УДК 517.91:532.2

О.М. НІКІТІНА[1], М.І. ШИНКАРИК[2]
[1]Чернівецький факультет НТУ «ХПІ», [2]Тернопільський національний економічний університет

СКІНЧЕННЕ ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЛЕЖАНДРА - ФУР'Є - БЕССЕЛЯ НА СЕГМЕНТІ $[R_0, R_3]$ З ДВОМА ТОЧКАМИ СПРЯЖЕННЯ

Методом задачі Штурма-Ліувілля запроваджено скінчення гібридне інтегральне перетворення, породжене на сегменті $[R_0, R_3]$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Лежандра-Фур'є-Бесселя.

Ключові слова: гібридне інтегральне перетворення, гібридний диференціальний оператор, задача Штурма-Ліувілля.

O.M. NIKITINA, M.I. SHYNKARYK
Chernivtsi department of National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Ternopil' National Economic University

FINITE HYBRID INTEGRAL TRANSFORM OF LEGENDRE-FOURIER-BESSEL TYPE ON THE SEGMENT $[R_0, R_3]$ WITH TWO POINTS OF CONJUGATION

Annotation

By the method of Shtourm-Liouville problem it is introduced finite hybrid integral transform generated on the segment $[R_0, R_3]$ with two points of conjugation by hybrid differential Legendre-Fourier-Bessel operator. It is proved that this operator is self-conjugate, its spectrum is real and discrete. The theorem about the main identity is proved. Constructed transform allows us to obtain integral representation of solutions of some problems of mathematical physics of non-gomogeneous environments.

Keywords: hybrid integral transform, hybrid differential operator, Shtourm-Liouville problem.

Постановка проблеми. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задач інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами [1-3]. Одним із ефективним методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень. Основні положення скінченних гібридних інтегральних перетворень закладено в роботі [4].

Ціль статті. В даній роботі побудовано скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на сегменті $[R_0, R_3]$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Лежандра-Фур'є-Бесселя.

Основна частина. Побудуємо на множині $I_2 = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_3, R_3); R_0 > 0, R_3 < \infty\}$ інтегральне перетворення, породжене гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu,\alpha}^{(\mu)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2 \Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 \frac{d^2}{dr^2} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2 B_{\nu,\alpha}. \quad (1)$$

У рівності (1) $\theta(x)$ - одинична функція Гевісайда [5], $\Lambda_{(\mu)}$ - узагальнений диференціальний оператор Лежандра [6], $\frac{d^2}{dr^2}$ - диференціальний оператор Фур'є другого порядку [7], $B_{\nu,\alpha}$ - диференціальний оператор Бесселя [8].

<u>Означення.</u> За область задання ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)]; g_2''(r); B_{\nu,\alpha}[g_3(r)]\}$ неперервна на I_2; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0) g_1(r)|_{r=R_0} = 0, \quad (\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3) g_3(r)|_{r=R_3} = 0; \quad (2)$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k) g_k(r) - (\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k) g_{k+1}(r)]|_{r=R_k} = 0; j,k = 1,2 \ . \quad (3)$$

Умови на коефіцієнти: $2\alpha+1>0$, $\nu \geq \alpha$, $(\mu)=(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$; $\alpha_{11}^0 \leq 0$, $\beta_{11}^0 \geq 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0$; $\alpha_{22}^3 \geq 0$, $\beta_{22}^3 \geq 0$, $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0$; $\alpha_{jm}^k \geq 0$, $\beta_{jm}^k \geq 0$; $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$; $j,m,k = 1,2$.

Визначимо числа

$$a_1^2\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}} \frac{R_2^{2\alpha+1}}{shR_1}, \quad a_2^2\sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} R_2^{2\alpha+1}, \quad a_3^2\sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1 shr + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3 r^{2\alpha+1} \quad (4)$$

та скалярний добуток

$$(u(r),v(r)) = \int_{R_0}^{R_3} u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_{R_0}^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 shrdr + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 dr + \int_{R_2}^{R_3} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha+1} dr \ . \quad (5)$$

Із умов спряження (3) для $u(r) \in G$ та $v(r) \in G$ випливає базова тотожність:

$$[u_k'(r)v_k(r) - u_k(r)v_k'(r)]|_{r=R_k} = \frac{c_{2k}}{c_{1k}} [u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)]|_{r=R_k} \ . \quad (6)$$

Якщо компоненти $u_k(r)$ вектор-функції $u(r)$ задовольняють неоднорідні умови спряження, а вектор-функція $v(r) \in G$, то тотожність (6) набуває вигляду:

$$[u_k'(r)v_k(r) - u_k(r)v_k'(r)]|_{r=R_k} = \frac{c_{2k}}{c_{1k}} [u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)]|_{r=R_k} +$$

$$+ c_{1k}^{-1} [(\alpha_{12}^k \frac{d}{dr} + \beta_{12}^k) v_{k+1}(r)|_{r=R_k} \ \omega_{2k} - (\alpha_{22}^k \frac{d}{dr} + \beta_{22}^k) v_{k+1}(r)|_{r=R_k} \ \omega_{1k}] \ . \quad (7)$$

Тут прийнято до уваги, що

$$[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k) u_k(r) - (\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k) u_{k+1}(r)]|_{r=R_k} = \omega_{jk}; j,k = 1,2.$$

Перевіримо справедливість рівності

$$(M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[u(r)], v(r)) = (u(r), M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[v(r)]) \ . \quad (8)$$

Згідно правила (5) маємо:

$$(M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[u(r)], v(r)) = \int_{R_0}^{R_3} M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[u(r)] v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_{R_0}^{R_1} (a_1^2 \Lambda_{(\mu)}[u_1(r)]) \times$$

$$\times v_1(r)\sigma_1 shrdr + \int_{R_1}^{R_2} (a_2^2 \frac{d^2u_2}{dr^2}) v_2(r)\sigma_2 dr + \int_{R_2}^{R_3} (a_3^2 B_{\nu,\alpha}[u_3(r)]) v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha+1} dr \ . \quad (9)$$

Проінтегруємо в рівності (9) під знаками інтегралів два рази частинами:

$$(M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[u(r)], v(r)) = a_1^2\sigma_1 [shr(\frac{du_1}{dr} v_1 - u_1 \frac{dv_1}{dr})]|_{R_0}^{R_1} + \int_{R_0}^{R_1} u_1(r)(a_1^2 \Lambda_{(\mu)}[v_1(r)])\sigma_1 shrdr + a_2^2\sigma_2 (\frac{du_2}{dr} v_2 - u_2 \frac{dv_2}{dr})|_{R_1}^{R_2} +$$

$$+ \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)(a_2^2 \frac{d^2v_2}{dr^2})\sigma_2 dr + a_3^2\sigma_3 [r^{2\alpha+1} (\frac{du_3}{dr} v_3 - u_3 \frac{dv_3}{dr})]|_{R_2}^{R_3} + \int_{R_2}^{R_3} u_3(r)(a_3^2 B_{\nu,\alpha}[v_3(r)])\sigma_3 r^{2\alpha+1} dr \ . \quad (10)$$

Якщо $\alpha_{11}^0 \neq 0$, то

$$(\frac{du_1}{dr} v_1 - u_1 \frac{dv_1}{dr})|_{r=R_0} = (\alpha_{11}^0)^{-1} [(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0) u_1|_{r=R_0} \cdot v_1(R_0) -$$

$$- (\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0) v_1|_{r=R_0} \ u_1(R_0)] = (\alpha_{11}^0)^{-1} [0 \cdot v_1(R_0) - 0 \cdot u_1(R_0)] \equiv 0 \ . \quad (11)$$

Якщо $\alpha_{22}^3 \neq 0$, то

$$(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr})|_{r=R_3} = (\alpha_{22}^3)^{-1}[(\alpha_{22}^3\frac{d}{dr} + \beta_{22}^3)u_3(r)|_{r=R_3}\cdot v_3(R_3) -$$

$$-(\alpha_{22}^3\frac{d}{dr} + \beta_{22}^3)v_3(r)|_{r=R_3}\ u_3(R_3)] = (\alpha_{22}^3)^{-1}[0\cdot v_3(R_3) - 0\cdot u_3(R_3)] \equiv 0. \qquad (12)$$

На основі базової тотожності (6) в точці спряження $r = R_1$ (при $k = 1$) знаходимо, що

$$a_1^2\sigma_1 shR_1(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr})|_{r=R_1} - a_2^2\sigma_2(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr})|_{r=R_1} = (a_1^2\sigma_1 shR_1\frac{c_{21}}{c_{11}} - a_2^2\sigma_2)(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr})|_{r=R_1} \equiv 0, \qquad (13)$$

тому що в силу вибору чисел σ_1 та σ_2 вираз

$$a_1^2\sigma_1 shR_1\frac{c_{21}}{c_{11}} - a_2^2\sigma_2 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}R_2^{2\alpha+1}\frac{c_{21}}{c_{11}} - \frac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{2\alpha+1} = \frac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{2\alpha+1}(1-1) \equiv 0.$$

На основі базової тотожності (6) при $k = 2$ в точці спряження $r = R_2$ знаходимо, що

$$a_2^2\sigma_2(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr})|_{r=R_2} - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha+1}(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr})|_{r=R_2} = (a_2^2\sigma_2\frac{c_{22}}{c_{12}} - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha+1})(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr})|_{r=R_2} \equiv 0, \qquad (14)$$

тому що в силу вибору чисел σ_2 та σ_3 вираз

$$a_2^2\sigma_2\frac{c_{22}}{c_{12}} - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha+1} = \frac{c_{12}}{c_{22}}R_2^{2\alpha+1}\cdot\frac{c_{22}}{c_{12}} - R_2^{2\alpha+1} = R_2^{2\alpha+1}(1-1) \equiv 0.$$

Рівність (10) набуває вигляду:

$$(M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[u(r)], v(r)) = \int_{R_0}^{R_1} u_1(r)(a_1^2\Lambda_{(\mu)}[v_1(r)])\sigma_1 shrdr + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)(a_2^2\frac{d^2v_2}{dr^2})\sigma_2 dr +$$

$$+\int_{R_2}^{R_3} u_3(r)(a_3^2 B_{\nu,\alpha}[v_3(r)])\sigma_3 r^{2\alpha+1}dr \equiv (u(r), M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[v(r)]).$$

Отже, рівність (8) справедлива. Значить, ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ – самоспряжений оператор. Звідси випливає, що власні числа гібридного диференціального оператора $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ дійсні. Оскільки ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ на множині I_2 не має особливої точки, то його власні числа утворюють дискретний спектр.

Висновок. Спектр ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ дійсний, дискретний.

Власному числу β відповідає власна (спектральна) функція

$$V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta) = \sum_{i=1}^{3}\theta(r - R_{i-1})\theta(R_i - r)V_{\nu,\alpha;i}^{(\mu)}(r,\beta). \qquad (15)$$

При цьому функції $V_{\nu,\alpha;i}^{(\mu)}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно звичайні диференціальні рівняння Лежандра, Фур'є та Бесселя

$$\begin{aligned}(\Lambda_{(\mu)} + b_1^2)V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_0, R_1),\\ (\frac{d^2}{dr^2} + b_2^2)V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_1, R_2),\\ (B_{\nu,\alpha} + b_3^2)V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_2, R_3),\end{aligned} \qquad (16)$$

крайові умови (2) та умови спряження (3); $b_j = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)$, $k_j^2 \geq 0$, $j = \overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} + b_1^2)v = 0$ утворюють функції $A_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr)$ та $B_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr)$, $\nu_1^* = -1/2 + ib_1$ [6]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2} + b_2^2)v = 0$ утворюють тригонометричні функції $\cos(b_2 r)$ та $\sin(b_2 r)$ [7]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha} + b_3^2)v = 0$ утворюють функції Бесселя $J_{\nu,\alpha}(b_3 r)$ та $N_{\nu,\alpha}(b_3 r)$ [8].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість відшукувати функції $V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ як лінійну комбінацію фундаментальної системи розв'язків:

$$V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = A_1 A_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr) + B_1 B_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr),$$
$$V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = A_2\cos(b_2 r) + B_2\sin(b_2 r), \tag{17}$$
$$V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = A_3 J_{\nu,\alpha}(b_3 r) + B_3 N_{\nu,\alpha}(b_3 r).$$

Умови спряження (3) та крайові умови (2) для визначення шести величин A_j, B_j $(j=\overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему шести рівнянь:

$$Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu);01}(chR_0)A_1 + Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu);02}(chR_0)B_1 = 0,$$
$$Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);11}(chR_1)A_1 + Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);12}(chR_1)B_1 - v_{j2}^{11}(b_2R_1)A_2 - v_{j2}^{12}(b_2R_1)B_2 = 0, j=1,2,$$
$$v_{j1}^{21}(b_2R_2)A_2 + v_{j1}^{22}(b_2R_2)B_2 - u_{\nu,\alpha;j2}^{21}(b_3R_2)A_3 - u_{\nu,\alpha;j2}^{22}(b_3R_2)B_3 = 0, \tag{18}$$
$$u_{\nu,\alpha;22}^{31}(b_3R_3)A_3 + u_{\nu,\alpha;22}^{32}(b_3R_3)B_3 = 0.$$

Введемо до розгляду функції:

$$\delta_{\nu_1^*;j1}^{(\mu)}(chR_0,chR_1) = Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu);01}(chR_0)Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);12}(chR_1) - Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu);02}(chR_0)Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);11}(chR_1), j=1,2,$$
$$\delta_{jk}(b_2R_1,b_2R_2) = v_{j2}^{11}(b_2R_1)v_{k1}^{22}(b_2R_2) - v_{j2}^{12}(b_2R_1)v_{k1}^{21}(b_2R_2), j,k=1,2,$$
$$\delta_{\nu,\alpha;j2}(b_3R_2,b_3R_3) = u_{\nu,\alpha;j2}^{21}(b_3R_2)u_{\nu,\alpha;22}^{32}(b_3R_3) - u_{\nu,\alpha;j2}^{22}(b_3R_2)u_{\nu,\alpha;22}^{31}(b_3R_3), j=1,2, \tag{19}$$
$$a_{(\mu);j}(\beta) = \delta_{\nu_1^*;11}^{(\mu)}(chR_0,chR_1)\delta_{2j}(b_2R_1,b_2R_2) - \delta_{\nu_1^*;21}^{(\mu)}(chR_0,chR_1)\delta_{1j}(b_2R_1,b_2R_2),$$
$$b_{\nu,\alpha;j}(\beta) = \delta_{\nu,\alpha;22}(b_3R_2,b_3R_3)\delta_{j1}(b_2R_1,b_2R_2) - \delta_{\nu,\alpha;12}(b_3R_2,b_3R_3)\delta_{j2}(b_2R_1,b_2R_2), j=1,2.$$

Для того, щоб алгебраїчна система (18) мала ненульовий розв'язок, необхідно й досить, щоб визначник алгебраїчної системи (18) дорівнював нулю [9]:

$$\delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta) \equiv a_{(\mu);1}(\beta)\delta_{\nu,\alpha;22}(b_3R_2,b_3R_3) - a_{(\mu);2}(\beta)\delta_{\nu,\alpha;12}(b_3R_2,b_3R_3) =$$
$$= \delta_{\nu_1^*;11}^{(\mu)}(chR_0,chR_1)b_{\nu,\alpha;2}(\beta) - \delta_{\nu_1^*;21}^{(\mu)}(chR_0,chR_1)b_{\nu,\alpha;1}(\beta) = 0. \tag{20}$$

Ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$, визначеного рівністю (1).

Підставимо $\beta=\beta_n$ $(b_j(\beta_n)=b_{jn})$ в алгебраїчну систему (18) й відкинемо останнє рівняння в силу лінійної залежності. Покладемо $A_1 = -A_0 Y_{\nu_{1n}^*;11}^{(\mu);02}(chR_0)$, $B_1 = A_0 Y_{\nu_{1n}^*;11}^{(\mu);01}(chR_0)$, $\nu_{1n}^* = -1/2 + ib_{1n}$, $A_0 \neq 0$. Перше рівняння системи стає тотожністю. Для визначення A_2, B_2 отримуємо алгебраїчну систему двох рівнянь:

$$v_{j2}^{11}(b_{2n}R_1)A_2 + v_{j2}^{12}(b_{2n}R_1)B_2 = A_0\delta_{\nu_{1n}^*;j1}^{(\mu)}(chR_0,chR_1), j=1,2. \tag{21}$$

Алгебраїчна система (21) має єдиний розв'язок [9]:

$$A_2 = \frac{A_0}{c_{21}b_{2n}}[\delta_{\nu_{1n}^*;11}^{(\mu)}(chR_0,chR_1)v_{22}^{12}(b_{2n}R_1) - \delta_{\nu_{1n}^*;21}^{(\mu)}(chR_0,chR_1)v_{12}^{12}(b_{2n}R_1)],$$
$$B_2 = \frac{A_0}{c_{21}b_{2n}}[\delta_{\nu_{1n}^*;21}^{(\mu)}(chR_0,chR_1)v_{12}^{11}(b_{2n}R_1) - \delta_{\nu_{1n}^*;11}^{(\mu)}(chR_0,chR_1)v_{22}^{11}(b_{2n}R_1)]. \tag{22}$$

Для знаходження величин A_3, B_3 маємо систему:

$$u_{\nu,\alpha;j2}^{21}(b_{3n}R_2)A_3 + u_{\nu,\alpha;j2}^{22}(b_{3n}R_2)B_3 = -A_0[c_{21}b_{2n}]^{-1}a_{(\mu);j}(\beta_n); j=1,2. \tag{23}$$

Алгебраїчна система (23) має єдиний розв'язок [9]:

$$A_0 = c_{21}b_{2n}q_\alpha(\beta_n);\ q_\alpha(\beta_n) = \frac{2}{\pi}\frac{c_{22}}{R_2}(b_{3n}R_2)^{-2\alpha};\quad A_3 = -\omega_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n),\quad B_3 = \omega_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n), \tag{24}$$
$$\omega_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta_n) = a_{(\mu);1}(\beta_n)u_{\nu,\alpha;22}^{2j}(b_{3n}R_2) - a_{(\mu);2}(\beta_n)u_{\nu,\alpha;12}^{2j}(b_{3n}R_2), j=1,2.$$

Підставивши визначені формулами (22) та (24) величини A_j й B_j $(j=\overline{1,3})$ у рівності (17), отримуємо функції:

$$V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)=c_{21}b_{2n}q_\alpha(\beta_n)[Y_{\overset{*}{\nu}_{1n};11}^{(\mu);01}(chR_0)B_{\overset{*}{\nu}_{1n}}^{(\mu)}(chr)-Y_{\overset{*}{\nu}_{1n};11}^{(\mu);02}(chR_0)A_{\overset{*}{\nu}_{1n}}^{(\mu)}(chr)],$$

$$V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)=q_\alpha(\beta_n)[\delta_{\overset{*}{\nu}_{1n};11}^{(\mu)}(chR_0,chR_1)\varphi_{22}^1(b_{2n}R_1,b_{2n}r)-\delta_{\overset{*}{\nu}_{1n};21}^{(\mu)}(chR_0,chR_1)\varphi_{12}^1(b_{2n}R_1,b_{2n}r)],\quad(25)$$

$$\varphi_{j2}^1(b_{2n}R_1,b_{2n}r)=v_{j2}^{12}(b_{2n}R_1)\cos(b_{2n}r)-v_{j2}^{11}(b_{2n}R_1)\sin(b_{2n}r),j=1,2,$$

$$V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)=\omega_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n)N_{\nu,\alpha}(b_{3n}r)-\omega_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n)J_{\nu,\alpha}(b_{3n}r).$$

Згідно рівності (15) спектральна функція $V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)$ визначена. Її квадрат норми

$$\|V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|^2=(V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n),V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n))=\int_{R_0}^{R_3}[V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)]^2\sigma(r)dr=$$

$$=\int_{R_0}^{R_1}[V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)]^2\sigma_1 shrdr+\int_{R_1}^{R_2}[V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)]^2\sigma_2 dr+\int_{R_2}^{R_3}[V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)]^2\sigma_3 r^{2\alpha+1}dr.\quad(26)$$

В подальшому зручно користуватися функціями

$$v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)=V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n):\|V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|,\quad \|v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|=1.$$

Згідно з роботою [4] сформулюємо твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння (20) утворюють дискретний спектр ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$: різні, дійсні, симетричні відносно точки $\beta=0$ й на піввісі $\beta>0$ складають монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною точкою згущення $\beta=\infty$.

Теорема 2. Система $\{v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ власних функцій ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ ортонормована на множині I_2 з ваговою функцією $\sigma(r)$, повна і замкнена.

Теорема 3. Будь-яка вектор-функція $g(r)$ зображається за системою $\{v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є:

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3}g(\rho)v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n).\quad(27)$$

Ряд Фур'є (27) визначає пряме $H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ та обернене $H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]=\int_{R_0}^{R_3}g(r)v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr\equiv\widetilde{g}_n,\quad(28)$$

$$H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}[\widetilde{g}_n]=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{g}_n v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\equiv g(r).\quad(29)$$

Визначимо величини та функції:

$$d_1=a_1^2\sigma_1 shR_1:c_{11},\ d_2=a_2^2\sigma_2:c_{12},\ \widetilde{g}_{1n}=\int_{R_0}^{R_1}g_1(r)v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 shrdr,\ \widetilde{g}_{2n}=\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2 dr,$$

$$\widetilde{g}_{3n}=\int_{R_2}^{R_3}g_3(r)v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha+1}dr,\ Z_{\nu,\alpha;i2}^{(\mu);k}(\beta_n)=(\alpha_{i2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{i2}^k)v_{\nu,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta_n)|_{r=R_k};k=1,2.$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r)=\{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)];g_2''(r);B_{\nu,\alpha}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$(\alpha_{11}^{0}\frac{d}{dr}+\beta_{11}^{0})g_{1}(r)|_{r=R_{0}}=g_{0},\quad (\alpha_{22}^{3}\frac{d}{dr}+\beta_{22}^{3})g_{3}(r)|_{r=R_{3}}=g_{R} \tag{30}$$

та умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{k})g_{k}(r)-(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{k})g_{k+1}(r)]|_{r=R_{k}}=\omega_{jk};j,k=1,2, \tag{31}$$

то справджується основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]]=-\beta_{n}^{2}\tilde{g}_{n}-\sum_{i=1}^{3}k_{i}^{2}\tilde{g}_{in}+(-\alpha_{11}^{0})^{-1}v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(R_{0},\beta_{n})a_{1}^{2}\sigma_{1}shR_{1}g_{0}+$$

$$+(\alpha_{22}^{3})^{-1}v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_{3},\beta_{n})R_{3}^{2\alpha+1}g_{R}+\sum_{k=1}^{2}d_{k}[Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu);k}(\beta_{n})\omega_{2k}-Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu);k}(\beta_{n})\omega_{1k}]. \tag{32}$$

Висновок. Побудовані правила (28), (29) та (32) складають математичний апарат для знаходження інтегрального зображення аналітичного розв'язку відповідних задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Література

1. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К.: Наук. Думка, 1992. – 280 с.
2. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
3. Конет І.М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І.М. Конет. М.П. Ленюк. – Чернівці.: Прут, 2004. – 276 с.
4. Комаров Г.М., Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Г.М. Комаров, М.П. Ленюк, В.В. Мороз. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
6. Конет І.М. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока / І.М. Конет. М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2002. – 248 с.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
8. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М.П. Ленюк. - Киев, 1983. – 62 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.