де $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$, $R = R^T \geq 0$, $W = W^T \geq 0$, U, V і D – матриці відповідних розмірів. Тоді для будь-якої матриці $K \in \mathcal{E}$ виконується матрична нерівність

$$W + U^T \mathcal{D}(K)V + V^T \mathcal{D}^T(K)U + V^T \mathcal{D}^T(K) R \mathcal{D}(K)V \leq 0 \; (< 0) . \tag{7}$$

Лема 3. [13] *Нехай L симетрична матриця, матриці $M_1,\ldots,M_r$ і $N_1,\ldots,N_r$ мають відповідні розміри. Тоді, якщо при деяких числах $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r > 0$ виконується матрична нерівність*

$$L + \sum_{i=1}^{r} \left(\varepsilon_i M_i M_i^T + \frac{1}{\varepsilon_i} N_i^T N_i \right) \leq 0 ,$$

то вірною є нерівність

$$L + \sum_{i=1}^{r} \left(M_i \Delta_i N_i + \left(M_i \Delta_i N_i \right)^T \right) \leq 0,$$

при всіх $\|\Delta_i\| \leq 1$ або $\|\Delta_i\|_F \leq 1$, $i = 1,\ldots,r$.

Відмітимо, що леми 2 і 3 є узагальненнями твердження достатності відомого критерія, який називається лемою Пітерсена про матричну невизначеність [14].

Множину матриць керування K, що забезпечує стійкість замкненій системі, побудуємо у вигляді еліпсоїда

$$\mathcal{E} = \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times l} : K^T P^{-1} K \leq Q \right\}, \tag{8}$$

де $P = P^T > 0$ і $Q = Q^T > 0$ – деякі додатно визначені матриці.

Введемо на множині матриць $\mathcal{K} = \left\{ K : \det(I_m - KD) \neq 0 \right\}$ нелінійний оператор

$$\mathcal{D} : \mathbb{R}^{m \times l} \to \mathbb{R}^{m \times l}, \;\; \mathcal{D}(K) = (I_m - KD)^{-1} K \equiv K(I_l - DK)^{-1} .$$

Для оператора $\mathcal{D}$ виконується властивість [12]: якщо $K_1 \in \mathcal{K}$, $K_2 \in \mathcal{K}$, для яких $K_3 = (I_m - K_1 D)^{-1} K_2 \in \mathcal{K}$, то

$$K_1 + K_2 \in \mathcal{K} \;\text{ і }\; \mathcal{D}(K_1 + K_2) \equiv \mathcal{D}(K_1) + \mathcal{D}(K_3)\left[I_l + D\mathcal{D}(K_1) \right]. \tag{9}$$

З (1) і (8) слідує нерівність

$$w_0(x,u) = \left[x^T, u^T\right] \begin{bmatrix} C^T QC & C^T QD \\ D^T QC & D^T QD - P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \geq 0 . \tag{10}$$

Припустимо, що

$$D^T QD < P^{-1} . \tag{11}$$

Це еквівалентно першій блочній нерівності леми 2 при $R = 0$. Тоді із $x = 0$ слідує $u = 0$ і $x \equiv 0$ є станом рівноваги системи, який ми досліджуємо на стійкість. Замкнена система має наступну структуру

$$\dot{x} = M(t)x , \quad M(t) = A + \Delta A + (B + \Delta B)\mathcal{D}(K)C . \tag{12}$$

При умовах (8) і (9) маємо $D^T K^T P^{-1} KD \leq D^T QD < P^{-1}$. За теоремою Ляпунова для дискретних систем, $\rho(KD) < 1$ і тому в (12) матриця $I_m - KD$ невироджена.

Сформулюємо умови робастної стабілізації класу систем (1).

Теорема 1. *Нехай матриця A системи (1) є гурвіцевою і для деяких $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ виконуються матричні нерівності (11) і*

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + \varepsilon_1 H_A^T H_A & XB & C^T & XF_A & XF_B \\ B^T X & -P^{-1} + \varepsilon_2 H_B^T H_B & D^T & 0 & 0 \\ C & D & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ F_A^T X & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ F_B^T X & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} \leq 0 , \tag{13}$$

де $X = X^T > 0$. Тоді керування $u = Ky$ з довільною матрицею $K \in \mathcal{E}$ стабілізує систему (1). Причому, якщо в (13) виконується строга матрична нерівність, то задана множина керувань забезпечує асимптотичну стійкість замкненої системи (12) і спільну функцію Ляпунова $v(x) = x^T Xx$.

Доведення. Побудуємо функцію Ляпунова для замкненої системи (12) у вигляді $v(x) = x^T Xx$. Тоді за теоремою Ляпунова система (12) стійка (асимптотично стійка), якщо для деякої додатно визначеної матриці $X = X^T > 0$ виконується матрична нерівність

$$(A + \Delta A + (B + \Delta B)\mathcal{D}(K)C)^T X + X(A + \Delta A + (B + \Delta B)\mathcal{D}(K)C) \leq 0 \ (< 0) . \tag{14}$$

Перепишемо останню нерівність у вигляді

$$(A + \Delta A)^T X + X(A + \Delta A) + C^T \mathcal{D}^T (K)(B + \Delta B)^T X + X(B + \Delta B)\mathcal{D}(K)C \leq 0$$

і використаємо лему 2, поклавши

$$U = (B + \Delta B)^T X , \quad V = C , \quad W = (A + \Delta A)^T X + X(A + \Delta A) , \quad R = 0 .$$

Тоді друга блочна нерівність в (6) має вигляд

$$\begin{bmatrix} (A + \Delta A)^T X + X(A + \Delta A) & X(B + \Delta B) & C^T \\ (B + \Delta B)^T X & -P^{-1} & D^T \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 . \tag{15}$$

Використовуючи структуру матричних невизначеностей $\Delta_A(t)$, $\Delta_B(t)$, здійснимо розклад останньої нерівності

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -P^{-1} & D^T \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_A^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_A^T \left[F_A^T X \quad 0 \quad 0\right] + \begin{bmatrix} XF_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_A \left[H_A \quad 0 \quad 0\right] +$$

$$+\begin{bmatrix}0\\H_B^T\\0\end{bmatrix}\Delta_B^T\begin{bmatrix}F_B^T X & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}XF_B\\0\\0\end{bmatrix}\Delta_B\begin{bmatrix}0 & H_B & 0\end{bmatrix}\le 0,$$
яка за лемою 3 виконується, якщо існують $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ такі, що
$$\begin{bmatrix}A^T X+XA & XB & C^T\\B^T X & -P^{-1} & D^T\\C & D & -Q^{-1}\end{bmatrix}+\varepsilon_1\begin{bmatrix}H_A^T H_A & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{\varepsilon_1}\begin{bmatrix}XF_A\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_A^T X & 0 & 0\end{bmatrix}+$$
$$+\varepsilon_2\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & H_B^T H_B & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{\varepsilon_2}\begin{bmatrix}XF_B\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_B^T X & 0 & 0\end{bmatrix}\le 0.$$
Відповідно до леми 1 отримана матрична нерівність еквівалентна нерівності (13).

Теорема доведена

Можна дати інше доведення теореми 1 за допомогою теореми про неущербність *S*-процедури для квадратичних форм при одному обмеженні [15]. Вона стверджує, що нерівність $w(x,u)\le 0\ \ (<0)$ при обмеженні $w_0(x,u)\ge 0$ еквівалентна співвідношенням
$$w(x,u)+\tau w_0(x,u)\le 0\ (<0),\ \ x^T x+u^T u\ne 0, \tag{16}$$
де $\tau>0$ – деяке число. Можна покласти $\tau=1$. Тоді, враховуючи (10) і похідну в силу системи
$$w(x,u)=\begin{bmatrix}x^T, u^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(A+\Delta A)^T X+X(A+\Delta A) & X(B+\Delta B)\\(B+\Delta B)^T X & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}\le 0\ (<0),$$
(16) перепишемо у вигляді
$$\begin{bmatrix}x^T, u^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega & X(B+\Delta B)+C^T QD\\(B+\Delta B)^T X+D^T QC & D^T QD-P^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}\le 0\ (<0),$$
де $\Omega=(A+\Delta A)^T X+X(A+\Delta A)+C^T QC$. Застосовуючи лему 1, маємо нерівність (15).

В теоремі 1 система (1) без керування ($u=0$) повинна бути стійкою. Якщо ж нульовий стан системи (1) без керування нестійкий, то будемо шукати множину стабілізуючих керувань з еліпсоїда
$$\mathcal{E}_0=\left\{K\in\mathbb{R}^{m\times l}:(K-K_0)^T P^{-1}(K-K_0)\le Q\right\},$$
що рівносильно вибору матриці
$$K=K_0+\widetilde{K},\ \ \widetilde{K}\in\mathcal{E}. \tag{17}$$
Для цього спершу потрібно знайти матрицю K_0, яка стабілізує систему
$$\dot{x}=M_0 x,\ \ M_0=A+\Delta A+(B+\Delta B)\mathcal{D}(K_0)C.$$
Матрицю K_0 можна знайти методами, описаними в [5].

Побудуємо умови робастної стабілізації класу систем (1) з матрицею керування (17). Відповідно до (1), (8) і (17) повинна виконуватися нерівність
$$\begin{bmatrix}x^T, u^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C^T QC-C^T K_0^T P^{-1}K_0 C & C^T QD+C^T K_0^T P^{-1}G\\D^T QC+G^T P^{-1}K_0 C & \Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}\ge 0,$$
де $\Delta=D^T QD-G^T P^{-1}G$, $G=I_m-K_0 D$. Припустимо, що
$$\Delta<0. \tag{18}$$
Тоді із $x=0$ слідує $u=0$ і $x\equiv 0$ є станом рівноваги системи.

При умові (18) матриця G повинна бути невиродженою. Тому визначені значення оператора $\mathcal{D}(K_0) = (I_m - K_0 D)^{-1} K_0$. Якщо $\widetilde{K} \in \mathcal{E}$, то визначені також значення $\mathcal{D}(K)$ і $\mathcal{D}(\hat{K})$, де $\hat{K} = G^{-1}\widetilde{K}$. Дійсно, при умовах (17) і (18) маємо

$$D^T \widetilde{K}^T P^{-1} \widetilde{K} D \le D^T Q D < G^T P^{-1} G, \quad F^T P^{-1} F < P^{-1},$$

де $F = \widetilde{K} D G^{-1}$ і $P > 0$. Тому $\rho(F) < 1$ і матриця $I_m - F$ є невиродженою, а разом з нею невироджені матриці $I_m - KD = (I_m - F)G$ і $I_m - \hat{K}D = G^{-1}(I_m - KD)$.

Отже, замкнена система (1), (17) при обмеженнях (18) подається у вигляді (12).

Теорема 2. *Нехай для деякої додатно визначеної матриці $X = X^T > 0$ та деяких $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ виконуються матричні нерівності (18) і*

$$\begin{bmatrix} Z & XB + \varepsilon_2 C^T \mathcal{D}^T(K_0) H_B^T H_B & C_*^T & XF_A & XF_B \\ B^T X + \varepsilon_2 H_B^T H_B \mathcal{D}(K_0) C & -G^T P^{-1} G + \varepsilon_2 H_B^T H_B & D^T & 0 & 0 \\ C_* & D & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ F_A^T X & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ F_B^T X & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} \le 0, \quad (19)$$

де $Z = (A + B\mathcal{D}(K_0)C)^T X + X(A + B\mathcal{D}(K_0)C) + \varepsilon_1 H_A^T H_A + \varepsilon_2 C^T \mathcal{D}^T(K_0) H_B^T H_B \mathcal{D}(K_0) C$. *Тоді керування $u = Ky$ з довільною матрицею (17) стабілізує систему (1). Причому, якщо в (19) виконується строга матрична нерівність, то задана множина керувань забезпечує асимптотичну стійкість замкнутій системі (12) і спільну функцію Ляпунова $v(x) = x^T X x$.*

Доведення. Побудуємо функцію Ляпунова для замкненої системи (12) у вигляді $v(x) = x^T X x$. Стійкість (асимптотичну стійкість) нульового положення рівноваги забезпечують матрична нерівність $X = X^T > 0$ та недодатна (від'ємна) визначеність похідної в силу системи $\dot{v}(x) = w(x,u)$, тобто з врахуванням (17) достатньо виконання матричної нерівності

$$(A + \Delta A + (B + \Delta B)\mathcal{D}(K_0 + \widetilde{K})C)^T X + X(A + \Delta A + (B + \Delta B)\mathcal{D}(K_0 + \widetilde{K})C) \le 0 \ (< 0). \quad (20)$$

Застосувавши властивість (9) оператора $\mathcal{D}(K) = (I_m - KD)^{-1} K$, перепишемо нерівність (20) у вигляді

$$(A + \Delta A)^T X + X(A + \Delta A) + C^T \left(\mathcal{D}^T(K_0) + (I + \mathcal{D}^T(K_0) D^T)\mathcal{D}^T(\hat{K})\right)(B + \Delta B)^T X +$$
$$+ X(B + \Delta B)\left(\mathcal{D}(K_0) + \mathcal{D}(\hat{K})(I + D\mathcal{D}(K_0))\right)C \le 0$$

Останню нерівність перепишемо у ви дяді

$$M_*^T X + X M_* + C_*^T \mathcal{D}^T(\hat{K})(B + \Delta B)^T X + X(B + \Delta B)\mathcal{D}(\hat{K}) C_* \le 0,$$

де $M_* = A + \Delta A + (B + \Delta B)\mathcal{D}(K_0)C$, $C_* = C + D\mathcal{D}(K_0)C$, $\hat{K} = G^{-1}\widetilde{K}$. При цьому

$$\widetilde{K} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \hat{K} \in \hat{\mathcal{E}} = \left\{K : K^T \hat{P} K \le Q\right\},$$

де $\hat{P} = G^T P^{-1} G$.

Використаємо лему 2, поклавши

$$W = M_*^T X + X M_*, \ U = (B + \Delta B)^T X, \ V = C_*, \ R = 0.$$

Тоді друга блочна нерівність в (6) має вигляд

$$\begin{bmatrix} M_*^T X + X M_* & X(B + \Delta B) & C_*^T \\ (B + \Delta B)^T X & -G^T P^{-1} G & D^T \\ C_* & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0.$$

Використовуючи структуру матричних невизначеностей $\Delta_A(t)$, $\Delta_B(t)$, здійснимо розклад останньої нерівності

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T \mathcal{D}^T(K_0) B^T X + XB\mathcal{D}(K_0)C & XB & C_*^T \\ B^T X & -G^T P^{-1} G & D^T \\ C_* & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_A^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_A^T \begin{bmatrix} F_A^T X & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} XF_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_A \begin{bmatrix} H_A & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \mathcal{D}^T(K_0) H_B^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_B^T \begin{bmatrix} F_B^T X & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XF_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_B \begin{bmatrix} H_B \mathcal{D}(K_0) C & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ H_B^T \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_B^T \begin{bmatrix} F_B^T X & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XF_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_B \begin{bmatrix} 0 & H_B & 0 \end{bmatrix} \le 0,$$

яка за лемою 3 виконується, якщо існують $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такі, що

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T \mathcal{D}^T(K_0) B^T X + XB\mathcal{D}(K_0)C & XB & C_*^T \\ B^T X & -G^T P^{-1} G & D^T \\ C_* & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} +$$

$$+ \varepsilon_1 \begin{bmatrix} H_A^T H_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{bmatrix} XF_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_A^T X & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \varepsilon_2 \begin{bmatrix} C^T \mathcal{D}^T(K_0) H_B^T H_B \mathcal{D}(K_0) C & C^T \mathcal{D}^T(K_0) H_B^T H_B & 0 \\ H_B^T H_B \mathcal{D}(K_0) C & H_B^T H_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_2} \begin{bmatrix} XF_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_B^T X & 0 & 0 \end{bmatrix} \le 0 .$$

Застосуємо лему 1 і отримаємо умови (18) і (19), при яких виконується нерівність (20), для будь-якої матриці $\widetilde{K} \in \mathcal{E}$. Дані умови забезпечують асимптотичну стійкість нульового стану замкнутої системи (12).

Теорема доведена.

Отримані результати теорем 1-2 можна узагальнити на випадок, коли

$$\Delta A(t) = \sum_{i=1}^{r} F_A^{(i)} \Delta^{(i)}(t) H_A^{(i)}, \quad \Delta B(t) = \sum_{i=1}^{r} F_B^{(i)} \Delta^{(i)}(t) H_B^{(i)} .$$

Висновки. В даній роботі отримано нові методи аналізу робастної стійкості станів рівноваги систем керування із зворотнім зв'язком по виходу. При цьому значення матричних коефіцієнтів задані обмеженнями по нормі матричних невизначеностей, а вимірний вектор виходу містить компоненти як стану системи, так і керування. Практична реалізація отриманих методів зводиться до розв'язування алгебраїчних ЛМН. Відмінною особливістю отриманих ЛМН від відомих є можливість побудови еліпсоїда стабілізуючих матриць коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку та спільної квадратичної функції Ляпунова.

Результати роботи отримані на основі відомих узагальнень твердження достатності леми Пітерсена про матричні невизначеності. Нажаль, умови теорем 1-2 в загальному випадку мають теоретичний характер. Їх практичне використання в задачах робастної стабілізації по виходу на основі побудови квадратичних функцій Ляпунова з невизначеними матрицями потребує спеціальних методів знаходження матриці K_0 (див., наприклад, [5, 8]). Це є однією із актуальних задач наступних досліджень.

References

1. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Robastnaya ustoychivost i upravlenie, Moskva, Nauka, 2002, 303 p. [in Russian].
2. Zhou K., Doyle J.C., Glover K. Robust and optimal control, Englewood, Prentice Hall, 1996, 596 p.
3. Balandin D.V., Kogan M.M. Sintez zakonov upravleniya na osnove lineynykh matrichnykh neravenstv, Moskva, Fizmatlit, 2007, 280 p. [in Russian].
4. Khlebnikov M.V., Polyak B.T., Kuntsevich V.M. Optimization of linear systems subject to bounded exogenous disturbances: The invariant ellipsoid technique, Automation and Remote Control, Vol. 72, No.11, 2011, P. 2227 – 2275.
5. Mazko A.G. Robastnaia ustoichivost i stabilizatciia dinamicheskikh sistem. Metody matrichnykh i konusnykh neravenstv. Kyiv: Instytut matematyky, 2016, 332 p. [in Russian].
6. Aliluiko A.M., Yeromenko V.O. Syntez robastnoho keruvannia dlia dyferentsialnykh rivnian druhoho poriadku, Problemy analitychnoi mekhaniky: Zb. prats In-tu matematyky NAN Ukrainy, Vol. 7, No. 3, 2010, P. 9–17. [in Ukraine].
7. Mazko A.G., Shram V.V. Stability and stabilization of the family of pseudolinear differential systems, Nonlinear Oscillations, Vol. 14, No. 2, 2011, P. 237–248.
8. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Hard problems in linear control theory: Possible approaches to soltion, Automation and Remote Control, Vol. 66, No. 5, 2005, P. 681–718.
9. Aliev F.A., Larin V.B. Zadachi stabilizatsii sistemy s obratnoy svyazyu po vykhodnoy peremennoy (obzor), Prikladnaya mekhanika, Vol. 47, No. 3, 2011, P. 3–49. [in Russian].
10. Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V. Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids, Automation and Remote Control, Vol. 68, No. 3, 2007 P. 467–486.
11. Gantmakher F.R. Teoriya matrits, Moskva, Naka, 1988, 552 p. [in Russian].
12. Mazko A.G. Robust stability and evaluation of the quality functional for nonlinear control systems, Automation and Remote Control, Vol. 76, No. 2, 2015, P. 251–263.
13. Khlebnikov M. V., Shcherbakov P. S. Petersen's lemma on matrix uncertainty and its generalizations, Automation and Remote Control, Vol. 69, No.11, 2008, P. 1932–1945.
14. Polyak B.T., Topunov M.B., Shcherbakov P.S. Ideologiya invariantnykh ellipsoidov v zadache o robastnom podavlenii ogranichennykh vneshnikh vozmushcheniy, Stokhasticheskaya optimizatsiya v informatike, Vol. 3, 2007, P. 51–84. [in Russian].
15. Petersen I. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems, Syst. Control Lett, Vol. 8, No. 4, 1987, P. 351-357.
16. Gantmakher F.R., Yakubovich V.A. Absolyutnaya ustoychivost nelineynykh reguliruemykh sistem, Trudy II Vsesoyuznogo sezda po teor. i prikl. Mekhanike, Moskva, Naka, 1965, P. 30–63. [in Russian].

Список використаної літератури

1. Поляк, Б.Т. Робастная устойчивость и управление [Текст] / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
2. Zhou, K. Robust and optimal control / K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover. – Englewood: Prentice Hall, 1996. – 596 p.
3. Баландин, Д.В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств [Текст] / Д.В. Баландин, М.М. Коган. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с.
4. Khlebnikov, M.V. Optimization of linear systems subject to bounded exogenous disturbances: The invariant ellipsoid technique / M.V. Khlebnikov, B.T. Polyak, V.M. Kuntsevich// Automation and Remote Control. – 2011. – № 11 (72). – P. 2227 – 2275.
5. Мазко, А.Г. Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств [Текст] / Мазко А.Г. – Київ: Ін-т математики, 2016. – 332 с. – (Праці / Ін-т математики НАН України; т. 102).
6. Алілуйко, А.М. Синтез робастного керування для диференціальних рівнянь другого порядку [Текст] / А.М. Алілуйко, В.О. Єрьоменко // Проблеми аналітичної механіки: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – № 3 (7). – С. 9–17.
7. Mazko, A.G. Stability and stabilization of the family of pseudolinear differential systems / A.G. Mazko, V.V. Shram // Nonlinear Oscillations. – 2011. – № 2 (14). – С. 237–248.
8. Polyak, B.T. Hard Problems in Linear Control Theory: Possible Approaches to Soltion / B.T. Polyak, P.S. Shcherbakov // Automation and Remote Control. – 2005. – № 5 (66). – P. 681–718.
9. Алиев, Ф.А. Задачи стабилизации системы с обратной связью по выходной переменной (обзор) [Текст] / Ф.А. Алиев, В.Б. Ларин // Прикладная механика. – 2011, – № 3 (47). – С. 3–49.

10. Nazin, S.A. Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids / S.A. Nazin, B.T. Polyak, M.V. Topunov // Automation and Remote Control. – 2007, –№ 3 (68). – P. 467–486.

11. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц [Текст] / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

12. Mazko, A.G. Robust stability and evaluation of the quality functional for nonlinear control systems / A.G. Mazko // Automation and Remote Control. – 2015 – № 2 (76). – P. 251–263.

13. Khlebnikov, M. V. Petersen's lemma on matrix uncertainty and its generalizations / M. V. Khlebnikov, P. S. Shcherbakov // Automation and Remote Control. – 2008. – № 11 (69). – P. 1932-1945.

14. Petersen, I. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems / I. Petersen // Syst. Control Lett. – 1987. – № 4 (8). – P. 351-357.

15. Гантмахер, Ф.Р. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем / Ф.Р. Гантмахер, В.А. Якубович // Труды II Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике. – М.: Наука, 1965. – С. 30–63.

Робастна стійкість лінійних керованих систем з матричними невизначеностями

Андрій Алілуйко, Руслана Руська

Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна

Резюме. *Робота присвячена розробленні нових методів аналізу робастної стійкості та робастної стабілізації лінійних динамічних систем. Для лінійних керованих систем з невизначеними матричними коефіцієнтами та зворотного зв'язку по вимірюваному виходу формулюються достатні умови стійкості нульового стану рівноваги. При цьому визначаються спільна квадратична функція Ляпунова та еліпсоїдальна множина стабілізуючих матриць коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку для всієї сім'ї систем. Практична реалізація отриманих методів зводиться до розв'язуванням систем лінійних матричних нерівностей.*

Ключові слова: *система керування, зворотній зв'язок, робастна стійкість, матрична невизначеність, еліпсоїд.*

Отримано