ПРО КВАЗІПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ ВИРОДЖЕНИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

В. О. Єрьоменко, А. М. Алілуйко
Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна
eromenko-v@rambler.ru, aliluyko@imath.kiev.ua

Об'єктом дослідження є система диференціальних рівнянь
$$\dot{\phi} = \omega, \ \varepsilon A(\phi)\ddot{x} + B(\phi)\dot{x} + C(\phi)x = f(\phi), \tag{1}$$
де $\phi \in \mathbb{R}^m$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — частотний базис, $x \in \mathbb{R}^n$; дійсні квадратні матриці A, B, C та n-вимірний вектор f задані на m-вимірному просторі T_m; крапка означає диференціювання по незалежній змінній t, ε — малий додатний параметр. При цьому A є симетричною і вироджується на множині довільної структури. Вивчається задача про існування гладкого квазіперіодичного розв'язку системи (1) для довільної неоднорідності $f(\phi)$.

Система вигляду (1) для випадку $\phi = t \in [a, b]$ і несиметричної матриці $A(t)$ досліджувалася в [1] при певних припущеннях, одним із яких є сталість рангу матриці $A(t)$.

Визначимо скалярні функції $\beta_0(\phi, \varepsilon)$, $\alpha(\phi)$, $\beta(\phi)$ та $\alpha_0(\phi)$ наступним чином:
$$\min \left\langle \left\{ B(\phi) - \varepsilon \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial A(\phi)}{\partial \phi_i} + A(\phi) B^{-1}(\phi) C(\phi) \right] \right\} x, x \right\rangle \geq \beta_0(\phi, \varepsilon),$$
$$\max_{\|x\|=1} \left\langle A(\phi)x, x \right\rangle \leq \alpha(\phi), \qquad \max_{\|x\|=1} \left\langle B^{-1}(\phi) C(\phi) x, x \right\rangle \leq \beta(\phi),$$
$\alpha_0(\phi)$ — мінімальний корінь рівняння, яке в залежності від значення m має такий вид
$$\det \left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial A(\phi)}{\partial \phi_i} - \lambda I_n \right) = 0, \text{ якщо } m = 1,$$
$$\det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} \omega_i \frac{\partial A(\phi)}{\partial \phi_i} - \lambda I_n & \frac{1}{2}\left(\omega_1 \frac{\partial A}{\partial \phi_2} - \omega_2 \frac{\partial A}{\partial \phi_1} \right) & \cdots & \frac{1}{2}\left(\omega_1 \frac{\partial A}{\partial \phi_m} - \omega_m \frac{\partial A}{\partial \phi_1} \right) \\ \frac{1}{2}\left(\omega_1 \frac{\partial A}{\partial \phi_2} - \omega_2 \frac{\partial A}{\partial \phi_1} \right) & -\lambda I_n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2}\left(\omega_1 \frac{\partial A}{\partial \phi_m} - \omega_m \frac{\partial A}{\partial \phi_1} \right) & 0 & \cdots & -\lambda I_n \end{pmatrix} = 0,$$
якщо $m \geq 2$, де I_n — одинична матриця порядку n.

Позначимо також

$$\left|A(\phi)\right|_0 = \max_{\phi \in \Im_m} \left\| A(\phi) \right\|,$$

де $\| \cdot \|$ — евклідова матрична норма.

Сформулюємо основне твердження.

Теорема. [2] Нехай стосовно системи рівнянь (1) виконуються такі умови:

1) $A(\phi) \equiv A'(\phi)$ і матричні функції $A(\phi)$, $B(\phi)$, $C(\phi)$ належать просторам $C^r(T_m), C^{r+1}(T_m), C^{r+1}(T_m)$ відповідно, де $r \geq m + k + 1$, $k \geq 1$;

2) матриця $B(\phi)$ додатно означена і для всіх $\phi \in T_m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконуються нерівності

$$l\varepsilon\left(\|\omega\|^2 / \omega_1^2\right)\alpha_0(\phi) + \beta_0(\phi, \varepsilon) - \varepsilon\alpha(\phi)\beta(\phi) \geq \gamma(l) > 0 \text{ при } l = 0,\ l = r,$$

$$l\varepsilon\left(\|\omega\|^2 / \omega_1^2\right)\alpha_0(\phi) + \beta_0(\phi, \varepsilon) - \varepsilon\left|A(\phi)\right|_0 \geq \gamma_1(l) > 0 \quad \text{при} \quad l = 0,$$

$l \geq k + m / 2 + 1$;

3) існує невироджена симетрична матриця n-го порядку $S(\phi) \in C^1(\mathrm{T}_m)$ така, що матриця $\dot{S}(\phi) - S(\phi)B^{-1}(\phi)C(\phi) - \left[B^{-1}(\phi)C(\phi)\right]' S(\phi)$ є від'ємно означеною для всіх $\phi \in \mathrm{T}_m$.

Тоді можна вказати достатньо мале додатне число ε^0 таке, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ і довільної неоднорідності $f(\phi) \in C^r(T_m)$ система рівнянь (1) має квазіперіодичний розв'язок $x_0(\omega t, \varepsilon)$ такий, що $x_0(\phi, \varepsilon) \in C^{k+1}(T_m)$.

Зауваження. Випадок від'ємної означеності матриці $B(\phi)$ зводиться до розглянутого шляхом множення другого рівняння системи (1) на $-I_n$.

При доведенні теореми суттєво використовувалися результати [3].

Список літератури

1. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. — К.: Вища шк., 2000. — 294 с.

2. Єрьоменко В. О. Квазіперіодичні розв'язки лінійних вироджених систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку / В. О. Єрьоменко, А. М. Алілуйко // Укр. мат. жур. — 2010. — **62**, № 6. — С. 773—783.

3. Самойленко А. М. Гладкість квазіперіодичних розв'язків лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь із виродженою симетричною матрицею при похідних / А. М. Самойленко, В. О. Єрьоменко, А. А. Давиденко // Доп. НАН України. — 2001. — № 4. — С. 21—27.