УДК 517.944
Г. П. Хома, доктор фіз.-мат. наук, професор,
С. Г. Хома–Могильська, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Тернопільський національний економічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Щоб дослідити асимптотичними методами Крилова-Боголюбова-Митропольського-Мосеєнкова [1, 2] такі крайові 2π-періодичні задачі вигляду:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x,t) + \varepsilon F(x,t,u,u_t,u_x)\,; \tag{1}$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t) + \varepsilon F(x,t,u,u_t,u_x)\,; \tag{2}$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t) + \varepsilon F(x,t,u,u_t,u_x)\,; \tag{3}$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = P(x,t,u) + \varepsilon F(x,t,u,u_t,u_x)\,, \tag{4}$$

де ε – малий параметр, $P(x, t, u)$ – взагалі, нелінійна функція, що задовольняють крайові та 2π-періодичні умови

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}\,, \tag{5}$$

$$u(x,t+2\pi) = u(x,t) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathbf{R}\,, \tag{6}$$

потрібно знайти поведінку таких незбурених задач (ε=0) для рівнянь

$$u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = g(x,t)\,; \tag{7}$$

$$u_{tt}^0 - a^2 u_{xx}^0 = f(t)\,; \tag{8}$$

$$u_{tt}^0 - a^2 u_{xx}^0 = g(x,t)\,; \tag{9}$$

$$u_{tt}^0 - a^2 u_{xx}^0 = P(x,t,u)\,, \tag{10}$$

що задовольняють крайові та 2π-періодичні умови вигляду

$$u^0(0,t) = u^0(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}\,, \tag{11}$$

$$u^0(x,t+2\pi) = u^0(x,t) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathbf{R}\,. \tag{12}$$

Крайова 2π-періодична задача вигляду:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x,t)\,, \ 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}\,, \tag{13}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}\,, \tag{14}$$

$$u(x,t+2\pi) = u(x,t) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathbf{R}\,, \tag{15}$$

з самого початку [1, 3–4] при a=1 досліджувалася у класах функцій

$$A_2 = \{g : g(x,t) = g(\pi - x, t+\pi) = g(x, t+2\pi)\}\,; \qquad (16)$$

$$A_2^+ = \{g : g(x,t) = -g(\pi - x, t) = -g(x, t-\pi) = g(x,-t)\}\,, \qquad (17)$$

де встановлено такі результати:

Лема 1. Якщо $g \in A_2^+$, то $g \in A_2$, та за допомогою оператора *S*, що породжує функцію

$$u(x,t) = -\frac{1}{4}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)d\tau - \frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)d\tau \equiv \big(Sg\big)(x,t)\,, \quad (18)$$

яка при $g \in G_{\pi t} \bigcap Q_{2\pi}$ є класичним розв'язком рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)\,,\ 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathbf{R}\,, \qquad (19)$$

Лема 2. Якщо $g \in C_\pi \bigcap A_2^+$, то $Sg \in C_\pi^{1,1} \bigcap A_2^+$.

Теорема [4]. Якщо $g \in G_{\pi t} \bigcap A_2^+$, то функція $u(x,t) = \big(R_2^+ g\big)(x,t)$, яка визначена формулою

$$u(x,t) = \big(R_2^+ g\big)(x,t) \equiv \big(Sg\big)(x,t) + \frac{\pi - 2x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)d\tau\,, \qquad (20)$$

є єдиною функцією з простору $C_\pi^{2,2} \bigcap A_2^+$, яка задовольняє умови крайової 2π-періодичної задачі (19), (14), (15). Крім того, $R_2^+ \in L\big(C_\pi \bigcap A_2^+,\ C_\pi^{1,1} \bigcap A_2^+\big)$, $R_2^+ \in L\big(G_{\pi t} \bigcap A_2^+,\ C_\pi^{2,2} \bigcap A_2^+\big)$, при цьому

$$\left\|\big(R_2^+ g\big)(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{2}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}\,;$$

$$\left\|\big(R_2^+ g\big)_t(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}\,; \qquad (21)$$

$$\left\|\big(R_2^+ g\big)_x(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \pi\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}\,,$$

де $\left\|\varphi(x,t)\right\|_{C_\pi} = \sup\limits_{(x,t)\in[0,\pi]\times\mathbf{R}} \left|\varphi(x,t)\right|$.

Список використаних джерел:

1. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа /Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, М. И. Громяк. – К.: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища школа, 1976. – 589 с.
3. Вейвода О.М., Штедры М. Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений //Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. 20, № 10. – С. 1733-1739.
4. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. І //Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 7. – С. 912-921.