УДК 517.935; 519.718

# РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ ТА ОЦІНКА ФУНКЦІОНАЛА ЯКОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ З МАТРИЧНОЮ НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ

А. Алілуйко, Р. Руська

Анотація. Розроблено нові методи аналізу робастної стійкості стану рівноваги і оптимізації лінійних динамічних систем. Для лінійних систем керування з невизначеними матричними коефіцієнтами та зворотним зв’язком по вимірюваному виходу формулюються достатні умови стійкості нульового стану рівноваги. При цьому визначаються спільна квадратична функція Ляпунова та еліпсоїдальна множина стабілізуючих матриць коефіцієнтів підсилення зворотного зв’язку. Практична реалізація отриманих методів зводиться до розв’язування систем лінійних матричних нерівностей.

Ключові слова: система керування, зворотний зв'язок, робастна стійкість, матрична невизначеність, еліпсоїд.

# ROBUST STABILITY AND EVALUATION OF THE QUALITY FUNCTIONAL FOR LINEAR CONTROL SYSTEMS WITH MATRIX UNCERTAINTY

A.M. Aliluiko, R.Ruska

Reference. New methods of robust stability analysis for equilibrium states and optimization of linear dynamic systems are developed. Sufficient stability conditions of the zero state are formulated for a linear control systems with uncertain coefficient matrices and measurable output feedback. In addition, a general quadratic Lyapunov function and ellipsoidal set of stabilizing matrices for the feedback amplification coefficients are given. Application of the results is reduced to solving the systems of linear matrix inequalities.

Keywords: control system, output feedback, robust stability, matrix uncertainty, ellipsoid.

**Постановка проблеми.** В прикладних задачах аналізу і синтезу реальних об'єктів використовуються диференціальні та різницеві системи, які містять невизначені елементи (параметри, функції, випадкові збурення) (див., наприклад, [1] – [4]). елементів. Значна увага приділяється методам вивчення і досягнення показників якості таких систем, зокрема робастної стійкості і оптимальності.

Під множиною робастної стійкості динамічних систем будемо розуміти параметричну або функціональну множину, що характеризує невизначеність заданої структури системи та її елементів керування. Зокрема, в невизначених лінійних моделях матриці коефіцієнтів та зворотного зв'язку можуть належати деяким заданим множинам у відповідних просторах (інтервали, політопи, аффінні та еліпсоїдальні множини матриць, тощо).

Задача робастної стабілізації системи керування полягає у побудові статичного або динамічного регуляторів, що забезпечують асимптотичну стійкість стану рівноваги замкненої системи при довільних значеннях невизначених елементів. Зазвичай ця задача зводиться до розв’язування систем лінійних матричних нерівностей (ЛМН).

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** В чисельних роботах в термінах лінійних матричних нерівностей (ЛМН) отримано достатні умови лінійних систем керування з невизначеними матричними коефіцієнтами і зворотним зв’язком по вимірному виході [3], [5], [6]. З оглядом задач і відомих методів аналізу робастної стійкості і стабілізації систем керування можна ознайомитися в роботах [7 ]–[9].

**Метою роботи** є розробка нових методів аналізу робастної стійкості, стабілізації і оптимізації лінійних диференціальних систем керування з обмеженими по нормі матричними невизначеностями і статичним зворотним зв'язком по вимірному виходу.

**Робастна стабілізація систем керування.** Розглянемо лінійну неперервну динамічну систему керування:

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t))x + (B + \Delta B(t))u\,, \quad y = Cx + Du\,, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ – вектори відповідно стану, керування та спостереження об’єкта, $A$, $B$, $C$ і $D$ – сталі матриці відповідних розмірів $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$ і $l \times m$, $\Delta A(t) = F_A \Delta_A(t) H_A$, $\Delta B(t) = F_B \Delta_B(t) H_B$ – системні невизначеності, де $F_A$, $F_B$, $H_A$, $H_B$ – сталі матриці відповідних розмірів, а матричні невизначеності $\Delta_A(t)$ і $\Delta_B(t)$ задовольняють обмеження

$$\|\Delta_A(t)\| \le 1\,,\ \|\Delta_B(t)\| \le 1 \text{ або } \|\Delta_A(t)\|_F \le 1,\ \|\Delta_B(t)\|_F \le 1\,, \quad t \ge 0\,.$$

Тут і далі $\|\cdot\|$ – евклідова норма вектора і спектральна норма матриці, $\|\cdot\|_F$ – матрична норма Фробеніуса, $I_n$ – одинична $n \times n$ матриця, $X = X^{\mathrm{T}} > 0$ $(\ge 0)$ – позитивно (невід’ємно) визначена симетрична матриця $X$. Для спрощення записів залежність матриць від $t$ будемо упускати.

Керування системою (1) будемо здійснювати за допомогою зворотного зв’язку по виходу:

$$u = Ky\,, \quad K = K_0 + \tilde{K}\,, \quad \tilde{K} \in \mathrm{E}\,, \tag{2}$$

де $\mathrm{E}$ – еліпсоїдальна множина матриць

$$\mathrm{E} = \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times l} : K^{\mathrm{T}} P K \le Q \right\}, \tag{3}$$

де $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ і $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$ – деякі додатно визначені матриці відповідних розмірів $m \times m$ і $l \times l$.

Відповідно до (1)-(3) повинна виконуватися нерівність

$$\left[ x^{\mathrm{T}},\, u^{\mathrm{T}} \right] \begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}}QC - C^{\mathrm{T}}K_0^{\mathrm{T}}PK_0C & C^{\mathrm{T}}QD + C^{\mathrm{T}}K_0^{\mathrm{T}}PG \\ D^{\mathrm{T}}QC + G^{\mathrm{T}}PK_0C & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \ge 0\,,$$

де $\Delta = D^{\mathrm{T}}QD - G^{\mathrm{T}}PG$, $G = I_m - K_0 D$. Припустимо, що

$$\Delta < 0\,. \tag{4}$$

Тоді із $x = 0$ слідує $u = 0$ і $x \equiv 0$ є станом рівноваги системи.

Задача полягає у побудові умов, при яких нульовий стан замкненої системи керування (1), (2) асимптотично стійкий по Ляпунову для будь-якої матриці $\tilde{K} \in \mathrm{E}$. Якщо ж нульовий стан системи (1) без керування ($u = 0$) нестійкий, то будемо шукати множину стабілізуючих керувань з еліпсоїда

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times l} : (K - K_0)^{\mathrm{T}} P (K - K_0) \le Q \right\},$$

що рівносильно вибору матриці $K = K_0 + \tilde{K}$, $\tilde{K} \in \mathrm{E}$.

Для цього спершу потрібно знайти матрицю $K_0$, яка стабілізує систему

$$\dot{x} = M_0 x\,, \quad M_0 = A + \Delta A + (B + \Delta B)(I_m - K_0 D)^{-1} K_0 C\,. \tag{5}$$

Матрицю $K_0$ можна знайти методами, описаними в [5].

Відзначимо, що

$$\|K\| = \sqrt{\lambda_{\max}(K^{\mathrm{T}} K)} \le \rho = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(P)}}\,, \tag{6}$$

оскільки $\lambda_{\min}(P) K^{\mathrm{T}} K \le K^{\mathrm{T}} P K \le Q \le \lambda_{\max}(Q) I_l$. Величину $\rho$ в (6), яку визначає еліпсоїд $\mathrm{E}$, будемо називати *радіусом стабілізації* системи (1).

Введемо на множині матриць $\mathrm{K}_D = \left\{ K : \det(I_m - KD) \ne 0 \right\}$ нелінійний оператор

$$\mathrm{D}\colon \mathbb{R}^{m \times l} \to \mathbb{R}^{m \times l}\,, \quad \mathrm{D}(K) = (I_m - KD)^{-1} K \equiv K (I_l - DK)^{-1}\,.$$

Для оператора $\mathrm{D}$ виконується властивість [5]: якщо $K_1 \in \mathrm{K}_D$ і $K_2 \in \mathrm{K}_D$, для яких $K_3 = (I_m - K_1 D)^{-1} K_2 \in \mathrm{K}_D$, то

$$K_1 + K_2 \in \mathrm{K}_D \text{ і } \mathrm{D}(K_1 + K_2) \equiv \mathrm{D}(K_1) + \mathrm{D}(K_3)\left[I_l + D\mathrm{D}(K_1)\right]. \tag{7}$$

При умові (4) матриця $G$ повинна бути невиродженою. Тому визначені значення оператора $\mathrm{D}(K_0) = (I_m - K_0 D)^{-1} K_0$. Якщо $\tilde{K} \in \mathrm{E}$, то визначені також значення $\mathrm{D}(K)$ і $\mathrm{D}(K)$, де $K = G^{-1}\tilde{K}$. Дійсно, при умовах (2) і (4) маємо

$$D^{\mathrm{T}} \tilde{K}^{\mathrm{T}} P \tilde{K} D \le D^{\mathrm{T}} Q D < G^{\mathrm{T}} P G\,, \quad F^{\mathrm{T}} P F < P\,,$$

де $F = \tilde{K} D G^{-1}$ і $P > 0$. Тому спектральний радіус $\rho(F) < 1$ і матриця $I_m - F$ є невиродженою, а разом з нею невироджені матриці $I_m - KD = (I_m - F)G$ і $I_m - \hat{K}D = G^{-1}(I_m - KD)$.

Отже, виключаючи вектор керування із співвідношень (1), (2) при обмеженні (4) отримаємо систему

$$\dot{x} = Mx\,, \quad M = A + \Delta A + (B + \Delta B)\mathrm{D}(K)C\,. \tag{8}$$

Зокрема, при $K = K_0$ маємо систему (5), нульове положення рівноваги якої повинно бути асимптотично стійким.

Отримаємо розв’язок поставленої задачі методом квадратичних функцій Ляпунова, використовуючи наступні твердження.

**Лема 1.** [5] *Нехай виконується система матричних нерівностей*

$$D^{\mathrm{T}} Q D + R - P < 0, \quad \begin{bmatrix} W & U^{\mathrm{T}} & V^{\mathrm{T}} \\ U & R - P & D^{\mathrm{T}} \\ V & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0 \; (< 0)\,, \tag{9}$$

*де* $P = P^{\mathrm{T}} > 0$, $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$, $R = R^{\mathrm{T}} \ge 0$, $W = W^{\mathrm{T}} \ge 0$, $U$, $V$ *і* $D$ *– матриці відповідних розмірів. Тоді для будь-якої матриці* $K \in \mathrm{E}$ *виконується матрична нерівність*

$$W + U^{\mathrm{T}} \mathrm{D}(K) V + V^{\mathrm{T}} \mathrm{D}^{\mathrm{T}}(K) U + V^{\mathrm{T}} \mathrm{D}^{\mathrm{T}}(K) R \mathrm{D}(K) V \le 0 \; (< 0)\,.$$

**Лема 2.** [10] *Нехай* $L$ *симетрична матриця, матриці* $M_1, \ldots, M_r$ *і* $N_1, \ldots, N_r$ *мають відповідні розміри. Тоді, якщо при деяких числах* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r > 0$ *виконується матрична нерівність*

$$L + \sum_{i=1}^{r} \left( \varepsilon_i M_i M_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon_i} N_i^{\mathrm{T}} N_i \right) \le 0\,,$$

*то вірною є нерівність*

$$L + \sum_{i=1}^{r} \left( M_i \Delta_i N_i + \left( M_i \Delta_i N_i \right)^{\mathrm{T}} \right) \le 0\,,$$

*при всіх* $\|\Delta_i\| \le 1$ *або* $\|\Delta_i\|_F \le 1$, $i = 1, \ldots, r$.

Відмітимо, що леми 1 і 2 є узагальненнями твердження достатності відомого критерія, який називається лемою Пітерсена про матричну невизначеність [11].

**Теорема 1.** *Нехай для деякої додатно визначеної матриці* $X = X^{\mathrm{T}} > 0$ *та деяких* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *виконуються матричні нерівності (4) і*

$$\begin{bmatrix} \Omega & XB + \varepsilon_2 C^{\mathrm{T}} \mathrm{D}^{\mathrm{T}}(K_0) H_B^{\mathrm{T}} H_B & C_0^{\mathrm{T}} & XF_A & XF_B \\ B^{\mathrm{T}} X + \varepsilon_2 H_B^{\mathrm{T}} H_B \mathrm{D}(K_0) C & -G^{\mathrm{T}} P G + \varepsilon_2 H_B^{\mathrm{T}} H_B & D^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ C_0 & D & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ F_A^{\mathrm{T}} X & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ F_B^{\mathrm{T}} X & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0\,, \tag{10}$$

*де* $\Omega = (A + B\mathrm{D}(K_0)C)^{\mathrm{T}} X + X(A + B\mathrm{D}(K_0)C) + \varepsilon_1 H_A^{\mathrm{T}} H_A + \varepsilon_2 C^{\mathrm{T}} \mathrm{D}^{\mathrm{T}}(K_0) H_B^{\mathrm{T}} H_B \mathrm{D}(K_0) C$. *Тоді будь-яке керування (2) забезпечує асимптотичну стійкість нульового положення рівноваги системи (1) і спільну функцію Ляпунова* $v(x) = x^{\mathrm{T}} X x$.

*Доведення.* Побудуємо функцію Ляпунова для замкненої системи (8) у вигляді $v(x) = x^{\mathrm{T}} X x$. Тоді за теоремою Ляпунова асимптотичну стійкість нульового положення рівноваги забезпечує матрична нерівність $X = X^{\mathrm{T}} > 0$ та від'ємна визначеність похідної даної функції в силу системи (8), тобто з врахуванням (2) достатньо виконання матричної нерівності

$$(A + \Delta A + (B + \Delta B)\mathrm{D}(K_0 + \tilde{K})C)^{\mathrm{T}} X + X(A + \Delta A + (B + \Delta B)\mathrm{D}(K_0 + \tilde{K})C) < 0. \quad (11)$$

Застосувавши властивість (7) оператора $\mathrm{D}(K) = (I_m - KD)^{-1} K$, перепишемо нерівність (11) у вигляді

$$(A + \Delta A)^{\mathrm{T}} X + X(A + \Delta A) + C^{\mathrm{T}}(\mathrm{D}^{\mathrm{T}}(K_0) + (I_l + \mathrm{D}^{\mathrm{T}}(K_0) D^{\mathrm{T}})\mathrm{D}^{\mathrm{T}}(K))(B + \Delta B)^{\mathrm{T}} X +$$
$$+ X(B + \Delta B)(\mathrm{D}(K_0) + \mathrm{D}(K)(I_l + D\mathrm{D}(K_0)))C < 0$$

Останню нерівність перепишемо у вигляді

$$M_0^{\mathrm{T}} X + X M_0 + C_0^{\mathrm{T}} \mathrm{D}^{\mathrm{T}}(K)(B + \Delta B)^{\mathrm{T}} X + X(B + \Delta B)\mathrm{D}(K) C_0 < 0,$$

де $M_0 = A + \Delta A + (B + \Delta B)\mathrm{D}(K_0)C$, $K = G^{-1}\tilde{K}$. При цьому

$$\tilde{K} \in \mathrm{E} \Leftrightarrow K \in \mathrm{E} = \left\{ K : K^{\mathrm{T}} P K \le Q \right\}, \quad (12)$$

де $P = G^{\mathrm{T}} P G$.

Використаємо лему 1, поклавши $W = M_0^{\mathrm{T}} X + X M_0$, $U = (B + \Delta B)^{\mathrm{T}} X$, $V = C_0$, $R = 0$. Нерівність (4) є наслідком першої блочної нерівності в (9), а друга блочна нерівність в (9) матиме вигляд

$$\begin{bmatrix} M_0^{\mathrm{T}} X + X M_0 & X(B + \Delta B) & C_0^{\mathrm{T}} \\ (B + \Delta B)^{\mathrm{T}} X & -G^{\mathrm{T}} P G & D^{\mathrm{T}} \\ C_0 & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0.$$

Враховуючи структуру матричних невизначеностей $\Delta_A(t)$, $\Delta_B(t)$, здійснимо розклад останньої нерівності

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} X + XA + C^{\mathrm{T}} \mathrm{D}^{\mathrm{T}}(K_0) B^{\mathrm{T}} X + XB\mathrm{D}(K_0)C & XB & C_0^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} X & -G^{\mathrm{T}} P G & D^{\mathrm{T}} \\ C_0 & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_A^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_A^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} F_A^{\mathrm{T}} X & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} XF_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_A \begin{bmatrix} H_A & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}} \mathrm{D}^{\mathrm{T}}(K_0) H_B^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_B^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} F_B^{\mathrm{T}} X & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XF_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_B \begin{bmatrix} H_B \mathrm{D}(K_0) C & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ H_B^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_B^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} F_B^{\mathrm{T}} X & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XF_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_B \begin{bmatrix} 0 & H_B & 0 \end{bmatrix} < 0,$$

яка за лемою 2 виконується, якщо існують $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такі, що

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} X + XA + C^{\mathrm{T}} \mathrm{D}^{\mathrm{T}}(K_0) B^{\mathrm{T}} X + XB\mathrm{D}(K_0)C & XB & C_0^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} X & -G^{\mathrm{T}} P G & D^{\mathrm{T}} \\ C_0 & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} +$$

$$+\varepsilon_1\begin{bmatrix} H_A^{\mathrm T}H_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\frac{1}{\varepsilon_1}\begin{bmatrix} XF_AF_A^{\mathrm T}X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+$$

$$+\varepsilon_2\begin{bmatrix} C^{\mathrm T}\mathrm{D}^{\mathrm T}(K_0)H_B^{\mathrm T}H_B\mathrm{D}(K_0)C & C^{\mathrm T}\mathrm{D}^{\mathrm T}(K_0)H_B^{\mathrm T}H_B & 0 \\ H_B^{\mathrm T}H_B\mathrm{D}(K_0)C & H_B^{\mathrm T}H_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\frac{1}{\varepsilon_2}\begin{bmatrix} XF_BF_B^{\mathrm T}X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\le 0\,.$$

До останньої нерівності застосуємо відомий критерій додатної та невід'ємної визначеностей блочних матриць (лема Шура [12]):

$$\begin{bmatrix} U & Z \\ Z^{\mathrm T} & V \end{bmatrix}\le 0\ (<0)\ \Leftrightarrow\ V<0,\ \ U-ZV^{-1}Z^{\mathrm T}\le 0\ \ (<0)$$

при умові $\det V\ne 0$.

Отримаємо нерівність еквівалентну умові (10), при якій разом із (4) виконується матрична нерівність (11) і положення рівноваги замкненої системи (8) асимптотично стійке при будь-якому керуванні (2).

Теорема доведена.

## Оцінка квадратичного критерію якості при умовах невизначеності

Розглянемо систему керування (1), (2) з квадратичним функціоналом якості

$$J(u,x_0)=\int_0^\infty \varphi(x,u)dt,\quad \varphi(x,u)=\begin{bmatrix} x^{\mathrm T} & u^{\mathrm T}\end{bmatrix}\Phi\begin{bmatrix} x \\ u\end{bmatrix},\quad \Phi=\begin{bmatrix} S & N \\ N^T & R\end{bmatrix}>0\,, \tag{13}$$

де $x_0$ – вектор початкових умов, $S=S^{\mathrm T}>0$, $R=R^{\mathrm T}>0$ і $N$ – задані сталі матриці.

Потрібно описати множину керувань (2), які будуть забезпечувати асимптотичну стійкість положення $x\equiv 0$ системи (1) і оцінку

$$J(u,x_0)\le\omega\,, \tag{14}$$

де $\omega>0$ – деяке максимально допустиме значення функціонала. При розв'язуванні даної задачі як і раніше використаємо квадратичну функцію Ляпунова $v(x)=x^{\mathrm T}Xx$ при обмеженні

$$x_0^{\mathrm T}Xx_0\le\omega\,. \tag{15}$$

При умовах (2) і (4) визначені значення $\mathrm{D}(K)$, $\mathrm{D}(K_0)$ і $\mathrm{D}(K)$, де $K=G^{-1}\tilde K$, $G=I_m-K_0D$. При цьому замкнена система подається у вигляді (8), а похідна функції $v(x)$ в силу системи (8) і підінтегральна функція в (13) мають вигляд

$$\dot v(x)=x^{\mathrm T}(M^{\mathrm T}X+XM)x\,,\ \varphi(x,u)=x^{\mathrm T}L^{\mathrm T}\Phi Lx\,,$$

де $L^{\mathrm T}=\begin{bmatrix} I_n & C^{\mathrm T}\mathrm{D}^{\mathrm T}(K)\end{bmatrix}$, $K=K_0+\tilde K$.

Вимагаємо, щоб разом із (4) виконувалася нерівність

$$\dot v(x)\le-\varphi(x,u)\,. \tag{16}$$

Для цього достатньо виконання матричної нерівності

$$M^{\mathrm T}X+XM+L^{\mathrm T}\Phi L<0\,. \tag{17}$$

Тоді положення $x\equiv 0$ системи (8) асимптотично стійке і з врахуванням (16) отримуємо верхню оцінку функціонала

$$J(u,x_0)\le-\int_0^\infty\frac{d}{dt}v(x)dt=x_0^{\mathrm T}Xx_0\le\omega\,, \tag{18}$$

Використовуючи властивість (7) оператора $\mathrm{D}$, зведемо нерівність (17) до вигляду

$$W+U^{\mathrm T}\mathrm{D}(K)V+V^{\mathrm T}\mathrm{D}^{\mathrm T}(K)U+V^{\mathrm T}\mathrm{D}^{\mathrm T}(K)R\mathrm{D}(K)V<0\,, \tag{19}$$

де $W = M_0^{\mathrm{T}} X + XM_0 + L_0^{\mathrm{T}} \Phi L_0$, $U = (B + \Delta B)^{\mathrm{T}} X + N^{\mathrm{T}} + R\mathrm{D}(K_0)C$, $V = C_0$, $L_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} I_n & C^{\mathrm{T}} \mathrm{D}^{\mathrm{T}}(K_0) \end{bmatrix}$. При цьому виконується умова (12).

Застосовуючи лему 1, співвідношення (16)-(19) і лему 2, отримаємо наступний результат.

**Теорема 2.** *Нехай для деякої додатно визначеної матриці* $X = X^T > 0$ та деяких $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *виконуються матричні нерівності (15),*

$$G^{\mathrm{T}} PG - D^{\mathrm{T}} QD > R, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} Z & N_0 & C_0^{\mathrm{T}} & XF_A & XF_B \\ N_0^{\mathrm{T}} & R - G^{\mathrm{T}} PG & D^T & 0 & 0 \\ C_0 & D & Q^{-1} & 0 & 0 \\ F_A^{\mathrm{T}} X & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ F_B^{\mathrm{T}} X & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

*де* $Z = (A + B\mathrm{D}(K_0)C)^{\mathrm{T}} X + X(A + B\mathrm{D}(K_0)C) + L_0^{\mathrm{T}} \Phi L_0 + \varepsilon_1 H_A^{\mathrm{T}} H_A + \varepsilon_2 C_*^{\mathrm{T}} C_*$, $N_0 = XB + N + C^{\mathrm{T}} \mathrm{D}^{\mathrm{T}}(K_0) R + \varepsilon_2 C_*^{\mathrm{T}} H_B$, $C_* = H_B \mathrm{D}(K_0)C$. *Тоді будь-яке керування (2) забезпечує асимптотичну стійкість нульового положення рівноваги системи (1), спільну функцію Ляпунова* $v(x) = x^{\mathrm{T}} Xx$ *і оцінку функціонала якості (14).*

На основі теореми 2 можна сформулювати задачу оптимізації системи (1): *мінімізувати* $\omega > 0$ *при обмеженнях* (15), (20) і (21).

Отримані результати теорем 1, 2 можна узагальнити на випадок, коли

$$\Delta A(t) = \sum_{i=1}^{r} F_A^i \Delta_A^i(t) H_A^i, \quad \Delta B(t) = \sum_{i=1}^{r} F_B^i \Delta_B^i(t) H_B^i.$$

**Числовий експеримент.** Розглянемо систему керування двійним осцилятором, тобто системою двох твердих тіл, які з'єднані пружиною і ковзають без тертя вздовж горизонтального стержня (рис. 1). Дана система описується у вигляді двох лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які в векторно-матричній формі мають вигляд [13]:

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t))x + Bu, \tag{22}$$

де

$$A + \Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_0}{m_1} & \dfrac{k_0}{m_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{k_0}{m_2} & -\dfrac{k_0}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + F_A \Delta(t) H_A, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta \\ \delta \end{bmatrix},$$

$$H_A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

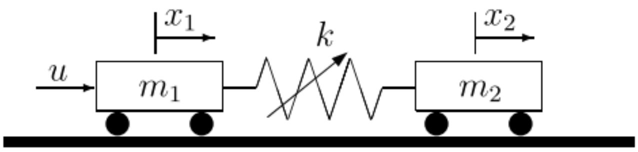


**Figure 1.** Двомасова механічна система

Тут $x_1$, $\dot{x}_1$ – відповідно координата і швидкість першого тіла, а $x_2$, $\dot{x}_2$ – другого, $m_1$, $m_2$ – маси відповідно першого і другого тіл. Коефіцієнт жорсткості пружини задається як змінна періодична функція часу $k = k_0 + \delta\Delta(t)$, де $\Delta(t) = \sin(\varpi t)$, $\delta << 1$ – амплітуда гармонічних коливань, а $\varpi$ – параметр частоти.

Покладемо $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $k_0 = 2$, $\delta = 0,02$, $\Delta(t) = \sin(t/5)$.

Припустимо, що вимірюванню підлягає вектор виходу

$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 + u \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

а керування шукаємо у вигляді статичного зворотного зв'язку $u = Ky$, де $K = [k_1 \quad k_2] = K_0 + \widetilde{K}$. Знайдемо вектор $K_0 = [1{,}6938 \quad 0{,}1089]$, для якого система $\dot{x} = M_0 x$, $M_0 = A + B\mathrm{D}(K_0)C$ асимптотично стійка і її спектр $\sigma(M_0) = \{-0,3259 \pm 1,6913i; -0,8333; -0,3296\}$. Поведінка розв'язків вихідної системи із матричною невизначеністю (22), яка відповідає керуванню $u = K_0 y$ і вектору початкових умов $x_0 = [1 \quad -2 \quad 0 \quad 2]^{\mathrm{T}}$, зображено на рис. 2.

Для ілюстрації теореми 2 задамо матрицю функціонала (13): $S = 0{,}1 I_4$, $R = 0{,}01$, $N^T = [0{,}01 \quad 0 \quad 0 \quad 0{,}01]$. Використовуючи систему Matlab, знайдемо $P = 39,5751$ і додатно визначені матриці

$$Q = \begin{bmatrix} 29,6673 & 11,8521 \\ 11,8521 & 17,0069 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 114,3996 & -49,8299 & 42,2629 & 37,6176 \\ -49,8299 & 55,1945 & -15,0903 & -5,6888 \\ 42,2629 & -15,0903 & 36,7322 & 15,6111 \\ 37,6176 & 5,6888 & 15,6111 & 39,8411 \end{bmatrix},$$

які задовольняють нерівності (20), (21) при $\varepsilon_1 = 0{,}01$.

Таким чином, для всіх значень вектора коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку $K = K_0 + \widetilde{K}$ із замкненої області $\mathrm{E}_0$, обмеженої еліпсом $(K - K_0)Q^{-1}(K - K_0)^{\mathrm{T}} \le P^{-1}$ (рис. 3), рух системи двох тіл в околі нульового стану рівноваги асимптотично стійкий. При цьому $v(x) = x^{\mathrm{T}} Xx$ є спільною функцією Ляпунова, а значення заданого функціоналу якості не перевищує $v(x_0) = 889,8436$. Радіус стабілізації системи $\rho = 0,9639$.

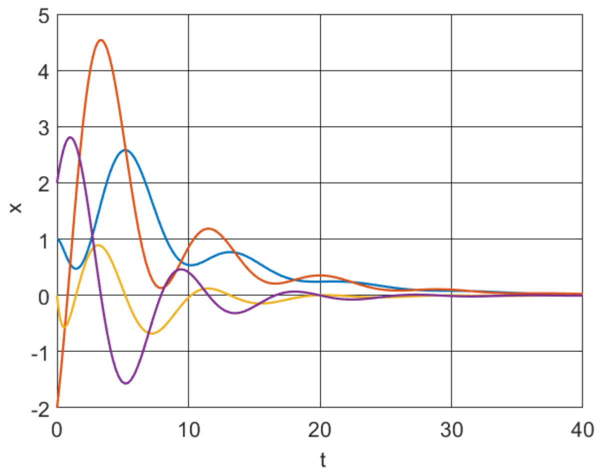


**Figure 2.** System behavior with control $u = K_0 y$

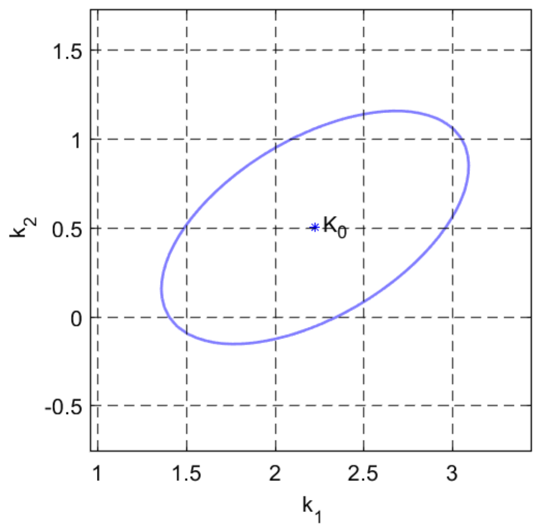


**Figure 3.** Область коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку

**Висновки.** В даній роботі отримано нові методи аналізу робастної стійкості і оптимізації лінійних систем керування із зворотним зв'язком по виходу. При цьому значення невизначених матричних коефіцієнтів задані обмеженнями по нормі, а вимірний вектор виходу містить компоненти як стану системи, так і керування. Практична реалізація отриманих методів зводиться до розв'язування алгебраїчних ЛМН. Відмінною особливістю отриманих ЛМН від відомих є можливість побудови еліпсоїда стабілізуючих матриць коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку, спільної квадратичної функції Ляпунова, а також оцінки квадратичного функціоналу якості для лінійних систем керування з розглянутими невизначеностями.

Результати роботи отримані на основі відомих узагальнень твердження достатності леми Пітерсена про матричні невизначеності. Нажаль, умови теорем 1 і 2 в загальному випадку мають теоретичний характер. Їх практичне використання в задачах робастної стабілізації по виходу на основі побудови квадратичних функцій Ляпунова з невизначеними матрицями потребує спеціальних методів знаходження матриці $K_0$ (див., наприклад, [7, 9]). Це є однією із актуальних задач наступних досліджень.

## Список використаної літератури


1. Робастная устойчивость и управление [Текст] / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
2. Robust and optimal control / K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover. – Englewood: Prentice Hall, 1996. – 596 p.
3. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств [Текст] / Д.В. Баландин, М.М. Коган. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с.
4. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации [Текст] / В.М. Кунцевич. – Киев: Наук. Думка, 2006. – 264 с.
5. Robust stability and evaluation of the quality functional for nonlinear control systems // Automation and Remote Control. – 2015. – № 2 (76). – P. 251–263.
6. Robust stability of linear control system with matrix uncertainty / A. Aliluiko, R. Ruska // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2016. – № 2 (82). – С. 128–136.
7. Hard Problems in Linear Control Theory: Possible Approaches to Soltion / B.T. Polyak, P.S. Shcherbakov // Automation and Remote Control. – 2005. – № 5 (66). – P. 681–718.
8. Задачи стабилизации системы с обратной связью по выходной переменной (обзор) [Текст] / Ф.А. Алиев, В.Б. Ларин // Прикладная механика. – 2011, – № 3 (47). – С. 3–49.
9. Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств [Текст] / Мазко А.Г. – Київ: Ін-т математики, 2016. – 332 с. – (Праці / Ін-т математики НАН України; т. 102).
10. Petersen's lemma on matrix uncertainty and its generalizations / M. V. Khlebnikov, P. S. Shcherbakov // Automation and Remote Control. – 2008. – № 11 (69). – P. 1932-1945.
11. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems / I. Petersen // Syst. Control Lett. – 1987. – № 4 (8). – P. 351-357.
12. Теория матриц [Текст] / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
13. Идеология инвариантных эллипсоидов в задаче о робастном подавлении ограниченных внешних возмущений / Б.Т. Поляк, М.В. Топунов, П.С. Щербаков // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2007. – Вып. 3. – С. 51–84.