0495U001231 УДК 517.956

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України

ВОЗНЯК Ольга Григорівна

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМИ

01.01.02 - диференційні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник -
доктор фізико-математичних
наук, професор С.Д.Івасишен

Львів - 1995

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена дослідженню задачі Коші для параболічних за Петровським систем і деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, які мають виродження на початковій гіперплощині.

На даний час для рівномірно параболічних за Петровським (і більш загальних) систем рівнянь з гладкими і обмеженими коефіцієнтами відомі досить повні результати. У випадку задачі Коші вони стосуються насамперед побудови та детального дослідження властивостей фундаментальних матриць розв'язків, дослідження коректної розв'язності задачі Коші в широких класах функціональних просторів та вивчення різних властивостей розв'язків, заданих у напіввідкритому шарі, зокрема дослідження їх інтегрального зображення і граничної поведінки при наближенні до початкової гіперплощини. У цьому напрямку є фундаментальні праці багатьох вітчизняних і зарубіжних математиків, зокрема С.Д.Ейдельмана [1-4], В.О.Солонникова [5], Ж.Шабровського [6,7], С.Д.Івасишена [2, 8,9], М.І.Матійчука [3,10] та ін.

Значно менше досліджена задача Коші для параболічних систем з різними виродженнями і особливостями, коли, наприклад, система не є рівномірно параболічною, коефіцієнти системи є необмеженими в околі деяких точок або на безмежності і т.д. Задачі для такого типу систем виникають у теоретичних і прикладних дослідженнях. Тому вони є актуальними.

З попередніх праць найближчими за об'єктом дослідження і результатами є праці А.С.Калашникова [11,12], А.В.Глушака і

С.Д.Шмулевича [13]. У працях А.С.Калашникова для виродженого лінійного параболічного рівняння другого порядку знайдені точні обмеження на допустимий ріст шуканої функції при $|x| \to \infty$, який забезпечує однозначну розв'язність задачі без початкових умов. А А.В.Глушак і С.Д.Шмулевич побудували фундаментальний розв'язок для деяких вироджених на гіперплощині $\{t=0\}$ параболічних рівнянь довільного порядку, за допомогою якого визначили клас коректності задачі без початкових умов. Цей клас містить функції, що зростають як при $|x| \to \infty$, так і при $t \to 0$. Крім того, знайдений розв'язок, який з деякою вагою задовольняє початкову умову спеціального вигляду.

У працях В.В.Городецького та І.В.Житарюка [14,15] вивчені властивості розв'язків задачі Коші для параболічних рівнянь із слабким виродженням на початковій гіперплощині і початковими даними із спеціальних просторів узагальнених функцій.

Задача Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова без виродження на початковій гіперплощині досліджувалась у працях А.М.Колмогорова [16], М.Вебер [17], А.М.Ільїна [18], І.М.Соніна [19], Г.П.Малицької [20-22], С.Д.Ейдельмана [21,23, 25], Л.М.Тичинської [23,25], С.Д.Івасишена [24-26], Л.М.Андросової [24,26] та ін.

У цих працях побудовані фундаментальні розв'язки, вивчені їх властивості, встановлена коректна розв'язність задачі Коші. Розглянуто також питання про зображення розв'язків, визначених у напіввідкритому шарі, у вигляді інтегралів Пуассона функцій чи узагальнених борельових мір із спеціальних вагових просторів. При цьому з'ясовано, в якому сенсі інтеграли Пуассона задовольняють початкові умови.

Перейдемо до опису змісту та основних результатів дисертаційної роботи.

Робота складається із вступу, розділів I і II та списку літератури. Обидва розділи містять по три параграфи, розбиті на пункти.

У першому розділі розглядається система N рівнянь з частинними похідними

$$[\alpha(t) I D_t^1 - \beta(t) \sum_{0<|k|\leq 2b} a_k(t,x) D_x^k - a_0(t,x)]\, u(t,x) =$$
$$= f(t,x),\ (t,x) \in \Pi^n_{(0,T]} \equiv (0,T] \times \mathbb{R}^n, \qquad (I)$$

де коефіцієнти a_k, $|k| \leq 2b$, - такі квадратні матриці з комплекснозначними елементами, що диференціальний вираз

$$I D_t^1 - \sum_{|k|=2b} a_k D_x^k$$

є рівномірно параболічним за Петровським у шарі $\Pi^n_{[0,T]}$; функції $\alpha, \beta : [0,T] \longrightarrow [0,\infty)$ неперервні, причому функція β монотонно неспадна, і такі, що

$$\alpha(0)\beta(0) = 0,\ \forall\, t \in (0,T] : \alpha(t) > 0,\ \beta(t) > 0.$$

Припускається, крім того, що функції a_k, $|k| \leq 2b$, у шарі $\Pi^n_{[0,T]}$ обмежені, задовольняють рівномірну умову Гельдера по x з показником $\lambda \in (0,1)$ і неперервні по t, причому неперервність функцій a_k, $|k| = 2b$, рівномірна по $x \in \mathbb{R}^n$.

У § I дається означення фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) задачі Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині, будується ФМР задачі Коші для системи (I), одержуються точні оцінки її похідних і вивчаються деякі її властивості, при цьому істотно розрізняються випадки слабкого (інтеграл $\int_0^T \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$ збігається) і сильного (цей інтеграл розбігається) вироджень.

Як і для рівномірно параболічних систем [I,2], побудова ФМР Z задачі Коші здійснюється за допомогою методу Леві, згідно з яким вона відшукується у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi)=Z_0(t,x;\tau,\xi;\xi)+$$
$$+\int_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\theta,y;y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$
$$0<\tau<t\leq T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де, на відміну від випадку систем без виродження, матриця $Z_0(t,x;\tau,\xi;y),\ 0<\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, є ФМР задачі Коші для системи

$$[\alpha(t)I D_t^1-\beta(t)\sum_{|k|=2b}a_k(t,y)D_x^k-a_0(t,y)]u(t,x)=0,$$
$$(t,x)\in\Pi^n_{(0,T]},\ y\in\mathbb{R}^n.$$

У § 2 встановлюються властивості потенціалів, породжених ФМР задачі Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині. У п. 2.I наводяться властивості інтегралів Пуассона, породжених ФМР задачі Коші для системи (I) у випадку слабкого виродження, а в п. 2.2 - деякі властивості об'ємних потенціалів, при цьому розглядається як випадок слабкого, так і сильного вироджень. У п. 2.3 одержані зображення розв'язків задачі Коші для системи (I) із слабким виродженням у вигляді суми інтегралів Пуассона функцій і узагальнених борельових мір відповідно з просторів $L_p^{k(0)}$, $1<p\leq\infty$, і $M^{k(0)}$ та відповідних об'ємних потенціалів. Ці простори аналогічні просторам L_p^a і M^a з[9].

§ 3 присвячений дослідженню коректної розв'язності та інтегрального зображення розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині.

У п. 3.I встановлюється коректна розв'язність задачі Коші у випадку слабкого виродження. У п. 3.2 знайдені необхідні та достатні умови, за яких визначені в напіввідкритому шарі розв'язки зображуються у вигляді інтегралів Пуассона функцій або узагальнених борелевих мір із просторів $L_p^{k(0)}$, $1<p\leq\infty$, або $M^{k(0)}$. В п. 3.3 доводиться теорема, в якій наводяться умови, за яких існує єдиний розв'язок сильно виродженої системи (I) без початкових даних.

У другому розділі розглядається один клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, які мають ще виродження на початковій гіперплощині, з коефіцієнтами, залежними тільки від t, тобто рівняння вигляду

$$[\alpha(t)D_t^1-\beta(t)(\sum_{j=1}^{m}x_jD_{y_j}^1+\sum_{j=1}^{l}y_jD_{z_j}^1+\sum_{0<|k|\leq 2b}a_k(t)D_x^k)-$$

$$-a_0(t)]u(t,X)=0,\ (t,X)\in\Pi_{(0,T]}^{L}, \qquad (2)$$

де $X\equiv(x,y,z)\in\mathbb{R}^L$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $y=(y_1,\dots,y_m)\in\mathbb{R}^m$, $z=(z_1,\dots,z_l)\in\mathbb{R}^l$, $1\leq l\leq m\leq n$, $L\equiv l+m+n$, коефіцієнти $a_k:[0,T]\to\mathbb{C}$, $0<|k|\leq 2b$, $a_0:(0,T]\to\mathbb{C}$ неперервні і такі, що вираз

$$D_t^1-\sum_{0<|k|\leq 2b}a_k(t)D_x^k$$

рівномірно параболічний за Петровським, $\exists A\in\mathbb{R}\ \forall t\in(0,T]$: $\mathrm{Re}\ a_0(t)\leq A$, а функції α і β такі ж, як і в системі (I).

В § 4 будується і дається повний аналітичний опис фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (2), одержуються точні оцінки його похідних, досліджуються деякі інші його властивості. Побудова фундаментального розв'язку здійснюється за методикою, яка використовується в [24] для такого класу рівнянь без виродження на початковій гіперплощині.

У § 5 вивчаються властивості інтегралів Пуассона елементів спеціальних вагових просторів функцій та узагальнених мір. Ці простори аналогічні просторам з [24]. З'ясовано, в якому розумінні інтеграли Пуассона задовольняють початкові умови.

В § 6 у випадку слабкого виродження знайдені необхідні та достатні умови інтегрального зображення розв'язків рівняння (2) у вигляді інтегралів Пуассона функцій або узагальнених мір із вагових просторів $L_p^{k(0,a)}$, $1 < p \leq \infty$, і $M^{k(0,a)}$ відповідно.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах [27-35] і доповідались та обговорювались на Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 25-27 січня 1994 р.); науковій конференції, присвяченій 120-річчю заснування Чернівецького університету (Чернівці, 4-6 травня 1995 р.); міжнародній конференції "Нелінійні диференціальні рівняння" (Київ, 21-27 серпня 1995 р.); наукових семінарах кафедри математичного моделювання Чернівецького університету (Чернівці, 1992-1995 рр.); наукових семінарах Чернівецького відділу ІППММ НАН України (Чернівці, 1992-1995 рр.).

Висловлюю щиру подяку своєму науковому керівникові професору Степану Дмитровичу Івасишену за постановку задач, розглянутих у дисертації, і постійну допомогу при їх розв'язанні.

СПИСОК ОСНОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\equiv$ - дорівнює за означенням;

$\blacktriangleleft$ - початок доведення, $\blacktriangleright$ - кінець доведення;

b, l, m, n, N - фіксовані натуральні числа, причому $l \leq m \leq n$;

$q \equiv \frac{2b}{2b-1}$;

$\mathbb{R}^r$ - r-вимірний дійсний евклідів простір, $r \geqslant 1$, $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^1$;

$\mathbb{R}_+ \equiv (0,\infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ \equiv [0,\infty)$;

$\mathbb{C}$ - множина всіх комплексних чисел;

$\mathbb{C}_N$ - сукупність усіх стовпчиків S висоти N, елементи яких $s_j \in \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq N$;

$\mathbb{C}_{NN}$ - сукупність усіх квадратних матриць M порядку N, елементи яких $m_{jk} \in \mathbb{C}$, $1 \leq j,k \leq N$;

$|S| \equiv \max\limits_{1 \leq j \leq N} |s_j|$, якщо $S \in \mathbb{C}_N$;

$|M| \equiv \max\limits_{1 \leq j \leq N} \sum\limits_{k=1}^{N} |m_{jk}|$, якщо $M \in \mathbb{C}_{NN}$;

M' - матриця, транспонована до матриці M;

I - одинична матриця порядку N;

$|k| \equiv k_1 + \ldots + k_r$, якщо $k = (k_1, \ldots, k_r)$ - r-вимірний мультиіндекс;

$D_t^1 \equiv \frac{\partial}{\partial t}$, $D_{x_j}^1 \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$;

$D_x^k \equiv D_{x_1}^{k_1} \ldots D_{x_r}^{k_r}$, якщо $x = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, $k = (k_1, \ldots, k_r)$ - мультиіндекс;

T - фіксоване додатне число;

$\alpha : [0,T] \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\beta : [0,T] \to \overline{\mathbb{R}}_+$ - неперервні функції, для яких $\alpha(t)>0$, $\beta(t)>0$ при $t\in(0,T]$ і $\alpha(0)\beta(0)=0$, причому функція β монотонно неспадна;

$$A(t,\tau)\equiv\int_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)},\ B(t,\tau)\equiv\int_\tau^t\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta,\ 0<\tau\le t\le T;$$

$$E_c(t,\tau,|x|)\equiv\exp\{-c\,[B(t,\tau)]^{1-q}|x|^q\},\ c>0,\ 0<\tau<$$

$$<t\le T,\ x\in\mathbb{R}^n;$$

$$E^d(t,\tau)\equiv\exp\{dA(t,\tau)\},\ d\in\mathbb{R},\ 0<\tau<t\le T;$$

$$E_c^d(t,\tau,|x|)\equiv E_c(t,\tau,|x|)\,E^d(t,\tau);$$

$\Pi_H^r\equiv H\times\mathbb{R}^r$, якщо H – множина в $\mathbb{R}$;

$$\mathbb{K}_R^r(x)\equiv\{\xi\in\mathbb{R}^r\,|\,|\xi-x|\le R\};\ \mathbb{K}_R^r\equiv\mathbb{K}_R^r(0);$$

Часто однаково позначатимуться різні сталі, якщо їх величини нас не цікавлять.

Р О З Д І Л I

ПАРАБОЛІЧНІ ЗА ПЕТРОВСЬКИМ СИСТЕМИ З ВИРОДЖЕННЯМИ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

У цьому розділі побудована фундаментальна матриця розв'язків Z задачі Коші для параболічних за Петровським систем з виродженнями на початковій гіперплощині, одержані точні оцінки матриці Z та її похідних, досліджені деякі властивості матриці Z, а також потенціалів, породжених цією матрицею. Ці властивості використані для дослідження коректної розв'язності, інтегрального зображення та граничної поведінки розв'язків систем, які тут розглядаються. При цьому істотно розрізняються випадки слабкого і сильного вироджень.

§ I. ФУНДАМЕНТАЛЬНА МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМИ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

<u>I.I. Означення фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші</u>. Нехай $\alpha_0:[0,T]\to\overline{\mathbb{R}}_+$, $\beta_0:[0,T]\to\overline{\mathbb{R}}_+$ і $\gamma:[0,T]\to\overline{\mathbb{R}}_+$ - неперервні функції, для яких $\alpha_0(t)>0$, $\beta_0(t)>0$, $\gamma(t)>0$ при $t\in(0,T]$ і $\alpha_0(0)\beta_0(0)\gamma(0)=0$, причому функції β_0 і γ монотонно неспадні.

Розглянемо систему N рівнянь

$$[\alpha_0(t)ID_t^1-\beta_0(t)P(t,x,D_x)-\frac{a_0(t,x)}{\gamma(t)}]u(t,x)=f_0(t,x),$$

$$(t,x)\in\Pi^n_{(0,T]}, \tag{I.I}$$

де

$$P(t,x,D_x)\equiv P_0(t,x,D_x)+P_1(t,x,D_x),$$

$$P_0(t,x,D_x)\equiv \sum_{|k|=2b} a_k(t,x)D_x^k,$$

$$P_1(t,x,D_x)\equiv \sum_{1\le|k|\le 2b-1} a_k(t,x)D_x^k; \qquad (1.2)$$

$$a_k:\Pi^n_{[0,T]}\longrightarrow \mathbb{C}_{NN},\ |k|\le 2b;\ u, f_0:\Pi^n_{(0,T]}\longrightarrow \mathbb{C}_N.$$

Якщо запровадити позначення

$$\alpha\equiv\alpha_0\gamma,\ \beta\equiv\beta_0\gamma,\ f\equiv f_0\gamma, \qquad (1.3)$$

то систему (1.1) можна записати у вигляді

$$[\alpha(t)ID_t^1-\beta(t)P(t,x,D_x)-a_0(t,x)]u(t,x)=f(t,x),$$
$$(t,x)\in\Pi^n_{(0,T]}. \qquad (1.4)$$

Для коефіцієнтів a_k, $|k|\le 2b$, вважатимемо виконаними наступні умови.

Умова 1 (умова параболічності). Існує така стала $\delta>0$, що p-корені $p_1,\dots,p_N$ рівняння

$$\det\Big(\sum_{|k|=2b} a_k(t,x)(i\sigma)^k-pI\Big)=0$$

задовольняють нерівності

$$\operatorname{Re} p_j(t,x,\sigma)\le -\delta|\sigma|^{2b},\ 1\le j\le N,$$

для довільних $(t,x)\in\Pi^n_{[0,T]}$ і $\sigma\in\mathbb{R}^n$.

Умова 2. Коефіцієнти a_k, $|k|\le 2b$, обмежені і неперервні по t (при цьому неперервність коефіцієнтів з $|k|=2b$ рівномірна по $x\in\mathbb{R}^n$), а також задовольняють у $\Pi^n_{[0,T]}$ умову Гельдера по x з показником $\lambda\in(0,1)$, тобто

$$\exists C>0\ \ \forall\{(t,x),(t,y)\}\subset\Pi^n_{[0,T]}\ \ \forall k, |k|\le 2b:$$
$$|a_k(t,x)-a_k(t,y)|\le C|x-y|^\lambda.$$

Інколи використовуватимемо ще таку умову.

Умова 3. Існують обмежені і неперервні по t похідні $D_x^k a_k$, $|k|\le 2b$, які задовольняють у $\Pi^n_{[0,T]}$ умову Гельдера по x з показником $\lambda \in (0,1)$.

Припускаючи, що виконується умова 3, розглянемо в $\Pi^n_{[t_0,T]}$, $t_0 > 0$, диференціальний вираз

$$(L^*v)(t,x) \equiv -D_t^1 v(t,x) - \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \sum_{1\le|k|\le 2b} (-D_x)^k \times$$
$$\times [\,\overline{a}_k'(t,x)v(t,x)] - \frac{\overline{a}_0'(t,x)}{\alpha(t)}\, v(t,x), \qquad (I.5)$$

де штрих означає транспонування, а риска – комплексне спряження. Цей вираз є спряженим за Лагранжем з виразом

$$(Lu)(t,x) \equiv [\,I\,D_t^1 - \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \sum_{1\le|k|\le 2b} a_k(t,x) D_x^k -$$
$$- \frac{a_0(t,x)}{\alpha(t)}\,]\,u(t,x),\ (t,x)\in \Pi^n_{[t_0,T]}. \qquad (I.6)$$

Використавши рівності (I.5) і (I.6), для довільних досить гладких функцій $u, v: \Pi^n_{[t_0,T]} \to \mathbb{C}_N$ дістанемо рівність

$$\overline{v}'Lu - (\overline{L^*v})'u = D_t^1(\overline{v}'u) + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^1 B^j[v,u], \qquad (I.7)$$

в якій

$$B^j[v,u] \equiv - \sum_{1\le|k|\le 2b} \sum_{\nu_j=0}^{k_j-1} (-D_{x_1})^{k_1}\dots(-D_{x_{j-1}})^{k_{j-1}} \times$$
$$\times (-D_{x_j})^{\nu_j} (\overline{v}' a_k) D_{x_j}^{k_j-\nu_j} D_{x_{j+1}}^{k_{j+1}} \dots D_{x_n}^{k_n} u,\ 1\le j\le n,$$

де при $k_j = 0$ відповідна сума дорівнює нулеві.

Оскільки система (I.4) вироджується при $t=0$, то не завжди для неї можна розглядати задачу Коші з початковими даними при $t = 0$ у звичайній постановці. Але можна говорити про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші згідно з таким означенням.

<u>Означення</u>. Фундаментальною матрицею розв'язків (ФМР) задачі Коші для системи (I.4) називається квадратна матриця порядку N $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset \mathbb{R}^n$, така, що функція

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\ (t,x)\in\Pi^n_{(\tau,T]},$$

є розв'язком однорідної системи (I.4), який задовольняє умову

$$u(t,x)\big|_{t=\tau}=\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{I.8}$$

для будь-якого числа $\tau\in(0,T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції $\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}_N$.

<u>I.2. ФМР задачі Коші для системи, коефіцієнти якої не залежать від просторових змінних.</u> Нехай τ - фіксоване число з проміжку $(0,T)$, $P(t,D_x)$, $P_0(t,D_x)$ і $P_1(t,D_x)$ - диференціальні вирази з (I.2), коефіцієнти яких залежать тільки від t і є неперервними на відрізку $[0,T]$. У шарі $\Pi^n_{[\tau,T]}$ розглянемо задачу Коші з початковою умовою (I.8) для однорідної системи (I.4) у випадку, коли коефіцієнти a_k, $|k|\leq 2b$, не залежать від x, тобто системи

$$[\alpha(t)ID^1_t-\beta(t)P(t,D_x)-a_0(t)]u(t,x)=0,$$
$$(t,x)\in\Pi^n_{(\tau,T]}. \tag{I.9}$$

Для розв'язування задачі (I.8),(I.9) скористаємось перетворенням Фур'є F по змінній x. Припускаючи, що для φ існує перетворення Фур'є

$$\psi(\sigma)\equiv(F[\varphi])(\sigma),\sigma\in\mathbb{R}^n, \tag{I.10}$$

розв'язок задачі (I.8),(I.9) шукаємо у вигляді

$$u(t,x)=(F^{-1}[v(t,\cdot)])(t,x),(t,x)\in\Pi^n_{(\tau,T]}, \tag{I.11}$$

де v - невідома функція.

Підставивши вираз (I.11) в (I.8),(I.9) та скориставшись (I.10) і властивостями перетворення Фур'є, для функції v одержимо задачу

$$[\alpha(t)ID^1_t-\beta(t)P(t,i\sigma)-a_0(t)]v(t,\sigma)=0,$$

$$(t,\sigma)\in\Pi^{n}_{(\tau,T]}, \tag{1.12}$$

$$v(t,\sigma)\big|_{t=\tau}=\psi(\sigma),\ \sigma\in\mathbb{R}^{n}. \tag{1.13}$$

Її розв'язок визначається формулою

$$v(t,\sigma)=Q(t,\tau,\sigma)\psi(\sigma),\ (t,\sigma)\in\Pi^{n}_{(\tau,T]}, \tag{1.14}$$

де Q - нормальна ФМР системи (1.12).

Підставивши вираз (1.14) у (1.11), одержимо, що ФМР задачі (1.8),(1.9) має вигляд

$$Z(t,x;\tau,\xi)\equiv Z_0(t,\tau,x-\xi),\ \tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^{n}, \tag{1.15}$$

де

$$Z_0(t,\tau,x)\equiv(F^{-1}[Q(t,\tau,\cdot)])(t,\tau,x)\equiv(2\pi)^{-n}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(x,\sigma)\}Q(t,\tau,\sigma)\,d\sigma,\ \tau<t\leq T,\ x\in\mathbb{R}^{n}. \tag{1.16}$$

Отже, щоб описати властивості ФМР Z, треба спочатку дослідити властивості матриці Q. Таке дослідження здійснюється за допомогою методики, використаної для рівномірно параболічних систем у монографії [1, с.46–49]. Наведемо тільки деякі його основні моменти.

1) Матриця $Q(t,\tau,\sigma)$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, допускає продовження в n-вимірний комплексний простір $\mathbb{C}^n$ до матриці $Q(t,\tau,s)$, $s\in\mathbb{C}^n$, яка є цілою функцією.

2) Нехай t_0 - фіксована точка з відрізка $[\tau,T]$. Нормальна ФМР $Q_0(t,\theta,s)$, $\tau\leq\theta\leq t\leq T$, $s\in\mathbb{C}^n$, системи

$$[\alpha(t)I\,D_t^1-\beta(t)\,P_0(t_0,is)]\,v=0$$

визначається формулою

$$Q_0(t,\theta,s)\equiv\exp\{P_0(t_0,is)B(t,\theta)\},\ \tau\leq\theta\leq t\leq T,\ s\in\mathbb{C}^n.$$

Для неї правильна оцінка

$$|Q_0(t,\theta,s)|\leq C\exp\{(-\delta_0|\sigma|^{2b}+M_0|\gamma|^{2b})B(t,\theta)\},$$

$$\tau \leq \theta \leq t \leq T,\ s=\sigma+i\gamma \in \mathbb{C}^n, \tag{1.17}$$

де $0<\delta_0<\delta$, δ – стала з умови 1 § 1, $M_0>0$.

3) Матриця $Q(t,\tau,s), \tau\leq t\leq T$, $s\in\mathbb{C}^n$, є розв'язком системи

$$[\alpha(t)I D_t^1-\beta(t)P_0(t_0,is)]Q=$$
$$=\{\beta(t)[(P_0(t,is)-P_0(t_0,is))+P_1(t,is)]+a_0(t)\}Q$$

і тому за допомогою матриці Q_0 можна записати рівність

$$Q(t,\tau,s)=Q_0(t,t_0,s)Q(t_0,\tau,s)+\int_{t_0}^{t}Q_0(t,\theta,s)\{\beta(\theta)[(P_0(\theta,is)-$$
$$-P_0(t_0,is))+P_1(\theta,is)]+a_0(\theta)\}Q(\theta,\tau,s)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)},$$
$$\tau\leq t\leq T,\ s\in\mathbb{C}^n. \tag{1.18}$$

Використовуючи (1.17),(1.18), неперервність коефіцієнтів системи (1.9) і лему 4.1 з [1], так само, як у [1], доводиться правильність оцінки

$$|Q(t,\tau,s)|\leq C\exp\{(-\delta_1|\sigma|^{2b}+M_1|\gamma|^{2b})B(t,\tau)+dA(t,\tau)\},$$
$$\tau\leq t\leq T,\ s=\sigma+i\gamma\in\mathbb{C}^n, \tag{1.19}$$

де $0<\delta_1<\delta_0$, $M_1>0$, $d\in\mathbb{R}$.

Ця оцінка дозволяє одержати повний аналітичний опис ФМР Z, яка визначається формулами (1.15) і (1.16).

Зробимо в інтегралі з (1.16) заміну змінної інтегрування за формулою $\eta=[B(t,\tau)]^{\frac{1}{2b}}\sigma$, тоді

$$Z_0(t,\tau,x)=(2\pi)^{-n}[B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\{i([B(t,\tau)]^{-\frac{1}{2b}}x,\eta)\}\times$$
$$\times Q(t,\tau,[B(t,\tau)]^{-\frac{1}{2b}}\eta)\,d\eta,\ \tau<t\leq T,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

При фіксованих τ і t функція $Q(t,\tau,[B(t,\tau)]^{-\frac{1}{2b}}\eta)$, $\eta\in\mathbb{R}^n$, допускає продовження в $\mathbb{C}^n$ до цілої функції

$$Q(t,\tau,[B(t,\tau)]^{-\frac{1}{2b}}p),\ p=\eta+i\xi\in\mathbb{C}^n.$$

З оцінки (I.19) випливає, що

$$|Q(t,\tau,[B(t,\tau)]^{-\frac{1}{2b}}p)|\le C\exp\{-\delta_1|\eta|^{2b}+M_1|\xi|^{2b}+$$
$$+dA(t,\tau)\},\ \tau<t\le T,\ p=\eta+i\xi\in\mathbb{C}^n.$$

На підставі леми I.I з [I] обернене перетворення Фур'є функції Q - функція $Z_0(t,\tau,z)$, $z=x+iy\in\mathbb{C}^n$, як функція аргументів $[B(t,\tau)]^{-\frac{1}{2b}}z_1,\dots,[B(t,\tau)]^{-\frac{1}{2b}}z_n$, є цілою функцією, для якої правильна оцінка

$$|Z_0(t,\tau,z)|\le C[B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}}\exp\{-c[B(t,\tau)]^{1-q}|x|^q+$$
$$+M[B(t,\tau)]^{1-q}|y|^q+dA(t,\tau)\},\ \tau<t\le T,\ z=x+iy\in\mathbb{C}^n,\quad (I.20)$$

де $c>0$, $M>0$ і $d\in\mathbb{R}$.

Для продовжень у $\mathbb{C}^n$ похідних від Z_0, які визначаються формулою

$$D_x^m Z_0(t,\tau,x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\{i(x,\sigma)\}(i\sigma)^m Q(t,\tau,\sigma)d\sigma,$$
$$\tau<t\le T,\ x\in\mathbb{R}^n,\ |m|\ge 1,$$

правильні оцінки

$$|D_z^m Z_0(t,\tau,z)|\le C_m[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|m|}{2b}}\exp\{-c[B(t,\tau)]^{1-q}|x|^q+$$
$$+M[B(t,\tau)]^{1-q}|y|^q+dA(t,\tau)\},\tau<t\le T,\ z=x+iy\in\mathbb{C}^n,\quad (I.21)$$

де $c>0$, $M>0$, $d\in\mathbb{R}$ і $|m|>0$. Ці оцінки одержуються таким самим способом, що й оцінка (I.20), при цьому використовується те, що функція

$$(i[B(t,\tau)]^{-\frac{1}{2b}}p)^m Q(t,\tau,[B(t,\tau)]^{-\frac{1}{2b}}p),\ p\in\mathbb{C}^n,$$

є цілою функцією, для якої правильна оцінка

$$|(i[B(t,\tau)]^{-\frac{1}{2b}}p)^m Q(t,\tau,[B(t,\tau)]^{-\frac{1}{2b}}p)|\le$$

$$\leq C \exp\{-\delta_2 |\eta|^{2b} + M_2 |\xi|^{2b} + d A(t,\tau)\},$$
$$\tau < t \leq T, \; p = \eta + i\xi \in \mathbb{C}^n,$$

де $0 < \delta_2 < \delta_1$, $M_2 > M_1$.

З формули (I.15) та оцінок (I.21) випливають такі оцінки для ФМР Z:

$$|D_x^m Z(t,x;\tau,\xi)| \leq C_m [B(t,\tau)]^{-\frac{n+|m|}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|),$$
$$0 < \tau < t \leq T, \; \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{I.22}$$

де m – довільний n-вимірний мультиіндекс, $C_m > 0$, $c > 0$ і $d \in \mathbb{R}$ – деякі сталі.

<u>I.3. Властивості ФМР задачі Коші для системи з коефіцієнтами, залежними тільки від t і параметрів</u>. Наведемо деякі властивості ФМР задачі Коші для системи з виродженнями, коефіцієнти якої залежать тільки від t і параметрів. Вони використовуватимуться при побудові та дослідженні ФМР задачі Коші для системи з коефіцієнтами, залежними від усіх змінних t і x.

Розглянемо систему

$$[\alpha(t) I D_t^1 - \beta(t) \sum_{1 \leq |k| \leq 2b} a_k(t,y) D_x^k - a_0(t,y)] u(t,x) =$$
$$= f(t,x), \; (t,x) \in \Pi_{(0,T]}^n, \tag{I.23}$$

де y – параметрична точка з $\mathbb{R}^n$, а α і β – ті ж функції, що і в п. I.1. Відносно коефіцієнтів a_k, $|k| \leq 2b$, припускатимемо, що:

1) задовольняється умова параболічності рівномірно по $y \in \mathbb{R}^n$, тобто умова I, в якій x замінено на y;

2) усі коефіцієнти обмежені і неперервні по t на $[0,T]$, причому неперервність a_k, $|k| = 2b$, рівномірна по $y \in \mathbb{R}^n$.

Так само, як у п. I.2, будується ФМР $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<$

$<t\le T,\ \{x,y,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, задачі Коші для системи (I.23) та доводиться правильність оцінок

$$|D_x^m Z(t,x;\tau,\xi;y)|\le C_m\,[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|m|}{2b}}\,E_c^d(t,\tau,|x-\xi|),$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,y,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |m|\ge 0, \qquad \text{(I.24)}$$

де сталі C_m , c і d не залежать від y .

Доведення наступних властивостей ФМР Z аналогічне доведенню відповідних властивостей для параболічних систем без виродження [I].

<u>Властивість I</u>. Нехай для коефіцієнтів a_k , $|k|\le 2b$, системи (I.23) і коефіцієнтів b_k , $|k|\le 2b$, системи

$$[\alpha(t)I D_t^1-\beta(t)\sum_{1\le|k|\le 2b} b_k(t,y)D_x^k-b_0(t,y)]\,u(t,x)=$$
$$=f(t,x),\ (t,x)\in\Pi^n_{(0,T]}, \qquad \text{(I.25)}$$

виконуються умови I) і 2) та, крім того, нерівності

$$|a_k(t,y)-b_k(t,y)|\le\varepsilon,\ (t,y)\in\Pi^n_{[0,T]},\ |k|\le 2b.$$

Нехай, далі, Z_a і Z_b - ФМР задачі Коші відповідно для систем (I.23) і (I.25). Тоді правильні оцінки

$$|D_x^m[Z_a(t,x;\tau,\xi;y)-Z_b(t,x;\tau,\xi;y)]|\le$$
$$\le C_m\,\varepsilon\,[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|m|}{2b}}\,E_c^d(t,\tau,|x-\xi|),$$
$$0<\tau<t\le T,\ \{x,y,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |m|\ge 0.$$

З властивості I безпосередньо випливає таке твердження.

<u>Властивість 2</u>. Якщо коефіцієнти a_k , $|k|\le 2b$, системи (I.23) задовольняють умови I) і 2) та умову Гельдера по y в $\Pi^n_{[0,T]}$ з показником $\lambda\in(0,1]$, тобто умову

$$\exists L>0\ \ \forall\{(t,y),(t,z)\}\subset\Pi^n_{[0,T]}\ \ \forall k,|k|\le 2b:$$
$$|a_k(t,y)-a_k(t,z)|\le L\,|y-z|^\lambda,$$

то правильні оцінки

$$|D_x^m [Z(t,x;\tau,\xi;y) - Z(t,x;\tau,\xi;z)]| \leqslant$$
$$\leqslant C_m L |y-z|^\lambda [B(t,\tau)]^{-\frac{n+|m|}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|),$$
$$0<\tau<t\leqslant T, \{x,y,z,\xi\}\subset \mathbb{R}^n, |m|\geqslant 0. \qquad (I.26)$$

Властивість 3. Нехай коефіцієнти a_k, $|k|\leqslant 2b$, системи (I.23) задовольняють умови I) і 2), мають неперервні та обмежені похідні по y до порядку $r\geqslant 0$ в $\Pi^n_{[0,T]}$, тоді мають місце оцінки

$$|D_x^m D_y^p Z(t,x;\tau,\xi;y)| \leqslant C_{mp} [B(t,\tau)]^{-\frac{n+|m|}{2b}} \times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,|x-\xi|), 0<\tau<t\leqslant T, \{x,y,\xi\}\subset \mathbb{R}^n, |m|\geqslant 0,$$
$$|p|\leqslant r. \qquad (I.27)$$

Якщо, крім того, похідні по y від a_k, $|k|\leqslant 2b$, задовольняють у $\Pi^n_{[0,T]}$ умову Гельдера по y з показником λ, то ще правильні оцінки

$$|D_x^m D_y^p [Z(t,x;\tau,\xi;y) - Z(t,x;\tau,\xi;z)]| \leqslant$$
$$\leqslant C_{mp} |y-z|^\lambda [B(t,\tau)]^{-\frac{n+|m|}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|),$$
$$0<\tau<t\leqslant T, \{x,y,z,\xi\}\subset \mathbb{R}^n, |m|\geqslant 0, |p|\leqslant r. \qquad (I.28)$$

Тепер наведемо деякі властивості інтегралів, які містять ФМР Z задачі Коші для системи (I.23).

Властивість 4. Правильна рівність

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi;y)\,d\xi = \exp\Big\{\int_\tau^t \frac{a_0(\theta,y)}{\alpha(\theta)}\,d\theta\Big\}, \qquad (I.29)$$
$$0<\tau<t\leqslant T, \{x,y\}\subset \mathbb{R}^n,$$

з якої випливає, що

$$\lim_{t\to\tau} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi;y)\,d\xi = I, \; y\in\mathbb{R}^n, \qquad (I.30)$$

рівномірно по $x\in\mathbb{R}^n$, а якщо $a_0=0$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi;y)\,d\xi = 1,\ 0<\tau<t\le T,\ \{x,y\}\subset\mathbb{R}^n. \qquad (1.31)$$

◀ Рівність (1.29) доводиться за допомогою формул (1.15) і (1.16) таким чином:

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi;y)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,\tau,x;y)\,dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-i(x,0)\} F^{-1}[Q(t,\tau,\cdot;y)](t,\tau,x;y)\,dx =$$
$$= F[F^{-1}[Q(t,\tau,\cdot;y)]](t,\tau,0;y) = Q(t,\tau,0,y) =$$
$$= \exp\Big\{\int_\tau^t \frac{a_0(\theta,y)}{\alpha(\theta)}\,d\theta\Big\}. \ ▶$$

Нехай t_0 - фіксоване число з $(0,T)$ і Q - компакт у шарі $\Pi^n_{[t_0,T]}$. Говоритимемо, що функція $f:\Pi^n_{[t_0,T]}\to\mathbb{C}_N$ задовольняє на Q умову Гельдера по x, якщо

$$\exists L>0\ \exists\lambda\in(0,1]\ \forall\{(t,x),(t,\xi)\}\subset Q:$$
$$|f(t,x)-f(t,\xi)|\le L|x-\xi|^\lambda. \qquad (1.32)$$

<u>Властивість 5</u>. Нехай для коефіцієнтів a_k, $|k|\le 2b$, системи (1.23) виконуються умови 1 і 2, а функція $f:\Pi^n_{[t_0,T]}\to\mathbb{C}_N$ обмежена й неперервна, а також задовольняє умову Гельдера по x на кожному компакті $Q\subset\Pi^n_{[t_0,T]}$. Тоді функція

$$u(t,x)\equiv\int_{t_0}^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi;\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi,$$
$$(t,x)\in\Pi^n_{(t_0,T]}, \qquad (1.33)$$

має неперервні похідні, які входять у систему (1.23). При цьому похідні від u по x до порядку $2b-1$ одержуються формальним диференціюванням під знаками інтегралів, а похідні старших порядків обчислюються за такими формулами:

$$D_x^k u(t,x)=\int_{t_0}^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z(t,x;\tau,\xi;\xi)[f(\tau,\xi)-$$

$$-f(\tau,x)]\,d\xi+\int_{t_0}^{t}[\int_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z(t,x;\tau,\xi;\xi)\,d\xi]\frac{f(\tau,\xi)}{\alpha(\tau)}\,d\tau,$$

$$(t,x)\in\Pi^n_{(t_0,T]},\ |k|=2b, \tag{I.34}$$

$$\alpha(t)D_t^1 u(t,x)=f(t,x)+\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}\alpha(t)D_t^1 Z(t,x;\tau,\xi;\xi)\times$$

$$\times[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)]\,d\xi+\int_{t_0}^{t}[\int_{\mathbb{R}^n}\alpha(t)D_t^1 Z(t,x;\tau,\xi;\xi)d\xi]\times$$

$$\times\frac{f(\tau,x)}{\alpha(\tau)}\,d\tau,\ (t,x)\in\Pi^n_{(t_0,T]}. \tag{I.35}$$

◄ Для $t_0\le\tau<t\le T$, $x\in\mathbb{R}^n$ і $|k|\le 2b$ маємо

$$D_x^k\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi;\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z(t,x;\tau,\xi;\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi\equiv I^{(k)}(t,x;\tau). \tag{I.36}$$

Щоб це довести, треба переконатись, що інтеграл $I^{(k)}$ збігається рівномірно по $x\in\mathbb{R}^n$ для фіксованих t і τ. Зробивши в інтегралі $I^{(k)}(t,x;\tau)$ заміну за формулою $\xi=x+\eta\,[B(t,\tau)]^{\frac{1}{2b}}$, одержимо

$$I^{(k)}(t,x;\tau)=[B(t,\tau)]^{\frac{n}{2b}}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}[D_x^k Z(t,x;\tau,\xi;\xi)f(\tau,\xi)]\Big|_{\xi=x+\eta[B(t,\tau)]^{\frac{1}{2b}}}\,d\eta. \tag{I.37}$$

Оскільки на підставі оцінки (I.24) та обмеженості функції f

$$|D_x^k Z(t,x;\tau,\xi;\xi)f(\tau,\xi)|\Big|_{\xi=x+\eta[B(t,\tau)]^{\frac{1}{2b}}}\le$$

$$\le C\,[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|}{2b}}E^d(t,\tau)\exp\{-c|\eta|^q\},$$

$$t_0\le\tau<t\le T,\ \{x,\eta\}\subset\mathbb{R}^n,$$

то інтеграл (I.37) збігається рівномірно по $x \in \mathbb{R}^n$ для фіксованих t і τ та правильна оцінка

$$|I^{(k)}(t,x;\tau)| \leq C[B(t,\tau)]^{-\frac{|k|}{2b}} E^{d}(t,\tau),$$
$$t_0 \leq \tau < t \leq T,\ x \in \mathbb{R}^n,\ |k| \leq 2b. \tag{I.38}$$

З (I.36) і (I.38) випливає, що для $|k|<2b$

$$D_x^k u(t,x) = \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z(t,x;\tau,\xi;\xi) f(\tau,\xi) d\xi,$$
$$(t,x) \in \Pi^n_{(t_0,T]},$$

бо для $|k|<2b$ інтеграл

$$\int_{t_0}^{t} [B(t,\tau)]^{-\frac{|k|}{2b}} E^{d}(t,\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}$$

збігається для довільного $t \in [t_0,T]$.

Якщо $|k|=2b$, то оцінка (I.38) уже не придатна. Її можна поліпшити для $x \in \mathbb{K}^n_R$, де R - будь-яке фіксоване додатне число. Для цього запишемо зображення

$$I^{(k)}(t,x;\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z(t,x;\tau,\xi;\xi)[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)] d\xi +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^n} [D_x^k Z(t,x;\tau,\xi;\xi) - D_x^k Z(t,x;\tau,\xi;y)]\Big|_{y=x} d\xi\, f(\tau,x) \equiv$$
$$\equiv I_1 + I_2. \tag{I.39}$$

Тут використана рівність (I.29), на підставі якої

$$D_x^k \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi;y) d\xi \Big|_{y=x} = 0. \tag{I.40}$$

За допомогою оцінок (I.26) маємо

$$|I_2| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} [B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|}{2b}} |x-\xi|^{\lambda} E_c^{d}(t,\tau,|x-\xi|) d\xi \leq$$

$$\leqslant C\, E^{d}(t,\tau)[B(t,\tau)]^{-\frac{n-\lambda}{2b}-1}\int_{\mathbb{R}^n} E_{c'}(t,\tau,|x-\xi|)d\xi =$$

$$= C\,[B(t,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} E^{d}(t,\tau),\ t_0\leqslant\tau<t\leqslant T,\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{I.41}$$

де $0<c'<c$.

Вважаючи, що $x\in \mathbb{K}_R^n$, запишемо $I_1(t,x;\tau)$ у вигляді

$$I_1=\int_{\mathbb{K}_{2R}^n} D_x^k Z(t,x;\tau,\xi;\xi)[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)]d\xi +$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n\setminus \mathbb{K}_{2R}^n} D_x^k Z(t,x;\tau,\xi;\xi)[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)]d\xi \equiv I_1'+I_1''.$$

За допомогою оцінок (I.24) і (I.32) маємо

$$|I_1'|\leqslant C\int_{\mathbb{K}_{2R}^n}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|}{2b}}|x-\xi|^{\lambda} E_c^{d}(t,\tau,|x-\xi|)d\xi\leqslant$$

$$\leqslant C[B(t,\tau)]^{-\frac{n-\lambda}{2b}-1}E^{d}(t,\tau)\int_{\mathbb{R}^n}E_{c'}(t,\tau,|x-\xi|)d\xi =$$

$$= C[B(t,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}E^{d}(t,\tau),\ t_0\leqslant\tau<t\leqslant T,\ x\in\mathbb{K}_R^n. \tag{I.42}$$

Використовуючи оцінку (I.24), обмеженість функції f

$$|f(\tau,\xi)-f(\tau,x)|\leqslant|f(\tau,\xi)|+|f(\tau,x)|\leqslant 2M$$

та нерівність

$$|x-\xi|^{q}\geqslant||\xi|-|x||\geqslant R^{q},\ x\in\mathbb{K}_R^n,\ \xi\in\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}_{2R}^n,$$

одержуємо

$$|I_1''|\leqslant 2MC[B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}-1}E^{d}(t,\tau)\int_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}_{2R}^n}E_{c_n}(t,\tau,|x-\xi|)d\xi\leqslant$$

$$\leqslant C[B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}-1}E^{d}(t,\tau)E_{\frac{c}{2}}(t,\tau,R)\int_{\mathbb{R}^n}E_{\frac{c}{2}}(t,\tau,|x-\xi|)d\xi\leqslant$$

$$\leqslant C[B(t,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}E^{d}(t,\tau),\ t_0\leqslant\tau<t\leqslant T,\ x\in\mathbb{K}_R^n. \tag{I.43}$$

З (I.39)-(I.43) випливає оцінка

$$|I^{(k)}(t,x;\tau)|\leqslant C\,[B(t,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}E^{d}(t,\tau),$$

$$t_0 \le \tau < t \le T, x \in \mathbb{K}^n_R,\ |k| = 2b. \tag{I.44}$$

На підставі цієї оцінки та рівностей (I.39) і (I.40) одержуємо формулу (I.34) для $(t,x) \in (t_0,T] \times \mathbb{K}^n_R$, а оскільки R – довільне додатне число, то звідси випливає формула (I.34) для будь-яких $(t,x) \in \Pi^n_{(t_0,T]}$.

Доведемо формулу (I.35) для $(t,x) \in \Pi^n_{[t_1,T]}$, де $t_1 > t_0$. Для цього розглянемо таку сукупність функцій, яка залежить від параметра h:

$$u_h(t,x) \equiv \int_{t_0}^{t-h} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi;\xi) f(\tau,\xi) d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi^n_{[t_1,T]},\ 0 < h < t_1 - t_0. \tag{I.45}$$

Оскільки підінтегральна функція в (I.45) не має особливостей, то

$$\alpha(t) D^1_t u_h(t,x) = \frac{\alpha(t)}{\alpha(t-h)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t-h,\xi;\xi) f(t-h,\xi) d\xi +$$

$$+ \int_{t_0}^{t-h} \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)} D^1_t \left[\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi;\xi) f(\tau,\xi) d\xi \right] d\tau =$$

$$= \frac{\alpha(t)}{\alpha(t-h)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t-h,\xi;\xi) f(t-h,\xi) d\xi +$$

$$+ \int_{t_0}^{t-h} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(t) D^1_t Z(t,x;\tau,\xi;\xi) f(\tau,\xi) d\xi \equiv$$

$$\equiv I_h(t,x) + J_h(t,x),\ (t,x) \in \Pi^n_{[t_1,T]}. \tag{I.46}$$

Щоб обгрунтувати можливість застосування операції $\alpha(t) D^1_t$ під знаком інтеграла по $\mathbb{R}^n$, досить довести, що інтеграл по $\mathbb{R}^n$ з $J_h(t,x)$ (позначимо його через $J^0(t,x;\tau)$) збігається рівномірно по $t \in [t_2 - \frac{h}{3}, \min(t_2 + \frac{h}{3}, T)]$, де t_2 – довільно фіксована точка з $[t_1, T]$, для будь-яких фіксованих $\tau \in [t_0, t_2 - \frac{2h}{3}]$ і $x \in \mathbb{R}^n$. Останнє доводиться таким же способом, як доводилась рівномірна збіжність інтеграла $I^{(k)}$. При цьому треба скористатись рівністю

$$\alpha(t)D_t^1 Z(t,x;\tau,\xi;\xi) = [\beta(t)\sum_{1\le|k|\le 2b} a_k(t,\xi)D_x^k +$$
$$+a_0(t,\xi)]\,Z(t,x;\tau,\xi;\xi),\; 0<\tau<t\le T,\; \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad (I.47)$$

з якої на підставі оцінок (I.24) випливає оцінка

$$|\alpha(t)D_t^1 Z(t,x;\tau,\xi;\xi)| \le C\,[B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}-1} E_c^{d_1}(t,\tau,|x-\xi|),$$
$$0<\tau<t\le T,\; \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\; d_1\ge d. \quad (I.48)$$

Для інтеграла J^0 правильна оцінка

$$|J^0(t,x;\tau)| \le C\,[B(t,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} E^{d_1}(t,\tau),$$
$$t_0\le\tau<t\le T,\; x\in K_R^n, \quad (I.49)$$

доведення якої аналогічне доведенню оцінки (I.44). У даному випадку

$$J^0(t,x;\tau) = \int_{\mathbb{R}^n}\alpha(t)D_t^1 Z(t,x;\tau,\xi;\xi)[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)]d\xi +$$
$$+\int_{\mathbb{R}^n}\alpha(t)\,D_t^1 Z(t,x;\tau,\xi;\xi)\,d\xi\, f(\tau,x) \equiv J_1 + J_2.$$

Оцінка (I.49) для J_1 одержується так само, як оцінка I_1, тільки замість (I.24) використовується (I.48). Для оцінки J_2 використовуються рівність (I.47), властивості 2 і 4 та умова Гельдера для коефіцієнтів системи.

Зауважимо, що правильні такі твердження:

I) $I_h(t,x) \xrightarrow[h\to 0]{} f(t,x)$ рівномірно по $(t,x)\in[t_1,T]\times K_R^n$;

2) $$\int_{t_0}^{t-h} J^0(t,x;\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \xrightarrow[h\to 0]{} \int_{t_0}^{t} J^0(t,x;\tau)\frac{d\tau}{\alpha(\tau)} =$$
$$=\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}\alpha(t)D_t^1 Z(t,x;\tau,\xi;\xi)[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)]d\xi +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\Big[\int_{\mathbb{R}^n}\alpha(t)D_t^{1}Z(t,x;\tau,\xi;\xi)\,d\xi\Big]\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}$$

рівномірно по $(t,x)\in[t_1,T]\times\mathbb{K}_R^n$.

Враховуючи ці твердження, рівність (I.46) і те, що $u_h(t,x)\xrightarrow[h\to 0]{}u(t,x)$ рівномірно по $(t,x)\in\Pi^n_{[t_1,T]}$, а також що R і t_1 – довільні числа відповідно з інтервалів $(0,\infty)$ і (t_0,T), одержуємо формулу (I.35).

Доведемо твердження I) і 2).

З рівномірної неперервності функції α на відрізку випливає, що $\alpha(t)[\alpha(t-h)]^{-1}\xrightarrow[h\to 0]{}1$ рівномірно по $t\in[t_1,T]$.

Маємо

$$\int_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;t-h,\xi;\xi)f(t-h,\xi)\,d\xi-f(t,x)=$$

$$=\int_{\mathbb{K}_{2R}^n}Z(t,x;t-h,\xi;\xi)[f(t-h,\xi)-f(t,\xi)]\,d\xi+$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}_{2R}^n}Z(t,x;t-h,\xi;\xi)f(t-h,\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_{\mathbb{K}_{2R}^n}[Z(t,x;t-h,\xi;\xi)-Z(t,x;t-h,\xi;x)]f(t,\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_{\mathbb{K}_{2R}^n}Z(t,x;t-h,\xi;x)f(t,\xi)\,d\xi-f(t,x)]\equiv\sum_{i=1}^{4}L_i.$$

За допомогою оцінки (I.24), властивостей 2 і 4, умови неперервності та обмеженості функції f одержуємо

$$|L_1|\le C\max_{t\in[t_1,T]}|f(t-h,\xi)-f(t,\xi)|\,[B(t,t-h)]^{-\frac{n}{2b}}\times$$

$$\times E^{d}(t,t-h)\int_{\mathbb{R}^n}E_c(t,t-h,|x-\xi|)\,d\xi\le C\,E^{0}\times$$

$$\times \max_{t\in[t_1,T]} |f(t-h,\xi)-f(t,\xi)| \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

де $E^0 \equiv \max\{1, E^d(T,t_0)\}$;

$$|L_2| \leq C\, E_{\frac{c}{2}}(t,t-h,R) \int_{\mathbb{R}^n} E_{\frac{c}{2}}(t,t-h,|x-\xi|)[B(t,t-h)]^{-\frac{n}{2b}} d\xi \times$$

$$\times E^d(t,t-h) \leq C E^0 E_{\frac{c}{2}}(t,t-h,R) \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

бо $B(t,t-h) \leq \beta(T) \dfrac{h}{\min\limits_{\tau\in[t_0,T]} \alpha(\tau)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ рівномірно по $t \in$ $\in [t_1,T]$;

$$|L_3| \leq C\, E^d(t,t-h) \int_{\mathbb{R}^n} |x-\xi|^{\lambda} [B(t,t-h)]^{-\frac{n}{2b}} \times$$

$$\times E_c(t,t-h,|x-\xi|)\, d\xi \leq C\, E^d(t,t-h)[B(t,t-h)]^{\frac{\lambda}{2b}} \leq$$

$$\leq C E^0 [B(t,t-h)]^{\frac{\lambda}{2b}} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

рівномірно по $t \in [t_1,T]$;

$$|L_4| = \Big|\int_{\mathbb{K}^n_{2R}} Z(t,x;t-h,\xi;x)[f(t,\xi)-f(t,x)]\, d\xi -$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}^n_{2R}} Z(t,x;t-h,\xi;x)\, d\xi\, f(t,x) +$$

$$+ \Big[\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t-h,\xi;x)\, d\xi - I\Big] f(t,x) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

рівномірно по $(t,x) \in [t_1,T] \times \mathbb{K}^n_R$ (це доводиться так само, як для L_1, L_2 і L_3; при цьому використовується співвідношення (I.30). Отже, твердження I) доведене.

Твердження 2) випливає з оцінки

$$\Big|\int_{t-h}^{t} J^0(t,x;\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\Big| \leq C \int_{t-h}^{t} [B(t,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} E^{d_1}(t,\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \leq$$

$$\leq \frac{CE^1}{\beta(t_0)} \int_{t-h}^{t} [B(t,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} d[-B(t,\tau)] = \frac{CE^1}{\beta(t_0)} [B(t,t-h)]^{-\frac{n}{2b}} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} 0, \quad E^1 \equiv max\ \{1, E^{d_1}(T,t_0)\},$$

при одержанні якої використана оцінка (I.49) і монотонність функції β . ▶

Властивість, аналогічну властивості 5, має функція

$$u(t,x;t_0,y) \equiv \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi;\xi) f(\tau,\xi;t_0,y)\,d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi^n_{(t_0,T]},\ y \in \mathbb{R}^n, \qquad \text{(I.50)}$$

якщо функція $f(\cdot,\cdot;t_0,\cdot): \Pi^n_{(t_0,T]} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}_N$ неперервна і задовольняє такі умови:

$$|f(t,x;t_0,y)| \leq C[B(t,\tau)]^{-\frac{n+p}{2b}} E^{d_0}_{c_0}(t,t_0,|x-y|), \qquad \text{(I.51)}$$

$$|f(t,x;t_0,y) - f(t,\xi;t_0,y)| \leq C|x-\xi|^{\lambda} [B(t,t_0)]^{-\frac{n+p+\lambda}{2b}} \times$$
$$\times [E^{d_0}_{c_0}(t,t_0,|x-y|) + E^{d_0}_{c_0}(t,t_0,|\xi-y|)], \qquad \text{(I.52)}$$

$$\{(t,x),(t,\xi)\} \subset \Pi^n_{(t_0,T]},\ y \in \mathbb{R}^n,$$

де $0 < c_0 < c$, c – стала з оцінок (I.24), $d_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0,1]$, $p < 2b - \lambda$.

<u>Властивість 6</u>. Якщо коефіцієнти системи (I.23) задовольняють умови з властивості 5, а функція f – наведені вище умови, то функція (I.50) має неперервні похідні, які входять у систему (I.23). Похідні від цієї функції молодших порядків обчислюються безпосереднім диференціюванням під знаками інтегралів, а для старших похідних мають місце формули, які відрізняються від формул (I.34) і (I.35) тим, що в них $f(\tau,\xi)$ і $f(\tau,x)$ замінені відповідно на $f(\tau,\xi;t_0,y)$ і $f(t,x;t_0,y)$.

◀ Доведення аналогічне доведенню властивості 5, при цьому використовується нерівність

$$E_c(t,\tau,|x-\xi|)\,E_c(\tau,t_0,|\xi-y|)\le E_c(t,t_0,|x-y|),\qquad t_0<\tau<t,\ \{x,y,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ c>0, \tag{1.53}$$

і така лема.

<u>Лема 1.1</u>. Для інтеграла

$$I(t,x;t_0,y)\equiv\int_{\mathbb{R}^n}E_c(t,\tau,|x-\xi|)\,E_c(\tau,t_0,|\xi-y|)[B(t,\tau)\times B(\tau,t_0)]^{-\frac{n}{2b}}\,d\xi,\ t_0<\tau<t,\ \{x,y\}\subset\mathbb{R}^n,$$

правильна оцінка

$$I(t,x;t_0,y)\le C(\varepsilon)[B(t,t_0)]^{-\frac{n}{2b}}E_{c(1-\varepsilon)}(t,t_0,|x-y|), \tag{1.54}$$

де ε – довільно фіксоване число з проміжку $(0,1)$.

Оцінка (1.54) легко доводиться за допомогою нерівності (1.53). Справді, маємо

$$I(t,x;t_0,y)\le E_{c(1-\varepsilon)}(t,t_0,|x-y|)\int_{\mathbb{R}^n}E_{c\varepsilon}(t,\tau,|x-\xi|)\times E_{c\varepsilon}(\tau,t_0,|\xi-y|)[B(t,\tau)B(\tau,t_0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi.$$

Якщо $B(t,\tau)>\frac{1}{2}B(t,t_0)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n}E_{c\varepsilon}(t,\tau,|x-\xi|)E_{c\varepsilon}(\tau,t_0,|\xi-y|)[B(t,\tau)B(\tau,t_0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi\le$$
$$\le 2^{\frac{n}{2b}}[B(t,t_0)]^{-\frac{n}{2b}}\int_{\mathbb{R}^n}E_{c\varepsilon}(\tau,t_0,|\xi-y|)[B(\tau,t_0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi=$$
$$=2^{\frac{n}{2b}}\varepsilon^{\frac{n}{q}}[B(t,t_0)]^{-\frac{n}{2b}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\{-c|z|^q\}dz.$$

У випадку, коли $B(t,\tau)\le\frac{1}{2}B(t,t_0)$, тобто $B(\tau,t_0)\ge\frac{1}{2}B(t,t_0)$, оцінка проводиться аналогічно.

Для доведення нерівності (1.53) зауважимо, що

$$E_c(t,\tau,|x-\xi|)E_c(\tau,t_0,|\xi-y|)\le$$

$$\leq \exp\{-c\,(\frac{||x-y|-|\xi-y||^q}{[B(t,\tau)]^{q-1}} + \frac{|\xi-y|^q}{[B(\tau,t_0)]^{q-1}})\} \leq E_c(t,t_0,|x-y|),$$

якщо виконується нерівність

$$\exp\{-c\,(\frac{|u-v|^q}{[B(t,\tau)]^{q-1}} + \frac{|v|^q}{[B(\tau,t_0)]^{q-1}})\} \leq$$

$$\leq \exp\{-c\,\frac{|u|^q}{[B(t,t_0)]^{q-1}}\},\ t_0<\tau<t,\ \{u,v\}\subset\mathbb{R}.$$

Щоб довести цю нерівність, треба дослідити на максимум функцію

$$f(v) \equiv -c\,\frac{(u-v)^q}{[B(t,\tau)]^{q-1}} - c\,\frac{v^q}{[B(\tau,t_0)]^{q-1}},\ v\in\mathbb{R}.$$

Ця функція має максимум у точці $\bar{v} \equiv \frac{u B(\tau,t_0)}{B(t,t_0)}$, який дорівнює

$$f(\bar{v}) = -c\,\frac{u^q}{[B(t,t_0)]^{q-1}}.$$ ▶

<u>І.4. Побудова й оцінки ФМР задачі Коші для параболічної системи з виродженням у загальному випадку</u>. Розглянемо систему (I.4) у випадку, коли коефіцієнти a_k, $|k|\leq 2b$, залежать від усіх незалежних змінних.

<u>Теорема І.І</u>. Нехай для коефіцієнтів a_k, $|k|\leq 2b$, виконуються умови I і 2. Тоді існує ФМР задачі Коші для системи (I.4) $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\leq T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, для якої правильні оцінки

$$|D_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \leq C\,[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|), \quad (I.55)$$

$$|\Delta_x^{x'} D_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \leq C\,|x-x'|^{\lambda}\,[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|+\lambda}{2b}} \times$$

$$\times\,[E_c^d(t,\tau,|x-\xi|) + E_c^d(t,\tau,|x'-\xi|)], \quad (I.56)$$

$$0<\tau<t\leq T,\ \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |k|\leq 2b,$$

де $C>0$, $c>0$, $d\in\mathbb{R}$, $\Delta_x^{x'} F(\cdot,x;\cdot,\cdot) \equiv F(\cdot,x;\cdot,\cdot) - F(\cdot,x';\cdot,\cdot)$.

◀ Розглянемо допоміжну систему

$$[\alpha(t)I D_t^1-\beta(t)P_0(t,y,D_x)-a_0(t,y)]u(t,x)=0,$$

$$(t,x)\in\Pi^n_{(0,T]},\, y\in\mathbb{R}^n, \tag{I.57}$$

і через $Z_0(t,x;\tau,\xi;y)$, $0<\tau<t\leq T$, $\{x,y,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, позначимо ФМР задачі Коші для системи (I.57). Згідно з методом Леві шукатимемо ФМР задачі Коші для системи (I.4) у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi)=Z_0(t,x;\tau,\xi;\xi)+$$
$$+\int_\tau^t\frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)}\int_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\gamma,y;y)\varphi(\gamma,y;\tau,\xi)dy,$$
$$0<\tau<t\leq T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{I.58}$$

Треба підібрати функцію $\varphi(\cdot,\cdot;\tau,\xi):\Pi^n_{(\tau,T]}\longrightarrow\mathbb{C}_{NN}$ так, щоб функція $Z(\cdot,\cdot;\tau,\xi):\Pi^n_{(\tau,T]}\longrightarrow\mathbb{C}_{NN}$ була розв'язком системи (I.4) з $f=0$ для будь-якої фіксованої точки $(\tau,\xi)\in\in\Pi^n_{(0,T]}$. Припускатимемо, що шукана функція φ є неперервною і для неї правильні оцінки

$$|\varphi(t,x;\tau,\xi)|\leq C\beta(t)[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}}E_c^d(t,\tau,|x-\xi|), \tag{I.59}$$

$$|\Delta_x^{x'}\varphi(t,x;\tau,\xi)|\leq C\beta(t)|x-x'|^{\lambda_1}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda_2}{2b}}\times$$
$$\times[E_c^d(t,\tau,|x-\xi|)+E_c^d(t,\tau,|x'-\xi|)], \tag{I.60}$$
$$0<\tau<t\leq T,\{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n, 0<\lambda_1<\lambda,\lambda_2\equiv\lambda-\lambda_1.$$

Застосувавши диференціальний вираз

$$\alpha(t)I D_t^1-\beta(t)P(t,x,D_x)-a_0(t,x)$$

до функції (I.58) та використавши припущення відносно φ і властивість 6 з п. I.3, одержимо для φ інтегральне рівняння

$$\varphi(t,x;\tau,\xi)=K(t,x;\tau,\xi)+\int_\tau^t\frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)}\int_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\gamma,y)\times$$
$$\times\varphi(\gamma,y;\tau,\xi)dy, 0<\tau<t\leq T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{I.61}$$

де

$$K(t,x;\tau,\xi)\equiv\{\beta(t)[P_0(t,x,D_x)-P_0(t,\xi,D_x)]+$$
$$+\beta(t)P_1(t,x,D_x)+\Delta_x^{\xi}a_0(t,x)\}Z_0(t,x;\tau,\xi;\xi).$$

Оцінимо ядро K, використовуючи оцінки(I.24), припущення відносно коефіцієнтів системи (I.4) та нерівності

$$|x-\xi|^{\lambda}E_c(t,\tau,|x-\xi|)\leq C[B(t,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}}E_{c_1}(t,\tau,|x-\xi|),$$
$$0<\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 0<c_1<c, \qquad (I.62)$$
$$[B(t,\tau)]^pE^d(t,\tau)\leq[\beta(t)]^p[A(t,\tau)]^pE^d(t,\tau)\leq$$
$$\leq[\beta(T)]^pE^{d_1}(t,\tau),\ 0<\tau<t\leq T,\ p>0,\ d_1>d. \qquad (I.63)$$

Маємо

$$|K(t,x;\tau,\xi)|\leq C\{\beta(t)|x-\xi|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}}+$$
$$+\beta(t)\sum_{1\leq|k|<2b}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|}{2b}}+|x-\xi|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}}\}\times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,|x-y|)\leq C_1\{\beta(t)[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}}+$$
$$+\beta(t)\sum_{1\leq|k|<2b}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|}{2b}}+[B(t,\tau)]^{-\frac{n-\lambda}{2b}}\}\times$$
$$\times E_{c_1}^d(t,\tau,|x-\xi|)\leq C_1\beta(t)[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}}E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,|x-\xi|),$$
$$0<\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \qquad (I.64)$$

Рівняння (I.6I) розв'язується методом послідовних наближень, при цьому φ визначається формулою

$$\varphi(t,x;\tau,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(t,x;\tau,\xi),0<\tau<t\leq T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (I.65)$$

де $K_1\equiv K$, а для $m\geq2$

$$K_m(t,x;\tau,\xi)\equiv\int_{\tau}^{t}\frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)}\int_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\gamma,y)K_{m-1}(\gamma,y;\tau,\xi)dy.$$

Оцінимо ядра K_m, користуючись оцінкою (I.64) і лемою I.I. Маємо

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)| \le C_1^2 \beta(t) \int_\tau^t \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} [B(t,\gamma)B(\gamma,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} d\gamma \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}^{d_1}(t,\gamma,|x-y|) E_{c_1}^{d_1}(\gamma,\tau,|y-\xi|) [B(t,\gamma)B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n}{2b}} dy \le$$

$$\le C_1^2\, c(\varepsilon) [B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}} E_{c_1(1-\varepsilon)}^{d_1}(t,\tau,|x-\xi|)\, I(t,\tau,\tau), \tag{I.66}$$

де $0<\varepsilon<1$,

$$I(t,\eta,\tau) \equiv \int_\eta^t \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} [B(t,\gamma)B(\gamma,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} d\gamma. \tag{I.67}$$

Щоб обчислити інтеграл $I(t,\tau,\tau)$, зробимо в ньому заміну змінної інтегрування за формулою $B(\gamma,\tau)=B(t,\tau)v$. Тоді

$$B(t,\gamma)=B(t,\tau)(1-v), \quad \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} d\gamma = B(t,\tau)dv$$

і

$$I(t,\tau,\tau) = \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{2b},\frac{\lambda}{2b}\right) [B(t,\tau)]^{\frac{2\lambda}{2b}-1}, \tag{I.68}$$

де

$$\mathcal{B}(a,b) \equiv \int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1} dv, \quad a>0,\ b>0, —$$

– бета-функція Ейлера. З (I.66) і (I.68) випливає, що

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)| \le C_2(\varepsilon)\, \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{2b},\frac{\lambda}{2b}\right) \beta(t) [B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-2\lambda}{2b}} \times$$

$$\times E_{c_1(1-\varepsilon)}^{d_1}(t,\tau,|x-\xi|), \quad 0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Аналогічно одержуємо оцінки

$$|K_3(t,x;\tau,\xi)| \le C_1 C_2(\varepsilon)\, \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{2b},\frac{\lambda}{2b}\right) \int_\tau^t \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} [B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} \times$$

$$\times [B(\gamma,\tau)]^{\frac{2\lambda}{2b}-1} d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}^{d_1}(t,\gamma,|x-y|) E_{c_1(1-\varepsilon)}^{d_1}(\gamma,\tau,|y-\xi|) \times$$

$$\times [B(t,\gamma)B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n}{2b}}dy \le C_3(\varepsilon)\mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{2b},\frac{\lambda}{2b}\right)\mathcal{B}\left(\frac{2\lambda}{2b},\frac{\lambda}{2b}\right)\times$$

$$\times\beta(t)[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-3\lambda}{2b}} E^{d_1}_{c_1(1-2\varepsilon)}(t,\tau,|x-\xi|),$$

$$|K_m(t,x;\tau,\xi)| \le C_m(\varepsilon)\prod_{s=1}^{m-1}\mathcal{B}\left(\frac{s\lambda}{2b},\frac{\lambda}{2b}\right)\beta(t)\times$$

$$\times[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-m\lambda}{2b}} E^{d_1}_{c_1(1-(m-1)\varepsilon)}(t,\tau,|x-\xi|), \qquad (I.69)$$

$$m \ge 4,\ 0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Нехай $m_0 \equiv [\![\frac{n+2b}{\lambda}]\!] + 1$, де $[\![a]\!]$ - ціла частина числа a . Тоді, врахувавши те, що $n+2b-m_0\lambda<0$, на підставі нерівностей (I.63) і (I.69) маємо

$$|K_{m_0}(t,x;\tau,\xi)| \le C_{m_0}(\varepsilon)\prod_{s=1}^{m_0}\mathcal{B}\left(\frac{s\lambda}{2b},\frac{\lambda}{2b}\right)\beta(t)E^{d_0}_{c_1(1-(m_0-1)\varepsilon)}(t,\tau,|x-\xi|),$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ d_0>d_1. \qquad (I.70)$$

Покладемо $\varepsilon \equiv \frac{\varepsilon_0}{m_0-1}$, $c_0 \equiv c_1(1-\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < \frac{1}{2}$,

$$C_0 \equiv \max_{m=1,\dots,m_0}\left[C_m(\varepsilon)\prod_{s=1}^{m-1}\mathcal{B}\left(\frac{s\lambda}{2b},\frac{\lambda}{2b}\right)\right].$$

Ядра K_m з $m>m_0$ оцінюємо таким способом. Спочатку на підставі нерівностей (I.64),(I.70) і (I.53) та запроваджених позначень маємо

$$|K_{m_0+1}(t,x;\tau,\xi)| \le C_0^2\,\beta(t)\int_\tau^t\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}[B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}d\gamma\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}[E^{d_1}_{c_0}(t,\gamma,|x-y|)E^{d_0}_{c_0}(\gamma,\tau,|y-\xi|)]E_{c_1\varepsilon_0}(t,\gamma,|x-y|)\times$$

$$\times[B(t,\gamma)]^{-\frac{n}{2b}}dy \le C_0^2\beta(t)E^{d_0}_{c_0}(t,\tau,|x-\xi|)\int_\tau^t\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}[B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}d\gamma\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}\exp\{-c_1\varepsilon_0|z|^q\}dz = C_0^2\,M\,\mathcal{B}\left(1,\frac{\lambda}{2b}\right)\beta(t)[B(t,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}}\times$$

$$\times E_{c_0}^{d_0}(t,\tau,|x-\xi|),\ 0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де

$$M\equiv\int_{\mathbb{R}^n}\exp\{-c_1\varepsilon_0|z|^q\}dz.$$

Далі, нехай для деякого $k>1$ правильна оцінка

$$|K_{m_0+k}(t,x;\tau,\xi)|\le C_0^{k+1}M^k\prod_{s=0}^{k-1}\mathcal{B}\left(1+\frac{s\lambda}{2b},\frac{\lambda}{2b}\right)\beta(t)\times$$

$$\times[B(t,\tau)]^{\frac{k\lambda}{2b}}E_{c_0}^{d_0}(t,\tau,|x-\xi|),0<\tau<t\le T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \qquad \text{(I.71)}$$

Тоді

$$|K_{m_0+k+1}(t,x;\tau,\xi)|\le C_0^{k+2}M^k\prod_{s=0}^{k-1}\mathcal{B}\left(1+\frac{s\lambda}{2b},\frac{\lambda}{2b}\right)\beta(t)\times$$

$$\times\int_\tau^t\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}[B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}[B(\gamma,\tau)]^{\frac{k\lambda}{2b}}d\gamma\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}[E_{c_0}^{d_1}(t,\gamma,|x-y|)E_{c_0}^{d_0}(\gamma,\tau,|y-\xi|)]E_{c_1\varepsilon_0}(t,\gamma,|x-y|)\times$$

$$\times[B(t,\gamma)]^{-\frac{n}{2b}}dy\le C_0^{k+2}M^{k+1}\prod_{s=0}^{k}\mathcal{B}\left(1+\frac{s\lambda}{2b},\frac{\lambda}{2b}\right)\beta(t)\times$$

$$\times[B(t,\tau)]^{\frac{(k+1)\lambda}{2b}}E_{c_0}^{d_0}(t,\tau,|x-\xi|),0<\tau<t\le T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Отже, оцінка (I.71) має місце для будь-якого $k>1$.

За допомогою формули

$$\mathcal{B}(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

в якій Γ - гама-функція Ейлера, оцінка (I.71) набуває такого вигляду:

$$|K_{m_0+k}(t,x;\tau,\xi)|\le C_0\beta(t)\frac{\left[C_0M\Gamma\left(\frac{\lambda}{2b}\right)[B(t,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}}\right]^k}{\Gamma\left(1+\frac{k\lambda}{2b}\right)}\times$$

$$\times E_{c_0}^{d_0}(t,\tau,|x-\xi|),0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

З одержаних оцінок ядер K_m випливає, що ряд (I.65) мажорується збіжним рядом

$$C_0\beta(t)\Big\{\sum_{m=1}^{m_0}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-m\lambda}{2b}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[C_0M\Gamma(\frac{\lambda}{2b})[B(t,\tau)]^{\lambda/2b}]^k}{\Gamma(1+\frac{k\lambda}{2b})}\Big\}E_{c_0}^{d_0}(t,\tau,|x-\xi|),$$

$$0<\tau<t\le T,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Отже, ряд (I.65) при t, τ, x і ξ таких, що $\delta_1\le\tau<t\le T$, $t-\tau\geqslant\delta_2$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, де δ_1, δ_2 – довільні досить малі додатні сталі, збігається абсолютно й рівномірно і для його суми правильна оцінка (I.59).

Тепер доведемо правильність оцінки (I.60). При $|x-x'|^{2b}>\frac{1}{2}B(t,\tau)$ оцінка (I.60) випливає з (I.59). Тому досить розглянути випадок, коли $|x-x'|^{2b}\le\frac{1}{2}B(t,\tau)$. Для цього спочатку оцінимо різницю $\Delta_x^{x'}K$.

Використовуючи припущення щодо коефіцієнтів системи (I.4), за допомогою нерівностей (I.24),(I.62),(I.63) та нерівності $|x'-\xi|^\lambda\le|x-x'|^\lambda+|x-\xi|^\lambda$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, одержуємо

$$|\Delta_x^{x'}K(t,x;\tau,\xi)|\le\beta(t)\sum_{|k|=2b}\{|\Delta_x^{x'}a_k(t,x)|\times$$

$$\times|D_x^kZ_0(t,x;\tau,\xi;\xi)|+|\Delta_{x'}^{\xi}a_k(t,x')|\times$$

$$\times|\Delta_x^{x'}D_x^kZ_0(t,x;\tau,\xi;\xi)|\}+\beta(t)\sum_{1\le|k|<2b}\{|\Delta_x^{x'}a_k(t,x)|\times$$

$$\times|D_x^kZ_0(t,x;\tau,\xi;\xi)|+|a_k(t,x')||\Delta_x^{x'}D_x^kZ_0(t,x;\tau,\xi;\xi)|\}+$$

$$+|\Delta_x^{x'}a_0(t,x)||Z_0(t,x;\tau,\xi;\xi)|+|\Delta_{x'}^{\xi}a_0(t,x')|\times$$

$$\times|\Delta_x^{x'}Z_0(t,x;\tau,\xi;\xi)|\le C\beta(t)[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}}\times$$

$$\times\{|x-x'|^\lambda E_c^d(t,\tau,|x-\xi|)+|x'-\xi|^\lambda|x-x'|^\lambda[B(t,\tau)]^{-\frac{\lambda}{2b}}\times$$

$$\times E_{c_1}^{d}(t,\tau,|x-\xi|)\} + C\beta(t)\sum_{1\le|k|<2b}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|}{2b}}\times$$

$$\times\{|x-x'|^{\lambda}E_c^d(t,\tau,|x-\xi|)+|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{\lambda}{2b}}\times$$

$$\times E_{c_1}^{d}(t,\tau,|x-\xi|)\} + C[B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}}\{|x-x'|^{\lambda}E_c^d(t,\tau,|x-\xi|)+$$

$$+|x'-\xi|^{\lambda}|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{\lambda}{2b}}E_c^d(t,\tau,|x-\xi|)\}\le$$

$$\le C\beta(t)|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}}E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,|x-\xi|),$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |x-x'|^{2b}\le B(t,\tau),$$

$$0<c_1<c,\ d_1>d. \qquad (I.72)$$

Тут використані оцінки

$$|\Delta_x^{x'}D_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;\xi)|\le C|x-x'|^{\lambda_0}\times$$

$$\times[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|+\lambda_0}{2b}}E_{c_1}^{d}(t,\tau,|x-\xi|),\ 0<\tau<t\le T,$$

$$\{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |x-x'|^{2b}\le B(t,\tau),\ |k|\le 2b,\ \lambda_0\in(0,1]. \qquad (I.73)$$

в яких узято $\lambda_0=\lambda$.

Оцінки (I.73) одержуються, якщо скористатись теоремою про середнє значення, оцінками (I.24) та нерівністю (див. [I, с.78])

$$E_c(t,\tau,|x''-\xi|)\le C_1E_{c_1}(t,\tau,|x-\xi|),$$

де x'' - точка, яка належить відрізку прямої, що сполучає точки x і x' .

З оцінки (I.73), зокрема, випливає оцінка

$$|\Delta_x^{x'}K(t,x;\tau,\xi)|\le C\beta(t)|x-x'|^{\lambda_1}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda_2}{2b}}\times$$

$$\times E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,|x-\xi|),\ 0<\tau<t\le T,\ \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

$$|x-x'|^{2b}\le B(t,\tau). \qquad (I.74)$$

Тепер оцінимо $\Delta_x^{x'}\varphi$. На підставі (I.6I) запишемо

$$\Delta_x^{x'}\varphi(t,x;\tau,\xi)=\Delta_x^{x'}K(t,x;\tau,\xi)+$$
$$+\int_\tau^\eta\frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_x^{x'}K(t,x;\gamma,y)\varphi(\gamma,y;\tau,\xi)dy+$$
$$+\int_\eta^t\frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)}\int_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\gamma,y)\varphi(\gamma,y;\tau,\xi)\,dy-$$
$$-\int_\eta^t\frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)}\int_{\mathbb{R}^n}K(t,x';\gamma,y)\varphi(\gamma,y;\tau,\xi)dy\equiv\sum_{j=1}^4 I_j, \qquad (I.75)$$

де величина η така, що $B(t,\eta)=|x-x'|^{2b}$. Доданок I_1 оцінений в (I.74). Оскільки в інтегралі I_2 $B(t,\gamma)\geqslant|x-x'|^{2b}$, то за допомогою оцінок (I.59),(I.74) і леми I.I маємо

$$|I_2|\leqslant C\beta(t)|x-x'|^{\lambda_1}\int_\tau^t\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}[B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda_2}{2b}-1}\times$$
$$\times[B(\gamma,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}d\gamma\int_{\mathbb{R}^n}E_{c_1}^{d_1}(t,\gamma,|x-y|)E_c^d(\gamma,\tau,|y-\xi|)\times$$
$$\times[B(t,\gamma)B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n}{2b}}dy\leqslant C\beta(t)|x-x'|^{\lambda_1}\times$$
$$\times[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda-\lambda_0}{2b}}E_{c_2}^{d_1}(t,\tau,|x-\xi|),$$

$$0<\tau<t\leqslant T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 0<c_2<\min(c,c_1). \qquad (I.76)$$

Інтеграли I_3 і I_4 оцінюються однаково. Оцінимо, наприклад, перший з них. На підставі оцінок (I.59) і (I.64) та леми I.I одержуємо

$$|I_3|\leqslant C\beta(t)\int_\eta^t\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}[B(t,\gamma)B(\gamma,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}d\gamma\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}E_{c_1}^{d_1}(t,\gamma,|x-y|)E_c^d(\gamma,\tau,|y-\xi|)[B(t,\gamma)B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n}{2b}}dy\leqslant$$
$$\leqslant C\beta(t)[B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}}E_{c_2}^{d_1}(t,\tau,|x-\xi|)I(t,\eta,\tau), \qquad (I.77)$$

де $I(t,\eta,\tau)$ – інтеграл з (I.67). Оскільки для будь-якого $\gamma \in$ $\in [\eta, t]$

то
$$B(\gamma,\tau) \geq B(\eta,\tau) = B(t,\tau) - |x-x'|^{2b} \geq \frac{1}{2} B(t,\tau),$$

$$I(t,\eta,\tau) \leq \left[\frac{1}{2} B(t,\tau)\right]^{\frac{\lambda}{2b}-1} \int_{\eta}^{t} \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} [B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} d\gamma =$$
$$= -\left[\frac{1}{2} B(t,\tau)\right]^{\frac{\lambda}{2b}-1} \int_{\eta}^{t} [B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} dB(t,\gamma) =$$
$$= \frac{2b}{\lambda} \left[\frac{1}{2} B(t,\tau)\right]^{\frac{\lambda}{2b}-1} [B(t,\eta)]^{\frac{\lambda}{2b}} = \frac{2b}{\lambda} \left[\frac{1}{2} B(t,\tau)\right]^{\frac{\lambda}{2b}} |x-x'|^{\lambda}. \tag{I.78}$$

З (I.74)-(I.78) випливає оцінка (I.60) для випадку, коли $|x-x'|^{2b} \leq \frac{1}{2} B(t,\tau)$.

Зауважимо, що функція φ задовольняє умову Гельдера по x з показником λ, тобто правильна нерівність

$$|\Delta_x^{x'} \varphi(t,x;\tau,\xi)| \leq C\beta(t)|x-x'|^{\lambda} [B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}} \times$$
$$\times [E_c^d(t,\tau,|x-\xi|) + E_c^d(t,\tau,|x'-\xi|)],$$
$$0 < \tau < t \leq T, \{x,x',\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{I.79}$$

Справді, якщо $|x-x'|^{2b} > \frac{1}{4} B(t,\tau)$, то ця нерівність безпосередньо випливає з оцінки (I.59). У випадку, коли $|x-x'|^{2b} \leq$ $\leq \frac{1}{4} B(t,\tau)$, на підставі (I.61) маємо

$$|\Delta_x^{x'} \varphi(t,x;\tau,\xi)| \leq |\Delta_x^{x'} K(t,x;\tau,\xi)| +$$
$$+ \int_{\tau}^{t_1} \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_x^{x'} K(t,x;\gamma,y)| |\varphi(\gamma,y;\tau,\xi)| dy +$$
$$+ \int_{t_1}^{\eta} \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_x^{x'} K(t,x;\gamma,y)| |\varphi(\gamma,y;\tau,\xi) - \varphi(\gamma,x;\tau,\xi)| dy +$$
$$+ \int_{t_1}^{\eta} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x^{x'} K(t,x;\gamma,y) dy \right| |\varphi(\gamma,x;\tau,\xi)| \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} +$$

$$+\int_{\eta}^{t}\frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)}\int_{\mathbb{R}^n}|K(t,x;\gamma,y)||\varphi(\gamma,y;\tau,\xi)|dy+$$
$$+\int_{\eta}^{t}\frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)}\int_{\mathbb{R}^n}|K(t,x';\gamma,y)||\varphi(\gamma,y;\tau,\xi)|dy\equiv\sum_{j=1}^{6}J_j, \tag{I.80}$$

де t_1 і η такі, що $B(t,t_1)=\frac{1}{2}B(t,\tau)$ і $B(t,\eta)=|x-x'|^{2b}$.

Оцінимо I_j, $1\le j\le 6$. З (I.72) випливає оцінка

$$J_1\le C\beta(t)|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}}E_c^d(t,\tau,|x-\xi|),$$
$$0<\tau<t\le T,\ \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |x-x'|^{2b}\le B(t,\tau). \tag{I.81}$$

За допомогою оцінок (I.59),(I.60),(I.62),(I.64) і (I.81) та леми I.I одержуємо

$$J_2\le C\beta(t)|x-x'|^{\lambda}\int_{\tau}^{t_1}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}[B(t,\gamma)]^{-1}[B(\gamma,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}d\gamma\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}E_c^d(t,\gamma,|x-y|)E_c^d(\gamma,\tau,|y-\xi|)[B(t,\gamma)B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n}{2b}}dy\le$$
$$\le C\beta(t)|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}}\int_{\tau}^{t_1}[B(\gamma,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma\times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,|x-\xi|)\le C\beta(t)|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}}\times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,|x-\xi|), \tag{I.82}$$

$$J_3\le C\beta(t)|x-x'|^{\lambda}\int_{t_1}^{\eta}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}[B(t,\gamma)]^{-1}[B(\gamma,\tau)]^{\frac{\lambda_2}{2b}-1}d\gamma\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{\lambda_1}E_c^d(t,\gamma,|x-y|)[E_c^d(\gamma,\tau,|y-\xi|)+$$
$$+E_c^d(\gamma,\tau,|x-\xi|)][B(t,\gamma)B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n}{2b}}dy\le$$
$$\le C\beta(t)|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}}\int_{t_1}^{\eta}[B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda_1}{2b}-1}\times$$

$$\times [B(\gamma,\tau)]^{\frac{\lambda_2}{2b}-1} \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} d\gamma\, E_c^d(t,\tau,|x-\xi|) \leq$$
$$\leq C\beta(t)|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|),$$
(I.83)

$$J_5 \leq C\beta(t)\int_{\eta}^{t}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}[B(t,\gamma)B(\gamma,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}d\gamma \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_c^d(t,\gamma,|x-y|)E_c^d(\gamma,\tau,|y-\xi|)[B(t,\gamma)B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n}{2b}}dy \leq$$
$$\leq C\beta(t)[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}}\int_{\eta}^{t}[B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma \times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,|x-\xi|) = C\beta(t)|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}} \times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,|x-\xi|). \qquad (I.84)$$

Аналогічно одержуємо також оцінку

$$J_6 \leq C\beta(t)|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|). \qquad (I.85)$$

Залишилось оцінити J_4 . Спочатку оцінимо інтеграл

$$J \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x^{x'} K(t,x;\gamma,y)dy.$$

Маємо

$$J = \beta(t)\sum_{1\leq|k|\leq 2b}\Delta_x^{x'} a_k(t,x)\int_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z_0(t,x;\gamma,y;y)dy +$$
$$+\Delta_x^{x'} a_0(t,x)\int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\gamma,y;y)dy +$$
$$+\beta(t)\sum_{1\leq|k|<2b} a_k(t,x')\Delta_x^{x'}\int_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z_0(t,x;\gamma,y;y)dy +$$
$$+\beta(t)\sum_{|k|=2b}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x'}^{y} a_k(t,x')\Delta_x^{x'} D_x^k Z_0(t,x;\gamma,y;y)dy +$$
$$+\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x'}^{y} a_0(t,x')\Delta_x^{x'} Z_0(t,x;\gamma,y;y)dy. \qquad (I.86)$$

Використовуючи зображення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z_0(t,x;\tau,y;y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} [D_x^k Z_0(t,x;\tau,y;y) - D_x^k Z_0(t,x;\tau,y;z)]\Big|_{z=x} dy, \ 1 \le |k| \le 2b,$$

яке одержується за допомогою формули (I.29), та нерівності (I.26) і (I.62), маємо

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z_0(t,x;\tau,y;y)dy\Big| \le C[B(t,\tau)]^{-\frac{|k|-\lambda}{2b}} E^d(t,\tau), \quad 1 \le |k| \le 2b. \tag{I.87}$$

Безпосереднє застосування оцінки (I.24) приводить до нерівності

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\tau,y;y)dy\Big| \le C E^d(t,\tau). \tag{I.88}$$

Доведемо правильність нерівностей

$$|J_0| \equiv \Big|\Delta_x^{x'} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z_0(t,x;\tau,y;y)dy\Big| \le C|x-x'|^{\lambda_0}[B(t,\tau)]^{-\frac{|k|-\lambda+\lambda_0}{2b}} E^d(t,\tau),$$
$$1 \le |k| \le 2b, \ \lambda_0 \in (0,1]. \tag{I.89}$$

Якщо $|x-x'|^{2b} > B(t,\tau)$, то нерівності (I.89) випливають з нерівностей (I.87). У випадку, коли $|x-x'|^{2b} \le B(t,\tau)$, використовуючи зображення

$$J_0 = \sum_{s=1}^{n} \int\limits_{x_s}^{x'_s} [D^1_{\xi_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^k_{\xi^{(s)}} Z_0(t,\xi^{(s)};\tau,y;y)dy] d\xi_s,$$

де $\xi^{(s)} \equiv (x_1,\ldots,x_{s-1},\xi,x'_{s+1},\ldots,x'_n)$, та властивості 2 і 4 з п. I.3, маємо

$$|J_0| \le \sum_{s=1}^{n} \Big|\int\limits_{x_s}^{x'_s} \{\int\limits_{\mathbb{R}^n} [D^1_{\xi_s} D^k_{\xi^{(s)}} Z_0(t,\xi^{(s)};\tau,y;y) - D^1_{\xi_s} D^k_{\xi^{(s)}} Z_0(t,\xi^{(s)};\tau,y;z)\big|_{z=\xi^{(s)}}]dy\} d\xi_s\Big| \le$$

$$\leq C\sum_{s=1}^{n}\Big|\int_{x_s}^{x'_s}d\xi_s\int_{\mathbb{R}^n}|\xi^{(s)}-y|^{\lambda}[B(t,\gamma)]^{-\frac{n+|k|+1}{2b}}\times$$

$$\times E_c^d(t,\gamma,|\xi^{(s)}-y|)dy\Big|\leq C\sum_{s=1}^{n}|x_s-x'_s|\,[B(t,\gamma)]^{-\frac{|k|+1-\lambda}{2b}}\times$$

$$\times E^d(t,\gamma).$$

Оскільки з нерівності $|x-x'|^{2b}\leq B(t,\gamma)$ випливає, що $|x_s-x'_s|^{2b}\leq$ $\leq B(t,\gamma)$, $1\leq s\leq n$, то

$$|J_0|\leq C\sum_{s=1}^{n}|x_s-x'_s|^{\lambda_0}[B(t,\gamma)]^{-\frac{|k|-\lambda+\lambda_0}{2b}}E^d(t,\gamma)\leq$$

$$\leq C\,|x-x'|^{\lambda_0}[B(t,\gamma)]^{-\frac{|k|-\lambda+\lambda_0}{2b}}E^d(t,\gamma).$$

Застосувавши в (I.86) оцінки (I.87)-(I.89) з $\lambda_0=\lambda$, (I.73) з $\lambda_0>\lambda$ при $k\neq 0$ і $\lambda_0=\lambda$ при $k=0$ та використавши умови теореми, нерівності (I.62) і (I.63), одержимо

$$|J|\leq C\beta(t)|x-x'|^{\lambda}[B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}E^{d_1}(t,\gamma)+$$

$$+C|x-x'|^{\lambda}E^d(t,\gamma)+C\beta(t)|x-x'|^{\lambda}[B(t,\gamma)]^{\frac{1}{2b}-1}\times$$

$$\times E^{d_1}(t,\gamma)+C\beta(t)|x-x'|^{\lambda_0}\int_{\mathbb{R}^n}|x'-y|^{\lambda}[B(t,\gamma)]^{-\frac{n+2b+\lambda_0}{2b}}\times$$

$$\times E_{c_1}^{d}(t,\gamma,|x-y|)dy+C|x-x'|^{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|x'-y|^{\lambda}[B(t,\gamma)]^{-\frac{n+\lambda}{2b}}\times$$

$$\times E_{c_1}^{d}(t,\gamma,|x-y|)dy\leq C\beta(t)|x-x'|^{\lambda}[B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}\times$$

$$\times E^{d_1}(t,\gamma)+C\beta(t)|x-x'|^{\lambda_0}[B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda-\lambda_0}{2b}-1}E^d(t,\gamma)+$$

$$+C|x-x'|^{\lambda}E^d(t,\gamma).$$

За допомогою цієї оцінки та оцінки (I.59) маємо

$$J_4\leq C\beta(t)\int_{t_1}^{\eta}\{|x-x'|^{\lambda}[B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}+|x-x'|^{\lambda_0}\times$$

$$\times [B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda-\lambda_0}{2b}-1}\} [B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}} E^{d_1}(t,\gamma)\times$$

$$\times E_c^d(\gamma,\tau,|x-\xi|)\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma + C|x-x'|^\lambda \int_{t_1}^{\eta} [B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}}\times$$

$$\times E^d(t,\gamma)E_c^d(\gamma,\tau,|x-\xi|)\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma.$$

Використовуючи нерівності

$$B(\gamma,\tau)\geqslant B(t_1,\tau)=\frac{1}{2}B(t,\tau),\ \gamma\in[t_1,\eta],$$

$$\int_{t_1}^{\eta}[B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}-1}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma = -\frac{2b}{\lambda}[B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}}\Big|_{t_1}^{\eta} =$$

$$=\frac{2b}{\lambda}\left\{[B(t,t_1)]^{\frac{\lambda}{2b}}-[B(t,\eta)]^{\frac{\lambda}{2b}}\right\}\leqslant\frac{2b}{\lambda}[B(t,t_1)]^{\frac{\lambda}{2b}}=$$

$$=C[B(t,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}},$$

$$\int_{t_1}^{\eta}[B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda-\lambda_0}{2b}-1}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma=\frac{2b}{\lambda_0-\lambda}\left\{[B(t,\eta)]^{\frac{\lambda-\lambda_0}{2b}}-\right.$$

$$\left.-[B(t,t_1)]^{\frac{\lambda-\lambda_0}{2b}}\right\}=\frac{2b}{\lambda-\lambda_0}\left\{|x-x'|^{\lambda-\lambda_0}-[B(t,t_1)]^{\frac{\lambda-\lambda_0}{2b}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2b}{\lambda-\lambda_0}|x-x'|^{\lambda-\lambda_0},\quad \int_{t_1}^{\eta}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma\, E^d(t,\tau)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{t_1}^{t}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma\, E^d(t,\tau)=B(t,t_1)E^d(t,\tau)=$$

$$=\frac{1}{2}B(t,\tau)E^d(t,\tau)\leqslant\frac{1}{2}\beta(t)E^{d_1}(t,\tau),$$

одержуємо

$$J_4\leqslant C\beta(t)|x-x'|^\lambda[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}}E_c^d(t,\tau,|x-\xi|).$$

З (I.80) та одержаних оцінок $J_1, \dots, J_6$ випливає правильність оцінки (I.79) у випадку, коли $|x-x'|^{2b} \leq \frac{1}{4} B(t,\tau)$.

Доведемо тепер правильність для Z оцінок (I.55). Оскільки для першого доданка з (I.58) оцінка (I.55) має місце (див. (I.24)), то треба оцінити лише похідні від другого доданка

$$W(t,x;\tau,\xi) \equiv \int_\tau^t \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\gamma,y;y)\varphi(\gamma,y;\tau,\xi)dy,$$

$$0<\tau<t\leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{I.90}$$

Використовуватимемо оцінки (I.24), (I.59), (I.62), (I.63), (I.79), (I.87) і лему I.I. Якщо $|k|<2b$, то за допомогою властивості 6 з п. I.3 маємо

$$|D_x^k W(t,x;\tau,\xi)| \leq$$

$$\leq C \int_\tau^t \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} [B(t,\gamma)]^{-\frac{|k|}{2b}} [B(\gamma,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} d\gamma \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_c^d(t,\gamma,|x-y|) E_c^d(\gamma,\tau,|y-\xi|)[B(t,\gamma)B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n}{2b}} dy \leq$$

$$\leq C[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|-\lambda}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|).$$

У випадку, коли $|k|=2b$, на підставі тієї ж властивості запишемо рівність

$$D_x^k W(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^{t_1} \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z_0(t,x;\gamma,y;y) \times$$

$$\times \varphi(\gamma,y;\tau,\xi)dy + \int_{t_1}^t \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z_0(t,x;\gamma,y;y) \times$$

$$\times [\varphi(\gamma,y;\tau,\xi) - \varphi(\gamma,x;\tau,\xi)]dy +$$

$$+ \int_{t_1}^t \left[\int_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z_0(t,x;\gamma,y;y)dy\right] \varphi(\gamma,x;\tau,\xi) \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} \equiv$$

$$\equiv K_1 + K_2 + K_3, \tag{I.91}$$

де число t_1 таке ж, як в (I.80). Інтеграли K_1, K_2 і K_3 оцінюються таким чином:

$$|K_1| \leqslant C \int_{\tau}^{t_1} \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} [B(t,\gamma)]^{-1} [B(\gamma,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} d\gamma \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_c^d(t,\gamma,|x-y|) E_c^d(\gamma,\tau,|y-\xi|) [B(t,\gamma)B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n}{2b}} dy \leqslant$$

$$\leqslant C [B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}} \int_{\tau}^{t} \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} [B(\gamma,\tau)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} d\gamma \, E_c^d(t,\tau,|x-\xi|) =$$

$$= C [B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|),$$

$$|K_2| \leqslant C \int_{t_1}^{t} \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} [B(t,\gamma)]^{-\frac{n+2b}{2b}} E_c^d(t,\gamma,|x-y|) \times$$

$$\times |x-y|^{\lambda} [B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}} [E_c^d(\gamma,\tau,|y-\xi|) + E_c^d(\gamma,\tau,|x-\xi|)] dy \leqslant$$

$$\leqslant C [B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|) \int_{t_1}^{t} \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} [B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} d\gamma =$$

$$= C [B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|),$$

$$|K_3| \leqslant C \int_{t_1}^{t} [B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} [B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}} E^d(t,\gamma) \times$$

$$\times E_c^d(\gamma,\tau,|x-\xi|) \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} d\gamma \leqslant C [B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}} \times$$

$$\times E_c^d(t,\tau,|x-\xi|) \int_{t_1}^{t} [B(t,\gamma)]^{\frac{\lambda}{2b}-1} \frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} d\gamma =$$

$$= C [B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-2\lambda}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|).$$

Отже, для W правильні оцінки

$$|D_x^k W(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C [B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|-\lambda}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|),$$

$$0 < \tau < t \leqslant T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \ |k| \leqslant 2b. \qquad (I.92)$$

Доведемо тепер оцінки (I.56). Згідно з оцінками (I.24) і (I.73) для першого доданка з (I.58) правильні оцінки (I.56). Залишилося оцінити різниці для похідних від W. Припускатимемо, що $|x-x'|^{2b} \leq \frac{1}{2} B(t,\tau)$. Якщо $|x-x'|^{2b} > \frac{1}{2} B(t,\tau)$, то потрібна оцінка різниці $\Delta_x^{x'} D_x^k W$ безпосередньо випливає з оцінки (I.92).

Використовуючи формулу (I.91), запишемо

$$\Delta_x^{x'} D_x^k W(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^{t_1} \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x^{x'} D_x^k Z_0(t,x;\gamma,y;y) \times$$
$$\times \varphi(\gamma,y;\tau,\xi)\,dy + \int_{t_1}^{\eta} \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x^{x'} D_x^k Z_0(t,x;\gamma,y;y) \times$$
$$\times [\varphi(\gamma,y;\tau,\xi) - \varphi(\gamma,x;\tau,\xi)]\,dy +$$
$$+ \int_\eta^t \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z_0(t,x;\gamma,y;y)[\varphi(\gamma,y;\tau,\xi) -$$
$$- \varphi(\gamma,x;\tau,\xi)]\,dy + \int_\eta^t \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} \int_{\mathbb{R}^n} D_{x'}^k Z_0(t,x';\gamma,y;y) \times$$
$$\times [\varphi(\gamma,x';\tau,\xi) - \varphi(\gamma,y;\tau,\xi)]\,dy +$$
$$+ \int_{t_1}^{\eta} \Delta_x^{x'} \Big[\int_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z_0(t,x;\gamma,y;y)\,dy\Big] \varphi(\gamma,x;\tau,\xi) \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} +$$
$$+ \int_\eta^t \Big[\int_{\mathbb{R}^n} D_x^k Z_0(t,x;\gamma,y;y)\,dy\Big] \varphi(\gamma,x;\tau,\xi) \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} +$$
$$+ \int_t^{\eta} \Big[\int_{\mathbb{R}^n} D_{x'}^k Z_0(t,x';\gamma,y;y)\,dy\Big] \varphi(\gamma,x';\tau,\xi) \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} \equiv$$
$$\equiv \sum_{j=1}^{7} L_j,$$

де числа t_1 і η такі ж, як в (I.80).

Доданок L_1 оцінюється за допомогою нерівностей (I.59) і (I.73) з $\lambda_0 = \lambda$, оцінка при цьому має вигляд

$$|L_1| \leq C\,|x-x'|^{\lambda} [B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|).$$

Щоб оцінити L_2, використаємо оцінки (I.79) і (I.73) з $\lambda_0=\lambda$ для $|k|<2b$ та $\lambda_0>\lambda$, якщо $|k|=2b$. Маємо

$$|L_2|\le C\,|x-x'|^{\lambda_0}\int_{t_1}^{\eta}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma\int_{\mathbb{R}^n}[B(t,\gamma)]^{-\frac{n+|k|+\lambda_0}{2b}}\times$$
$$\times[B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}}|x-y|^{\lambda}E^d_{c_1}(t,\gamma,|x-y|)E^d_c(\gamma,\tau,|y-\xi|)+$$
$$+E^d_c(\gamma,\tau,|x-\xi|)]dy\le C|x-x'|^{\lambda_0}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}}\times$$
$$\times E^d_c(t,\tau,|x-\xi|)\int_{t_1}^{t}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}[B(t,\gamma)]^{-\frac{|k|+\lambda_0-\lambda}{2b}}d\gamma\le$$
$$\le C[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}}E^d_c(t,\tau,|x-\xi|)\times$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}|x-x'|^{\lambda}[B(t,t_1)]^{\frac{2b-|k|}{2b}}=|x-x'|^{\lambda}[\frac{1}{2}B(t,\tau)]^{\frac{2b-|k|}{2b}},\ |k|<2b,\\ |x-x'|^{\lambda_0}[B(t,\eta)]^{\frac{\lambda-\lambda_0}{2b}}=|x-x'|^{\lambda},\ |k|=2b,\end{array}\right\}\le$$
$$\le C\,|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|}{2b}}E^d_c(t,\tau,|x-\xi|).$$

Інтеграли L_3 і L_4 оцінюються однаково, розглянемо, наприклад, L_3. Використовуючи оцінки (I.24) і (I.79), одержуємо

$$|L_3|\le C\int_{\eta}^{t}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma\int_{\mathbb{R}^n}[B(t,\gamma)]^{-\frac{n+|k|}{2b}}[B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}}|x-y|^{\lambda}\times$$
$$\times E^d_c(t,\gamma,|x-y|)[E^d_c(\gamma,\tau,|y-\xi|)+E^d_c(\gamma,\tau,|x-\xi|)]dy\le$$
$$\le C[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}}E^d_c(t,\tau,|x-\xi|)\int_{\eta}^{t}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}[B(t,\gamma)]^{-\frac{|k|-\lambda}{2b}}d\gamma=$$
$$=C[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}}[B(t,\eta)]^{\frac{2b-|k|+\lambda}{2b}}E^d_c(t,\tau,|x-\xi|)\le$$
$$\le C\,|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|}{2b}}E^d_c(t,\tau,|x-\xi|).$$

За допомогою нерівностей (I.59) і (I.89) з $\lambda_0=\lambda$ для $|k|<2b$ та $\lambda_0>\lambda$ для $|k|=2b$ так само, як для L_2, у випадку, коли $1\leq|k|\leq 2b$, маємо

$$|L_5|\leq C[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}}E_c^d(t,\tau,|x-\xi|)|x-x'|^{\lambda_0}\times$$
$$\times\int_{t_1}^{\eta}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}[B(t,\gamma)]^{-\frac{|k|+\lambda_0-\lambda}{2b}}d\gamma\leq$$
$$\leq C|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|-\lambda}{2b}}E_c^d(t,\tau,|x-\xi|).$$

При $|k|=0$ правильна оцінка

$$|L_5|\leq C|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}}E_c^d(t,\tau,|x-\xi|),$$

бо в цьому випадку на підставі (I.73) маємо

$$|\Delta_x^{x'}\int_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\gamma,y;y)dy|\leq C|x-x'|^{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}[B(t,\gamma)]^{-\frac{n+\lambda}{2b}}\times$$
$$\times E_c^d(t,\gamma,|x-y|)dy\leq C|x-x'|^{\lambda}[B(t,\gamma)]^{-\frac{\lambda}{2b}}E^d(t,\gamma),$$
$$0<\gamma<t\leq T,\ \{x,x'\}\subset\mathbb{R}^n,\ |x-x'|^{2b}\leq B(t,\gamma).$$

Залишилось розглянути інтеграли L_6 і L_7. Оскільки вони оцінюються однаково, то розглянемо тільки L_6. За допомогою оцінок (I.59),(I.87) і (I.88) одержуємо

$$|L_6|\leq C\int_{\eta}^{t}[B(t,\gamma)]^{-\frac{|k|-\lambda}{2b}}[B(\gamma,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}}\times$$
$$\times E^d(t,\gamma)E_c^d(\gamma,\tau,|x-\xi|)\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma\leq$$
$$\leq C[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}}E_c^d(t,\tau,|x-\xi|)\int_{\eta}^{t}[B(t,\gamma)]^{-\frac{|k|-\lambda}{2b}}\times$$
$$\times\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma=C[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}}E_c^d(t,\tau,|x-\xi|)[B(t,\eta)]^{\frac{2b-|k|+\lambda}{2b}}\leq$$
$$\leq C|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|-\lambda}{2b}}E_c^d(t,\tau,|x-\xi|),\ 1\leq|k|\leq 2b,$$

$$|L_6|\leq C[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}}E_c^d(t,\tau,|x-\xi|)\int_{\eta}^{t}\frac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma=$$

$$= C\,[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-\lambda}{2b}}\, E_c^d(t,\tau,|x-\xi|)\,|x-x'|^{2b} \le$$

$$\le C\,|x-x'|^{\lambda}\,[B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}}\, E_c^d(t,\tau,|x-\xi|),\ |k|=0.$$

Отже, правильні такі оцінки:

$$|\Delta_x^{x'} D_x^k W(t,x;\tau,\xi)| \le C\,|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|}{2b}}\times$$
$$\times[\,E_c^d(t,\tau,|x-\xi|)+E_c^d(t,\tau,|x'-\xi|)],$$
$$0<\tau<t\le T,\ \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |k|\le 2b. \tag{I.93}$$

З оцінок (I.93) та відповідних оцінок для першого доданка з формули (I.58) випливають оцінки (I.56).▶

Зауваження I. Як було зазначено в п. I.I, система (I.I) зводиться до системи (I.4). Тому якщо скористатись теоремою I.I і позначеннями (I.3), то для ФМР задачі Коші для системи (I.I) одержуються такі оцінки:

$$|D_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C[B_0(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|}{2b}}\exp\{d\,A_0(t,\tau)-$$
$$-c\,[B_0(t,\tau)]^{1-q}\,|x-\xi|^q\}, \tag{I.94}$$

$$|\Delta_x^{x'} D_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C\,|x-x'|^{\lambda}\,[B_0(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|+\lambda}{2b}}\times$$
$$\times\exp\{d\,A_0(t,\tau)\}[\exp\{-c\,[B_0(t,\tau)]^{1-q}\,|x-\xi|^q\}+$$
$$+\exp\{-c\,[B(t,\tau)]^{1-q}\,|x'-\xi|^q\}], \tag{I.95}$$
$$0<\tau<t\le T,\ \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |k|\le 2b,$$

де $A_0(t,\tau)\equiv\int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha_0(\theta)\gamma(\theta)}$, $B_0(t,\tau)\equiv\int_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha_0(\theta)}\,d\theta$, $C>0$, $c>0$, $d\in\mathbb{R}$.

Зауваження 2. В оцінках (I.55) і (I.56), а також (I.94) і (I.95) стала d може бути будь-якого знаку або нулем. Якщо, наприклад, для системи (I.4) мають місце оцінки (I.55) і (I.56) з

$d=d_0>0$, то відповідні оцінки для системи

$$[\alpha(t)ID_t^1-\beta(t)P(t,x,D_x)-a_0(t,x)+pI]u(t,x)=$$
$$=f(t,x),\ (t,x)\in\Pi^n_{(0,T]}, \qquad (I.96)$$

з параметром $p\in\mathbb{C}$ таким, що $\operatorname{Re}p\geq d_0$, правильні з $d\equiv d_0-\operatorname{Re}p\leq 0$. Це випливає з формули

$$Z_p(t,x;\tau,\xi)=\exp\{-pA(t,\tau)\}Z(t,x;\tau,\xi),$$
$$0<\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де Z і Z_p - ФМР задачі Коші відповідно для систем (I.4) і (I.96).

<u>Зауваження 3</u>. У випадку, коли інтеграл

$$\int_0^T \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \qquad (I.97)$$

збігається, тобто, коли, як кажуть, має місце слабке виродження, ФМР $Z(t,x;\tau,\xi)$ задачі Коші для системи (I.4) визначена при $0\leq\tau<t\leq T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, і для неї правильні оцінки

$$|D_x^k Z(t,x;\tau,\xi)|\leq C[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|}{2b}}E_c(t,\tau,|x-\xi|), \qquad (I.98)$$

$$|\Delta_x^{x'}D_x^k Z(t,x;\tau,\xi)|\leq C|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+|k|+\lambda}{2b}}\times$$
$$\times[E_c(t,\tau,|x-\xi|)+E_c(t,\tau,|x'-\xi|)], \qquad (I.99)$$
$$0\leq\tau<t\leq T,\ \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |k|\leq 2b.$$

За допомогою рівності

$$\alpha(t)D_t^1 Z(t,x;\tau,\xi)=[\beta(t)P(t,x,D_x)+a_0(t,x)]\times$$
$$\times Z(t,x;\tau,\xi),\ 0<\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

та нерівностей (I.98) і (I.99) одержуються ще й такі оцінки:

$$|\alpha(t)D_t^1 Z(t,x;\tau,\xi)|\leq C[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}}E_c(t,\tau,|x-\xi|), \qquad (I.100)$$

$$|\alpha(t)\Delta_x^{x'} D_t^1 Z(t,x;\tau,\xi)| \leq C|x-x'|^{\lambda}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b+\lambda}{2b}} \times$$
$$\times[E_c(t,\tau,|x-\xi|)+E_c(t,\tau,|x'-\xi|)], \qquad (I.101)$$
$$0<\tau<t\leq T, \{x,x',\xi\}\subset \mathbb{R}^n.$$

<u>I.5. Деякі властивості ФМР задачі Коші</u>. Нехай t_0 - довільно взяте число з проміжку $(0,T)$, а $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\leq T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, - ФМР задачі Коші для системи (I.4). Тоді матриця $Z(t,x;\tau,\xi)$, $t_0\leq\tau<t\leq T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, є ФМР задачі Коші з початковими даними при $t=t_0$ для рівномірно параболічної системи

$$(Lu)(t,x)=0, (t,x)\in\Pi^n_{(t_0,T]}, \qquad (I.102)$$

де L - диференціальний вираз (I.6). Якщо припускати виконаною, крім умов I і 2, ще й умову 3, то, як відомо [I], існує ФМР $Z^*(\tau,\xi;t,x)$, $t_0\leq\tau<t\leq T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, задачі Коші для спряженої з (I.102) системи

$$(L^*v)(\tau,\xi)=0, (\tau,\xi)\in\Pi^n_{[t_0,T]},$$

де диференціальний вираз L^* визначений формулою (I.5).

У [I] доведено, що ФМР задачі Коші для рівномірно параболічної системи має властивість нормальності і для неї правильна формула згортки. Отже, при виконанні умов I-3 для довільного $t_0\in$ $\in(0,T)$ мають місце рівності

$$Z^*(\tau,\xi;t,x)=\overline{Z}'(t,x;\tau,\xi),$$
$$t_0\leq\tau<t\leq T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \qquad (I.103)$$

$$Z(t,x;\tau,\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\gamma,y)Z(\gamma,y;\tau,\xi)dy,$$
$$t_0\leq\tau<\gamma<t\leq T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \qquad (I.104)$$

Зауважимо, що коли має місце слабке виродження, тобто інтеграл (I.97) збігається, то рівності (I.103) і (I.104) виконуються з $t_0=0$. Рівність (I.103) виражає властивість нормальності ФМР, а (I.104) є формулою згортки.

Таким чином, правильне таке твердження.

<u>Властивість I</u>. Нехай виконуються умови I-3. Тоді ФМР задачі Коші для системи (I.4) має властивість нормальності (I.103) і для неї правильна формула згортки (I.104). У випадку слабкого виродження рівності (I.103) і (I.104) виконуються з .

З наведених у п. I.4 результатів та властивості I випливає

<u>Властивість 2</u>. Якщо виконуються умови I-3, то ФМР Z задачі Коші для системи (I.4) має похідні $D_t^{k_0} D_x^k D_\tau^{m_0} D^m Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\leq T, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $2bk_0+|k|\leq 2b$, $2bm_0+|m|\leq 2b$, і для них правильні оцінки

$$|(\alpha(t)D_t)^{k_0} D_x^k (\alpha(\tau)D_\tau)^{m_0} D_\xi^m Z(t,x;\tau,\xi)|\leq$$

$$\leq C[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b(k_0+m_0)+|k|+|m|}{2b}} E_c^d(t,\tau,|x-\xi|), \qquad (I.105)$$

де $C>0$, $c>0$ і $d\in\mathbb{R}$.

Далі розглядатимемо функцію

$$k(t)\equiv c_0 a[c_0^{2b-1}-(T-B(T,t))a^{2b-1}]^{1-q}, 0\leq t\leq T, \qquad (I.106)$$

де c_0 - фіксоване число з проміжку $(0,c)$, c - стала з оцінок (I.55),(I.56) і (I.105), а число a таке, що $0\leq a<c_0 T^{1-q}$. Функція k монотонно зростає від значення $k(0)$ до $k(T)$ і має таку властивість:

$$\forall\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n \quad \forall\{t,\tau\}\subset(0,T], \tau<t:$$
$$-c_0[B(t,\tau)]^{1-q}|x-\xi|^q+k(\tau)|\xi|^q\leq k(t)|x|^q. \qquad (I.107)$$

Врахувавши те, що $|x-\xi|^q\geq(|\xi|-|x|)^q$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$ і позначивши $|\xi|$ і $|x|$ через v і u відповідно, для доведення нерівності (I.107) досить дослідити на максимум функцію

$$f(v)\equiv -c_0[B(t,\tau)]^{1-q}(v-u)^q+k(\tau)v^q,\ v\in\mathbb{R}.$$

Ця функція має максимум у точці

$$\bar{v}=\frac{c_0^{2b-1}u}{c_0^{2b-1}-k(\tau)^{2b-1}B(t,\tau)}$$

який дорівнює $f(\bar{v})=k(t)u^q$.

Якщо запровадити позначення

$$\Psi_\nu(t,x)\equiv \exp\{\nu k(t)|x|^q\},$$
$$0\leq t\leq T,\ x\in\mathbb{R}^n,\ \nu=-1,1. \qquad (I.108)$$

то з (I.107) випливає нерівність

$$E_{c_0}(t,\tau,|x-\xi|)\Psi_1(\tau,\xi)\leq \Psi_1(t,x),$$
$$0<\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (I.109)$$

яка часто використовуватиметься далі.

<u>Властивість 3</u>. Нехай t_0 - довільно взяте число з проміжку $(0,T)$ для випадку сильного виродження і півпроміжку $[0,T)$, якщо виродження слабке; функція $u:\Pi^n_{[t_0,T]}\longrightarrow \mathbb{C}_N$ неперервна, задовольняє умову

$$\exists M>0\ \ \forall t\in(t_0,T]:$$
$$\|u(t,\cdot)\|^{k(t)}\equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n}[\,|u(t,x)|\,\Psi_{-1}(t,x)]\leq M \qquad (I.110)$$

і є в $\Pi^n_{(t_0,T]}$ розв'язком системи (I.4), в якій функція f неперервна в $\Pi^n_{(t_0,T]}$ і задовольняє умову

$$\int_{t_0}^{T}\|f(t,\cdot)\|^{k(t)}\frac{dt}{\alpha(t)}<\infty. \qquad (I.111)$$

Якщо виконуються умови I-3, то має місце формула

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;t_0,\xi)u(t_0,\xi)d\xi+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,\ (t,x)\in\Pi^n_{(t_0,T]}. \qquad (I.112)$$

◀ Користуватимемось такою формулою Гріна-Остроградського, яка одержується в результаті інтегрування тотожності (I.7):

$$\int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_{\Omega} [\bar{v}' Lu - (\overline{L^* v})' u](\tau,\xi)\, d\xi = \int_{\Omega} (\bar{v}' u)(\tau,\xi) \Big|_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} d\xi +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\, d\tau \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} B^j[v,u](\tau,\xi)\, \nu_j\, dS_\xi, \qquad \text{(I.113)}$$

де $t_1 < t_2$, Ω – обмежена область у $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$, $(\nu_1,\dots,\nu_n)$ – орт зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, L і L^* – диференціальні вирази з (I.5) і (I.6).

Нехай $G_R \equiv (t_0, T] \times \mathbb{K}^n_R$; θ – функція з простору $C^\infty([0,\infty))$ така, що $\theta(z) = 1$ для $z \in [0, \frac{1}{2}]$, $\theta(z) = 0$ для $z \in [\frac{3}{4}, \infty)$ і $\theta' \le 0$; (t,x) – довільно фіксована точка з $G_{\bar{R}/4}$, де $\bar{R} > 0$ – фіксоване число. Покладемо в формулі (I.113) замість t_1, t_2, Ω, $u(\tau,\xi)$ і $v(\tau,\xi)$ відповідно $t_0 + h$, $t - \varepsilon$, $\mathbb{K}^n_R$, $u(\tau,\xi)$ і $v(\tau,\xi) \equiv \theta(\frac{|\xi|}{R}) Z^*(\tau,\xi;t,x)$, де $R \ge \bar{R}$, $0 < h < \frac{1}{2}(t - t_0)$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(t - t_0)$, а u – функція, яка задовольняє умови з властивості. Використавши властивості функції θ, властивість I і те, що $Lu = \frac{f}{\alpha}$, одержимо

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t-\varepsilon,\xi)\, \theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right) u(t-\varepsilon,\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t_0+h,\xi)\, \theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right) u(t_0+h,\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_{t_0+h}^{t-\varepsilon} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)\, \theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right) f(\tau,\xi)\, d\xi -$$

$$- \int_{t_0+h}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\mathbb{K}^n_{3R/4} \setminus \mathbb{K}^n_{R/2}} \left[\overline{L^*\left(\theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right) Z^*(\tau,\xi;t,x)\right)}\right]' u(\tau,\xi)\, d\xi,$$

а після переходу до границі при $\varepsilon \to 0$ прийдемо до рівності

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t_0+h,\xi)\theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right)u(t_0+h,\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_{t_0+h}^{t}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)\theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right)f(\tau,\xi)d\xi -$$

$$-\int\limits_{t_0+h}^{t}d\tau\int\limits_{\mathbb{K}^n_{3R/4}\setminus\mathbb{K}^n_{R/2}} \overline{[L^*(\theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right)Z^*(\tau,\xi;t,x))]'}u(\tau,\xi)d\xi \equiv$$

$$\equiv I_1^{(R)}+I_2^{(R)}+I_3^{(R)}. \qquad \text{(I.II4)}$$

Перейдемо в (I.II4) до границі при $R\to\infty$. Інтеграл $I_1^{(R)}$ при цьому прямує до

$$I_1\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t_0+h,\xi)u(t_0+h,\xi)d\xi .$$

Справді, за допомогою нерівностей (I.55) і (I.I09) маємо

$$|I_1-I_1^{(R)}|=|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t_0+h,\xi)(1-\theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right))u(t_0+h,\xi)d\xi|\leq$$

$$\leq C[B(t,t_0+h)]^{-\frac{n}{2b}}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}^n_{R/2}} E^d_{c-c_0}(t,t_0+h,|x-\xi|)[E_{c_0}(t,t_0+h,|x-\xi|)\times$$

$$\times\Psi_1(t_0+h,\xi)][|u(t_0+h,\xi)|\Psi_{-1}(t_0+h,\xi)]d\xi\leq$$

$$\leq C\|u(t_0+h,\cdot)\|^{k(t_0+h)}\Psi_1(t,x)E^d(t,t_0+h)\times$$

$$\times E_{\frac{c-c_0}{2}}(t,t_0+h,\tfrac{R}{4})\int\limits_{\mathbb{R}^n}[B(t,t_0+h)]^{-\frac{n}{2b}}\times$$

$$\times E_{\frac{c-c_0}{2}}(t,t_0+h,|x-\xi|)d\xi\xrightarrow[R\to\infty]{}0,$$

бо для $x\in\mathbb{K}^n_{\bar{R}/4}$, $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}^n_{R/2}$ і $R>\bar{R}$

$$E_{\frac{c-c_0}{2}}(t,t_0+h,|x-\xi|)\leq E_{\frac{c-c_0}{2}}(t,t_0+h,\tfrac{R}{4}).$$

Аналогічно доводиться, що

$$I_2^{(R)} \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{t_0+h}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi .$$

Тепер доведемо, що $I_3^{(R)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. Оскільки $L^* Z^* = 0$, то вираз $L^*\left(\theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right) Z^*(\tau,\xi;t,x)\right)$ являє собою суму добутків виразів вигляду $\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} D_\xi^m [\bar{a}'_k(\tau,\xi) Z^*(\tau,\xi;t,x)]$ і $D_\xi^k \theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right)$, $1 \leqslant |k| \leqslant 2b$, $|m| \leqslant 2b-1$, із сталими коефіцієнтами. Використавши рівність (I.103), оцінки (I.55), а також нерівності $\left|D_\xi^k \theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right)\right| \leqslant \frac{C}{R^{|k|}}$, при $R \geqslant 1$ одержимо оцінку

$$\left| L^*\left(\theta\left(\frac{|\xi|}{R}\right) Z^*(\tau,\xi;t,x)\right)\right| \leqslant C \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} [B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b-1}{2b}} \times$$
$$\times E_c^d(t,\tau,|x-\xi|).$$

За допомогою цієї оцінки і нерівності (I.109) так, як і при оцінюванні $|I_1 - I^{(R)}|$, маємо

$$|I_3^{(R)}| \leqslant C \int_{t_0+h}^{t} [B(t,\tau)]^{-\frac{2b-1}{2b}} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \int_{\mathbb{K}^n_{3R/4} \setminus \mathbb{K}^n_{R/2}} E^d_{c-c_0}(t,\tau,|x-\xi|) \times$$
$$\times [E_{c_0}(t,\tau,|x-\xi|) \Psi_1(\tau,\xi)][|u(\tau,\xi)| \Psi_{-1}(\tau,\xi)][B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}} d\xi \leqslant$$
$$\leqslant C M \Psi_1(t,x) [B(t,t_0+h)]^{\frac{1}{2b}} \max\{1, E^d(t,t_0+h)\} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_{\frac{c-c_0}{2}}(t,\tau,|x-\xi|)[B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}} d\xi \, E_{\frac{c-c_0}{2}}\left(t,t_0+h,\frac{R}{4}\right) \longrightarrow$$
$$\xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Отже, після переходу в (I.114) до границі при $R \to \infty$ одержимо

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t_0+h,\xi) u(t_0+h,\xi) d\xi +$$
$$+ \int_{t_0+h}^{t} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi . \qquad (I.115)$$

Якщо тепер у (I.115) перейти до границі при $h \to 0$, то дістанемо формулу (I.112).▶

§ 2. ВЛАСТИВОСТІ ПОТЕНЦІАЛІВ, ПОРОДЖЕНИХ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЮ МАТРИЦЕЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМИ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

2.I. Інтеграли Пуассона. Наведемо властивості інтегралів Пуассона, породжених ФМР задачі Коші для системи (I.4) у випадку слабкого виродження, тобто коли інтеграл (I.97) збігається.

Інтегралом Пуассона функції $\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}_N$ називається інтеграл

$$u(t,x) \equiv (\mathcal{Z}[\varphi])(t,x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi^n_{(0,T]} \tag{2.I}$$

де Z - ФМР задачі Коші для системи (I.4). Згідно із зауваженням 3 з п. I.4 для матриці Z у випадку слабкого виродження правильні оцінки (I.98)-(I.I0I).

Дамо означення необхідних норм і просторів, аналогічних тим, які використовувались у [9]. Нехай k і Ψ_ν - функції, які визначені відповідно формулами (I.I06) і (I.I07), а $u: \Pi^n_{[0,T]} \longrightarrow \mathbb{C}_N$ - задана неперервна або вимірна за Лебегом по x при кожному фіксованому $t \in [0,T]$ функція. Для $t \in [0,T]$ і $1 \leq p \leq \infty$ означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|^{k(t)} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\,|u(t,x)|\,\Psi_{-1}(t,x)], \tag{2.2}$$
$$\|u(t,\cdot)\|^{k(t)}_p \equiv \|u(t,\cdot)\Psi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

де $L_p(\mathbb{R}^n)$ - лебеговий L_p-простір функцій, визначених на $\mathbb{R}^n$ із значеннями в $\mathbb{C}_N$. Через $C^{k(0)}$ і $L^{k(0)}_p$ позначимо простори відповідно всіх неперервних і всіх вимірних за Лебегом функцій $\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}_N$, для яких скінченні відповідно норми $\|\varphi\|^{k(0)}$ і $\|\varphi\|^{k(0)}_p$.

Нехай $\mathcal{B}_n$ - σ-алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}^n$,

M – сукупність усіх злічeнно адитивних функцій $\nu: \mathcal{B}_n \to \mathbb{C}_N$ (узагальнених борельових мір), які мають скінченну повну варіацію $|\nu|(\mathbb{R}^n)$. Якщо для ν ввести норму за формулою $\|\nu\| \equiv \equiv |\nu|(\mathbb{R}^n)$, то M стане банаховим простором, який можна ототожнити з простором, спряженим до простору C_0 усіх таких неперервних функцій $\eta: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_N$, що $|\eta(x)| \to 0$ при $|x| \to \infty$, з рівномірною нормою. Через $M^{k(0)}$ позначимо сукупність усіх узагальнених борельових мір $\mu: \mathcal{B}_n \to \mathbb{C}_N$, які задовольняють таку умову: функція

$$\nu(A) \equiv \int_A \Psi_{-1}(0,x)\, d\mu(x), \quad A \in \mathcal{B}_n,$$

належить до простору M. При цьому для будь-якої $\mu \in M^{k(0)}$

$$\|\mu\|^{k(0)} \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_{-1}(0,x)\, d|\mu|(x) < \infty.$$

Лема 2.1. Якщо $\varphi \in C^{k(0)}$, то для функції (2.1) мають місце такі твердження:

а) $\exists\, C > 0 \;\; \forall t \in (0,T] \;\; \forall m, |m| \le 2b:$

$$\|D^m u(t,\cdot)\|^{k(t)} \le C \|\varphi\|^{k(0)} [B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}; \tag{2.3}$$

б) для будь-якого компакту $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ рівномірно на $\mathbb{K}$

$$u(t,\cdot) \xrightarrow[t \to 0+]{} \varphi(\cdot). \tag{2.4}$$

◀ а) За допомогою нерівностей (1.98) і (1.109) маємо

$$|D_x^m u(t,x)| \le C [B(t,0)]^{-\frac{n+|m|}{2b}} \int_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|) \times$$

$$\times [E_{c_0}(t,0,|x-\xi|)\Psi_1(0,\xi)][|\varphi(\xi)|\Psi_{-1}(0,\xi)]\, d\xi \le$$

$$\times E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)\,d\xi = C\,\|\varphi\|^{k(0)}[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}\Psi_1(t,x),$$

звідки випливають оцінки (2.3).

б) Доведемо спочатку, що рівномірно по $x\in\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\xi \xrightarrow[t\to 0+]{} I. \tag{2.5}$$

На підставі (I.58),(I.90) і (I.29) маємо

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\xi = \exp\Big\{\int_0^t \frac{a_0(\tau,x)}{\alpha(\tau)}\,d\tau\Big\} +$$
$$+\int_{\mathbb{R}^n}[Z_0(t,x;0,\xi;\xi)-Z_0(t,x;0,\xi;x)]\,d\xi +$$
$$+\int_{\mathbb{R}^n} W(t,x;0,\xi)\,d\xi \equiv \sum_{j=1}^{3} I_j(t,x). \tag{2.6}$$

Очевидно, що рівномірно по $x\in\mathbb{R}^n$

$$I_1(t,x) \xrightarrow[t\to 0+]{} I. \tag{2.7}$$

За допомогою властивості 2 з п. I.3 та оцінки (I.92) одержуємо

$$|I_2(t,x)| \le C\int_{\mathbb{R}^n}|x-\xi|^{\lambda}E_c(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}\,d\xi \le$$
$$\le C\,[B(t,0)]^{\frac{\lambda}{2b}}\int_{\mathbb{R}^n}E_{c'}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}\,d\xi =$$
$$= C\,[B(t,0)]^{\frac{\lambda}{2b}} \xrightarrow[t\to 0+]{} 0,\ 0<c'<c; \tag{2.8}$$

$$|I_3(t,x)| \le C\,[B(t,0)]^{\frac{\lambda}{2b}}\int_{\mathbb{R}^n}E_c(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}\,d\xi =$$
$$= C\,[B(t,0)]^{\frac{\lambda}{2b}} \xrightarrow[t\to 0+]{} 0. \tag{2.9}$$

З (2.6)-(2.9) випливає (2.5).

З урахуванням (2.5) для доведення (2.4) досить довести, що для

$$v(t,x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,[\varphi(\xi)-\varphi(x)]\,d\xi$$

має місце співвідношення

$$v(t,x) \xrightarrow[t\to 0+]{} 0$$

рівномірно по $x \in \mathbb{K}$, тобто

$$\forall \varepsilon>0 \;\exists \delta \in (0,T)\; \forall t \in (0,\delta)\; \forall x \in \mathbb{K}:$$

$$|v(t,x)| < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Нехай $\mathbb{K}'$ - компакт у $\mathbb{R}^n$ такий, що $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$, а число $\varepsilon > 0$ задане. На підставі рівномірної неперервності функції φ на $\mathbb{K}'$ маємо

$$\forall \varepsilon_1>0 \;\exists \eta>0 \;\; \forall \{\xi,x\} \subset \mathbb{K}',\; |\xi-x|<\eta:$$

$$|\varphi(\xi)-\varphi(x)| < \varepsilon_1,$$

звідки випливає, що

$$\forall \varepsilon_1>0 \;\exists \eta>0 \;\forall x \in \mathbb{K} \;\; \forall \xi \in \mathbb{K}^n_\eta(x):$$

$$|\varphi(\xi)-\varphi(x)| < \varepsilon_1. \tag{2.11}$$

Запишемо рівність

$$v(t,x) = \int\limits_{\mathbb{K}^n_\eta(x)} Z(t,x;0,\xi)[\varphi(\xi)-\varphi(x)]\,d\xi +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}^n_\eta(x)} Z(t,x;0,\xi)[\varphi(\xi)-\varphi(x)]\,d\xi .$$

За допомогою нерівностей (I.98),(I.109) і (2.11) маємо

$$|v(t,x)| \leqslant C\varepsilon_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}\,d\xi +$$
$$+ C \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}^n_\eta(x)} \{E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)[E_{c_0}(t,0,|x-\xi|)\Psi_1(0,\xi)] \times$$
$$\times [\,|\varphi(\xi)|\, \Psi_{-1}(0,\xi)] + E_c(t,0,|x-\xi|)\Psi_1(0,x) \times$$

$$\times [\,|\varphi(x)|\Psi_{-1}(0,x)]\}\,[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}\,d\xi \leqslant C_1\varepsilon_1 +$$

$$+C_0\|\varphi\|^{k(0)}\Psi_1(t,x)E_{\frac{c-c_0}{2}}(t,0,\eta) \leqslant C_1\varepsilon_1 +$$

$$+C_0\|\varphi\|^{k(0)}\Psi_0\,E_{\frac{c-c_0}{2}}(t,0,\eta),$$

де $\Psi_0 \equiv \max\limits_{x\in K} \Psi_1(T,x)$.

Нехай число $\varepsilon_1>0$ таке, що $C_1\varepsilon_1<\frac{\varepsilon}{2}$, а η - відповідне, згідно з (2.II), число. Виберемо мале число $\delta>0$ так, щоб

$$\forall t\in(0,\delta):\ C_0\|\varphi\|^{k(0)}\Psi_0\,E_{\frac{c-c_0}{2}}(t,0,\eta)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді одержимо (2.I0).▶

<u>Лема 2.2</u>. Якщо $\varphi\in L_p^{k(0)}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, то для функції (2.I) правильні такі твердження:

а) $\exists C>0\ \ \forall t\in(0,T]\ \ \forall m,|m|\leqslant 2b:$

$$\|D^m u(t,\cdot)\|_p^{k(t)}\leqslant C\,\|\varphi\|_p^{k(0)}\,[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}; \tag{2.I2}$$

б) при $1\leqslant p<\infty$

$$\lim_{t\to 0+}\|u(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{k(t)}=0, \tag{2.I3}$$

а при $p=\infty$ $u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0+]{}\varphi(\cdot)$, тобто

$$\forall\eta\in L_1^{-k(T)}:$$

$$\lim_{t\to 0+}\int_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)\overline{u(t,x)}\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)\overline{\varphi(x)}\,dx, \tag{2.I4}$$

де $L_1^{-k(T)}$ - множина всіх вимірних за Лебегом функцій $\eta:\mathbb{R}^n\longrightarrow$ $\longrightarrow\mathbb{C}_N$, для яких скінченна норма

$$\|\eta\|_1^{-k(T)}\equiv\|\Psi_1(T,\cdot)\eta(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

◀а) Нехай спочатку $p=\infty$. За допомогою нерівностей (I.98) і (I.I09) маємо

$$|D_x^m u(t,x)| \leq C[B(t,0)]^{-\frac{n+|m|}{2b}} \int_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|) \times$$
$$\times [E_{c_0}(t,0,|x-\xi|)\Psi_1(0,\xi)][|\varphi(\xi)|\Psi_{-1}(0,\xi)]d\xi \leq$$
$$\leq C\|\varphi\|_\infty^{k(0)}[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}\Psi_1(t,x)\int_{\mathbb{R}^n}[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}} \times$$
$$\times E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)d\xi = C\|\varphi\|_\infty^{k(0)}[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}\Psi_1(t,x),$$

звідки випливають оцінки (2.12) для $p=\infty$.

Якщо $1<p<\infty$, то за допомогою нерівностей (1.98) і (1.109), а також нерівності Гельдера одержуємо

$$|D_x^m u(t,x)| \leq C[B(t,0)]^{-\frac{n+|m|}{2b}} \int_{\mathbb{R}^n}[|\varphi(\xi)|\Psi_{-1}(0,\xi)] \times$$
$$\times [E_{c_0}(t,0,|x-\xi|)\Psi_1(0,\xi)]E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)d\xi \leq$$
$$\leq C[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}\Psi_1(t,x)[\int_{\mathbb{R}^n}(|\varphi(\xi)|\Psi_{-1}(0,\xi))^p \times$$
$$\times E_{\frac{c-c_0}{2}p}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi]^{\frac{1}{p}} \times$$
$$\times [\int_{\mathbb{R}^n}E_{\frac{c-c_0}{2}p'}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi]^{\frac{1}{p'}} =$$
$$= C[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}\Psi_1(t,x)[\int_{\mathbb{R}^n}(|\varphi(\xi)|\Psi_{-1}(0,\xi))^p \times$$
$$\times E_{\frac{c-c_0}{2}p}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi]^{\frac{1}{p}}, (t,x)\in\Pi_{(0,T]}^n,$$

де число p' таке, що $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Звідси маємо

$$\|D^m u(t,\cdot)\|_p^{k(t)} \leq C[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}[\int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n}(|\varphi(\xi)| \times$$
$$\times \Psi_{-1}(0,\xi))^p E_{\frac{c-c_0}{2}p}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi)dx]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= C\,[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}\,[\int_{\mathbb{R}^n}(|\varphi(\xi)|\,\Psi_{-1}(0,\xi))^p(\int_{\mathbb{R}^n}E_{\frac{c-c_0}{2}p}(t,0,|x-\xi|)\times$$
$$\times[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}dx)\,d\xi]^{\frac{1}{p}} = C\,\|\varphi\|^{k(0)}\,[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}},\ t\in(0,T].$$

Коли $p=1$, то аналогічно одержуємо

$$|D_x^m u(t,x)| \leqslant C\,[B(t,0)]^{-\frac{n+|m|}{2b}}\int_{\mathbb{R}^n}[|\varphi(\xi)|\,\Psi_{-1}(0,\xi)]\times$$
$$\times[E_{c_0}(t,0,|x-\xi|)\Psi_1(0,\xi)]\,E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)\,d\xi \leqslant$$
$$\leqslant C\,[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}\Psi_1(t,x)\int_{\mathbb{R}^n}[|\varphi(\xi)|\,\Psi_{-1}(0,\xi)]\times$$
$$\times E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)\,d\xi,\ (t,x)\in\Pi^n_{(0,T]},$$

звідки

$$\|D^m u(t,\cdot)\|_1^{k(t)} \leqslant C\,[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}\int_{\mathbb{R}^n}[|\varphi(\xi)|\,\Psi_{-1}(0,\xi)]\times$$
$$\times(\int_{\mathbb{R}^n}E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}dx)\,d\xi = C\,\|\varphi\|_1^{k(0)}[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}},$$
$$t\in(0,T].$$

б) Нехай $1\leqslant p<\infty$. Треба довести, що

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta\in(0,T\quad\forall t\in(0,\delta):$$
$$\|(\mathcal{Z}[\varphi])(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{k(t)}<\varepsilon. \tag{2.15}$$

Для $R>0$ розглянемо функцію $\varphi^{(R)}$, яка визначається рівностями

$$\varphi^{(R)}(x)\equiv\begin{cases}\varphi(x),\ x\in\mathbb{K}^n_R,\\ 0,\ x\in\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}^n_R.\end{cases}$$

Маємо

$$\|(\mathcal{Z}[\varphi])(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{k(t)} \leqslant \|(\mathcal{Z}[\varphi-\varphi^{(R)}])(t,\cdot)\|_p^{k(t)}+$$
$$+\|(\mathcal{Z}[\varphi^{(R)}])(t,\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{k(t)}+\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{k(t)},\ t\in(0,T]. \tag{2.16}$$

На підставі (2.12) правильна нерівність

$$\|(\mathcal{Z}[\varphi-\varphi^{(R)}])(t,\cdot)\|_p^{k(t)} \leqslant C\,\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{k(0)},\ t\in(0,T]. \tag{2.17}$$

З (2.16) і (2.17) випливає нерівність

$$\|(\mathcal{Z}[\varphi])(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{k(t)}\leqslant (C+1)\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{k(0)}+$$
$$+\|(\mathcal{Z}[\varphi^{(R)}])(t,\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{k(t)},\ t\in(0,T].$$

Нехай $\varepsilon>0$ задане. Виберемо $R>0$ так, щоб

$$\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{k(0)}\equiv\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}_R^n}[|\varphi(x)|\Psi_{-1}(0,x)]^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{2(C+1)}\,.$$

Оскільки

$$\|(\mathcal{Z}[\varphi^{(R)}])(t,\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{k(t)}\leqslant$$
$$\leqslant\|(\mathcal{Z}[\varphi^{(R)}])(t,\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\equiv J^{\frac{1}{p}},$$

то для доведення (2.15) досить довести, що

$$\exists\delta\in(0,T)\ \forall t\in(0,\delta):J^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.18}$$

Запишемо J у вигляді $J=J_1+J_2$, де

$$J_1\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}_{2R}^n}\Big|\int\limits_{\mathbb{K}_R^n}Z(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi\Big|^p dx,$$

$$J_2\equiv\int\limits_{\mathbb{K}_{2R}^n}\Big|\int\limits_{\mathbb{K}_R^n}Z(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi-\varphi^{(R)}(x)\Big|^p dx.$$

При $p=1$ одержуємо

$$J_1\leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}_{2R}^n}\Big(\int\limits_{\mathbb{K}_R^n}|\varphi^{(R)}(\xi)|E_c(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi\Big)dx=$$

$$=C\int\limits_{\mathbb{K}_R^n}|\varphi^{(R)}(\xi)|\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}_{2R}^n}E_c(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}dx\Big)d\xi\leqslant$$

$$\leqslant CE_{c-c_0}(t,0,R)\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi^{(R)}(\xi)|\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c_0}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}dx=$$

$$=C\|\varphi^{(R)}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}E_{c-c_0}(t,0,R),\ t\in(0,T]. \tag{2.19}$$

При $p>1$ за допомогою нерівності (I.98) і нерівності Гельдера для $t\in(0,T]$ і $x\in\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}^n_{2R}$ маємо

$$|\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi|\leq$$

$$\leq C\int_{\mathbb{K}^n_R} E_c(t,0,|x-\xi|)|\varphi^{(R)}(\xi)|[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi\leq$$

$$\leq C\Big(\int_{\mathbb{K}^n_R}|\varphi^{(R)}(\xi)|^p E_{\frac{c-c_0}{2}p}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi\Big)^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times\Big(\int_{\mathbb{K}^n_R} E_{(c-\frac{c-c_0}{2})p'}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi\Big)^{\frac{1}{p'}}\leq$$

$$\leq C\Big(\int_{\mathbb{K}^n_R}|\varphi^{(R)}(\xi)|^p E_{\frac{c-c_0}{2}p}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi\Big)^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times E_{\frac{c-c_0}{2}}(t,0,R)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0p'}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi\Big)^{\frac{1}{p'}}=$$

$$=C\Big(\int_{\mathbb{K}^n_R}|\varphi^{(R)}(\xi)|^p E_{\frac{c-c_0}{2}p}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi\Big)^{\frac{1}{p}}E_{\frac{c-c_0}{2}}(t,0,R),$$

звідки одержуємо

$$J_1\leq C\int_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}^n_{2R}}\Big(\int_{\mathbb{K}^n_R}|\varphi^{(R)}(\xi)|^p E_{\frac{c-c_0}{2}p}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi\Big)dx\times$$

$$\times E_{\frac{c-c_0}{2}p}(t,0,R)\leq C\|\varphi^{(R)}\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}E_{\frac{c-c_0}{2}p}(t,0,R),\ t\in(0,T]. \tag{2.20}$$

Оцінимо J_2 . Нехай $\varphi_h^{(R)}$ - середня функція для $\varphi^{(R)}$. Із властивостей середніх функцій випливає, що

$$\|\varphi^{(R)}-\varphi_h^{(R)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\xrightarrow[h\to 0]{}0. \tag{2.2I}$$

Оскільки $\varphi_h^{(R)}$ - нескінченно диференційовна фінітна функція, то на підставі (2.4) при фіксованому $h>0$ рівномірно по $x\in \mathbb{K}^n_{2R}$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,\varphi_h^{(R)}(\xi)d\xi-\varphi_h^{(R)}(x)\Big|\xrightarrow[t\to 0+]{}0. \qquad (2.22)$$

Маємо

$$J_2^{\frac{1}{p}}\le\Big(\int_{\mathbb{K}^n_{2R}}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)[\varphi^{(R)}(\xi)-\varphi_h^{(R)}(\xi)]d\xi\Big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\Big(\int_{\mathbb{K}^n_{2R}}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)\varphi_h^{(R)}(\xi)d\xi-\varphi_h^{(R)}(x)\Big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\Big(\int_{\mathbb{K}^n_{2R}}|\varphi_h^{(R)}(x)-\varphi^{(R)}(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Повторивши для першого доданка оцінки, аналогічні проведеним при доведенні (2.12), і використавши співвідношення (2.21) і (2.22), одержимо, що

$$\exists\,\delta_2>0\ \ \forall\,t\in(0,\delta_2):\ J_2<\frac{1}{2}\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^p. \qquad (2.23)$$

З нерівностей (2.19) і (2.20) випливає, що

$$\exists\,\delta_1>0\ \ \forall\,t\in(0,\delta_1):\ J_1<\frac{1}{2}\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^p, \qquad (2.24)$$

а з (2.23) і (2.24) одержуємо

$$\forall\,t\in(0,\delta),\ \delta\equiv\min\{\delta_1,\delta_2\}:\ J<\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^p$$

і, отже, нерівність (2.18) доведена.

Переходимо до доведення співвідношення (2.14). Спочатку зауважимо, що інтеграли з (2.14) мають зміст для будь-яких $\eta\in L_1^{-k(T)}$, $\varphi\in L_\infty^{k(0)}$ і $t\in(0,T]$, оскільки на підставі (2.12)

$$\forall\,t\in(0,T]:\ \|u(t,\cdot)\|_\infty^{k(t)}<\infty,$$

якщо $\varphi\in L_\infty^{k(0)}$. Справді, на підставі того, що $\Psi_1(0,x)\le\Psi_1(t,x)\le\le\Psi_1(T,x)$, $t\in(0,T]$, маємо

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)\overline{u(t,x)}dx\Big|\le\int_{\mathbb{R}^n}[|\eta(x)|\Psi_1(T,x)][|u(t,x)|\times$$

$$\times\Psi_{-1}(t,x)]dx\le\|u(t,\cdot)\|_\infty^{k(t)}\|\eta\|_1^{-k(T)}<\infty,$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)\overline{\varphi(x)}\,dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}[\,|\eta(x)|\,\Psi_1(T,x)][\,|\varphi(x)|\times$$
$$\times\Psi_{-1}(0,x)]\,dx \leqslant \|\varphi\|_\infty^{k(0)}\|\eta\|_1^{-k(T)}<\infty.$$

Використавши формулу (2.I), можна записати

$$\int_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)\overline{u(t,x)}\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}v'(t,\xi)\overline{\varphi(\xi)}\,d\xi,$$

де

$$v(t,\xi)\equiv\int_{\mathbb{R}^n}Z'(t,x;0,\xi)\eta(x)\,dx.$$

Тому для доведення співвідношення (2.I4) досить довести, що

$$\int_{\mathbb{R}^n}[v(t,\xi)-\eta(\xi)]'\overline{\varphi(\xi)}\,d\xi\xrightarrow[t\to 0+]{}0.$$

Оскільки $\varphi\in L_\infty^{k(0)}$, то маємо

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}[v(t,\xi)-\eta(\xi)]'\overline{\varphi(\xi)}\,d\xi\right|\leqslant\|\varphi\|_\infty^{k(0)}\int_{\mathbb{R}^n}|v(t,\xi)-\eta(\xi)|\times$$
$$\times\Psi_1(0,\xi)\,d\xi$$

і для доведення співвідношення (2.I4) треба довести, що

$$\int_{\mathbb{R}^n}|v(t,\xi)-\eta(\xi)|\,\Psi_1(0,\xi)\,d\xi\xrightarrow[t\to 0+]{}0. \qquad (2.25)$$

Оскільки $k(0)<k(T)$, то $\exists\gamma>0\ \forall t\in[0,\gamma): k(T)\geqslant$

$\geqslant z(t)\equiv c_0k(T)[c_0^{2b-1}+(k(T))^{2b-1}B(t,0)]^{1-q}\geqslant k(0)$, то

$$\forall t\in[0,\gamma): \exp\{z(t)|\xi|^q\}\geqslant\Psi_1(0,\xi), \xi\in\mathbb{R}^n,$$

і для доведення (2.25) досить довести твердження

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\in(0,\gamma)\ \forall t\in(0,\delta): \|v(t,\cdot)-\eta(\cdot)\|_1^{-z(t)}<\varepsilon, \qquad (2.26)$$

де

$$\|w(t,\cdot)\|_1^{-z(t)}\equiv\|w(t,\xi)\exp\{z(t)|\xi|^q\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Доведення (2.26) аналогічне доведенню нерівності (2.I5). Як і там, розглянемо для $R>0$ функцію $\eta^{(R)}$. Для $t\in(0,\gamma)$ маємо

$$\|v(t,\cdot)-\eta(\cdot)\|_1^{-z(t)}\leqslant\left\|\int_{\mathbb{R}^n}Z'(t,x;0,\xi)(\eta-\eta^{(R)})(x)\,dx\right\|_1^{-z(t)}+$$

$$+\|\int_{\mathbb{R}^n}\overline{Z}'(t,x;0,\xi)\eta^{(R)}(x)dx-\eta^{(R)}(\xi)\|_1^{-\tau(t)}+\|\eta-\eta^{(R)}\|_1^{-\tau(t)}\equiv$$

$$\equiv\sum_{j=1}^{3}K_j. \qquad (2.27)$$

Оцінимо K_1 . За допомогою оцінки (I.98) маємо

$$|\int_{\mathbb{R}^n}\overline{Z}'(t,x;0,\xi)(\eta-\eta^{(R)}(x)dx|\leq C\int_{\mathbb{R}^n}E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)\times$$

$$\times[E_{c_0}(t,0,|x-\xi|)\Psi_{-1}(T,x)][|(\eta-\eta^{(R)}(x)|\Psi_1(T,x)]dx\leq$$

$$\leq C\exp\{-\tau(t)|\xi|^q\}\int_{\mathbb{R}^n}E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)[|(\eta-\eta^{(R)})(x)|\times$$

$$\times\Psi_1(T,x)]dx, \qquad (2.28)$$

бо правильна нерівність

$$E_{c_0}(t,0,|x-\xi|)\Psi_{-1}(T,x)\leq\exp\{-\tau(t)|\xi|^q\},$$

$$t>0,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (2.29)$$

яка доводиться так само, як (I.I09).

З (2.28) випливає, що

$$K_1\leq C\|\eta-\eta^{(R)}\|_1^{-k(T)},\ t\in(0,\gamma). \qquad (2.30)$$

Оскільки $\tau(t)\leq k(T)$, $t\in(0,\gamma)$, то

$$K_3\leq\|\eta-\eta^{(R)}\|_1^{-k(T)},\ t\in(0,\gamma),$$

тому

$$K_1+K_3\leq(C+1)\|\eta-\eta^{(R)}\|_1^{-k(T)},\ t\in(0,\gamma).$$

Через те, що

$$\|\eta-\eta^{(R)}\|_1^{-k(T)}=\int_{\mathbb{R}^n\setminus K_R^n}|\eta(x)|\Psi_1(T,x)dx\xrightarrow[R\to\infty]{}0,$$

то

$$K_1+K_3\xrightarrow[R\to\infty]{}0,\ t\in(0,\gamma). \qquad (2.3I)$$

Запишемо K_2 у вигляді

$$K_2=\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus \mathbb{K}^n_{2R}} \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{Z}'(t,x;0,\xi)\eta^{(R)}(x)dx\Big| \Psi_1(T,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{K}^n_{2R}} \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{Z}'(t,x;0,\xi)\eta^{(R)}(x)dx-\eta^{(R)}(\xi)\Big|\Psi_1(T,\xi)d\xi\equiv$$

$$\equiv K_2'+K_2''.$$

Так само, як (2.30), доводиться нерівність

$$\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\bar{Z}'(t,x;0,\xi)\eta^{(R)}(x)dx\Big\|_1^{-\gamma(t)}\le C\,\|\eta^{(R)}\|_1^{-k(T)},$$

звідки випливає, що

$$K_2'\xrightarrow[R\to\infty]{}0,\ t\in(0,\gamma). \tag{2.32}$$

Для K_2'' маємо

$$K_2''\le\int\limits_{\mathbb{K}^n_{2R}}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\bar{Z}'(t,x;0,\xi)\eta^{(R)}(x)dx-\eta^{(R)}(\xi)\Big|d\xi.$$

Провівши для останнього інтеграла міркування, аналогічні проведеним вище для інтеграла J_2 , одержимо, що

$$K_2''\xrightarrow[t\to 0+]{}0,\ R>0. \tag{2.33}$$

Із співвідношень (2.27),(2.30)-(2.33) випливає (2.26).▶

Нехай $\mu:\mathcal{B}_n\longrightarrow\mathbb{C}_N$ - узагальнена борельова міра. Розглянемо інтеграл

$$u(t,x)\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi),(t,x)\in\Pi^n_{(0,T]}, \tag{2.34}$$

який називається інтегралом Пуассона узагальненої міри μ .

Нехай $C_0^{-k(T)}$ - множина всіх таких неперервних функцій η: $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}_N$, що $|\eta(x)|\Psi_1(T,x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0$. Для $\eta\in C_0^{-k(T)}$ покладемо

$$\|\eta\|_\infty^{-k(T)}\equiv\sup_{x\in\mathbb{R}^n}[|\eta(x)|\Psi_1(T,x)].$$

<u>Лема 2.3</u>. Нехай $\mu\in M^{k(0)}$. Тоді для функції (2.34) правильні

такі твердження:

а) $\exists\, C>0 \quad \forall t\in(0,T] \quad \forall m, |m|\leq 2b$:

$$\|D^m u(t,\cdot)\|_1^{k(t)} \leq C\,\|\mu\|^{k(0)}\,[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}; \tag{2.35}$$

б) $u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0+]{\alpha}\mu$, тобто $\forall \eta\in C_0^{-k(T)}$:

$$\lim_{t\to 0+}\int_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)\overline{u(t,x)}\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)\,d\overline{\mu(x)}. \tag{2.36}$$

◀ а) Використовуючи нерівності (I.98) і (I.109), одержуємо

$$|D_x^m u(t,x)|\leq C[B(t,0)]^{-\frac{n+|m|}{2b}}\int_{\mathbb{R}^n}E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)\times$$
$$\times[E_{c_0}(t,0,|x-\xi|)\Psi_1(0,\xi)]\,\Psi_{-1}(0,\xi)\,d|\mu|(\xi)\leq C[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}\times$$
$$\times\Psi_1(t,x)\int_{\mathbb{R}^n}[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)\Psi_{-1}(0,\xi)\,d|\mu|(\xi),$$
$$(t,x)\in\Pi^n_{(0,T]},$$

звідки випливає нерівність

$$\|D^m u(t,\cdot)\|_1^{k(t)}\leq C[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)\times$$
$$\times[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}dx\Big)\Psi_{-1}(0,\xi)\,d|\mu|(\xi)=C\,\|\mu\|^{k(0)}[B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}},$$
$$t\in(0,T].$$

б) Інтеграли з (2.36) мають місце для будь-яких $\eta\in C_0^{-k(T)}$, $\mu\in M^{k(0)}$ і $t\in(0,T]$. Справді, за допомогою оцінки (2.35) маємо

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)\overline{u(t,x)}\,dx\Big|\leq\int_{\mathbb{R}^n}[|\eta(x)|\Psi_1(T,x)][|u(t,x)|\times$$
$$\times\Psi_{-1}(t,x)]\,dx\leq\|\eta\|_\infty^{-k(T)}\|u(t,\cdot)\|_1^{k(t)}\leq C\,\|\eta\|_\infty^{-k(T)}\|\mu\|^{k(0)}<\infty,$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)\,d\overline{\mu(x)}\Big|\leq\int_{\mathbb{R}^n}[|\eta(x)|\Psi_1(T,x)]\Psi_{-1}(0,x)\,d|\mu|(x)\leq$$
$$\leq\|\eta\|_\infty^{-k(T)}\|\mu\|^{k(0)}<\infty.$$

Використовуючи (2.34), одержуємо

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)\overline{u(t,x)}dx-\int_{\mathbb{R}^n}\eta'(x)d\overline{\mu(x)}\Big|=\Big|\int_{\mathbb{R}^n}[v(t,\xi)-\eta(\xi)]'\times$$
$$\times\Psi_1(0,\xi)\Psi_{-1}(0,\xi)d\overline{\mu(\xi)}\Big|\leq\|v(t,\cdot)-\eta(\cdot)\|_\infty^{-k(0)}\|\mu\|^{k(0)},$$

де

$$v(t,\xi)\equiv\int_{\mathbb{R}^n}\overline{Z}'(t,x;0,\xi)\eta(x)dx.$$

Тому досить довести, що

$$\|v(t,\cdot)-\eta(\cdot)\|_\infty^{-\varkappa(t)}\xrightarrow[t\to 0+]{}0, \tag{2.37}$$

де функція $\varkappa$ та ж, що в лемі 2.2.

Нехай $R>0$ і θ_R – функція з простору $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ така, що $0\leq\theta_R\leq 1$ на $\mathbb{R}^n$, $\theta_R(x)=1$, $x\in K^n_{R/2}$ і $\theta_R(x)=0$, $x\in\mathbb{R}^n\setminus K^n_R$. Покладемо $\eta_R\equiv\theta_R\eta$. Для $t\in(0,\gamma)$ маємо

$$\|v(t,\cdot)-\eta(\cdot)\|_\infty^{-\varkappa(t)}\leq\Big\|\int_{\mathbb{R}^n}\overline{Z}'(t,x;0,\xi)(\eta-\eta_R)(x)\Big\|_\infty^{-\varkappa(t)}+$$
$$+\Big\|\int_{\mathbb{R}^n}\overline{Z}'(t,x;0,\xi)\eta_R(x)dx-\eta_R(\xi)\Big\|_\infty^{-\varkappa(t)}+\|\eta_R-\eta\|_\infty^{-\varkappa(t)}\equiv$$
$$\equiv\sum_{j=1}^{3}L_j. \tag{2.38}$$

Так само, як при доведенні нерівності (2.28), одержуємо

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\overline{Z}'(t,x;0,\xi)(\eta-\eta_R)(x)dx\Big|\leq C\,\|\eta-\eta_R\|_\infty^{-k(T)}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}dx\exp\{-\varkappa(t)|\xi|^q\},$$

звідки випливає нерівність

$$L_1\leq C\,\|\eta-\eta_R\|_\infty^{-k(T)},t\in(0,\gamma).$$

На підставі нерівності $\varkappa(t)\leq k(T)$, $t\in(0,\gamma)$, маємо

$$L_3\leq\|\eta-\eta_R\|_\infty^{-k(T)},t\in(0,\gamma),$$

тому

$$L_1+L_3\leq(C+1)\|\eta-\eta_R\|_\infty^{-k(T)},t\in(0,\gamma).$$

Оскільки

$$\|\eta-\eta_R\|_\infty^{-k(T)} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}^n_{R/2}} [\,|\eta(x)|\Psi_1(T,x)] \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,$$

то

$$L_1+L_3 \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,\ t\in(0,\gamma). \tag{2.39}$$

Далі маємо

$$L_2 \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}^n_{2R}} (|\int_{\mathbb{R}^n} \overline{Z}'(t,x;0,\xi)\eta_R(x)dx\,|\exp\{z(t)|\xi|^q\}) +$$

$$+\exp\{k(T)(2R)^q\}\sup_{\xi\in\mathbb{K}^n_{2R}} |\int_{\mathbb{R}^n} \overline{Z}'(t,x;0,\xi)\eta_R(x)dx-\eta_R(\xi)| \equiv$$

$$\equiv L_2' + L_2''. \tag{2.40}$$

За допомогою нерівностей (I.98) і (2.29) одержуємо

$$L_2' \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{K}^n_{2R}} (C\int_{\mathbb{K}^n_R} E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)[E_{c_0}(t,0,|x-\xi|)\times$$

$$\times\Psi_{-1}(T,x)][\,|\eta_R(x)|\Psi_1(T,x)][B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}dx\exp\{z(t)|\xi|^q\})\leq$$

$$\leq C\|\eta_R\|_\infty^{-k(T)} E_{\frac{c-c_0}{2}}(t,0,R)\int_{\mathbb{R}^n} E_{\frac{c-c_0}{2}}(t,0,|x-\xi|)[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}dx\leq$$

$$\leq C\,\|\eta\|_\infty^{-k(T)} E_{\frac{c-c_0}{2}}(t,0,R) \xrightarrow[t\to 0+]{} 0,\ R>0. \tag{2.41}$$

Оскільки η_R – неперервна і обмежена функція, то аналогічно доведенню твердження (2.4) доводиться, що

$$L_2'' \xrightarrow[t\to 0+]{} 0,\ R>0. \tag{2.42}$$

Із співвідношень (2.38)-(2.42) випливає потрібне твердження (2.37).▶

<u>2.2. Об'ємні потенціали</u>. Наведемо деякі властивості інтегралів вигляду

$$u(t,x)=\int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,\ (t,x)\in\Pi^n_{(0,T]}, \tag{2.43}$$

де Z - ФМР задачі Коші для системи (I.4). Розглядатимемо як випадок слабкого (інтеграл (I.97) збігається), так і сильного (інтеграл (I.97) розбігається) вироджень.

Для густини потенціалу (2.43) - функції $f:\Pi^n_{(0,T]}\to\mathbb{C}_N$ - використовуватимемо такі умови:

Γ_1. f неперервна в $\Pi^n_{(0,T]}$;

Γ_2. f задовольняє в $\Pi^n_{(0,T]}$ локальну умову Гельдера по x , тобто

$$\forall R>0\ \exists L>0\ \exists \lambda\in(0,1]\ \forall t\in(0,T]\ \forall\{x,\xi\}\subset K^n_R:$$
$$|f(t,x)-f(t,\xi)|\le L\,|x-\xi|^{\lambda};$$

Γ_3. $\exists C>0\quad \forall t\in(0,T]:$

$$F_0(t)\equiv\int_0^t[B(t,\tau)]^{-1+\frac{1}{2b}}\|f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau)}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\le C,$$

де норма $\|f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau)}$ визначена в (2.2);

Γ_4. $\exists C>0\quad \forall t\in(0,T]:$

$$F_p(t)\equiv\int_0^t[B(t,\tau)]^{-1+\frac{1}{2b}}\|f(\tau,\cdot)\|_p^{k(\tau)}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\le C,$$
$$1\le p\le\infty,$$

де норма $\|f(\tau,\cdot)\|_p^{k(\tau)}$ визначена в (2.2);

Γ_5. f задовольняє в $\Pi^n_{(0,T]}$ таку локальну умову Гельдера по x :

$$\forall R>0\ \exists L>0\ \exists \lambda\in(0,1]\ \forall t\in(0,T]\ \forall\{x,\xi\}\subset K^n_R:$$
$$|f(t,x)-f(t,\xi)|\le L\,\delta(t)\,E^{-d}(T,t)\,|x-\xi|^{\lambda},$$

де $\delta:(0,T]\to[0,\infty)$ - функція, яка задовольняє умову $\int_0^T\frac{\delta(t)}{\alpha(t)}\,dt<\infty$, а d - стала з оцінок (I.55) і (I.56);

Γ_6. $\exists C>0\quad \forall t\in(0,T]:$

$$F(t)\equiv\int_0^t E^{d}(T,\tau)\|f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau)}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\le C,$$

де норма $\|f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau)}$ і стала d такі ж, як відповідно в умовах Γ_3 і Γ_5.

Лема 2.4. Нехай для системи (I.4) виконуються умови I і 2 з п. I.I і має місце слабке виродження, а для функції f виконується одна з таких серій умов:

а) Γ_1, Γ_2 і Γ_3;

б) Γ_1, Γ_2 і Γ_4.

Тоді:

I) функція u (2.43) має неперервні похідні, які входять у систему (I.4), при цьому похідні від u по x до порядку $2b-1$ одержуються формальним диференціюванням під знаками інтегралів, а похідні старших порядків обчислюються за такими формулами:

$$D_x^k u(t,x)=\int_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}D_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\,[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)]\,d\xi+$$
$$+\int_0^t\Big[\int_{\mathbb{R}^n}D_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\Big]\frac{f(\tau,x)}{\alpha(\tau)}\,d\tau,\quad (t,x)\in\Pi^n_{(0,T]},\ |k|=2b,\tag{2.44}$$

$$\alpha(t)D_t^1 u(t,x)=f(t,x)+\int_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n}\alpha(t)D_t^1 Z(t,x;\tau,\xi)\times$$
$$\times[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)]\,d\xi+\int_0^t\Big[\int_{\mathbb{R}^n}\alpha(t)D_t^1 Z(t,x;\tau,\xi)\Big]\times$$
$$\times\frac{f(\tau,x)}{\alpha(\tau)}\,d\tau,\quad (t,x)\in\Pi^n_{(0,T]};\tag{2.45}$$

2) для функції u правильні відповідно такі оцінки:

а) $\exists C>0\ \ \forall t\in(0,T]\ \ \forall m,\ |m|\le 2b-1:$

$$\|D^m u(t,\cdot)\|^{k(t)}\le C\,F_0(t);\tag{2.46}$$

б) $\exists C>0\ \ \forall t\in(0,T]\ \ \forall m,\ |m|\le 2b-1:$

$$\|D^m u(t,\cdot)\|_p^{k(t)}\le C\,F_p(t).\tag{2.47}$$

◀ Доведення твердження I) аналогічне доведенню властивості 5 з п. I.3. Доведемо твердження 2).

а) За допомогою нерівностей (2.3), в яких узято $|m| \leqslant 2b-1$ і τ замість 0 маємо

$$\|D^m u(t,\cdot)\|^{k(t)} = \|\int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^m Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi\|^{k(t)} \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t (\|\int_{\mathbb{R}^n} D_x^m Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi\|^{k(t)}) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \leqslant$$
$$\leqslant C \int_0^t [B(t,\tau)]^{-\frac{|m|}{2b}} \|f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \leqslant C F_0(t), t \in (0,T],$$

бо $B(t,\tau) \leqslant B(T,0) < \infty$.

б) Аналогічно за допомогою нерівності Мінковського та (2.12) маємо

$$\|D^m u(t,\cdot)\|_p^{k(t)} \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t (\|\int_{\mathbb{R}^n} D_x^m Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi\|_p^{k(t)}) \times$$
$$\leqslant C \int_0^t [B(t,\tau)]^{-\frac{|m|}{2b}} \|f(\tau,\cdot)\|_p^{k(\tau)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \leqslant C F_p(t),$$
$$t \in (0,T]. \blacktriangleright$$

<u>Лема 2.5</u>. Якщо для системи (I.4) виконуються умови I і 2 з п. I.I і має місце сильне виродження, а для функції f виконуються умови Γ_I, Γ_5 і Γ_6, то для функції (2.43) правильні твердження I) з леми 2.4 та оцінка

$$\|u(t,\cdot)\|^{k(t)} \leqslant C E^{-d}(T,t) F(t), t \in (0,T]. \tag{2.48}$$

◀ Доведемо тільки нерівність (2.48). Доведення тверджень I) з леми 2.4 також аналогічне доведенню властивості 5 з п. I.3.

За допомогою нерівностей (I.55) і (I.I09) маємо

$$|u(t,x)| \leqslant C \int_0^t E^d(t,\tau) E^d(T,\tau) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,\tau,|x-\xi|) \times$$
$$\times [E_{c_0}(t,\tau,|x-\xi|) \Psi_1(\tau,\xi)] E^d(T,\tau) [|f(\tau,\xi)| \Psi_{-1}(\tau,\xi)] \times$$

$$\times [B(t,\tau)]^{-\frac{n}{2b}} d\xi \leq C E^{-d}(T,t) \Psi_1(t,x) \int_0^t E^d(T,\tau) \times$$

$$\times \| f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} = C E^{-d}(T,t) F(t) \Psi_1(t,x),$$

$$(t,x) \in \Pi^n_{(0,T]},$$

звідки випливає нерівність (2.48).▶

2.3. Інтегральні зображення розв'язків задачі Коші у випадку слабкого виродження. Наведемо леми про зображення через інтеграли Пуассона та об'ємні потенціали розв'язків задачі Коші для системи (I.4) із слабким виродженням. У цьому пункті припускаємо, що виконуються умови I–3 з п. I.I.

Лема 2.6. Нехай для розв'язку u і правої частини f системи (I.4) виконуються такі умови:

I) $\exists\, C>0 \quad \forall t \in (0,T]: \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t)} \leq C, 1 \leq p \leq \infty;$

2) u задовольняє початкову умову в розумінні співвідношень (2.I3) при $1 \leq p < \infty$ і (2.I4) при $p=\infty$, в яких $\varphi \in L_p^{k(0)}$, $1 \leq p \leq \infty$;

3) f неперервна в $\Pi^n_{(0,T]}$ і задовольняє умову

$$\int_0^T \| f(\tau,\cdot)\|_p^{k(\tau)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty.$$

Тоді розв'язок u зображується у вигляді

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)d\xi, (t,x) \in \Pi^n_{(0,T]}. \qquad (2.49)$$

◀ За допомогою методики, використаної при доведенні властивості 3 з п. I.5, доводиться для заданого розв'язку u правильність формули (I.II5) з $t_0=0$. Далі треба в цій формулі перейти до границі при $h \to 0$. При цьому досить довести правильність співвідношення

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi \tag{2.50}$$

для будь-якої фіксованої точки $(t,x)\in\Pi^n_{(0,T]}$.

Використовуватимемо нерівність

$$|Z(t,x;h,\xi)-Z(t,x;0,\xi)|\leqslant CA(h,0)[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{n+2b}{2b}}\times$$
$$\times E_c(t,0,|x-\xi|),\ A(h,0)\equiv\int_0^h\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}, \tag{2.51}$$

яка правильна для будь-яких $t\in(0,T]$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$ і $h\in(0,\frac{t}{2})$. Ця нерівність доводиться за допомогою оцінки (I.105) з $k_0=0$, $m_0=1$ і $k=m=0$ таким чином:

$$|Z(t,x;h,\xi)-Z(t,x;0,\xi)|=|\int_0^h D^1_\tau Z(t,x;\tau,\xi)d\tau|\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^h\frac{1}{\alpha(\tau)}|\alpha(\tau)D^1_\tau Z(t,x;\tau,\xi)|d\tau\leqslant C\int_0^h\frac{1}{\alpha(\tau)}[B(t,\tau)]^{-\frac{n+2b}{2b}}\times$$
$$\times E_c(t,\tau,|x-\xi|)d\tau\leqslant CA(h,0)[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{n+2b}{2b}}E_c(t,0,|x-\xi|),$$

бо для $\tau\in(0,h)$ і $h\in(0,\frac{t}{2})$ $B(t,\frac{t}{2})\leqslant B(t,h)\leqslant B(t,\tau)\leqslant$ $\leqslant B(t,0)$.

Використовуючи нерівності (2.51) і (I.98), а також нерівність

$$E_{c_0}(t,0,|x-\xi|)\Psi_1(h,\xi)\leqslant\exp\{k_0(t,k(h))|x|^q\}, \tag{2.52}$$
$$B(t,0)<\left(\frac{c_0}{k(h)}\right)^{2b-1},\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де

$$k_0(t,a)\equiv c_0a[c_0^{2b-1}-B(t,0)a^{2b-1}]^{1-q},$$

яка доводиться аналогічно доведенню нерівності (I.109), маємо

$$|\Delta_h|\equiv|\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)d\xi-\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi|\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |Z(t,x;h,\xi) - Z(t,x;0,\xi)| |u(h,\xi)| d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |Z(t,x;0,\xi)| |u(h,\xi) - \varphi(\xi)| d\xi \leqslant C A(h,0) [B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{n+2b}{2b}} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|) [E_{c_0}(t,0,|x-\xi|) \Psi_1(h,\xi)] [|u(h,\xi)| \times$$

$$\times \Psi_{-1}(h,\xi)] d\xi + C [B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|) \times$$

$$\times [E_{c_0}(t,0,|x-\xi|) \Psi_1(h,\xi)] [|u(h,\xi) - \varphi(\xi)| \Psi_{-1}(h,\xi)] d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C \{ A(h,0) [B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{n+2b}{2b}} J_1^{(h)} + [B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}} J_2^{(h)} \} \times$$

$$\times \exp\{k_0(t,k(h)) |x|^q\}, \tag{2.53}$$

де

$$J_1^{(h)} \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|) [|u(h,\xi)| \Psi_{-1}(h,\xi)] d\xi,$$

$$J_2^{(h)} \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|) [|u(h,\xi) - \varphi(\xi)| \Psi_{-1}(h,\xi)] d\xi.$$

Для $p=1$ маємо

$$J_1^{(h)} \leqslant \|u(h,\cdot)\|_1^{k(h)}, \quad J_2^{(h)} \leqslant \|u(h,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_1^{k(h)}, \tag{2.54}$$

а для $1 < p < \infty$ за допомогою нерівності Гельдера одержуємо

$$J_1^{(h)} \leqslant \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c-c_0)p'}(t,0,|x-\xi|) [B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}} d\xi \Big)^{\frac{1}{p'}} [B(t,0)]^{\frac{n}{2bp'}} \times$$

$$\times \|u(h,\cdot)\|_p^{k(h)} = C [B(t,0)]^{\frac{n}{2bp'}} \|u(h,\cdot)\|_p^{k(h)},$$

$$J_2^{(h)} \leqslant C [B(t,0)]^{\frac{n}{2bp'}} \|u(h,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{k(h)}. \tag{2.55}$$

З нерівностей (2.53)-(2.55) на підставі умов 1) і 2) леми для $1 \leq p < \infty$ випливає співвідношення (2.50).

Це співвідношення має місце і при $p = \infty$. Справді, розглянемо різницю

$$\Delta_h = \int_{\mathbb{R}^n} [Z(t,x;h,\xi) - Z(t,x;0,\xi)] u(h,\xi) d\xi +$$
$$+ \left(\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi) u(h,\xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi) \varphi(\xi) d\xi \right) \equiv$$
$$\equiv L_1^{(h)} + L_2^{(h)}. \tag{2.56}$$

Так само, як у (2.53), маємо

$$|L_1^{(h)}| \leq CA(h,0)[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{n+2b}{2b}} \times$$
$$\times \exp\{k_0(t,k(h))|x|^q\} J_1^{(h)}. \tag{2.57}$$

На підставі умови I) леми одержуємо

$$J_1^{(h)} \leq C[B(t,0)]^{\frac{n}{2b}} \|u(h,\cdot)\|_\infty^{k(h)} \leq C[B(t,0)]^{\frac{n}{2b}}, h > 0.$$

Звідси та з (2.57) випливає співвідношення

$$\lim_{h \to 0+} L_1^{(h)} = 0. \tag{2.58}$$

Оскільки функція $\eta(\xi) \equiv \overline{Z}'(t,x;0,\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, на підставі нерівностей (I.98) і (2.52), де h замінено на T, задовольняє нерівність

$$|\eta(\xi)| \Psi_1(T,\xi) \leq C[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}} E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|) \times$$
$$\times \exp\{k_0(t,k(T))|x|^q\} \tag{2.59}$$

і, отже, $\eta \in L_1^{-k(T)}$, то на підставі співвідношення (2.I4) одержуємо

$$\lim_{h \to 0+} L_2^{(h)} = 0. \tag{2.60}$$

Із співвідношень (2.56), (2.58) і (2.60) випливає (2.50), якщо $p = \infty$. ▶

<u>Лема 2.7</u>. Якщо для розв'язку u і правої частини f системи (I.4) виконуються такі умови:

I) $\exists C>0 \ \forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\|_1^{k(t)}\leqslant C$;

2) для u має місце співвідношення (2.36), в якому $\mu\in M^{k(0)}$;

3) f задовольняє умову 3) з леми 2.6 при $p=1$,

то для u має місце зображення

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi)+$$
$$+\int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi,\ (t,x)\in\Pi^n_{(0,T]}. \qquad (2.6I)$$

◀ Якщо виконуються умови I) і 3) леми, то так само, як при доведенні властивості 3 з п. I.5, а також леми 2.6, доводиться правильність формули (I.II5) з $t_0=0$. Якщо в цій формулі перейти до границі при $h\to 0$, то одержимо (2.6I). Для обгрунтування цього досить довести співвідношення

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)\,d\xi=\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi). \qquad (2.62)$$

Розглянемо різницю

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)\,d\xi-\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi)=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}[Z(t,x;h,\xi)-Z(t,x;0,\xi)]\,u(h,\xi)\,d\xi+$$
$$+\Big(\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)u(h,\xi)\,d\xi-\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi)\Big)\equiv$$
$$\equiv I_1^{(h)}+I_2^{(h)}. \qquad (2.63)$$

Для $I_1^{(h)}$ має місце нерівність (2.57), в якій для $J_1^{(h)}$ правильна оцінка (2.54). На підставі умови I) леми звідси одержуємо, що

$$\lim_{h\to 0+} I_1^{(h)}=0. \qquad (2.64)$$

З нерівності (2.59) випливає, що функція $\eta(\xi)\equiv \overline{Z}'(t,x;0,\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, належить до простору $C_0^{-k(T)}$. Тому на підставі умови

2) леми маємо

$$\lim_{h\to 0+} I_2^{(h)}=0. \qquad (2.65)$$

Із співвідношень (2.63)-(2.65) випливає співвідношення (2.62).▶

§ 3. КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМИ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

3.I. Теореми про коректну розв'язність задачі Коші у випадку слабкого виродження. У випадку слабкого виродження можна розглядати задачу Коші для системи (I.4) з початковою умовою

$$u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n. \qquad (3.I)$$

Наведемо тут теореми про коректну розв'язність задачі (I.4), (3.I), які випливають з властивостей ФМР та відповідних потенціалів, викладених у § I і 2. У цьому і наступному пунктах припускатимемо, що виконуються умови I-3 з п. I.I та інтеграл (I.97) збігається.

Теорема 3.I. Нехай $\varphi\in C^{k(0)}$, а функція f задовольняє умови Γ_I, Γ_2 і Γ_3 з п. 2.2, тоді формулою (2.49) визначається єдиний розв'язок системи (I.4), який задовольняє такі умови:

а) $\exists\, C>0\ \forall t\in(0,T]\ \forall m,\ |m|\le 2b-1:$

$$\|D^m u(t,\cdot)\|^{k(t)}\le C\left([B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}\|\varphi\|^{k(0)}+F_0(t)\right),$$

де функція F_0 з умови Γ_3;

б) для будь-якого компакту $\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n$ рівномірно на $\mathbb{K}$

$$u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0+]{}\varphi(\cdot).$$

◀Те, що інтеграл Пуассона (2.I) та об'ємний потенціал (2.43) є розв'язками відповідно однорідної та неоднорідної системи (I.4), випливає з леми 2.4 і того, що ФМР $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\leq T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, як функція t, x, є розв'язком однорідної системи. Твердження а) є наслідком тверджень а) з лем 2.I і 2.4. Твердження а) є наслідком тверджень а) з лем 2.I і 2.4. Твердження б) для інтеграла Пуассона доведене в лемі 2.I, а з оцінки (2.46) для об'ємного потенціалу u випливає, що рівномірно на $\mathbb{K}$

$$u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0+]{}0.$$

Єдиність розв'язку із розглядуваного класу випливає з властивості 3 з п. I.5.▶

<u>Теорема 3.2</u>. Якщо $\varphi\in L_p^{k(0)}$, $1\leq p\leq\infty$, а функція f задовольняє умови Γ_I, Γ_2 і Γ_4 з п. 2.2, то формула (2.49) визначає єдиний розв'язок системи (I.4), для якого виконуються такі умови:

а) $\exists C>0\ \forall t\in(0,T]\ \forall m, |m|\leq 2b-1$:

$$\|D^m u(t,\cdot)\|_p^{k(t)}\leq C\left([B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}}\|\varphi\|_p^{k(0)}+F_p(t)\right),$$

де F_p - функція з умови Γ_4;

б) при $1\leq p<\infty$

$$\lim_{t\to 0+}\|u(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{k(t)}=0,$$

а при $p=\infty$ $u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0+]{\omega}\varphi(\cdot)$, тобто мають місце співвідношення (2.I4).

◀Твердження теореми 3.2 випливають з лем 2.2, 2.4 і 2.6 так само, як відповідні твердження теореми 3.I випливають з лем 2.I і 2.4, а також властивості 3 з п. I.5.▶

<u>Теорема 3.3</u>. Нехай узагальнена міра $\mu\in M^{k(0)}$, а функція f задовольняє умови Γ_I, Γ_2 і Γ_4 з $p=1$, тоді формулою (2.6I) визначається єдиний розв'язок системи (I.4), який має такі властивості:

а) $\exists C>0 \ \forall t\in(0,T] \ \forall m, |m|\leq 2b-1$:

$$\|D^m u(t,\cdot)\|_1^{k(t)} \leq C\left([B(t,0)]^{-\frac{|m|}{2b}} \|\mu\|^{k(0)} + F_1(t)\right);$$

б) $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0+]{cu} \mu$, тобто правильні співвідношення (2.36).

◀ Твердження теореми доводяться за допомогою лем 2.3, 2.4 і 2.7 так само, як і твердження попередніх теорем.▶

3.2. Інтегральне зображення та множини початкових значень розв'язків систем із слабким виродженням. У цьому пункті наведемо теорему, яка є у певному розумінні оберненою до теорем 3.2 і 3.3.

Теорема 3.4. Нехай для розв'язку u і правої частини системи (I.4) із слабким виродженням виконуються такі умови:

а) $\exists C>0 \ \forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t)} \leq C$

з деяким $p\in[1,\infty]$;

б) f задовольняє умови Γ_1, Γ_2 і Γ_4 з п. 2.2.

Тоді при $1<p\leq\infty$ існує єдина функція $\varphi\in L_p^{k(0)}$, а при $p=1$ – єдина узагальнена міра $\mu\in M^{k(0)}$ такі, що розв'язок u зображуються відповідно у вигляді (2.49) і (2.6I).

◀ Покладемо

$$v(t,x)\equiv u(t,x)-u_0(t,x),$$

$$u_0(t,x)\equiv\int_0^t\frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,\ (t,x)\in\Pi^n_{(0,T]}.$$

З умови а) та леми 2.4 випливає нерівність

$$\forall t\in(0,T]: \|v(t,\cdot)\|_p^{k(t)} \leq C, \tag{3.2}$$

з деякими $C>0$ і $1\leq p\leq\infty$, причому v є розв'язком в $\Pi^n_{(0,T]}$ однорідної системи (I.4), бо u і u_0 – розв'язки неоднорідної системи (I.4).

Отже, для доведення теореми 3.4 досить довести таке твердження: нехай v - розв'язок однорідної системи (I.4), який задовольняє умову (3.2), тоді при $1 < p \leq \infty$ існує єдина функція $\varphi \in L_p^{k(0)}$, а при $p = 1$ - єдина узагальнена міра $\mu \in M^{k(0)}$ такі, що розв'язок v зображується у вигляді інтеграла Пуассона відповідно функції φ

$$v(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \; (t,x) \in \Pi^n_{(0,T]}, \tag{3.3}$$

та узагальненої міри μ

$$v(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi), \; (t,x) \in \Pi^n_{(0,T]}. \tag{3.4}$$

Для доведення цього твердження використовуємо методику з [9]. Нехай спочатку $1 < p \leq \infty$. З умови (3.2) випливає, що послідовність функцій

$$\{v(\tfrac{1}{\nu},x)\Psi_{-1}(\tfrac{1}{\nu},x), x \in \mathbb{R}^n, \nu \geq 1\} \tag{3.5}$$

обмежена в просторі $L_p(\mathbb{R}^n)$. Цей простір ізометричний простору, спряженому до $L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. За теоремою про слабку компактність обмеженої множини в спряженому просторі послідовність (3.5) слабко компактна в $L_p(\mathbb{R}^n)$. Тому існує її підпослідовність

$$\{v(\tfrac{1}{\nu(\tau)},x)\Psi_{-1}(\tfrac{1}{\nu(\tau)},x), x \in \mathbb{R}^n, \tau \geq 1\}, \tag{3.6}$$

яка слабко збігається до деякої функції $\chi \in L_p(\mathbb{R}^n)$, тобто

$$\forall \eta \in L_{p'}(\mathbb{R}^n): \lim_{\tau\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\eta}'(\xi)\Psi_{-1}(\tfrac{1}{\nu(\tau)},\xi)v(\tfrac{1}{\nu(\tau)},\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\eta}'(\xi)\chi(\xi)d\xi. \tag{3.7}$$

Покладемо $\varphi(\xi) = \chi(\xi)\Psi_1(0,\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тоді $\varphi \in L_p^{k(0)}$ і співвідношення (3.7) запишеться у вигляді

$$\forall \eta \in L_{p'}(\mathbb{R}^n): \lim_{\tau \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\eta}'(\xi) \Psi_{-1}\left(\frac{1}{\gamma(\tau)}, \xi\right) v\left(\frac{1}{\gamma(\tau)}, \xi\right) d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\eta}'(\xi) \Psi_{-1}(0, \xi) \varphi(\xi) d\xi. \tag{3.8}$$

Візьмемо фіксовану точку $(t, x) \in \Pi^n_{(0,T]}$ і розглянемо функцію

$$\eta(\xi) \equiv \overline{Z}'(t, x; 0, \xi) \Psi_1(0, \xi), \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.9}$$

З оцінки

$$|\eta(\xi)| \leqslant C [B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}} E_c(t, 0, |x-\xi|) \Psi_1(0, \xi) \leqslant$$
$$\leqslant C [B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}} E_{c-c_0}(t, 0, |x-\xi|) \Psi_1(t, x), \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.10}$$

яка одержується за допомогою нерівностей (I.98) і (I.109), випливає, що $\eta \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$. При цьому згідно з (3.8) маємо

$$\lim_{\tau \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \Psi_1(0, \xi) \Psi_{-1}\left(\frac{1}{\gamma(\tau)}, \xi\right) v\left(\frac{1}{\gamma(\tau)}, \xi\right) d\xi =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi. \tag{3.11}$$

Припускатимемо, що $\frac{1}{\gamma(\tau)} \leqslant \frac{t}{2}$, $\tau \geqslant 1$. Так само, як була одержана формула (I.115), доводиться формула

$$v(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z\left(t, x; \frac{1}{\gamma(\tau)}, \xi\right) v\left(\frac{1}{\gamma(\tau)}, \xi\right) d\xi. \tag{3.12}$$

На підставі рівності (3.12) маємо

$$v(t, x) - \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left[Z\left(t, x; \frac{1}{\gamma(\tau)}, \xi\right) - \right.$$

$$\left. - Z(t, x; 0, \xi) \right] v\left(\frac{1}{\gamma(\tau)}, \xi\right) d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) [1 - \Psi_1(0, \xi) \times$$

$$\times \Psi_{-1}\left(\frac{1}{\gamma(\tau)}, \xi\right)] v\left(\frac{1}{\gamma(\tau)}, \xi\right) d\xi + \left[\int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \Psi_1(0, \xi) \times \right.$$

$$\times \Psi_{-1}\left(\frac{1}{\gamma(r)},\xi\right) v\left(\frac{1}{\gamma(r)},\xi\right)d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi] \equiv$$
$$\equiv \sum_{j=1}^{3} I_j^{(r)}, \ r \geq 1. \tag{3.13}$$

Щоб одержати зображення v у вигляді (3.3), досить довести, що для

$$\lim_{r\to\infty} I_j^{(r)} = 0. \tag{3.14}$$

З (3.11) випливає (3.14) для $j=3$. Доведемо (3.14) для $j=1,2$. За допомогою нерівності Гельдера та оцінки (3.2) маємо

$$| I_2^{(r)} | \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} F_r(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}, \tag{3.15}$$

де для $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $r \geq 1$

$$F_r(\xi) \equiv |Z(t,x;0,\xi)|^{p'} |\Psi_1\left(\frac{1}{\gamma(r)},\xi\right) - \Psi_1(0,\xi)|^{p'}.$$

Дослідимо властивості функцій F_r, $r \geq 1$. За допомогою оцінки (1.98) та нерівностей (1.109) і (2.52) одержуємо

$$(F_r(\xi))^{\frac{1}{p'}} \leq C[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}}(\exp\{k_0(t,k(\frac{1}{\gamma(r)}))|x|^q\} +$$
$$+\Psi_1(t,x))E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|) \leq C[B(t,0)]^{-\frac{n}{2b}} \times$$
$$\times(\exp\{k_0(t,k(\frac{1}{\gamma(1)}))|x|^q + \Psi_1(t,x))E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|),$$
$$\xi \in \mathbb{R}^n, r \geq 1,$$

звідки випливає існування у послідовності $\{F_r, r \geq 1\}$ інтегровної мажоранти. А оскільки для будь-якого $\xi \in \mathbb{R}^n$ $\lim_{r\to\infty} F_r(\xi) = 0$, то на підставі теореми Лебега про обмежену збіжність

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_r(\xi)d\xi = 0.$$

Звідси з урахуванням (3.15) одержуємо (3.14) для $j=2$.

Доведемо (3.14) для $j=1$. Використовуючи (2.51),(2.52) і

(3.2) маємо

$$|I_1^{(z)}|\leq CA\left(\frac{1}{\gamma(z)},0\right)[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{n+2b}{2b}}\exp\{k_0(t,k(\tfrac{1}{\gamma(z)}))|x|^q\}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}E_{c-c_0}(t,0,|x-\xi|)[|v(\tfrac{1}{\gamma(z)},\xi)|\,\Psi_{-1}(\tfrac{1}{\gamma(z)},\xi)]d\xi\leq$$
$$\leq CA\left(\frac{1}{\gamma(z)},0\right)[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{n+2b}{2b}}\exp\{k_0(t,k(\tfrac{1}{\gamma(z)}))|x|^q\}\times$$
$$\times\|v(\tfrac{1}{\gamma(z)},\cdot)\|_p^{k(\frac{1}{\gamma(z)})}\left(\int_{\mathbb{R}^n}E_{(c-c_0)p'}(t,0,|x-\xi|)d\xi\right)^{\frac{1}{p'}}\xrightarrow[z\to\infty]{}0.$$

Нехай $p=1$. З умови (3.2) випливає, що послідовність (3.5) обмежена в просторі $L_1(\mathbb{R}^n)$. Цей простір вкладається у простір узагальнених мір M . Як уже було сказано на початку п. 2.I, простір M ізометричний просторові, спряженому до C_0 . З обмеженості в $L_1(\mathbb{R}^n)$ послідовності (3.5) випливає обмеженість відповідної послідовності елементів простору M . Звідси випливає слабка компактність останньої. Тому існує підпослідовність (3.6) та елемент $\gamma\in M$ такі, що

$$\forall\eta\in C_0:\ \lim_{z\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\eta}'(\xi)\Psi_{-1}\left(\frac{1}{\gamma(z)},\xi\right)v\left(\frac{1}{\gamma(z)},\xi\right)d\xi=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\eta}'(\xi)\,d\gamma(\xi). \tag{3.16}$$

Так само, як у [9], за узагальненою мірою γ будується узагальнена міра μ , яка належить до простору $M^{k(0)}$ і за допомогою неї співвідношення (3.16) записується у вигляді

$$\forall\eta\in C_0:\ \lim_{z\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\eta}'(\xi)\Psi_{-1}\left(\frac{1}{\gamma(z)},\xi\right)v\left(\frac{1}{\gamma(z)},\xi\right)d\xi=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\eta}'(\xi)\Psi_{-1}(0,\xi)\,d\mu(\xi). \tag{3.17}$$

З оцінок (3.10) випливає, що функція (3.9) (точніше кожний стовпчик цієї матриці) належить до простору C_0 для будь-якої фіксованої точки $(t,x)\in \Pi^n_{(0,T]}$. Тому згідно з (3.17) маємо

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\Psi_1(0,\xi)\Psi_{-1}\left(\tfrac{1}{\nu(\tau)},\xi\right)v\left(\tfrac{1}{\nu(\tau)},\xi\right)d\xi=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi). \tag{3.18}$$

Подальші міркування такі ж, як і для випадку $p>1$: за допомогою (3.12) записуються рівності

$$v(t,x)-\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi)=I_1^{(\tau)}+I_2^{(\tau)}+\tilde{I}_3^{(\tau)},\ \tau\geqslant 1, \tag{3.19}$$

де $I_1^{(\tau)}$ і $I_2^{(\tau)}$ ті ж, що й в (3.13), а

$$\tilde{I}_3^{(\tau)}\equiv\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\Psi_1(0,\xi)\Psi_{-1}\left(\tfrac{1}{\nu(\tau)},\xi\right)v\left(\tfrac{1}{\nu(\tau)},\xi\right)d\xi-$$
$$-\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi);$$

потім доводиться рівність (3.14) для $j=1,2$. Оскільки на підставі (3.18) $\lim_{\tau\to\infty}\tilde{I}_3^{(\tau)}=0$, то з (3.19) випливає зображення (3.4).

Єдиність функції φ та узагальненої міри μ із зображень (2.49) і (2.61) випливає з теорем 3.2 і 3.3.▶

<u>Наслідок</u>. З теорем 3.2-3.4 випливають такі твердження: за умов на f з цих теорем

1) простори $L_p^{k(0)}$ і $M^{k(0)}$ є множинами початкових значень розв'язків системи (1.4) тоді і тільки тоді, коли розв'язки задовольняють умову а) з теореми 3.4 при $1<p\leq\infty$ і $p=1$ відповідно;

2) для зображення розв'язків системи (1.4) у вигляді (2.49) чи (2.61) необхідно й досить, щоб виконувалась умова а) з теореми 3.4.

3.3. Коректна розв'язність систем у випадку сильного виродження. Якщо має місце сильне виродження, то початкову умову (3.I) задовольнити, взагалі кажучи, не можна. У наступній теоремі наводяться умови, за яких існує єдиний розв'язок сильно виродженої системи (I.4) без початкових даних.

Теорема 3.5. Нехай виконуються умови I-3 з п. I.I та інтеграл (I.97) розбігається. Якщо для функції f виконуються умови Γ_I, Γ_5 і Γ_6 з п. 2.2, то формула (2.43) визначає єдиний розв'язок системи (I.4), для якого правильна оцінка (2.48).

◀ Те, що функція (2.43) є розв'язком системи (I.4) і для неї правильна Оцінка (2.48), випливає з леми 2.5. Треба тільки довести єдиність цього розв'язку. Для цього досить довести, що будь-який розв'язок однорідної системи (I.4), для якого справджується нерівність

$$\|u(t,\cdot)\|^{k(t)} \leqslant C E^{-d}(T,t)\varepsilon(t), t\in(0,T], \tag{3.20}$$

де $C>0$ і функція $\varepsilon:(0,T]\longrightarrow(0,\infty)$ така, що $\varepsilon(t)\xrightarrow[t\to 0+]{}0$, є тотожним нулем.

Нехай (t,x) – довільно фіксована точка в $\Pi^n_{(0,T]}$, а t_0 – фіксоване число з $(0,\frac{t}{2})$. Розв'язок u, який ми розглядаємо, очевидно, задовольняє умову

$$u(t,x)\Big|_{t=t_0}=u(t_0,x),\ x\in\mathbb{R}^n,$$

причому $\|u(t_0,\cdot)\|^{k(t_0)}<\infty$. На підставі властивості 3 з п.I.5 розв'язок u зображується у вигляді

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t_0,\xi)u(t_0,\xi)d\xi. \tag{3.2I}$$

Оскільки це зображення правильне для будь-якого $t_0\in(0,\frac{t}{2})$, то в ньому можна перейти до границі при $t_0\longrightarrow 0+$. Границя правої частини (3.2I) дорівнює нулеві. Справді, за допомогою нерівностей

(I.55),(I.I09) і (3.20) одержуємо

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t_0,\xi)u(t_0,\xi)d\xi\Big| \leqslant C\varepsilon(t_0)\int_{\mathbb{R}^n} E^{d}_{c-c_0}(t,t_0,|x-\xi|)\times$$

$$\times[\Psi_1(t_0,\xi)E_{c_0}(t,t_0,|x-\xi|)]E^{-d}(T,t_0)[B(t,t_0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon(t_0)\Psi_1(t,x)E^{-d}(T,t)\int_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,t_0,|x-\xi|)\times$$

$$\times[B(t,t_0)]^{-\frac{n}{2b}}d\xi = C\varepsilon(t_0)\Psi_1(t,x)E^{-d}(T,t)\xrightarrow[t_0\to 0+]{}0.$$

Отже, після переходу в (3.2I) до границі при $t_0 \to 0+$, одержимо, що $u(t,x)=0$. Звідси випливає потрібне, оскільки (t,x) - довільна точка в $\Pi^n_{(0,T]}$. ▶

Зауваження. У більш широкому класі функцій, ніж клас, який визначається нерівністю (3.20), відповідна системі (I.4) однорідна система може мати нетривіальні розв'язки. Розглянемо, наприклад, рівняння

$$[\alpha(t)D^1_t-\beta(t)D^2_x+1]u(t,x)=0,\ (t,x)\in\Pi^1_{(0,T]},$$

припускаючи, що інтеграли $\int_0^T\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$ і $\int_0^T\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta$ розбігаються. Фундаментальним розв'язком задачі Коші для цього рівняння є функція

$$Z(t,x;\tau,\xi)\equiv\frac{1}{2\sqrt{\pi B(t,\tau)}}E^{-1}_{1/4}(t,\tau,|x-\xi|),$$

$$0<\tau<t\leqslant T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R},$$

а розв'язками - функція $u_1(t,x)\equiv E^1(T,t)$, $(t,x)\in\Pi^1_{(0,T]}$, а також функція $u_2(t,x)\equiv E^{1/2}(T,t)\exp\{\frac{x}{\sqrt{2}}\}$, $(t,x)\in\Pi^1_{(0,T]}$, якщо $\beta(t)=1$, $t\in(0,T]$. Функції u_1 і u_2 не належать до класу, що визначається нерівністю (3.20).

Р О З Д І Л II

ВИРОДЖЕНІ ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛМОГОРОВА, ЯКІ ЩЕ МАЮТЬ ВИРОДЖЕННЯ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Тут розглядається один клас вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, які ще мають виродження на початковій гіперплощині, з коефіцієнтами, залежними тільки від t. Для них побудований фундаментальний розв'язок Z задачі Коші, одержані точні оцінки розв'язку Z та його похідних, вивчені його властивості та наведені деякі застосування цих властивостей.

Крім позначень, наведених у загальному списку, в цьому розділі використовуватимемо ще такі позначення:

$$L \equiv l+m+n\ ;\ M \equiv \frac{1}{2b}\left[n+(2b+1)m+(4b+1)l\right];$$

$$M(k,r,s) \equiv \frac{1}{2b}\left[n+|k|+(2b+1)(m+|r|)+(4b+1)(l+|s|)\right],$$

якщо k – n-вимірний, r – m-вимірний і s – l-вимірний мультиіндекси;

$x' \equiv (x_1,\dots,x_l)$, $x'' \equiv (x_{l+1},\dots,x_m)$, $x''' \equiv (x_{m+1},\dots,x_n)$, $\hat{x} \equiv (x_1,\dots,x_m) = (x',x'')$, якщо $x \equiv (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, так що $x = (x',x'',x''') = (\hat{x},x''')$;

$y' \equiv (y_1,\dots,y_l)$, $y'' \equiv (y_{l+1},\dots,y_m)$, якщо $y \equiv (y_1,\dots,y_m) \in \mathbb{R}^m$, так що $y = (y',y'')$;

$X \equiv (x, y, z)$, якщо $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^l$;

$\Xi \equiv (\xi, \eta, \zeta)$, якщо $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^m$, $\zeta \in \mathbb{R}^l$;

$\Lambda \equiv (\lambda, \mu, \nu)$, якщо $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, $\nu \in \mathbb{R}^l$;

$$(X, \Xi) \equiv (x,\xi)+(y,\eta)+(z,\zeta) \equiv \sum_{j=1}^{n} x_j\xi_j + \sum_{j=1}^{m} y_j\eta_j + \sum_{j=1}^{l} z_j\zeta_j;$$

$$\Phi_c(t,X;\tau,\Xi) \equiv \exp\Big\{-c\Big(\frac{|x-\xi|^q}{[B(t,\tau)]^{q-1}} + \frac{|y+B(t,\tau)\hat{x}-\eta|^q}{[B(t,\tau)]^{2q-1}} +$$

$$+ \frac{|z+B(t,\tau)y'+\frac{1}{2}[B(t,\tau)]^2x'-\zeta|^q}{[B(t,\tau)]^{3q-1}}\Big)\Big\};$$

$$\Phi_c^d(t,X;\tau,\Xi) \equiv \Phi_c(t,X;\tau,\Xi)E^d(t,\tau).$$

§ 4. ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

<u>4.I. Побудова та оцінки фундаментального розв'язку задачі Коші</u>. Розглянемо рівняння

$$[\alpha(t)D_t^1 - \beta(t)\Big(\sum_{j=1}^{m} x_j D_{y_j}^1 + \sum_{j=1}^{\ell} y_j D_{z_j}^1 + \sum_{0<|k|\le 2b} a_k(t)D_x^k\Big) -$$

$$-a_0(t)]\,u(t,X) = 0,\ (t,X)\in \Pi_{(0,T]}^{L}, \qquad (4.I)$$

де коефіцієнти $a_k : [0,T] \longrightarrow \mathbb{C}$, $0<|k|\le 2b$, $a_0 : (0,T] \longrightarrow \mathbb{C}$ є неперервними і такими, що диференціальний вираз

$$D_t^1 - \sum_{0<|k|\le 2b} a_k(t)D_x^k$$

рівномірно параболічний за Петровським; $\exists A\in\mathbb{R}\ \forall t\in(0,T]$: $\mathrm{Re}\, a_0(t) \le A$.

Побудуємо фундаментальний розв'язок (ФР) задачі Коші для рівняння (4.I) за методикою з [24].

Нехай t_0 - довільно взяте число з проміжку $(0,T)$ для випадку сильного виродження і півпроміжку $[0,T)$, якщо виродження слабке. У шарі $\Pi_{(t_0,T]}^{L}$ розглянемо задачу Коші для рівняння (4.I), тобто задачу

$$[\alpha(t)D_t^1-\beta(t)\Big(\sum_{j=1}^{m}x_jD_{y_j}^1+\sum_{j=1}^{\ell}y_jD_{z_j}^1+$$

$$+\sum_{0<|k|\le 2b}a_k(t)D_x^k\Big)-a_0(t)]u(t,X)=0,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(t_0,T]}^{L}, \tag{4.2}$$

$$u(t,X)\big|_{t=t_0}=\varphi(X),X\in\mathbb{R}^L. \tag{4.3}$$

Розв'язок задачі (4.2),(4.3) шукаємо у вигляді оберненого перетворення Фур'є по змінній X

$$u(t,X)=(F^{-1}[v(t,\cdot)])(t,X)\equiv$$

$$\equiv(2\pi)^{-L}\int_{\mathbb{R}^L}\exp\{i(X,\Xi)\}v(t,\Xi)\,d\Xi,$$

$$(t,X)\in\Pi_{(t_0,T]}^{L}, \tag{4.4}$$

припускаючи, що для φ існує перетворення Фур'є

$$\psi(\Xi)\equiv(F[\varphi])(\Xi)\equiv$$

$$\equiv\int_{\mathbb{R}^L}\exp\{-i(X,\Xi)\}\varphi(X)dX. \tag{4.5}$$

Підставивши вирази (4.4) і (4.5) в (4.2) і (4.3) та скориставшись властивостями перетворення Фур'є та рівностями

$$x_jD_{y_j}^1u(t,X)=-(F^{-1}[\eta_jD_{\xi_j}^1v(t,\cdot)])(t,X),1\le j\le m,$$

$$y_jD_{z_j}^1u(t,X)=-(F^{-1}[\zeta_jD_{\eta_j}^1v(t,\cdot)])(t,X),1\le j\le \ell,$$

для функції v одержимо задачу

$$[\alpha(t)D_t^1+\beta(t)\Big(\sum_{j=1}^{m}\eta_jD_{\xi_j}^1+\sum_{j=1}^{\ell}\zeta_jD_{\eta_j}^1-$$

$$-\sum_{0<|k|\le 2b}a_k(t)(i\xi)^k\Big)-a_0(t)]v(t,\Xi)=0,$$

$$(t,\Xi)\in\Pi_{(t_0,T]}^{L}, \tag{4.6}$$

$$v(t,\Xi)\big|_{t=t_0}=\psi(\Xi),\ \Xi\in\mathbb{R}^L, \tag{4.7}$$

Задачу (4.6),(4.7) розв'яжемо методом характеристик. Систезвичайних диференціальних рівнянь, яка відповідає рівнянню (4.6), має вигляд

$$\frac{dt}{\alpha(t)}=\frac{d\xi_1}{\beta(t)\eta_1}=\ldots=\frac{d\xi_m}{\beta(t)\eta_m}=\frac{d\eta_1}{\beta(t)\zeta_1}=\ldots=\frac{d\eta_\ell}{\beta(t)\zeta_\ell}=$$

$$=\frac{dv}{\beta(t)\sum\limits_{0<|k|\le 2b}a_k(t)(i\xi)^k+a_0(t)}\,.$$

Ця система містить $\ell+m+1$ рівнянь, знайдемо її $\ell+m+1$ незалежних перших інтегралів. З рівнянь

$$\frac{d\xi_j}{\eta_j}=\frac{d\eta_j}{\zeta_j}\ ,\ 1\le j\le\ell\ ,$$

знаходимо

$$2\xi_j\zeta_j-\eta_j^2=C_j',\ 1\le j\le\ell\ ; \tag{4.8}$$

з рівнянь

$$\frac{d\xi_j}{\beta(t)\eta_j}=\frac{dt}{\alpha(t)}\ ,\ \ell+1\le j\le m,$$

одержуємо

$$\xi_j-B(t,t_0)\eta_j=C_j'\ ,\ \ell+1\le j\le m, \tag{4.9}$$

а рівняння

$$\frac{d\eta_j}{\beta(t)\zeta_j}=\frac{dt}{\alpha(t)}\ ,\ 1\le j\le\ell\ ,$$

і

$$\frac{dv}{\beta(t)\sum\limits_{0<|k|\le 2b}a_k(t)(i\xi)^k+a_0(t)}=\frac{dt}{\alpha(t)}$$

дають відповідно перші інтеграли

$$\eta_j-B(t,t_0)\zeta_j=C_j''\ ,\ 1\le j\le\ell, \tag{4.10}$$

$$v = C''' \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} \sum_{0<|k|\leq 2b} a_k(\tau)(i\xi)^k + \frac{a_0(\tau)}{\alpha(\tau)} \right) d\tau \right\}. \tag{4.11}$$

З рівностей (4.8) і (4.10) випливає, що

$$\xi_j = \frac{c_j' + (c_j'' + B(t,t_0)\zeta_j)^2}{2\zeta_j}, \quad 1 \leq j \leq \ell, \tag{4.12}$$

а з (4.9) і (4.10) маємо

$$\xi_j = c_j' + B(t,t_0)\eta_j, \quad \ell+1 \leq j \leq m, \tag{4.13}$$

$$\eta_j = c_j'' + B(t,t_0)\zeta_j, \quad 1 \leq j \leq \ell. \tag{4.14}$$

Згідно з рівностями (4.11)-(4.13) маємо

$$v = C''' \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} \sum_{0<|k|\leq 2b} a_k(\tau)\, i^{|k|} \times \right.\right.$$

$$\times \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{c_j' + (c_j'' + B(\tau,t_0)\zeta_j)^2}{2\zeta_j} \right)^{k_j} \times$$

$$\left.\left. \times \prod_{j=\ell+1}^{m} (c_j' + B(\tau,t_0)\eta_j)^{k_j} \prod_{j=m+1}^{n} \xi_j^{k_j} + \frac{a_0(\tau)}{\alpha(\tau)} \right) d\tau \right\}. \tag{4.15}$$

Нехай $\overline{\xi}_j$, $\overline{\eta}_j$ і $\overline{v}$ - значення при $t = t_0$ відповідно ξ_j, η_j і v. Згідно з рівностями (4.12)-(4.15) маємо

$$\overline{\xi}_j = \frac{c_j' + (c_j'')^2}{2\zeta_j}, \ 1 \leq j \leq \ell, \ \overline{\xi}_j = c_j', \ \ell+1 \leq j \leq m,$$

$$\overline{\eta}_j = c_j'', \ 1 \leq j \leq \ell, \ \overline{v} = c''',$$

але $\overline{v} = \psi$, тому

$$c''' = \psi(\overline{\xi}, \overline{\eta}, \zeta) = \psi\left(\frac{c_1' + (c_1'')^2}{2\zeta_1}, \ldots, \frac{c_\ell' + (c_\ell'')^2}{2\zeta_\ell}, \right.$$

$$C'_{l+1},\dots,C'_m,\xi_{m+1},\dots,\xi_n,C''_1,\dots,C''_l,$$
$$\eta_{l+1},\dots,\eta_m,\zeta).$$

Використовуючи для C'_j, C''_j і C''' вирази, які випливають з рівностей (4.8)-(4.10) і (4.15), дістанемо

$$v(t,\Xi)=\exp\{\int_{t_0}^{t}(\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\sum_{0<|k|\le 2b}a_k(\tau)i^{|k|}\times$$
$$\times(\xi'-B(t,\tau)\eta'+\frac{1}{2}[B(t,\tau)]^2\zeta)^{k'}\times$$
$$\times(\xi''-B(t,\tau)\eta'')^{k''}(\xi''')^{k'''}+\frac{a_0(\tau)}{\alpha(\tau)})d\tau\}\times$$
$$\times\psi(\xi'-B(t,t_0)\eta'+\frac{1}{2}[B(t,t_0)]^2\zeta,$$
$$\xi''-B(t,t_0)\eta'',\xi''',\eta'-B(t,t_0)\zeta,\eta'',\zeta),$$
$$(t,\Xi)\in\Pi^n_{(t_0,T]}.$$

Підставивши цей вираз у формулу (4.4), дістанемо рівність

$$u(t,X)=(2\pi)^{-L}\int_{\mathbb{R}^L}\exp\{i(X,\Xi)+\int_{t_0}^{t}(\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\times$$
$$\times\sum_{0<|k|\le 2b}a_k(\tau)i^{|k|}(\xi'-B(t,\tau)\eta'+\frac{1}{2}[B(t,\tau)]^2\zeta)^{k'}\times$$
$$\times(\xi''-B(t,\tau)\eta'')^{k''}(\xi''')^{k'''}+\frac{a_0(\tau)}{\alpha(\tau)})d\tau\}\times$$
$$\times\psi(\xi'-B(t,t_0)\eta'+\frac{1}{2}[B(t,t_0)]^2\zeta,\xi''-B(t,t_0)\eta'',$$
$$\xi''',\eta'-B(t,t_0)\zeta,\eta'',\zeta)d\Xi,\ (t,X)\in\Pi^L_{(t_0,T]}.$$

В останньому інтегралі зробимо заміну змінних за допомогою формул

$$\xi'-B(t,t_0)\eta'+\frac{1}{2}[B(t,t_0)]^2\zeta=\lambda',$$

$$\xi'' - B(t,t_0)\eta'' = \lambda'', \xi''' = \lambda''',$$
$$\eta' - B(t,t_0)\zeta = \mu', \eta'' = \mu'', \zeta = \nu.$$

У результаті дістанемо рівність

$$u(t,X) = (2\pi)^{-L} \int_{\mathbb{R}^L} \exp\{i(x', \lambda' + B(t,t_0)\mu' + \frac{1}{2}[B(t,t_0)]^2\zeta) + i(x'', \lambda'' + B(t,t_0)\mu'') + i(x''', \lambda''') + i(y', \mu' + B(t,t_0)\zeta) + i(y'', \mu'') + i(z, \zeta) + \int_{t_0}^{t} \Big(\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} \sum_{0<|k|\le 2b} a_k(\tau) i^{|k|} (\lambda' + B(\tau,t_0)\mu' + \frac{1}{2}[B(\tau,t_0)]^2\nu)^{k'} (\lambda'' + B(\tau,t_0)\mu'')^{k''} \times (\lambda''')^{k'''} + \frac{a_0(\tau)}{\alpha(\tau)}\Big) d\tau\} \psi(\Lambda) d\Lambda,$$
$$(t,X) \in \Pi^L_{(t_0,T]}.$$

Скориставшись виразом (4.6) (взявши в ньому замість Ξ і X відповідно Λ і Ξ) і помінявши порядок інтегрування, дістанемо формулу

$$u(t,X) = \int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;t_0,\Xi)\psi(\Xi)d\Xi,$$
$$(t,X) \in \Pi^L_{(t_0,T]},$$

де

$$Z(t,X;t_0,\Xi) \equiv (2\pi)^{-L} \int_{\mathbb{R}^L} \exp\{i(x-\xi, \lambda) + i(y + B(t,t_0)\hat{x} - \eta, \mu) + i(z + B(t,t_0)y' + \frac{1}{2}[B(t,t_0)]^2 x' - \zeta, \nu) + \int_{t_0}^{t} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} \sum_{0<|k|\le 2b} a_k(\tau) i^{|k|} \times (\lambda' + B(\tau,t_0)\mu' + \frac{1}{2}[B(t,t_0)]^2\nu)^{k'} (\lambda'' +$$

$$+B(\tau,t_0)\mu'')^{k''}(\lambda''')^{k'''}d\tau\}\,d\Lambda\times$$

$$\times\exp\Big\{\int_{t_0}^{t}\frac{a_0(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta\Big\}. \qquad (4.16)$$

У формулі (4.16) зробимо заміну змінних інтегрування за допомогою рівностей

$$\lambda=[B(t,t_0)]^{-\frac{1}{2b}}\bar\lambda,\ \mu=[B(t,t_0)]^{-1-\frac{1}{2b}}\bar\mu,$$
$$\nu=[B(t,t_0)]^{-2-\frac{1}{2b}}\bar\nu,\ B(\tau,t_0)=B(t,t_0)\bar\tau$$

і замість $\bar\lambda$, $\bar\mu$, $\bar\nu$ і $\bar\tau$ знову писатимемо відповідно λ, μ, ν і τ, тоді одержимо, що

$$Z(t,X;t_0,\Xi)=(2\pi)^{-L}[B(t,t_0)]^{-M}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^L}\exp\Big\{i\Big(\frac{x-\xi}{[B(t,t_0)]^{1/2b}},\lambda\Big)+i\Big(\frac{y+B(t,t_0)\hat{x}-\eta}{[B(t,t_0)]^{1+1/2b}},\mu\Big)+$$
$$+i\Big(\frac{z+B(t,t_0)y'+\frac{1}{2}[B(t,t_0)]^2x'-\zeta}{[B(t,t_0)]^{2+1/2b}},\nu\Big)\Big\}\times$$
$$\times Q(t,t_0,\Lambda)\,d\Lambda=[B(t,t_0)]^{-M}\times$$
$$\times(F^{-1}[Q(t,t_0,\cdot)])\Big(t,t_0,\frac{x-\xi}{[B(t,t_0)]^{1/2b}},$$
$$\frac{y+B(t,t_0)\hat{x}-\eta}{[B(t,t_0)]^{1+1/2b}},\ \frac{z+B(t,t_0)y'+\frac{1}{2}[B(t,t_0)]^2x'-\zeta}{[B(t,t_0)]^{2+1/2b}}\Big),$$
$$t_0<t\le T,\ \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^L, \qquad (4.17)$$

де

$$Q(t,t_0,\Lambda)\equiv\exp\Big\{\int_0^1\sum_{0<|k|\le 2b}a_k(P^{-1}[B(t,t_0)\tau])\times$$
$$\times[B(t,t_0)]^{1-\frac{|k|}{2b}}i^{|k|}(\lambda'+\tau\mu'+\frac{\tau^2}{2}\nu)^{k'}(\lambda''+\tau\mu'')^{k''}\times$$
$$\times(\lambda''')^{k'''}d\tau\Big\}\exp\Big\{\int_{t_0}^{t}\frac{a_0(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta\Big\}, \qquad (4.18)$$

$P(t)\equiv B(t,t_0)$, P^{-1} – обернена функція до P.

Функція Z , яка визначена формулою (4.17), є ФР задачі задачі Коші (4.2),(4.3). Це обґрунтуємо пізніше.

Дослідимо спочатку властивості функції Q . Наведемо лише деякі основні моменти дослідження, яке здійснюється за методикою з [24].

1) Функція $Q(t,t_0,\Lambda)$, $\Lambda\in\mathbb{R}^L$, допускає продовження в L -вимірний комплексний простір $\mathbb{C}^L$ до функції $Q(t,t_0,\Lambda+i\Phi)$, $\{\Lambda,\Phi\}\subset\mathbb{R}^L$, яка є цілою функцією.

2) Для функції $Q_0(t,t_0,\Lambda)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, $\Lambda\in\mathbb{R}^L$, яка визначається формулою

$$Q_0(t,t_0,\Lambda)\equiv\exp\Big\{\int_0^1\sum_{|k|=2b}a_k(P^{-1}[B(t,t_0)\tau])\times$$
$$\times i^{|k|}(\lambda'+\tau\mu'+\tfrac{\tau^2}{2}\nu))(\lambda''+\tau\mu'')^{k''}(\lambda''')^{k'''}d\tau\Big\},$$
$$t_0\leqslant t\leqslant T,\ \Lambda\in\mathbb{R}^L,$$

правильна оцінка

$$|Q(t,t_0,\Lambda)|\leqslant\exp\{-\delta_0|\Lambda|^{2b}\},$$
$$t_0\leqslant t\leqslant T,\ \Lambda\in\mathbb{R}^L,$$

де δ_0 – деяка додатна стала.

3) Для функції $Q_0(t,t_0,\Lambda+i\Phi)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, $\Lambda=(\lambda,\mu,\nu)$, $\Phi=(\varphi,\chi,\psi)\subset\mathbb{R}^L$, яка визначається формулою

$$Q(t,t_0,\Lambda+i\Phi)=Q_0(t,t_0,\Lambda)\times$$
$$\times\exp\Big\{\int_0^1 P_0(t,t_0,\tau,\Lambda,\Phi)d\tau\Big\},$$

де

$$P_0(t,t_0,\tau,\Lambda,\Phi)\equiv\sum_{(k,p',p'',p''')}a_k(P^{-1}[B(t,t_0)\tau])\times$$
$$\times i^{|k|+|p'|+|p''|+|p'''|}(\lambda'+\tau\mu'+\tfrac{\tau^2}{2}\nu)^{k'-p'}\times$$

$$\times(\varphi'+\tau\chi'+\frac{\tau^2}{2}\psi)^{p'}(\lambda''+\tau\mu'')^{k''-p''}\times$$
$$\times(\varphi''+\tau\chi'')^{p''}(\lambda''')^{k'''-p'''}(\varphi''')^{p'''},$$

правильна оцінка

$$|Q(t,t_0,\Lambda+i\Phi)|\leq exp\{-\delta_1|\Lambda|^{2b}+F_1|\Phi|^{2b}\},$$
$$t_0\leq t\leq T,\{\Lambda,\Phi\}\subset\mathbb{R}^L, \tag{4.19}$$

де $0<\delta_1<\delta$.

4) Для функції $Q_1(t,t_0,\Lambda+i\Phi)$, $t_0\leq t\leq T$, $\{\Lambda,\Phi\}\subset\mathbb{R}^L$, яка визначається формулою

$$Q_1(t,t_0,\Lambda)\equiv exp\{\int_0^1\sum_{0<|k|<2b}a_k(P^{-1}[B(t,t_0)\tau])\times$$
$$\times i^{|k|}[B(t,t_0)]^{1-\frac{|k|}{2b}}(\lambda'+\tau\mu'+\frac{\tau^2}{2}\nu)^{k'}\times$$
$$\times(\lambda''+\tau\mu'')^{k''}(\lambda''')^{k'''}d\tau\},$$

правильна оцінка

$$|Q_1(t,t_0,\Lambda+i\Phi)|\leq C_\varepsilon exp\{\varepsilon(|\Lambda|^{2b}+|\Phi|^{2b})\},$$

де ε вибране так, щоб $\delta_1-\varepsilon=\delta_2>0$, δ_1 – стала з (4.19).

5) Функцію $Q(t,t_0,\Lambda+i\Phi)$, $t_0\leq t\leq T$, $\{\Lambda,\Phi\}\subset\mathbb{R}^L$, можна записати у вигляді $Q=Q_0Q_1Q_2$, де

$$Q_2(t,t_0)\equiv exp\{\int_{t_0}^t\frac{a_0(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\},t_0\leq t\leq T,$$

і тому, враховуючи оцінки для функцій Q_0 і Q_1 , для Q правильна оцінка

$$|Q(t,t_0,\Lambda+i\Phi)|\leq C exp\{-\delta_2|\Lambda|^{2b}+F_2|\Phi|^{2b}+$$
$$+AA(t,t_0)\},t_0\leq t\leq T,\{\Lambda,\Phi\}\subset\mathbb{R}^L, \tag{4.20}$$

де $F_2\equiv F_1+\varepsilon$.

Ця оцінка дозволяє одержати аналітичний опис ФР Z , який визначається формулою (4.17). З попереднього випливає, що

$Q(t,t_0,\Lambda)$, $t_0<t\le T$, $\Lambda=(\Lambda^*+i\Lambda^{**})\in\mathbb{C}^L$, є цілою функцією, яка задовольняє (4.20), тому згідно з лемою I.I з книги I її перетворення Фур'є як функція аргументів

$$\frac{x_1}{[B(t,t_0)]^{1/2b}}, \quad \frac{y_1+B(t,t_0)\hat{x}_1}{[B(t,t_0)]^{1+1/2b}},$$

$$\frac{z_1+B(t,t_0)y_1'+\frac{1}{2}[B(t,t_0)]^2x_1'}{[B(t,t_0)]^{2+1/2b}}$$

є цілою функцією, для якої правильна оцінка

$$|Z(t,X;t_0,\Xi)|\le C[B(t,t_0)]^{-M}\times$$

$$\times\exp\Big\{-c\Big(\frac{|x^*-\xi^*|^q}{[B(t,t_0)]^{q-1}}+\frac{|y^*+B(t,t_0)\hat{x}^*-\eta^*|^q}{[B(t,t_0)]^{2q-1}}+$$

$$+\frac{|z^*+B(t,t_0)(y^*)'+\frac{1}{2}[B(t,t_0)]^2(x^*)'-\zeta^*|^q}{[B(t,t_0)]^{3q-1}}\Big)+$$

$$+F_0\Big(\frac{|x^{**}-\xi^{**}|^q}{[B(t,t_0)]^{q-1}}+\frac{|y^{**}+B(t,t_0)\hat{x}^{**}-\eta^{**}|^q}{[B(t,t_0)]^{2q-1}}+$$

$$+\frac{|z^{**}+B(t,t_0)(y^{**})'+\frac{1}{2}[B(t,t_0)]^2(x^{**})'-\zeta^{**}|^q}{[B(t,t_0)]^{3q-1}}\Big)+$$

$$+dA(t,t_0)\Big\}=C\,\Phi_c(t,X^*;t_0,\Xi^*)\times$$

$$\times\Phi_{-F_0}(t,X^{**};t_0,\Xi^{**})E^d(t,t_0),$$

$$t_0<t\le T,\ X=(X^*+iX^{**})\in\mathbb{C}^L. \tag{4.21}$$

Для похідних від Z, які визначаються формулою

$$D_x^kD_y^rD_z^s Z(t,X;t_0,\Xi)=(2\pi)^{-L}[B(t,t_0)]^{-M}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^L}\exp\Big\{i\Big(\frac{x-\xi}{[B(t,t_0)]^{1/2b}},\lambda\Big)+i\Big(\frac{y+B(t,t_0)\hat{x}-\eta}{[B(t,t_0)]^{1+1/2b}},\mu\Big)+$$

$$+i\left(\frac{z+B(t,t_0)y'+\frac{1}{2}[B(t,t_0)]^2x'-\zeta}{[B(t,t_0)]^{2+1/2b}},\nu\right)\Big\}\times$$

$$\times\left(\frac{i\lambda}{[B(t,t_0)]^{1/2b}}\right)^k\left(\frac{i\mu}{[B(t,t_0)]^{1+1/2b}}\right)^r\times$$

$$\times\left(\frac{i\nu}{[B(t,t_0)]^{2+1/2b}}\right)^s Q(t,t_0,\Lambda)\,d\Lambda,\ t_0<t\le T, X\in\mathbb{R}^L,$$

правильні оцінки

$$|D_x^k D_y^r D_z^s Z(t,X;t_0,\Xi)|\le C_{krs}[B(t,t_0)]^{-M(k,r,s)}\times$$

$$\times\exp\Big\{-c\Big(\frac{|x^*-\xi^*|^q}{[B(t,t_0)]^{q-1}}+\frac{|y^*+B(t,t_0)\hat{x}^*-\eta^*|^q}{[B(t,t_0)]^{2q-1}}+$$

$$+\frac{|z^*+B(t,t_0)(y^*)'+\frac{1}{2}[B(t,t_0)]^2(x^*)'-\zeta^*|^q}{[B(t,t_0)]^{3q-1}}\Big)+$$

$$+F_0\Big(\frac{|x^{**}-\xi^{**}|^q}{[B(t,t_0)]^{q-1}}+\frac{|y^{**}+B(t,t_0)\hat{x}^{**}-\eta^{**}|^q}{[B(t,t_0)]^{2q-1}}+$$

$$+\frac{|z^{**}+B(t,t_0)(y^{**})'+\frac{1}{2}[B(t,t_0)]^2(x^{**})'-\zeta^{**}|^q}{[B(t,t_0)]^{3q-1}}\Big)+$$

$$+dA(t,t_0)\Big\}=C_{krs}[B(t,t_0)]^{-M(k,r,s)}\times$$

$$\times\Phi_c(t,X^*;t_0,\Xi^*)\,\Phi_{-F_0}(t,X^{**};t_0,\Xi^{**})E^d(t,t_0),$$

$$t_0<t\le T. \qquad (4.22)$$

Ці оцінки одержуються таким самим способом, що й оцінка (4.21), при цьому використовується те, що функція

$$(i\lambda)^k(i\mu)^r(i\nu)^s Q(t,t_0,\Lambda),$$

$$\Lambda=(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{C}^L,$$

є цілою функцією, для якої правильна оцінка

$$|(i\lambda)^k(i\mu)^r(i\nu)^s Q(t,t_0,\Lambda)|\le$$

$$\le C\exp\{-\delta_2'|\Lambda^*|^{2b}+F_2'|\Lambda^{**}|^{2b}+A'A(t,t_0)\},$$

$$0<t_0<t\le T,\ \Lambda=(\Lambda^*+i\Lambda^{**})\in\mathbb{C}^L,$$
$$0<\delta_2'<\delta_2,\ F_2'>F_2.$$

З оцінок (4.22) випливають такі оцінки для ФР Z :

$$|D_x^k D_y^r D_z^s Z(t,X;t_0,\Xi)|\le$$
$$\le C_{krs}[B(t,t_0)]^{-M(k,r,s)}\Phi_c^d(t,X;t_0,\Xi),$$
$$t_0<t\le T,\ \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^L. \tag{4.23}$$

<u>4.2. Інтеграл Пуассона</u>. Переконаємося, що функція, яка визначається формулою (4.17), справді є ФР задачі Коші для рівняння (4.2).

Використовуючи формулу (4.17), оцінки функції Q і властивості перетворення Фур'є, легко одержати, що функція $Z(t,X;\tau,\Xi)$, $t_0\le\tau<t\le T$, $\{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^L$, якщо її розглядати як функцію t і X при фіксованих τ і Ξ, є розв'язком рівняння (4.2) у шарі $\Pi^L_{(\tau,T]}$.

Згідно з рівностями (4.17) і (4.18) при $t>\tau$ маємо

$$\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;\tau,\Xi)\,d\Xi=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^L}\Big(F^{-1}\Big[Q\Big(t,\tau,\frac{\lambda}{[B(t,\tau)]^{1/2b}},\frac{\mu}{[B(t,\tau)]^{1+1/2b}},$$
$$\frac{\nu}{[B(t,\tau)]^{2+1/2b}}\Big)\Big](t,\tau,x-\xi,y+B(t,\tau)\hat{x}-\eta,$$
$$z+B(t,\tau)y'+\tfrac{1}{2}[B(t,\tau)]^2x'-\zeta)\,d\Xi=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^L}\Big(F^{-1}\Big[Q\Big(t,\tau,\frac{\lambda}{[B(t,\tau)]^{1/2b}},\frac{\mu}{[B(t,\tau)]^{1+1/2b}},$$
$$\frac{\nu}{[B(t,\tau)]^{2+1/2b}}\Big)\Big]\Big)(t,\tau,\xi,\eta,\zeta)\,d\Xi=$$

$$=\Big(F\big[F^{-1}\big[Q\big(t,\tau,\frac{\lambda}{[B(t,\tau)]^{1/2b}},\frac{\mu}{[B(t,\tau)]^{1+1/2b}},$$

$$\frac{\nu}{[B(t,\tau)]^{2+1/2b}}\big)\big]\big]\Big)(t,\tau,0)=Q(t,\tau,0,0,0)=$$

$$=\exp\Big\{\int_{\tau}^{t}\frac{a_0(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta\Big\},$$

звідки випливає, що

$$\lim_{t\to\tau}\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;\tau,\Xi)\,d\Xi=1,$$

$$\tau\in[t_0,T),\ X\in\mathbb{R}^L, \tag{4.24}$$

а якщо в рівнянні (4.2) $a_0=0$, то

$$\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;\tau,\Xi)\,d\Xi=1,$$
$$t_0\le\tau<t\le T,\ X\in\mathbb{R}^L.$$

Зауважимо, що прямування в (4.24) рівномірне по $X\in\mathbb{R}^L$.

Нехай функція $\varphi:\mathbb{R}^L\longrightarrow\mathbb{C}$ неперервна й обмежена, а $\tau\in$ $\in[t_0,T)$ фіксоване. Розглянемо інтеграл

$$u(t,X)\equiv\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;\tau,\Xi)\,\varphi(\Xi)\,d\Xi,$$

$$(t,X)\in\Pi^L_{(\tau,T]}, \tag{4.25}$$

який називатимемо інтегралом Пуассона функції φ . Оцінки (4.23) гарантують у шарі $\Pi^L_{[\tau+\varepsilon,T]}$, $\varepsilon>0$, збіжність інтеграла (4.25) і результатів його формального диференціювання під знаком інтеграла. Оскільки функція $Z(t,X;\tau,\Xi)$, $(t,X)\in\Pi^L_{(\tau,T]}$, є розв'язком рівняння (4.2), то функція (4.25) задовольняє рівняння (4.2) у шарі $\Pi^L_{(\tau,T]}$. Доведемо правильність рівності

$$\lim_{t\to\tau} u(t,X)=\varphi(X),\ X\in\mathbb{R}^L. \tag{4.26}$$

Звідси випливатиме, що функція Z є ФР задачі Коші для рівняння

(4.2).

На підставі (4.24) для доведення (4.26) досить установити, що

$$\lim_{t\to\tau}\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;\tau,\Xi)\,[\varphi(\Xi)-\varphi(X)]\,d\Xi=0. \tag{4.27}$$

Інтеграл з (4.27) зобразимо у вигляді інтеграла I_1 по кулі $\mathbb{K}^L_\delta(X)$ та інтеграла I_2 по $\mathbb{R}^L\setminus\mathbb{K}^L_\delta(X)$. На підставі рівномірної неперервності функції φ в $\mathbb{K}^L_\delta(X)$ маємо $|\varphi(\Xi)-\varphi(X)|\leq\omega(\delta)$, $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta)=0$. Оскільки φ обмежена, то

$$|\varphi(\Xi)-\varphi(X)|\leq 2C,\ \Xi\in\mathbb{R}^L\setminus\mathbb{K}^L_\delta(X).$$

Тоді, використовуючи оцінку (4.23), маємо

$$|I_1|\leq\omega(\delta)\int_{\mathbb{R}^L}|Z(t,X;\tau,\Xi)|\,d\Xi\leq$$
$$\leq C\,\omega(\delta)\int_{\mathbb{R}^L}[B(t,\tau)]^{-M}\times$$
$$\times\Phi^d_c(t,X;\tau,\Xi)\,d\Xi=C\,\omega(\delta),$$

$$|I_2|\leq 2C\int_{\mathbb{R}^L\setminus\mathbb{K}^L_\delta(X)}[B(t,\tau)]^{-M}\times$$

$$\times\Phi^d_c(t,X;\tau,\Xi)\,d\Xi\leq 2C\exp\left\{-\frac{c}{2}\,\frac{\delta^q}{[B(t,\tau)]^{q-1}}\right\}\times$$
$$\times E^d(t,\tau)\int_{\mathbb{R}^L}\Phi_{\frac{c}{2}}(t,X;\tau,\Xi)\,[B(t,\tau)]^{-M}d\Xi=$$
$$=C_0\exp\left\{-\frac{c}{2}\,\frac{\delta^q}{[B(t,\tau)]^{q-1}}\right\}E^d(t,\tau),$$

де $0<B(t,\tau)\leq\gamma$, $\gamma>0$ – досить мале число.

Тут використано таке твердження: нехай $X^0\equiv(x^0,y^0,z^0)\in\mathbb{R}^L$, тоді існують число $\gamma\in(0,1)$ і $C_1>0$ такі, що для будь-яких $X\equiv(x,y,z)\in\mathbb{K}^L_\delta(X^0)$, $\Xi\equiv(\xi,\eta,$

$\zeta) \in \mathbb{R}^L \setminus \mathbb{K}^L_\delta(X^0)$ і $\beta \in (0, \gamma]$ правильна нерівність

$$\frac{|x-\xi|^q}{\beta^{q-1}} + \frac{|y+\beta\hat{x}-\eta|^q}{\beta^{2q-1}} + \frac{|z+\beta y'+\frac{1}{2}\beta^2 x'-\zeta|^q}{\beta^{3q-1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{C_1\delta^q}{\beta^{q-1}}. \qquad (4.28)$$

Ця нерівність використана вище при $X^0 = X$ і $\beta = B(t,\tau)$.

Щоб тепер завершити доведення співвідношення (4.26) потрібно при будь-якому $\varepsilon > 0$ вибрати δ так, щоб $\omega(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$, і потім взяти t настільки близьким до τ, щоб

$$C_0 \exp\left\{-\frac{cC_1}{2}\frac{\delta^q}{[B(t,\tau)]^{q-1}}\right\} E^d(t,\tau) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Доведемо нерівність (4.28). Використовуючи нерівності

$$a^q + b^q + c^q \geqslant 3^{-q}(a+b+c)^q \geqslant 3^{-q}(a^2+b^2+c^2)^{q/2},$$

$$a>0,\ b>0,\ c>0,$$

при $\beta \in (0,1)$ маємо

$$\frac{|x-\xi|^q}{\beta^{q-1}} + \frac{|y+\beta\hat{x}-\eta|^q}{\beta^{2q-1}} + \frac{|z+\beta y'+\frac{1}{2}\beta^2 x'-\zeta|^q}{\beta^{3q-1}} \geqslant \frac{1}{\beta^{q-1}}\times$$

$$\times(|x-\xi|^q + |y+\beta\hat{x}-\eta|^q + |z+\beta y' + \frac{1}{2}\beta^2 x'-\zeta|^q) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3^{-q}}{\beta^{q-1}}(|x-\xi|^2 + |y+\beta\hat{x}-\eta|^2 + |z+\beta y'+\frac{1}{2}\beta^2 x'-\zeta|^2)^{q/2} =$$

$$= \frac{3^{-q}}{\beta^{q-1}}(|x-x^0-(\xi-x^0)|^2 + |y-y^0+\beta\hat{x}-(\eta-y^0)|^2 +$$

$$+|z-z^0+\beta y'+\frac{1}{2}\beta^2 x'-(\zeta-z^0)|^2)^{q/2} = \frac{3^{-q}}{\beta^{q-1}}\times$$

$$\times|(x-x^0,\ y-y^0+\beta\hat{x},\ z-z^0+\beta y'+\frac{1}{2}\beta^2 x')-$$

$$-(\Xi - X^0)|^q \geqslant \frac{3^{-q}}{\beta^{q-1}}||\Xi - X^0| - |(x-x^0,$$

$$y-y^0+\beta\hat{x},\ z-z^0+\beta y'+\frac{1}{2}\beta^2 x')|\,|^q.$$

Враховуючи те, що для $\Xi \in \mathbb{R}^L \setminus \mathbb{K}^L_\delta(X^0)$ $|\Xi - X^0| \geqslant$ $\geqslant \delta$, а для $X \in \mathbb{K}^L_{\frac{\delta}{2}}(X^0)$

$$|(x-x^0,\ y-y^0+\beta\hat{x},\ z-z^0+\beta y'+\frac{1}{2}\beta^2 x')| \leq$$

$$\leqslant |(x-x^0,\ y-y^0,\ z-z^0)| + |(0,\ \beta\hat{x},\ \beta y'+\frac{1}{2}\beta^2 x')| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{2} + |(0,\ \beta\hat{x},\ \beta y'+\frac{1}{2}\beta^2 x')|,$$

і вибравши число $\gamma \in (0,1)$ так, щоб для будь-яких $\beta \in (0,\gamma]$ і точок $((x',x'',0),(y',0),0) \in \mathbb{K}^L_{\frac{\delta}{2}}(X^0)$ виконувалась нерівність

$$|(0,\ \beta\hat{x},\ \beta y'+\frac{1}{2}\beta^2 x')| \leq \frac{\delta}{4},$$

одержимо нерівність (4.28) з $c_1 = \dfrac{3^{-q}}{4q}$.

<u>Зауваження</u>. З доведення співвідношення (4.26) легко побачити, що прямування в (4.26) є рівномірним по $X \in \mathbb{K}$, де $\mathbb{K}$ - будь-який компакт у просторі $\mathbb{R}^L$.

<u>4.3. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для спряженого рівняння</u>. Нехай $t \in (t_0, T]$, $t_0 > 0$, і диференціальний вираз

$$(\mathcal{L}^* v)(t,X) \equiv [-D^1_t + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \sum_{j=1}^{m} x_j D^1_{y_j} + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \sum_{j=1}^{\ell} y_j D^1_{z_j} - \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \sum_{0<|k|\leq 2b} \overline{a}_k(t)(-D_x)^k - \frac{\overline{a}_0(t)}{\alpha(t)}]\, v(t,X),$$

$$(t,X) \in \Pi^L_{[t_0,T)}, \qquad (4.29)$$

є спряженим за Лагранжем з виразом

$$(\mathcal{L}u)(t,X) \equiv [D^1_t - \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \sum_{j=1}^{m} \xi_j D^1_{\eta_j} - \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \sum_{j=1}^{\ell} \eta_j D^1_{\zeta_j} -$$

$$-\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}\sum_{0<|k|\le 2b} a_k(t)D_x^k-\frac{a_0(t)}{\alpha(t)}]u(t,X),$$

$$(t,X)\in\Pi^L_{(t_0,T]}. \qquad (4.30)$$

Нехай $Z(t,X;\tau,\Xi)$, $t_0\le\tau<t\le T$, $\{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^L$, - - ФР задачі Коші для системи

$$(\mathcal{L}u)(t,X)=0\,,\ (t,X)\in\Pi^L_{(t_0,T]}, \qquad (4.31)$$

а $Z^*(\tau,\Xi;t,X)$, $t_0\le\tau<t\le T$, $\{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^L$, - ФР задачі Коші для спряженої системи

$$(\mathcal{L}^*v)(\tau,\Xi)=0\,,\ (\tau,\Xi)\in\Pi^L_{[t_0,T]},$$

де диференціальні вирази $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}^*$ визначаються формулами (4.29) і (4.30) відповідно.

Як відомо [24], для ФР задачі Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова без виродження на початковій гіперплощині мають місце властивість нормальності і формула згортки, тобто для довільного $t_0\in(0,T)$ правильні рівності

$$Z^*(\tau,\Xi;t,X)=\overline{Z}(t,X;\tau,\Xi),$$
$$t_0\le\tau<t\le T,\ \{\Xi,X\}\subset\mathbb{R}^L, \qquad (4.32)$$

$$Z(t,X;\tau,\Xi)=\int_{\mathbb{R}^L}Z(t,X;\sigma,\Lambda)Z(\sigma,\Lambda;\tau,\Xi)\,d\Lambda,$$
$$t_0\le\tau<\sigma<t\le T,\ \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^L. \qquad (4.33)$$

У випадку слабкого виродження, тобто коли інтеграл (I.97) збігається, рівності (4.32) і (4.33) виконуються і при $t_0=0$.

Далі користуватимемось формулою Гріна-Остроградського

$$\int_{t_0}^{t_1}d\beta\int_{\Omega}((\mathcal{L}u)\overline{v}-u(\overline{\mathcal{L}^*v}))(\beta,\Lambda)\,d\Lambda=$$
$$=\int_{\Omega}(u\overline{v})(\beta,\Lambda)\Big|_{\beta=t_0}^{\beta=t_1}\,d\Lambda-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} d\beta \int_{\partial\Omega} \Big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j n_{\mu_j} + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j n_{\nu_j}\Big)(u\bar{v})(\beta,\Lambda)\,dS_\Lambda +$$

$$+\int_{t_0}^{t} d\beta \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} B^j[u,\bar{v}](\beta,\Lambda)\, n_{\lambda_j}\, dS_\Lambda, \tag{4.34}$$

де $t_0 < t_1$, Ω – обмежена область у $\mathbb{R}^L$ з межею $\partial\Omega$, $(n_{\lambda_1}, \ldots, n_{\lambda_n}, n_{\mu_1}, \ldots, n_{\mu_m}, n_{\nu_1}, \ldots, n_{\nu_\ell})$ – орт зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, u і v – функції з потрібною гладкістю, $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}^*$ – диференціальні вирази з (4.29) і (4.30), $B^j[u,v]$, $1 \le j \le n$, – білінійні форми, які містять похідні по λ від u і v порядку не вище $2b-1$.

<u>4.4. Про застосування результатів § 4</u>. Наведені в попередніх пунктах цього параграфа властивості ФР задачі Коші дозволяють одержати для рівнянь вигляду (4.1) (як однорідних, так і неоднорідних) результати, аналогічні результатам з розділу I. Вони стосуються у випадку слабкого виродження на початковій гіперплощині коректної розв'язності задачі Коші, інтегрального зображення та граничної поведінки розв'язків, визначених у напіввідкритому шарі $\Pi^L_{(0,T]}$, а у випадку сильного виродження – коректної розв'язності неоднорідного рівняння без початкових умов у відповідних просторах функцій.

У наступних параграфах будуть наведені лише деякі результати для однорідного рівняння (4.1) у випадку слабкого виродження на початковій гіперплощині.

§ 5. ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА ФУНКЦІЙ ТА УЗАГАЛЬНЕНИХ МІР

5.1. Означення норм і просторів. Означимо використані далі норми, а також простори функцій та узагальнених мір. Нехай $a = (a_1, a_2, a_3)$, $0 < c_0 < c$, де a_1, a_2, a_3 – невід'ємні числа, а c – стала з оцінок (4.23), такі, що

$$0 \leq a_j < c_0 T^{\frac{2b(j-1)+1}{2b}};$$

$$k_j(t, a_j) \equiv c_0 a_j [c_0^{2b-1} - a^{2b-1}(T - B(T,t))^{2b(j-1)+1}]^{1-q},$$

$$0 \leq t \leq T, j = 1, 2, 3,$$

$$k(t,a) = (k_1(t,a_1), k_2(t,a_2), k_3(t,a_3)).$$

Зауважимо, що $k_j(t,a_j) \geqslant k_j(0, a_j)$, $t \in [0,T]$, $j = 1, 2, 3$, а також правильна нерівність

$$-c_0\left(\frac{|x-\xi|^q}{[B(t,0)]^{q-1}} + \frac{|y + B(t,0)\hat{x} - \eta|^q}{[B(t,0)]^{2q-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{|z + B(t,0)y' + \frac{1}{2}[B(t,0)]^2 x' - \zeta|^q}{[B(t,0)]^{3q-1}}\right) + k_1(0,a_1)|\xi|^q +$$

$$+ k_2(0,a_2)|\eta|^q + k_3(0,a_3)|\zeta|^q \leq k_1(t,a_1)|x|^q +$$

$$+ k_2(t,a_2)|y + B(t,0)\hat{x}|^q + k_3(t,a_3)|z + B(t,0)y' +$$

$$+ \frac{1}{2}[B(t,0)]^2 x'|^q, 0 < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\{y, \eta\} \subset \mathbb{R}^m, \{z, \zeta\} \subset \mathbb{R}^l. \tag{5.1}$$

Зауважимо, що функції $k_j(t,a_j)$, $j = 1,2,3$, і функції $k_j^0(t,a_j)$, $j = 1,2,3$, які використовувались у [24] і мають вигляд

$$k_j^0(t,a_j) \equiv c_0 a_j [c_0^{2b-1} - a_j^{2b-1} t^{2b(j-1)+1}]^{1-q}$$

$$0 \le t < \left(\frac{c_0}{a_j}\right)^{\frac{2b-1}{2b(j-1)+1}}, \quad j=1,2,3,$$

зв'язані співвідношеннями

$$k_1(t,a_1)=k_1^0(B(t,\tau),k_1(\tau,a_1)),$$
$$k_j^0(B(t,\tau),k_j(\tau,a_j)) \le k_j(t,a_j),\ j=2,3.$$

Доведемо нерівність (5.I). Зауваживши, що $k_j(t,a_j) \equiv \equiv k_j^0(T-B(T,t),a_j)$, $0\le t\le T$, $j=1,2,3$, та використавши властивості функцій k_j^0, $j=1,2,3$, маємо

$$-c_0\frac{|x-\xi|^q}{[B(t,0)]^{jq-1}}+k_j(0,a_j)|\xi|^q=$$

$$=-c_0\frac{|x-\xi|^q}{[T-B(T,t)-(T-B(T,0))]^{jq-1}}+$$
$$+k_j^0(T-B(T,0),a_j)|\xi|^q \le$$

$$\le k_j^0(T-B(T,t)-(T-B(T,0)),k_j^0(T-B(T,0),a_j))|x|^q \le$$

$$\le k_j^0(T-B(T,t),a_j)|x|^q = k_j(t,a_j)|x|^q.$$

Користуватимемось позначенням

$$\widetilde{\Psi}_\nu(t,a,X)\equiv \exp\{\nu(k_1(t,a_1)|x|^q+k_2(t,a_2)|y+B(t,0)\hat{x}|^q+$$
$$+k_3(t,a_3)|z+B(t,0)y'+\tfrac{1}{2}[B(t,0)]^2x'|^q)\},$$
$$\nu=-1,1,\ 0\le t\le T.$$

Нехай $1\le p\le\infty$, $u(t,X)$, $(t,X)\in\Pi^L_{[0,T]}$, - задана комплекснозначна функція, вимірна за Лебегом по X при будь-якому $t\in[0,T]$. Для кожного $t\in[0,T]$ визначимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}\equiv\|u(t,X)\widetilde{\Psi}_{-1}(t,a,X)\|_{L_p(\mathbb{R}^L)}.$$

При $t=0$ ці норми для функції u, не залежної від t, дають норми $\|u\|_p^{k(0,a)}$, $1\le p\le\infty$.

Позначимо через $L_p^{k(0,a)}$, $1 \le p \le \infty$, простір усіх комплекснозначних функцій $\varphi(X)$, $X \in \mathbb{R}^L$, які вимірні і для яких скінченна норма $\|\varphi\|_p^{k(0,a)}$.

Нехай $M(\mathbb{R}^L)$ – сукупність усіх скінченних узагальнених борельових мір на $\mathbb{R}^L$, тобто сукупність усіх комплекснозначних злічено адитивних функцій множини ν, визначених на σ-алгебрі $\mathcal{B}_L$ всіх борельових множин простору $\mathbb{R}^L$ і які мають скінченну повну варіацію $|\nu|(\mathbb{R}^L)$. Ця сукупність є банаховим простором з нормою $\|\nu\| = |\nu|(\mathbb{R}^L)$, $\nu \in M(\mathbb{R}^L)$. Як відомо, простір $M(\mathbb{R}^L)$ можна ототожнити з простором, спряженим до простору $C_0(\mathbb{R}^L)$ всіх комплекснозначних неперервних функцій на $\mathbb{R}^L$, які прямують до нуля на нескінченності, з рівномірною нормою.

Через $M^{k(0,a)}$ позначимо сукупність усіх узагальнених борельових мір μ, заданих на σ-алгебрі $\mathcal{B}_L$ і таких, що функції

$$\nu(A) \equiv \int_A \widetilde{\Psi}_{-1}(0,a,X)\, d\mu(X), \; A \in \mathcal{B}_L,$$

належать до простору $M(\mathbb{R}^L)$. При цьому функції $\mu \in M^{k(0,a)}$ задовольняють умову

$$\|\mu\|^{k(0,a)} \equiv \int_{\mathbb{R}^L} \widetilde{\Psi}_{-1}(0,a,X)\, d|\mu|(X) < \infty.$$

Покладемо ще

$$s_1(t) \equiv k_1(t,a_1) + 2^{q-1}[B(t,0)]^q k_2(t,a_2) + 2^{-q} 3^{q-1} [B(t,0)]^{2q} k_3(t,a_3),$$

$$s_2(t) \equiv 2^{q-1} k_2(t,a_2) + 3^{q-1}[B(t,0)]^q k_3(t,a_3),$$

$$s_3(t) \equiv 3^{q-1} k_3(t,a_3),$$

$$s(t) \equiv (s_1(t), s_2(t), s_3(t)),$$

$$0 \leq t \leq T,$$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{s(t)} \equiv \|u(t,X)\Omega_{-1}(t,X)\|_{L_p(\mathbb{R}^L)},$$

де
$$\Omega_\nu(t,X) \equiv \exp\{\nu(s_1(t)|x|^q + s_2(t)|y|^q + s_3(t)|z|^q)\},$$
$$\nu = -1, 1, \; 0 \leq t \leq T.$$

Будемо використовувати такі нерівності:

$$(a+b)^q \leq 2^{q-1}(a^q + b^q),$$
$$(a+b+c)^q \leq 3^{q-1}(a^q + b^q + c^q), \; a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \geqslant 0. \tag{5.2}$$

Для їх доведення використовується те, що функція $y = x^q$, $x \geqslant 0$, опукла вниз на $[0, \infty)$, оскільки $y'' = q(q-1)x^{q-2} > 0$, $x > 0$. Тому згідно з нерівністю Іенсена для опуклих вниз функцій маємо

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^q \leqslant \frac{a^q + b^q}{2}, \; \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^q \leqslant \frac{a^q + b^q + c^q}{3},$$

звідки випливають нерівності (5.2).

Оскільки згідно з нерівностями (5.2)

$$|y + B(t,0)\hat{x}|^q \leq 2^{q-1}(|y|^q + [B(t,0)]^q|\hat{x}|^q),$$
$$|z + B(t,0)y' + \tfrac{1}{2}[B(t,0)]^2 x'|^q \leq 3^{q-1}(|z|^q + [B(t,0)]^q \times$$
$$\times |y'|^q + 2^{-q}[B(t,0)]^{2q}|x'|^q),$$
$$t \geqslant 0, X \in \mathbb{R}^L, \tag{5.3}$$

і звідси

$$\Omega_{-1}(t,X) \leqslant \widetilde{\Psi}_{-1}(t,a,X), \; (t,X) \in \Pi^L_{[0,T]},$$

то

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{s(t)} \leqslant \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}, \; 0 \leqslant t \leq T. \tag{5.4}$$

Зауважимо, що

$$s_1(t) \geqslant k_1(0,a_1), \; s_2(t) > k_2(0,a_2), \; s_3(t) > k_3(0,a_3),$$
$$0 \leqslant t \leq T,$$

тому для $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$ маємо

$$\|\varphi\|_p^{s(t)} \leq \|\varphi\|_p^{k(0,a)}, \ 0 \leq t \leq T, \ 1 \leq p \leq \infty. \qquad (5.5)$$

Введемо множину $L_1^{-s(T)}$ комплекснозначних вимірних функцій $\psi(X)$, $X \in \mathbb{R}^L$, для яких скінченна норма

$$\|\psi\|_1^{-s(T)} \equiv \|\psi(X)\Omega_1(T,X)\|_{L_1(\mathbb{R}^L)}.$$

<u>5.2. Властивості інтегралів Пуассона функцій з просторів $L_p^{k(0,a)}$, $1 \leq p \leq \infty$.</u> Розглянемо функцію

$$u(t,X) = (P[\varphi])(t,X) \equiv \int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)d\Xi, \quad (t,X) \in \Pi^L_{(0,T]}. \qquad (5.6)$$

<u>Лема 5.1</u>. Якщо $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, $1 \leq p \leq \infty$, то для функції (5.6) виконується нерівність

$$\exists\, C>0 \ \forall t \in (0,T]: \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \leq C\|\varphi\|_p^{k(0,a)}. \qquad (5.7)$$

◀ Доведення аналогічне доведенню оцінки (2.12), при цьому використовуються нерівності (4.23) і (5.1), а також те, що для $t>0$, $X \in \mathbb{R}^L$ і $\delta>0$

$$\int_{\mathbb{R}^L} [B(t,0)]^{-M}\Phi_\delta(t,X;0,\Xi)\,d\Xi = C. \blacktriangleright \qquad (5.8)$$

<u>Зауваження</u>. Так само, як у п. 4.2, встановлюється, що для будь-якої функції $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, $1 \leq p \leq \infty$, функція (5.6) є розв'язком рівняння (4.1).

З'ясуємо, в якому розумінні функція (5.6) задовольняє початкову умову.

<u>Лема 5.2</u>. Нехай $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, $1 \leq p \leq \infty$. Тоді для функції (5.6) правильні такі твердження: при $1 \leq p < \infty$

$$\lim_{t \to 0+} \|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{s(t)} = 0, \qquad (5.9)$$

при $p=\infty$ $u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0+]{\alpha}\varphi(\cdot)$, тобто

$$\forall\psi\in L_1^{-s(T)}:\ \lim_{t\to 0+}\int_{\mathbb{R}^L}u(t,X)\psi(X)\,dX=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^L}\varphi(X)\psi(X)\,dX. \tag{5.I0}$$

◀ Доведення проведемо за методикою, використаною в [24] та в лемі 2.2.

Нехай $1\le p<\infty$. Так само, як у лемі 2.2, треба довести, що

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall t\in(0,\delta):$$
$$\|(P[\varphi])(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{s(t)}<\varepsilon. \tag{5.II}$$

Для $R>0$ означимо функцію $\varphi^{(R)}(X),\ X\in\mathbb{R}^L$, за допомогою рівностей

$$\varphi^{(R)}(X)\equiv\begin{cases}\varphi(X),\ X\in\mathbb{K}_R^L,\\ 0,\ X\in\mathbb{R}^L\setminus\mathbb{K}_R^L.\end{cases}$$

Тоді

$$\|(P[\varphi])(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{s(t)}\le\|(P[\varphi-\varphi^{(R)}])(t,\cdot)\|_p^{s(t)}+$$
$$+\|(P[\varphi^{(R)}])(t,\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{s(t)}+\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{s(t)},$$
$$t\in(0,T] \tag{5.I2}$$

На підставі леми 5.I правильна нерівність

$$\|(P[\varphi-\varphi^{(R)}])(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}\le C\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{k(0,a)},$$
$$t\in(0,T]. \tag{5.I3}$$

Використовуючи нерівності (5.4),(5.5),(5.I2) і (5.I3), дістанемо

$$\|(P[\varphi])(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{s(t)}\le(C+1)\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{k(0,a)}+$$
$$+\|(P[\varphi^{(R)}])(t,\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{s(t)},\ t\in(0,T].$$

Тепер для заданого $\varepsilon > 0$ виберемо $R > 0$ так, щоб

$$\|\varphi - \varphi^{(R)}\|_p^{k(0,a)} \equiv \Big(\int_{\mathbb{R}^L \setminus \mathbb{K}_R^L} |\varphi(X)|^p \widetilde{\Psi}_{-p}(0,a,X)\,dX \Big)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2(C+1)}.$$

Оскільки

$$\|(P[\varphi^{(R)}])(t,\cdot) - \varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{s(t)} \le$$

$$\le \|(P[\varphi^{(R)}])(t,\cdot) - \varphi^{(R)}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^L)},$$

то для доведення (5.11) досить довести, що

$$\exists\, \delta > 0 \ \forall t \in (0,\delta): \quad \|(P[\varphi^{(R)}])(t,\cdot) - \varphi^{(R)}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^L)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.14}$$

Маємо

$$\|(P[\varphi^{(R)}])(t,\cdot) - \varphi^{(R)}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^L)} =$$

$$= \Big(\int_{\mathbb{R}^L} |(P[\varphi^{(R)}])(t,X) - \varphi^{(R)}(X)|^p\,dX \Big)^{\frac{1}{p}} \equiv I^{\frac{1}{p}},$$

$$I = \int_{\mathbb{R}^L \setminus \mathbb{K}_{2R}^L} \Big| \int_{\mathbb{K}_R^L} Z(t,X;0,\Xi)\,\varphi^{(R)}(\Xi)\,d\Xi \Big|^p dX +$$

$$+ \int_{\mathbb{K}_{2R}^L} \Big| \int_{\mathbb{K}_R^L} Z(t,X;0,\Xi)\,\varphi^{(R)}(\Xi)\,d\Xi - \varphi^{(R)}(X) \Big|^p dX \equiv I_1 + I_2.$$

За допомогою оцінки (4.23) у випадку $p = 1$ маємо

$$I_1 \le C \int_{\mathbb{R}^L \setminus \mathbb{K}_{2R}^L} \Big(\int_{\mathbb{K}_R^L} \Phi_c(t,X;0,\Xi)\,|\varphi^{(R)}(\Xi)| \times$$

$$\times [B(t,0)]^{-M}\,d\Xi \Big) dX = C \int_{\mathbb{K}_R^L} |\varphi^{(R)}(\Xi)| \times$$

$$\times \Big(\int_{\mathbb{R}^L \setminus \mathbb{K}_{2R}^L} [B(t,0)]^{-M}\,\Phi_c(t,X;0,\Xi)\,dX \Big) d\Xi. \tag{5.15}$$

Зауважимо, що $\exists\, \delta_0 \in (0,1)$ і $c_1>0$ такі, що для будь-яких $\beta \in (0,\delta_0)$, $X \in \mathbb{R}^L \setminus \mathbb{K}^L_{2R}$ і $\Xi \in \mathbb{K}^L_R$ виконується нерівність

$$\exp\left\{-c\left(\frac{|x-\xi|^q}{\beta^{q-1}}+\frac{|y+\beta\hat{x}-\eta|^q}{\beta^{2q-1}}+\frac{|z+\beta y'+\frac{1}{2}\beta^2x'-\zeta|^q}{\beta^{3q-1}}\right)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-cc_1\frac{R^q}{\beta^{q-1}}\right\}. \tag{5.16}$$

Справді, маємо

$$\frac{|x-\xi|^q}{\beta^{q-1}}+\frac{|y+\beta\hat{x}-\eta|^q}{\beta^{2q-1}}+\frac{|z+\beta y'+\frac{1}{2}\beta^2x'-\zeta|^q}{\beta^{3q-1}}\geqslant$$

$$\geqslant \frac{3^{-q}}{\beta^{q-1}}\left|(x,y+\beta\hat{x},z+\beta y'+\tfrac{1}{2}\beta^2x')-\Xi\right|^q\geqslant$$

$$\geqslant \frac{3^{-q}}{\beta^{q-1}}\left|\,|(x,y+\beta\hat{x},z+\beta y'+\tfrac{1}{2}\beta^2x')|-|\Xi|\,\right|^q, \tag{5.17}$$

$$|(x,y+\beta\hat{x},z+\beta y'+\tfrac{1}{2}\beta^2x')|^2=|x|^2+|y+\beta\hat{x}|^2+$$

$$+|z+\beta y'+\tfrac{1}{2}\beta^2x'|^2=|x'|^2+|x''|^2+|x'''|^2+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}(y_j+\beta x_j)^2+\sum_{j=1}^{\ell}(z_j+\beta y_j+\tfrac{1}{2}\beta^2x_j)^2=$$

$$=|x'|^2+|x''|^2+|x'''|^2+\sum_{j=1}^{m}(y_j^2+\beta^2x_j^2+2\beta x_jy_j)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}(z_j^2+\beta^2y_j^2+\tfrac{1}{4}\beta^4x_j^2+2\beta y_jz_j+\beta^2x_jz_j+$$

$$+\beta^3x_jy_j)\geqslant |x'|^2+|x''|^2+|x'''|^2+\sum_{j=1}^{m}(y_j^2+$$

$$+\beta^2x_j^2-\beta(x_j^2+y_j^2))+\sum_{j=1}^{\ell}(z_j^2+$$

$$+\beta^2y_j^2+\tfrac{1}{4}\beta^4x_j^2-\beta(y_j^2+z_j^2)-$$

$$-\frac{1}{2}\beta^2(x_j^2+z_j^2)-\frac{1}{2}\beta^3(x_j^2+y_j^2))=|x'|^2+|x''|^2+|x'''|^2+$$

$$+(1-\beta)\sum_{j=1}^{m}y_j^2+(\beta^2-\beta)\sum_{j=1}^{m}x_j^2+(1-\beta-\frac{1}{2}\beta^2)\sum_{j=1}^{\ell}z_j^2+$$

$$+(\beta^2-\beta-\frac{1}{2}\beta^3)\sum_{j=1}^{\ell}y_j^2+(\frac{1}{4}\beta^4-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{2}\beta^3)\sum_{j=1}^{\ell}x_j^2=$$

$$=(1-\beta+\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{2}\beta^3+\frac{1}{4}\beta^4)|x'|^2+(1-\beta+\beta^2)|x''|^2+$$

$$+|x'''|^2+(1-2\beta+\beta^2-\frac{1}{2}\beta^3)|y'|^2+(1-\beta)|y''|^2+$$

$$+(1-\beta-\frac{1}{2}\beta^2)|z|^2.$$

Виберемо $\delta_0>0$ так, щоб для будь-якого $\beta\in(0,\delta_0)$ виконувались нерівності

$$1-\beta+\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{2}\beta^3+\frac{1}{4}\beta^4\geqslant\frac{1}{2},\ 1-\beta+\beta^2\geqslant\frac{1}{2},$$
$$1-2\beta+\beta^2-\frac{1}{2}\beta^3\geqslant\frac{1}{2},\ 1-\beta\geqslant\frac{1}{2},\ 1-\beta-\frac{1}{2}\beta^2\geqslant\frac{1}{2},$$

тоді для $\beta\in(0,\delta_0)$ і $X\in\mathbb{R}^L\setminus\mathbb{K}^L_{2R}$ з останньої нерівності дістанемо

$$|(x,y+\beta\hat{x},z+\beta y'+\frac{1}{2}\beta^2x')|\geqslant(\frac{1}{2}(|x'|^2+|x''|^2+|x'''|^2)+$$
$$+\frac{1}{2}(|y'|^2+|y''|^2)+\frac{1}{2}|z|^2)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|^2+|y|^2+|z|^2)^{1/2}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}|X|>\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2R=\sqrt{2}R.$$

З цієї нерівності і нерівності (5.17), враховуючи те, що для $\boxed{H}\in\mathbb{K}^L_R$ $|\boxed{H}|\leqslant R$, випливає нерівність (5.16) з $c_1=3^{-q}(\sqrt{2}-1)^q$.

З нерівності (5.15) за допомогою (5.16) з $\beta=B(t,0)$ випливає, що

$$I_1 \leq \exp\{-(c-c_0)c_1 \frac{R^q}{[B(t,0)]^{q-1}}\} \int_{\mathbb{R}^L} |\varphi^{(R)}(\Xi)| \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^L} \Phi_{c_0}(t,X;0,\Xi)[B(t,0)]^{-M} dX \right) d\Xi =$$

$$= C \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^L)} \exp\{-(c-c_0)c_1 \frac{R^q}{[B(t,0)]^{q-1}}\}, \qquad (5.18)$$

де t таке, що $B(t,0) \in (0, \delta_0)$. Тут використана рівність

$$\int_{\mathbb{R}^L} \Phi_{c_0}(t,X;0,\Xi)[B(t,0)]^{-M} dX = C, \quad t>0,\ \Xi \in \mathbb{R}^L. \qquad (5.19)$$

Ця рівність одержується, якщо в інтегралі перейти від змінних інтегрування x , y , z до нових змінних λ , μ , ν за допомогою формул $x=\xi+[B(t,0)]^{1/2b}\lambda$, $y+B(t,0)\hat{x}=\eta+[B(t,0)]^{1+1/2b}\times$ $\times\mu$, $z+B(t,0)y'+\frac{1}{2}[B(t,0)]^2x'=\zeta+[B(t,0)]^{2+1/2b}\nu$.

При $p>1$ за допомогою (4.23) і (5.16) з $\beta=B(t,0)$, нерівності Гельдера і рівності (5.8) для t таких, що $B(t,0)\in$ $\in(0,\delta_0)$ і $X\in\mathbb{R}^L\setminus\mathbb{K}^L_{2R}$, аналогічно доведенню нерівності (2.20) маємо

$$\left|\int_{\mathbb{K}^L_R} Z(t,X;0,\Xi)\varphi^{(R)}(\Xi)\,d\Xi\right| \leq$$

$$\leq C\left(\int_{\mathbb{K}^L_R} |\varphi^{(R)}(\Xi)|^p \Phi_{\frac{c-c_0}{2}p}(t,X;0,\Xi)\times\right.$$

$$\left.\times[B(t,0)]^{-M} d\Xi\right)^{\frac{1}{p}} \exp\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}\cdot\frac{R^q}{[B(t,0)]^{q-1}}\},$$

звідки дістанемо

$$I_1 \leqslant C \int_{\mathbb{R}^L \setminus \mathbb{K}^L_{2R}} \Big(\int_{\mathbb{K}^L_R} |\varphi^{(R)}|^p \Phi_{\frac{c-c_0}{2}p}(t,X;0,\Xi) \times$$

$$\times [B(t,0)]^{-M} d\Xi \Big) dX \exp\Big\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2} p \cdot \frac{R^q}{[B(t,0)]^{q-1}}\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant C \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^L)} \exp\Big\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2} p \cdot \frac{R^q}{[B(t,0)]^{q-1}}\Big\}, \tag{5.20}$$

де t таке, що $B(t,0) \in (0, \delta_0)$.

Інтеграл I_2 оцінюється так само, як і відповідний інтеграл J_2 з п. б) леми 2.2. У результаті одержуємо, що

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall t \in (0,\delta_2): \; I_2 < \frac{1}{2}\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^p. \tag{5.2I}$$

З нерівностей (5.I8) і (5.20) випливає, що

$$\exists \delta_1 > 0 \; \forall t \in (0,\delta_1), B(t,0) \in (0,\delta_0): I_1 < \frac{1}{2}\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^p, \tag{5.22}$$

а з (5.2I) і (5.22) дістанемо, що

$$\forall t \in (0,\delta), \; \delta \equiv \min(\delta_1,\delta_2): \; I < \Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^p.$$

Звідси випливає, що нерівність (5.I4) доведена.

Тепер доведемо співвідношення (5.I0). Спочатку зауважимо, що інтеграли з (5.I0) мають зміст для будь-яких $\varphi \in L_\infty^{k(0,a)}$, $\psi \in L_1^{-s(T)}$ і $t \in (0,T]$, оскільки згідно з нерівністю (5.4) та лемою 5.I $\forall t \in (0,T]: \|u(t,\cdot)\|_\infty^{s(t)} < \infty$, якщо $\varphi \in L_\infty^{k(0,a)}$. Справді, на підставі того, що $\forall t \in (0,T]: k_j(0,a_j) \leqslant s_j(t) \leqslant s_j(T)$, $j = 1, 2, 3$, маємо

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^L} u(t,X)\psi(X)\,dX\Big| \leqslant \int_{\mathbb{R}^L} |u(t,X)|\,\Omega_{-1}(t,X) \times$$

$$\times |\psi(X)|\,\Omega_1(T,X)\,dX \leqslant \|u(t,\cdot)\|_\infty^{s(t)} \, \|\psi\|_1^{-s(T)} < \infty,$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^L}\varphi(X)\psi(X)\,dX\right|\leqslant\int_{\mathbb{R}^L}|\varphi(X)|\widetilde{\Psi}_{-1}(0,a,X)\times$$
$$\times|\psi(X)\widetilde{\Psi}_1(T,0,X)\,dX\leqslant\|\varphi\|_\infty^{k(0,a)}\|\psi\|_1^{-s(T)}<\infty.$$

Використовуючи формулу (5.6), можна записати

$$\int_{\mathbb{R}^L}u(t,X)\psi(X)\,dX=\int_{\mathbb{R}^L}\varphi(\Xi)v(t,\Xi)\,d\Xi,$$

де

$$v(t,\Xi)\equiv\int_{\mathbb{R}^L}Z(t,X;0,\Xi)\psi(X)\,dX.$$

Тому для доведення співвідношення (5.10) досить установити, що

$$\int_{\mathbb{R}^L}\varphi(\Xi)[v(t,\Xi)-\psi(\Xi)]\,d\Xi\xrightarrow[t\to0+]{}0.$$

Оскільки $\varphi\in L_\infty^{k(0,a)}$, то маємо

$$\left|\int_{\mathbb{R}^L}\varphi(\Xi)[v(t,\Xi)-\psi(\Xi)]\,d\Xi\right|\leqslant\|\varphi\|_\infty^{k(0,a)}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^L}|v(t,\Xi)-\psi(\Xi)|\widetilde{\Psi}_1(0,a,\Xi)\,d\Xi$$

і для доведення співвідношення (5.10) треба довести, що

$$\int_{\mathbb{R}^L}|v(t,\Xi)-\psi(\Xi)|\widetilde{\Psi}_1(0,a,\Xi)\,d\Xi\xrightarrow[t\to0+]{}0. \tag{5.23}$$

Оскільки $k_j(0,a_j)<k_j(T,a_j)$, $j=1,2,3$, то

$$\exists\gamma>0\ \forall t\in(0,\gamma):$$
$$s_j(T)\geqslant k_j(T,a_j)\geqslant g_j(t)\equiv c_0k_j(T,a_j)(c_0^{2b-1}+$$
$$+k_j^{2b-1}(T,a_j)[B(t,0)]^{2b(j-1)+1})^{1-q}\geqslant k_j(0,a_j),\ j=1,2,3,$$

тому

$$\forall t\in(0,\gamma): G_1(t,\Xi)\geqslant\widetilde{\Psi}_1(0,a,\Xi),\ \Xi\in\mathbb{R}^L,$$

де $G_\nu(t,\Xi)\equiv\exp\{\nu(g_1(t)|\xi|^q+g_2(t)|\eta|^q+$
$+g_3(t)|\zeta|^q)\}$, $\nu=-1,1$, $t\in[0,T]$. І для доведення

співвідношення (5.23) досить довести твердження

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta\in(0,\gamma) \ \forall t\in(0,\delta):$$

$$\|v(t,\cdot)-\psi(\cdot)\|_1^{-g(t)}<\varepsilon, \qquad (5.24)$$

де

$$\|v(t,\cdot)\|_1^{-g(t)}\equiv\|v(t,\Xi)G_1(t,\Xi)\|_{L_1(\mathbb{R}^L)},$$
$$g(t)\equiv(g_1(t),g_2(t),g_3(t)).$$

Доведення (5.24) аналогічне доведенню (5.II). Як і там, розглянемо для $R>0$ функцію $\psi^{(R)}(X)$, $X\in\mathbb{R}^L$, де

$$\psi^{(R)}(X)\equiv\begin{cases}\psi(X), X\in\mathbb{K}_R^L,\\ 0, \ X\in\mathbb{R}^L\setminus\mathbb{K}_R^L.\end{cases}$$

Маємо при $t\in(0,\gamma)$

$$\|v(t,\cdot)-\psi(\cdot)\|_1^{-g(t)}\leqslant\|\int_{\mathbb{R}^L}Z(t,X;0,\Xi)\times$$
$$\times(\psi-\psi^{(R)})(X)\,dX\,\|_1^{-g(t)}+\|\int_{\mathbb{R}^L}Z(t,X;0,\Xi)\times$$
$$\times\psi^{(R)}(X)\,dX-\psi^{(R)}(\Xi)\|_1^{-g(t)}+\|\psi-\psi^{(R)}\|_1^{-g(t)}\equiv$$
$$\equiv J_1+J_2+J_3. \qquad (5.25)$$

Оцінимо J_1. За допомогою оцінки (4.23) маємо

$$|\int_{\mathbb{R}^L}Z(t,X;0,\Xi)(\psi-\psi^{(R)})(X)\,dX|\leqslant$$
$$\leqslant C\int_{\mathbb{R}^L}\Phi_c(t,X;0,\Xi)\widetilde{\widetilde{\Psi}}_{-1}(T,a,t,X)\times$$
$$\times|(\psi-\psi^{(R)})(X)|\,\widetilde{\widetilde{\Psi}}_1(T,a,t,X)\,[B(t,0)]^{-M}dX\leqslant$$
$$\leqslant C\int_{\mathbb{R}^L}\Phi_{c-c_0}(t,X;0,\Xi)\Phi_{c_0}(t,X;0,\Xi)\times$$
$$\times\widetilde{\widetilde{\Psi}}_{-1}(T,a,t,X)|(\psi-\psi^{(R)})(X)|\,\Omega_1(T,X)\times$$

$$\times [B(t,0)]^{-M} dX \leq C\, G_1(t,\Xi)\times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^L} \Phi_{c-c_0}(t,X;0,\Xi)(|(\psi-\psi^{(R)})(X)|\times$$
$$\times \Omega_1(T,X))[B(t,0)]^{-M} dX, \qquad (5.26)$$

де

$$\widehat{\widetilde{\Psi}}(T,a,t,X)\equiv \exp\{\nu(k_1(T,a_1)|x|^q+k_2(T,a_2)|y+$$
$$+B(t,0)\hat{x}|^q+k_3(T,a_3)|z+B(t,0)y'+\tfrac{1}{2}[B(t,0)]^2x'|^q)\},\nu=-1,1.$$

Тут використані нерівності

$$k_1(T,a_1)|x|^q+k_2(T,a_2)|y+B(t,0)\hat{x}|^q+k_3(T,a_3)\times$$
$$\times|z+B(t,0)y'+\tfrac{1}{2}[B(t,0)]^2x'|^q \leq (k_1(T,a_1)+2^{q-1}\times$$
$$\times[B(t,0)]^q k_2(T,a_2)+2^{-q}3^{q-1}[B(t,0)]^{2q}k_3(T,a_3))\times$$
$$\times|x|^q(2^{q-1}k_2(T,a_2)+3^{q-1}[B(t,0)]^q k_3(T,a_3))|y|^q+$$
$$+3^{q-1}k_3(T,a_3)|z|^q \leq S_1(T)|x|^q+S_2(T)|y|^q+S_3(T)|z|^q,$$
$$t\geq 0,\ X\in\mathbb{R}^L, \qquad (5.27)$$

$$-c_0\Big(\frac{|x-\xi|^q}{[B(t,0)]^{q-1}}+\frac{|y+B(t,0)\hat{x}-\eta|^q}{[B(t,0)]^{2q-1}}+$$
$$+\frac{|z+B(t,0)y'+\frac{1}{2}[B(t,0)]^2x'-\zeta|^q}{[B(t,0)]^{3q-1}}\Big)-k_1(T,a_1)|x|^q-$$
$$-k_2(T,a_2)|y+B(t,0)\hat{x}|^q-k_3(T,a_3)|z+B(t,0)y'+$$
$$+\tfrac{1}{2}[B(t,0)]^2x'|^q\leq -g_1(t)|\xi|^q-g_2(t)|\eta|^q-g_3(t)|\zeta|^q,$$
$$t\geq 0,\ \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^L. \qquad (5.28)$$

Нерівності (5.27) правильні на підставі (5.3) і означення функцій S_j , $j=1,2,3$. Нерівність (5.28) доводиться так само, як (5.1).

З (5.26) за допомогою рівності (5.8) випливає, що

$$J_1 \leqslant C \| \psi - \psi^{(R)} \|_1^{-s(T)}, t \in (0,\gamma). \tag{5.29}$$

На підставі того, що $g_j(t) \leqslant s_j(T)$, $t \in (0,\gamma)$, $j = 1, 2, 3$, маємо

$$J_3 \leqslant \| \psi - \psi^{(R)} \|_1^{-s(T)}, t \in (0,\gamma),$$

тому

$$J_1 + J_3 \leqslant (C+1) \| \psi - \psi^{(R)} \|_1^{-s(T)}, t \in (0,\gamma).$$

Оскільки

$$\| \psi - \psi^{(R)} \|_1^{-s(T)} = \int_{\mathbb{R}^L \setminus \mathbb{K}_R^L} | \psi(X) | \Omega_1(T,X)\, dX \xrightarrow[R\to\infty]{} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,$$

то

$$J_1 + J_3 \xrightarrow[R\to\infty]{} 0, t \in (0,\gamma). \tag{5.30}$$

Розглянемо вираз J_2. Запишемо його у вигляді

$$J_2 = \int_{\mathbb{R}^L \setminus \mathbb{K}_{2R}^L} \Big| \int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\, \psi^{(R)}(X)\, dX \Big| \times \\ \times G_1(t,\Xi)\, d\Xi + \int_{\mathbb{K}_{2R}^L} \Big| \int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi) \times \\ \times \psi^{(R)}(X)\, dX - \psi^{(R)}(\Xi) \Big|\, G_1(t,\Xi)\, d\Xi \equiv \\ \equiv J_2' + J_2''.$$

Так само, як (5.29), доводиться, що

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\, \psi^{(R)}(X)\, dX \Big\|_1^{-g(t)} \leqslant \\ \leqslant C \| \psi^{(R)} \|_1^{-s(T)}, t \in (0,\gamma),$$

звідси випливає, що

$$J_2' \xrightarrow[R\to\infty]{} 0, t \in (0,\gamma). \tag{5.31}$$

Для J_2'' маємо

$$J_2'' \leq \int_{K^L_{2R}} \left| \int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\,\psi^{(R)}(X)\,dX - \psi^{(R)}(\Xi) \right| d\Xi.$$

Проводячи для останнього інтеграла міркування, аналогічні проведеним вище для інтеграла I_2, дістанемо, що

$$J_2'' \xrightarrow[t\to 0+]{} 0,\ R>0. \qquad (5.32)$$

Із співвідношень (5.25),(5.30)-(5.32) випливає твердження (5.24).▶

<u>5.3. Властивості інтегралів Пуассона узагальнених мір з простору $M^{k(0,a)}$.</u> Розглянемо інтеграл

$$u(t,X) = \int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\,d\mu(X), \quad (t,X)\in \Pi^L_{(0,T]}, \qquad (5.33)$$

який називатимемо інтегралом Пуассона міри μ.

Нехай $C_0^{-s(T)}$ - множина всіх комплекснозначних неперервних функцій $\varphi(X)$, $X\in\mathbb{R}^L$, які мають властивість $|\varphi(X)| \times \Omega_1(T,X) \xrightarrow[|X|\to\infty]{} 0$. Для $\varphi\in C_0^{-s(T)}$ покладемо

$$\|\varphi\|_\infty^{-s(T)} \equiv \sup_{X\in\mathbb{R}^L} \left(|\varphi(X)|\,\Omega_1(T,X) \right).$$

<u>Лема 5.3</u>. Нехай $\mu\in M^{k(0,a)}$. Тоді правильні такі твердження:

1) $\exists\, C>0\ \forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\|_1^{k(t,a)} \leq C\,\|\mu\|^{k(0,a)}$;

2) функція (5.33) є розв'язком рівняння (4.1) у шарі $\Pi^L_{(0,T]}$;

3) $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0+]{\alpha} \mu$, тобто $\forall\varphi\in C_0^{-s(T)}$:

$$\int_{\mathbb{R}^L} \varphi(X)\,u(t,X)\,dX \xrightarrow[t\to 0+]{} \int_{\mathbb{R}^L} \varphi(X)\,d\mu(X). \qquad (5.34)$$

◀1) Доведення аналогічне доведенню твердження а) леми 2.3.

2) Твердження випливає з властивості ФР так само, як у п. 4.2.

3) Інтеграли з (5.34) мають зміст для будь-яких $\varphi \in C_0^{-s(T)}$, $\mu \in M^{k(0,a)}$ і $t \in (0,T]$. Справді, згідно з означенням функцій s_j, $j=1,2,3$, і твердженням 1) маємо

$$\left|\int_{\mathbb{R}^L} \varphi(X)u(t,X)\,dX\right| \leq \int_{\mathbb{R}^L} |\varphi(X)|\,\Omega_1(T,X)\times$$
$$\times |u(t,X)|\,\widetilde{\Psi}_{-1}(t,a,X)\,dX \leq \|\varphi\|_{\infty}^{-s(T)}\times$$
$$\times \|u(t,\cdot)\|_1^{k(t,a)} \leq C\,\|\varphi\|_{\infty}^{-s(T)}\,\|\mu\|^{k(0,a)} < \infty,$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^L} \varphi(X)\,d\mu(X)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^L} |\varphi(X)|\,\Omega_1(T,X)\times$$
$$\times \widetilde{\Psi}_{-1}(0,a,X)\,d|\mu|(X) \leq \|\varphi\|_{\infty}^{-s(T)}\,\|\mu\|^{k(0,a)} < \infty.$$

Використовуючи оцінки (4.23), маємо

$$\left|\int_{\mathbb{R}^L} \varphi(X)\,u(t,X)\,dX - \int_{\mathbb{R}^L} \varphi(X)\,d\mu(X)\right| =$$
$$= \left|\int_{\mathbb{R}^L} [v(t,\Xi)-\varphi(\Xi)]\,\widetilde{\Psi}_1(0,a,\Xi)\,\widetilde{\Psi}_{-1}(0,a,\Xi)\,d\mu(\Xi)\right| \leq$$
$$\leq \|v(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_{\infty}^{-k(0,a)}\,\|\mu\|^{k(0,a)},$$

де

$$v(t,\Xi) \equiv \int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\,\varphi(X)\,dX.$$

Тому досить довести, що

$$\|v(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_{\infty}^{-g(t)} \xrightarrow[t\to 0+]{} 0, \tag{5.35}$$

де функція $g(t)$, $t \in (0,\gamma)$, та сама, що і в п. 5.2.

Нехай $R>0$ і θ_R – функція з простору $C^{\infty}(\mathbb{R}^L)$ така, що $0 \leq \theta_R \leq 1$ на $\mathbb{R}^L$, $\theta_R(X)=1$, $X \in \mathbb{K}^L_{R/2}$ і $\theta_R(X)=0$, $X \in \mathbb{R}^L \setminus \mathbb{K}^L_R$. Покладемо $\varphi^{(R)} \equiv \theta_R \varphi$. Для $t \in (0,\gamma)$ маємо

$$\|v(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_\infty^{-g(t)} \leq \|\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\times$$

$$\times(\varphi-\varphi^{(R)})(X)dX\|_\infty^{-g(t)} + \|\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\times$$

$$\times \varphi^{(R)}(X)\,dX-\varphi^{(R)}(\Xi)\|_\infty^{-g(t)} + \|\varphi^{(R)}-\varphi\|_\infty^{-g(t)} \equiv$$

$$\equiv L_1+L_2+L_3. \tag{5.36}$$

Так само, як і при доведенні нерівності (5.26), за допомогою рівності (5.19), в якому c_0 замінено на $c-c_0$, дістанемо

$$|\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)(\varphi-\varphi^{(R)})(X)dX| \leq$$

$$\leq C\,\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_\infty^{-s(T)} \int_{\mathbb{R}^L} \Phi_{c-c_0}(t,X;0,\Xi)\times$$

$$\times [B(t,0)]^{-M} dX\; G_{-1}(t,\Xi),$$

звідки випливає нерівність

$$L_1 \leq C\,\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_\infty^{-s(T)},\; t\in(0,\gamma).$$

На підставі нерівностей $g_j(t) \leq s_j(T)$, $t \in (0,\gamma)$, $j=1,2,3$, маємо

$$L_3 \leq \|\varphi-\varphi^{(R)}\|_\infty^{-s(T)},\; t\in(0,\gamma),$$

тому

$$L_1+L_3 \leq (C+1)\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_\infty^{-s(T)},\; t\in(0,\gamma).$$

Оскільки

$$\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_\infty^{-s(T)} \leq \sup_{X \in \mathbb{R}^L\setminus \mathbb{K}^L_{R/2}} (|\varphi(X)|\Omega_1(T,X)) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,$$

то

$$L_1 + L_3 \xrightarrow[R\to\infty]{} 0, t\in(0,\gamma). \tag{5.37}$$

Далі маємо

$$L_2 \leqslant \sup_{\Xi\in\mathbb{R}^L\setminus\mathbb{K}^L_{2R}} \Big(\Big|\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\varphi^{(R)}(X)dX\Big|\times$$

$$\times G_1(t,\Xi)\Big) + \exp\{(g_1(T)+g_2(T)+g_3(T))(2R)^q\}\times$$

$$\times \sup_{\Xi\in\mathbb{K}^L_{2R}} \Big(\Big|\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\varphi^{(R)}(X)dX-\varphi^{(R)}(\Xi)\Big|\Big)\equiv$$

$$\equiv L_2' + L_2''. \tag{5.38}$$

За допомогою оцінки (4.23), нерівностей (5.27),(5.28), рівності (5.19), в якій c_0 замінено на $\frac{c-c_0}{2}$ маємо

$$L_2' \leqslant \sup_{\Xi\in\mathbb{R}^L\setminus\mathbb{K}^L_{2R}} \Big(C\int_{\mathbb{K}^L_R} \Phi_{\frac{c-c_0}{2}}(t,X;0,\Xi)\times$$

$$\times \Phi_{\frac{c-c_0}{2}}(t,X;0,\Xi)(\Phi_{c_0}(t,X;0,\Xi)\widetilde{\widetilde{\Psi}}_{-1}(T,a,t,X))\times$$

$$\times(|\varphi^{(R)}(X)|\Omega_1(T,X))[B(t,0)]^{-M}dX\times$$

$$\times G_1(t,\Xi)\Big) \leqslant C\exp\Big\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}\cdot\frac{R^q}{[B(t,0)]^{q-1}}\Big\}\times$$

$$\times\|\varphi^{(R)}\|_\infty^{-s(T)}\int_{\mathbb{R}^L}\Phi_{\frac{c-c_0}{2}}(t,X;0,\Xi)[B(t,0)]^{-M}dX\leqslant$$

$$\leqslant C\|\varphi\|_\infty^{-s(T)}\exp\Big\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}\cdot\frac{R^q}{[B(t,0)]^{q-1}}\Big\}\xrightarrow[t\to 0+]{} 0, R>0. \tag{5.39}$$

Оскільки $\varphi^{(R)}$ – неперервна й обмежена функція, то згідно з властивістю ФР задачі Коші для спряженого рівняння маємо

$$L_2'' \xrightarrow[t\to 0+]{} 0, R>0. \tag{5.40}$$

Із співвідношень (5.36)-(5.40) випливає потрібне співвідношення. ▶

§ 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ (4.1) У ВИПАДКУ СЛАБКОГО ВИРОДЖЕННЯ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

<u>6.1. Зображення у вигляді інтегралів Пуассона розв'язків задачі Коші</u>. Наведемо леми про зображення у вигляді інтегралів Пуассона (5.6) і (5.33) розв'язків задачі Коші для рівняння (4.1). Вони аналогічні відповідним лемам з [24] і п. 2.3.

<u>Лема 6.1</u>. Розв'язок u рівняння (4.1), який задовольняє умови:

1) $\exists\, C>0\ \ \forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}\leq C,\ 1\leq p\leq\infty;$

2) $\lim\limits_{t\to 0+}\|u(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{s(t)}=0,\ 1\leq p<\infty,$

$$u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0+]{\alpha}\varphi(\cdot),\ p=\infty,$$

де $\varphi\in L_p^{k(0,a)}$, $1\leq p\leq\infty$, зображується у вигляді (5.6).

Нехай $u(t,X)$, $(t,X)\in\Pi^L_{(0,T]}$, – розв'язок рівняння (4.1), який задовольняє умови 1) і 2); $G_R\equiv(0,T]\times\times\mathbb{K}^L_R$, де $R>0$; θ – функція з простору $C^\infty([0,\infty))$ така, що $\theta(\tau)=1$ при $\tau\in[0,\frac{1}{2}]$, $\theta(\tau)=0$ при $\tau\in[\frac{3}{4},\infty)$ і $\theta'\leq 0$; (t,X) – фіксована точка з $G_{\bar{R}/4}$, де $\bar{R}>0$ – фіксоване число.

Скористаємося формулою (4.34). У цій формулі покладемо замість β, Λ, t_0, t_1, Ω, $u(\beta,\Lambda)$ і $v(\beta,\Lambda)$ відповідно τ, Ξ, h, $t-\varepsilon$, $\mathbb{K}^L_R$, $u(\tau,\Xi)$ і $\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right)\times Z^*(\tau,\Xi;t,X)$, де $R\geq\bar{R}$, $0<h<\frac{t}{2}$, $0<\varepsilon<<\frac{t}{2}$, а u – взятий нами розв'язок рівняння (4.1). Використовуючи формулу (4.32) та властивості функції θ, в результаті одержимо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;t-\varepsilon,\Xi)\,\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right)u(t-\varepsilon,\Xi)\,d\Xi=$$

$$= \int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;h,\Xi)\,\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right) u(h,\Xi)\,d\Xi -$$

$$- \int_h^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\mathbb{K}^L_{3R/4}\setminus\mathbb{K}^L_{R/2}} \overline{\mathcal{L}^*\left(\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right) Z^*(\tau,\Xi;t,X)\right)} u(\tau,\Xi)\,d\Xi .$$

Перейшовши в останній рівності до границі при $\varepsilon \to 0$ і використавши співвідношення (4.26), дістанемо рівність

$$u(t,X) = \int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;h,\Xi)\,\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right) u(h,\Xi)\,d\Xi -$$

$$- \int_h^{t} d\tau \int_{\mathbb{K}^L_{3R/4}\setminus\mathbb{K}^L_{R/2}} \overline{\mathcal{L}^*\left(\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right) Z^*(\tau,\Xi;t,X)\right)} u(\tau,\Xi)\,d\Xi \equiv$$

$$\equiv I_1^{(R)} + I_2^{(R)} . \tag{6.1}$$

Перейдемо тепер у (6.1) до границі при $R \to \infty$. Доведемо, що при цьому $I_1^{(R)}$ прямує до

$$I_1 \equiv \int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;h,\Xi)\,u(h,\Xi)\,d\Xi .$$

За допомогою оцінки (4.23) маємо

$$|I_1 - I_1^{(R)}| = \left|\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;h,\Xi)\left(1-\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times u(h,\Xi)\,d\Xi\right| \leqslant C\,[B(t,h)]^{-M}\times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^L\setminus\mathbb{K}^L_{R/2}} \Phi_{c-c_0}(t,X;h,\Xi)\,\Phi_{c_0}(t,X;h,\Xi)\times$$

$$\times\, \widetilde{\Psi}_1(h,a,\Xi)\left(|u(h,\Xi)|\,\widetilde{\Psi}_{-1}(h,a,\Xi)\right) d\Xi . \tag{6.2}$$

Користуватимемося нерівностями

$$-c_0\left(\frac{|x-\xi|^q}{[B(t,h)]^{q-1}} + \frac{|y+B(t,h)\hat{x}-\eta|^q}{[B(t,h)]^{2q-1}} + \right.$$

$$+\frac{|z+B(t,h)y'+\frac{1}{2}[B(t,h)]^2x'-\zeta|^q}{[B(t,h)]^{3q-1}}\Big)+k_1(h,a_1)|\xi|^q+$$

$$+k_2(h,a_2)|\eta+B(h,0)\hat{\xi}|^q+k_3(h,a_3)|\zeta+B(h,0)\eta'+$$

$$+\frac{1}{2}[B(h,0)]^2\xi'|^q\le -c_0\Big(\frac{|x-\xi|^q}{[B(t,h)]^{q-1}}+\frac{|y+B(t,h)\hat{x}-\eta|^q}{[B(t,h)]^{2q-1}}+$$

$$+\frac{|z+B(t,h)y'+\frac{1}{2}[B(t,h)]^2x'-\zeta|^q}{[B(t,h)]^{3q-1}}\Big)+s_1(h)|\xi|^q+$$

$$+s_2(h)|\eta|^q+s_3(h)|\zeta|^q\le k_1^0(B(t,h),s_1(h))|x|^q+$$

$$+k_2^0(B(t,h),s_2(h))|y+B(t,h)\hat{x}|^q+k_3^0(B(t,h),s_3(h))\times$$

$$\times|z+B(t,h)y'+\frac{1}{2}[B(t,h)]^2x'|^q\le C_2, \qquad (6.3)$$

де h – досить мале число таке, що

$$0<B(t,h)<\min_{1\le j\le 3}\left(\frac{c_0}{s_j(h)}\right)^{\frac{2b-1}{2b(j-1)+1}}, X\in \mathbb{K}^L_{R/4}, \Xi\in\mathbb{R}^L;$$

$$-c_0\Big(\frac{|x-\xi|^q}{[B(t,h)]^{q-1}}+\frac{|y+B(t,h)\hat{x}-\eta|^q}{[B(t,h)]^{2q-1}}+$$

$$+\frac{|z+B(t,h)y'+\frac{1}{2}[B(t,h)]^2x'-\zeta|^q}{[B(t,h)]^{3q-1}}\Big)\ge c_1\frac{R^q}{[B(t,h)]^{q-1}}, \qquad (6.4)$$

$$X\in\mathbb{K}^L_{R/4},\ \Xi\in\mathbb{R}^L\setminus\mathbb{K}^L_{R/2},$$

де $c_1>0$, $c_2>0$, $\lambda=q-1$ при $0<B(t,h)\le 1$ і $\lambda=3q-1$ при $B(t,h)>1$, R – досить велике число, $\overline{R}$ – фіксоване число, причому $0<\overline{R}<R$.

Друга нерівність з (6.3) доводиться так само, як нерівність (5.1), а перша і третя – очевидні згідно з нерівностями (5.3) і означенням функцій s_j, $j=1,2,3$. Доведення нерівності (6.4) аналогічне доведенню нерівності (4.28). Як і там, маємо

$$\frac{|x-\xi|^q}{[B(t,h)]^{q-1}}+\frac{|y+B(t,h)\hat{x}-\eta|^q}{[B(t,h)]^{2q-1}}+$$

$$+\frac{|z+B(t,h)y'+\frac{1}{2}[B(t,h)]^2x'-\zeta|^q}{[B(t,h)]^{3q-1}}\geqslant\frac{3^{-q}}{[B(t,h)]^{\lambda}}\times$$

$$\times\big||\Xi|-|(x,y+B(t,h)\hat{x},z+B(t,h)y'+\tfrac{1}{2}[B(t,h)]^2x')|\big|^q,$$

$$|(x,y+B(t,h)\hat{x},z+B(t,h)y'+\tfrac{1}{2}[B(t,h)]^2x')|\leqslant|X|+|(0,$$

$$B(t,h)\hat{x},B(t,h)y'+\tfrac{1}{2}[B(t,h)]^2x')|\leqslant\frac{\bar{R}}{4}+B(T,0)|\hat{x}|+$$

$$+B(T,0)|y'|+\tfrac{1}{2}[B(T,0)]^2|x'|\leqslant(1+B(T,0)+\tfrac{1}{2}[B(T,0)]^2)\frac{\bar{R}}{4}.$$

Для $\Xi\in\mathbb{R}^L\setminus\mathbb{K}^L_{R/2}$ звідси одержуємо

$$\frac{|x-\xi|^q}{[B(t,h)]^{q-1}}+\frac{|y+B(t,h)\hat{x}-\eta|^q}{[B(t,h)]^{2q-1}}+$$

$$+\frac{|z+B(t,h)y'+\frac{1}{2}[B(t,h)]^2x'-\zeta|^q}{[B(t,h)]^{3q-1}}\geqslant\frac{3^{-q}}{[B(t,h)]^{\lambda}}\Big(\frac{R}{2}-$$

$$-(1+B(T,0)+\tfrac{1}{2}[B(T,0)]^2)\frac{\bar{R}}{4}\Big)^q\geqslant\frac{3^{-q}}{[B(t,h)]^{\lambda}}R^q$$

для всіх $R\geqslant R_0$, якщо R_0 вибране так, щоб

$$\frac{R_0}{4}-(1+B(T,0)+\tfrac{1}{2}[B(T,0)]^2)\frac{\bar{R}}{4}\geqslant 0.$$

З нерівностей (6.2)-(6.4) випливає, що

$$|I_1-I_1^{(R)}|\leqslant C\exp\Big\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}\cdot\frac{R^q}{[B(t,h)]^{\lambda}}\Big\}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^L}[B(t,h)]^{-M}\Phi_{\frac{c-c_0}{2}}(t,X;h,\Xi)\times$$

$$\times|u(h,\Xi)|\,\widetilde{\Psi}_{-1}(h,a,\Xi)\,d\Xi. \tag{6.5}$$

Якщо $p=1$, то з (6.5) зразу випливає, що

$$|I_1-I_1^{(R)}|\leqslant C[B(t,h)]^{-M}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}\cdot\frac{R^q}{[B(t,h)]^\lambda}\right\}\|u(h,\cdot)\|_1^{k(h,a)}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

при фіксованому h .

Якщо $1<p<\infty$, то за допомогою нерівності Гельдера і рівності (5.8) маємо

$$|I_1-I_1^{(R)}|\le C\,[B(t,h)]^{-\frac{M}{p}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}\cdot\frac{R^q}{[B(t,h)]^\lambda}\right\}\|u(h,\cdot)\|_p^{k(h,a)}\times$$
$$\times\left(\int_{\mathbb{R}^L}\Phi_{\frac{c-c_0}{2}p'}(t,X;h,\Xi)[B(t,h)]^{-M}d\Xi\right)^{\frac{1}{p'}}=$$
$$=C\,[B(t,h)]^{-\frac{M}{p}}\|u(h,\cdot)\|_p^{k(h,a)}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}\cdot\frac{R^q}{[B(t,h)]^\lambda}\right\}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

при фіксованому h .

Використовуючи нерівність (6.5) і рівність (5.8), при маємо

$$|I_1-I_1^{(R)}|\le C\,\|u(h,\cdot)\|_\infty^{k(h,a)}\exp\left\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}\cdot\frac{R^q}{[B(t,h)]^\lambda}\right\}\longrightarrow\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

при фіксованому h .

Тепер доведемо, що $I_2^{(R)}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$. Для цього зауважимо, що

$$\mathcal{L}^*\left(\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right)Z^*(\tau,\Xi;t,X)\right)=\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right)\mathcal{L}^*Z^*(\tau,\Xi;t,X)+$$
$$+\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\sum_{j=1}^{m}\xi_j D^1_{\eta_j}\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right)Z^*(\tau,\Xi;t,X)+$$
$$+\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\sum_{j=1}^{l}\eta_j D^1_{\xi_j}\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right)Z^*(\tau,\Xi;t,X)-$$

$$-\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\sum_{0<|k|\le 2b}\bar{a}_k(\tau)\sum_{0<r\le k}C_k^r\,(-D_\xi)^r\,\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right)\times$$

$$\times(-D_\xi)^{k-r}Z^*(\tau,\Xi;t,X), \qquad (6.6)$$

де $C_k^r \equiv C_{k_1}^{r_1}\ldots C_{k_n}^{r_n}$. Оскільки при $\tau<t$

$$\mathcal{L}^*Z^*(\tau,\Xi;t,X)=0,$$

то перший доданок з (6.6) рівний нулеві, а оскільки

$$\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right)=\begin{cases}1, & \Xi\in\mathbb{K}_{R/2}^L,\\ 0, & \Xi\in\mathbb{R}^L\setminus\mathbb{K}_{3R/4}^L,\end{cases}$$

то (6.6) рівний нулеві в $\mathbb{R}^L\setminus(\mathbb{K}_{3R/4}^L\setminus\mathbb{K}_{R/2}^L)$. Використовуючи те, що

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\xi_j D_{\eta_j}^1\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right)\right|\le C|\xi|\cdot\frac{1}{R},$$

$$\left|\sum_{j=1}^{\ell}\eta_j D_{\xi_j}^1\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right)\right|\le C|\eta|\cdot\frac{1}{R},\quad \left|D_\xi^r\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right)\right|\le\frac{C}{R^{|r|}},$$

формулу (4.32) і оцінки (4.23), при $R\ge 1$ маємо

$$\left|\mathcal{L}^*\left(\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right)Z^*(\tau,\Xi;t,X)\right)\right|\le$$

$$\le C\,\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\,[B(t,\tau)]^{-M}\Phi_c(t,X;\tau,\Xi).$$

За допомогою цієї оцінки так само, як вище для $I_1-I_1^{(R)}$, встановлюємо, що

$$\left|\int_{\mathbb{K}_{3R/4}^L\setminus\mathbb{K}_{R/2}^L}\mathcal{L}^*\left(\theta\left(\frac{|\Xi|}{R}\right)Z^*(\tau,\Xi;t,X)\right)u(\tau,\Xi)\,d\Xi\right|\le C\,\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}\times$$

$$\times\|u(\tau,\cdot)\|_p^{k(\tau,a)}\exp\left\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}\cdot\frac{R^q}{[B(t,\tau)]^{\lambda}}\right\}[B(t,\tau)]^{-\frac{\alpha}{2b}},$$

де $\alpha=2b(M+1)-1$ при $p=1$, $\alpha=2b\left(\frac{M}{p}+1\right)-1$ при $1<p<\infty$ і $\alpha=2b-1$ при $p=\infty$. Звідси, використовуючи нерівність

$$[B(t,\tau)]^{-\frac{\alpha}{2b}}\exp\left\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}\cdot\frac{R^q}{[B(t,\tau)]^{\lambda}}\right\}=R^{-\frac{\alpha q}{2b\lambda}}\times$$
$$\times\left(\frac{R}{[B(t,\tau)]^{\lambda/q}}\right)^{\frac{\alpha q}{2b\lambda}}\exp\left\{-\frac{(c-c_0)c_1}{2}\cdot\frac{R^q}{[B(t,\tau)]^{\lambda}}\right\}\leq$$
$$\leq C R^{-\frac{\alpha q}{2b\lambda}}\exp\left\{-\varepsilon\frac{R^q}{[B(t,\tau)]^{\lambda}}\right\}\leq C\exp\left\{-\varepsilon\frac{R^q}{[B(t,0)]^{\lambda}}\right\},$$
$$0\leq\tau<t,\ R\geq 1,\ \varepsilon>0,$$

і умову І) леми , маємо при фіксованому h

$$|I_2^{(R)}|\leq C\exp\left\{-\varepsilon\frac{R^q}{[B(t,0)]^{\lambda}}\right\}B(t,h)\xrightarrow[R\to\infty]{}0,$$

Таким чином, перейшовши в (6.І) до границі при $R\to\infty$ маємо

$$u(t,X)=\int_{\mathbb{R}^L}Z(t,X;h,\Xi)u(h,\Xi)d\Xi. \tag{6.7}$$

Тепер у рівності (6.7) перейдемо до границі при $h\to 0$. При цьому використовуватимемо нерівність

$$|Z(t,X;h,\Xi)-Z(t,X;0,\Xi)|\leq CA(h,0)[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-M-1}\times$$
$$\times(1+|\hat{x}|[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{1}{2b}}+|y'|[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{2b+1}{2b}})\Phi_c(t,X;0,\Xi), \tag{6.8}$$

правильну для будь-яких $t\in(0,T]$, $\{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}^L$ і досить малого $h>0$ (наприклад, такого, що $0<h<\frac{t}{2}$, $B(h,0)[B(t,0)]^{1-2q}\times|\hat{x}|<1$ і $(B(h,0)|y'|+B(t,0)B(h,0)|x'|-\frac{1}{2}[B(h,0)]^2\times|x'|)[B(t,0)]^{1-3q}\leq 1$).

Доведемо нерівність (6.8). Аналогічно доведенню нерівності (2.5І) маємо

$$|Z(t,X;h,\Xi)-Z(t,X;0,\Xi)|\leq CA(h,0)[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-M-1}\times$$
$$\times(1+|\hat{x}|[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{1}{2b}}+|y'|[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{2b+1}{2b}})\exp\left\{-c\left(\frac{|x-\xi|^q}{[B(t,0)]^{q-1}}+\right.\right.$$

$$+ \frac{|y+B(t,h)\hat{x}-\eta|^q}{[B(t,0)]^{2q-1}} + \frac{|z+B(t,h)y'+\frac{1}{2}[B(t,h)]^2x'-\zeta|^q}{[B(t,0)]^{3q-1}})\}, \tag{6.9}$$

де $0<h<\frac{t}{2}$. Оскільки для $c>0$ і $r\geqslant 1$

$$\exists C>0 \ \exists c_1\in(0,c) \ \forall \{u,v\}\subset\mathbb{R}^r, |v|\leqslant 1:$$
$$\exp\{-c|u-v|^q\}\leqslant C\exp\{-c_1|u|^q\},$$

то

$$\exp\{-c\frac{|y+B(t,h)\hat{x}-\eta|^q}{[B(t,0)]^{2q-1}}\}=\exp\{-c\,|\frac{y+B(t,0)\hat{x}-\eta}{[B(t,0)]^{2q-1}}-$$
$$-\frac{B(h,0)\hat{x}}{[B(t,0)]^{2q-1}}|^q\leqslant C\exp\{-c_1\frac{|y+B(t,0)\hat{x}-\eta|^q}{[B(t,0)]^{2q-1}}\},$$

якщо h брати таким, щоб $B(h,0)|\hat{x}|[B(t,0)]^{1-2q}\leqslant 1$, і

$$\exp\{-c\frac{|z+B(t,h)y'+\frac{1}{2}[B(t,h)]^2x'-\zeta|^q}{[B(t,0)]^{3q-1}}\}=$$
$$=\exp\{-c|\frac{z+B(t,0)y'+\frac{1}{2}[B(t,0)]^2x'-\zeta}{[B(t,0)]^{3q-1}}-$$
$$-\frac{B(h,0)y'+B(t,0)B(h,0)x'-\frac{1}{2}[B(h,0)]^2x'}{[B(t,0)]^{3q-1}}|^q\}\leqslant$$
$$\leqslant C\exp\{-c_1\frac{|z+B(t,0)y'+\frac{1}{2}[B(t,0)]^2x'-\zeta|^q}{[B(t,0)]^{3q-1}}\},$$

якщо h брати таким, щоб

$$\frac{B(h,0)|y'|+B(t,0)B(h,0)|x'|-\frac{1}{2}[B(h,0)]^2|x'|}{[B(t,0)]^{3q-1}}\leqslant 1.$$

Враховуючи це, з нерівності (6.9) випливає нерівність (6.8).

Використовуючи нерівності (6.8),(4.23) і нерівності, які відрізняються від (6.3) заміною $B(t,h)$ на $B(t,0)$, аналогічно доведенню нерівності (2.53) одержуємо

$$|\Delta_h|\equiv|\int_{\mathbb{R}^L}Z(t,X;h,\Xi)u(h,\Xi)d\Xi-\int_{\mathbb{R}^L}Z(t,X;0,\Xi)\times$$
$$\times\varphi(\Xi)d\Xi|\leqslant$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^L} |Z(t,X;h,\Xi)-Z(t,X;0,\Xi)||u(h,\Xi)|d\Xi +$$

$$+\int_{\mathbb{R}^L} |Z(t,X;0,\Xi)||u(h,\Xi)-\varphi(\Xi)|\,d\Xi \leq$$

$$\leq C\{[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-M-1}A(h,0)(1+|\hat{x}|[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{1}{2b}}+$$

$$+|y'|[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{2b+1}{2b}})J_1^{(h)}+[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-M}J_2^{(h)}\}\times$$

$$\times\exp\{k_1^0(B(t,0),s_1(h))|x|^q+k_2^0(B(t,0),s_2(h))\times$$

$$\times|y+B(t,0)\hat{x}|^q+k_3^0(B(t,0),s_3(h))\times$$

$$\times|z+B(t,0)y'+\tfrac{1}{2}[B(t,0)]^2x'|^q\}, \qquad (6.10)$$

де

$$J_1^{(h)}\equiv\int_{\mathbb{R}^L}\Phi_{c-c_0}(t,X;0,\Xi)(|u(h,\Xi)|\widetilde{\Psi}_{-1}(h,a,\Xi))\,d\Xi,$$

$$J_2^{(h)}\equiv\int_{\mathbb{R}^L}\Phi_{c-c_0}(t,X;0,\Xi)(|u(h,\Xi)-\varphi(\Xi)|\times$$

$$\times\Omega_{-1}(h,\Xi))\,d\Xi,$$

h вважається настільки малим, що

$$B(T,0)<\min_{1\leq j\leq 3}\left(\frac{c_0}{s_j(h)}\right)^{\frac{2b-1}{2b(j-1)+1}}.$$

Аналогічно (2.54) і (2.55) маємо для $p=1$

$$J_1^{(h)}\leq\|u(h,\cdot)\|_1^{k(h,a)},\quad J_2^{(h)}\leq\|u(h,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_1^{s(h)}, \qquad (6.11)$$

а для $1<p<\infty$

$$J_1^{(h)}\leq C[B(t,0)]^{\frac{M}{p'}}\|u(h,\cdot)\|_p^{k(h,a)}$$

$$J_2^{(h)}\leq C[B(t,0)]^{\frac{M}{p'}}\|u(h,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{s(h)}. \qquad (6.12)$$

З цих нерівностей та нерівності (6.10) згідно з умовами леми для фіксованої точки $(t,X)\in\Pi^L_{(0,T]}$ і $1\leq p<\infty$ випливає співвідношення

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;h,\Xi)u(h,\Xi)d\Xi=\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\times$$
$$\times\psi(\Xi)d\Xi, \tag{6.13}$$

яке з урахуванням (6.7) приводить до формули (5.6).

Співвідношення (6.13) правильне і при $p=\infty$. Справді, так, як і в (2.56), розглянемо різницю

$$\Delta_h=\int_{\mathbb{R}^L}[Z(t,X;h,\Xi)-Z(t,X;0,\Xi)]u(h,\Xi)d\Xi+$$
$$+\Big(\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)u(h,\Xi)d\Xi-\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\times$$
$$\times\psi(\Xi)d\Xi\Big)\equiv K_1^{(h)}+K_2^{(h)}. \tag{6.14}$$

Так само, як і в лемі 2.6, доводиться для $K_1^{(h)}$ рівність (2.58). Оскільки при $0\leq t\leq T_1$, де $T_1\leq T$ таке, що $B(T_1,0)<$ $<\left(\frac{c_0}{s_j(T)}\right)^{\frac{2b-1}{2b(j-1)+1}}$, функція $\psi(\Xi)\equiv Z(t,X;0,\Xi)$, $\Xi\in$ $\in\mathbb{R}^L$, на підставі (4.23) і (6.3), задовольняє нерівність

$$|\psi(\Xi)|\Omega_1(T,\Xi)\leq C[B(t,0)]^M\Phi_{c-c_0}(t,X;0,\Xi)\times$$
$$\times\exp\{k_1^0(B(T,0),s_1(T))|x|^q+k_2^0(B(T,0),s_2(T))|y+B(t,0)\hat{x}|^q+$$
$$+k_3^0(B(T,0),s_3(T))|z+B(t,0)y'+\tfrac{1}{2}[B(t,0)]^2x'|^q\}, \tag{6.15}$$

звідки $\psi\in L_1^{-s(T)}$, то на підставі умови 2) леми для $p=\infty$ маємо при $0<t\leq T_1$ рівність (2.60) для $K_2^{(h)}$. З рівностей (2.58) і (2.60) для $K_j^{(h)}$, $j=1,2$, і (6.14) випливає (6.13) для будь-якої фіксованої точки $(t,X)\in\Pi^L_{(0,T_1]}$ і $p=\infty$, а звідси згідно з (6.7) маємо формулу (5.6) для $(t,X)\in\Pi^L_{(0,T_1]}$.

Щоб переконатися в правильності цієї формули для будь-якої точки $(t,X)\in\Pi^L_{(0,T]}$, скористаємося формулою (6.7) при $h\leq T_1$ формулою (5.6) для $t=h$ і формулою згортки (4.33):

$$u(t,X)=\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;h,\Lambda)u(h,\Lambda)d\Lambda=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;h,\Lambda)\Big(\int_{\mathbb{R}^L} Z(h,\Lambda;0,\Xi)\varphi(\Xi)d\Xi\Big)d\Lambda=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^L}\Big(\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;h,\Lambda)Z(h,\Lambda;0,\Xi)d\Lambda\Big)\times$$
$$\times\varphi(\Xi)d\Xi=\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)d\Xi. \blacktriangleright$$

Лема 6.2. Розв'язок u рівняння (4.I), який задовольняє умови:

I) $\exists C>0\ \forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\|_1^{k(t,a)}\le C$,

2) $u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0+]{cл}\mu$,

де $\mu\in M^{k(0,a)}$, зображується у вигляді (5.33).

$\blacktriangleleft$Якщо розв'язок рівняння (4.I) задовольняє умову I), то, як установлено при доведенні леми 6.I, для нього правильна формула (6.7). Перейдемо в ній до границі при $h\to 0$. Для цього розглянемо різницю

$$\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;h,\Xi)u(h,\Xi)d\Xi-\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)d\mu(\Xi)=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^L}[Z(t,X;h,\Xi)-Z(t,X;0,\Xi)]u(h,\Xi)d\Xi+$$
$$+\Big(\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)u(h,\Xi)d\Xi-\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)d\mu(\Xi)\Big)\equiv$$
$$\equiv I_1^{(h)}+I_2^{(h)}. \tag{6.I6}$$

Так само, як у лемі 6.I для $K_1^{(h)}$, доводиться рівність

$$\lim_{h\to 0+} I_1^{(h)}=0. \tag{6.I7}$$

З нерівності (6.I5) випливає, що при $0<t\le T_1$ функція $\psi(\Xi)\equiv Z(t,X;0,\Xi)$, $\Xi\in\mathbb{R}^L$, належить до простору $C_0^{-s(T)}$. Тому згідно з умовою 2) леми маємо

$$\lim_{h\to 0+} I_2^{(h)}=0. \tag{6.I8}$$

Із співвідношень (6.I6)-(6.I8) і (6.7) випливає правильність формули (5.33) для будь-яких $(t,X)\in \Pi^{L}_{(0,T_1]}$. Ця формула правильна для $(t,X)\in\Pi^{L}_{(0,T]}$. Це випливає з формул (6.7), (5.33) для $t\leq T_1$ і формули згортки (4.33).▶

<u>Наслідок</u>. З лем 5.I–5.3, 6.I і 6.2 випливає така теорема.

<u>Теорема 6.I</u>. Нехай $\int\limits_0^T \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}<\infty$ і $1\leq p\leq\infty$. Тоді:

а) для будь-якої функції $\varphi\in L_p^{k(0,a)}$ формулою (5.6) визначається єдиний розв'язок рівняння (4.I) в шарі $\Pi^{L}_{(0,T]}$, який задовольняє такі умови:

I) існує стала $C>0$, не залежна від φ і така, що

$$\forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}\leq C\|\varphi\|_p^{k(0,a)},$$

2) при $1\leq p<\infty$ $\lim\limits_{t\to 0+}\|u(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{s(t)}=0$,

а при $p=\infty$ $u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0+]{\omega}\varphi(\cdot)$;

б) для будь-якої узагальненої міри $\mu\in M^{k(0,a)}$ формула (5.33) визначає єдиний розв'язок рівняння (4.I) у шарі $\Pi^{L}_{(0,T]}$, який має такі властивості:

I) існує така, не залежна від μ , стала $C>0$, що

$$\forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\|_1^{k(t,a)}\leq C\|\mu\|^{k(0,a)},$$

2) $u(t,\cdot)\xrightarrow[t\to 0+]{\omega}\mu$.

<u>6.2. Зображення у вигляді інтегралів Пуассона розв'язків, визначених у напіввідкритому шарі</u>. Наведемо теорему, обернену до теореми 6.I.

<u>Теорема 6.2</u>. Нехай $\int\limits_0^T\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}<\infty$ і u – розв'язок рівняння (4.I) у шарі $\Pi^{L}_{(0,T]}$, який задовольняє умову

$$\forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}\leq C \qquad (6.19)$$

з деякими $C>0$ і $1\leq p\leq\infty$. Тоді при $1<p\leq\infty$ існує єдина функція $\varphi\in L_p^{k(0,a)}$, а при $p=1$ – єдина узагальнена міра $\mu\in M^{k(0,a)}$ такі, що розв'язок u зображується у вигляді (5.6) і (5.33) відповідно.

◀Для доведення теореми використовуємо методику доведення теореми 3.4 і відповідної теореми в 24 . Нехай спочатку $1<p\leq\leq\infty$. Так, як у теоремі 3.4, доводиться аналогічне (3.11) співвідношення

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\widetilde{\Psi}_1(0,a,\Xi)\widetilde{\Psi}_{-1}\left(\frac{1}{\nu(r)},a,\Xi\right)\times$$

$$\times u\left(\frac{1}{\nu(r)},\Xi\right)d\Xi=\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)d\Xi, \qquad (6.20)$$

де $\varphi\in L_p^{k(a,a)}$. Нехай $\frac{1}{\nu(r)}\leq\frac{t}{2}$, $r\geq 1$. Згідно з формулою (6.7)

$$u(t,X)=\int_{\mathbb{R}^L} Z\left(t,X;\frac{1}{\nu(r)},\Xi\right)u\left(\frac{1}{\nu(r)},\Xi\right)d\Xi. \qquad (6.21)$$

За допомогою (6.21) маємо

$$u(t,X)-\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)d\Xi=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^L}\left[Z\left(t,X;\frac{1}{\nu(r)},\Xi\right)-Z(t,X;0,\Xi)\right]u\left(\frac{1}{\nu(r)},\Xi\right)d\Xi+$$

$$+\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\left[1-\widetilde{\Psi}_1(0,a,\Xi)\widetilde{\Psi}_{-1}\left(\frac{1}{\nu(r)},a,\Xi\right)\right]\times$$

$$\times u\left(\frac{1}{\nu(r)},\Xi\right)d\Xi+\left[\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\widetilde{\Psi}_1(0,a,\Xi)\times\right.$$

$$\left.\times\widetilde{\Psi}_{-1}\left(\frac{1}{\nu(r)},a,\Xi\right)d\Xi-\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)d\Xi\right]\equiv$$

$$\equiv J_1^{(r)}+J_2^{(r)}+J_3^{(r)},\ r\geq 1. \qquad (6.22)$$

Щоб дістати зображення (5.6), треба довести, що для $j=1,2,3$

$$\lim_{r\to\infty} J_j^{(r)}=0. \qquad (6.23)$$

З (6.20) випливає (6.23) для $j=3$. Доведення (6.23) для $j=2$ аналогічне доведенню (3.14) у випадку $j=2$. При цьому використовуються такі оцінки:

$$(F_r(\Xi))^{\frac{1}{p'}}\leq C[B(t,0)]^{-M}\Phi_{c-c_0}(t,X;0,\Xi)\times$$

$$\times\left(\exp\left\{k_1^0\left(B(t,0),s_1\left(\frac{1}{\nu(r)}\right)\right)|x|^q+k_2^0\left(B(t,0),s_2\left(\frac{1}{\nu(r)}\right)\right)\times\right.\right.$$

$$\times |y+B(t,0)\hat{x}|^q + k_3^0(B(t,0), s_3(\tfrac{1}{\gamma(\tau)}))\times$$

$$\times |z+B(t,0)y'+\tfrac{1}{2}[B(t,0)]^2x'|^q\} + \widetilde{\Psi}_1(t,a,X)) \leqslant$$

$$\leqslant C[B(t,0)]^{-M}\Phi_{c-c_0}(t,X;0,\Xi)\times$$

$$\times(\exp\{k_1^0(B(t,0),s_1(\tfrac{1}{\gamma(\tau_0)}))|x|^q + k_2^0(B(t,0),$$

$$s_2(\tfrac{1}{\gamma(\tau_0)}))|y+B(t,0)\hat{x}|^q + k_3^0(B(t,0),s_3(\tfrac{1}{\gamma(\tau_0)}))\times$$

$$\times|z+B(t,0)y'+\tfrac{1}{2}[B(t,0)]^2x'|^q\} + \widetilde{\Psi}_1(t,a,X)),$$

$$\Xi\in\mathbb{R}^L,\ \tau\geqslant\tau_0,$$

де τ_0 взято так, щоб $B(t,0)<\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}\left(\frac{c_0}{s_j(\frac{1}{\gamma(\tau_0)})}\right)^{\frac{2b-1}{2b(j-1)+1}}$.

Доведемо тепер (6.23) для $j=1$. Так само, як у (6.I0), (6.I2), з урахуванням нерівності (6.I9) при $\tau\geqslant\tau_0$ маємо

$$|J_1^{(\tau)}|\leqslant CA(\tfrac{1}{\gamma(\tau)},0)[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-M-1}(1+|\hat{x}|[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{1}{2b}}+$$

$$+|y'|[B(t,\tfrac{t}{2})]^{-\frac{2b+1}{2b}})\exp\{k_1^0(B(t,0),s_1(\tfrac{1}{\gamma(\tau_0)}))|x|^q+$$

$$+k_2^0(B(t,0),s_2(\tfrac{1}{\gamma(\tau_0)}))|y+B(t,0)\hat{x}|^q+k_3^0(B(t,0),$$

$$s_3(\tfrac{1}{\gamma(\tau_0)}))|z+B(t,0)y'+\tfrac{1}{2}[B(t,0)]^2x'|^q\}[B(t,0)]^{\frac{M}{p'}}\times$$

$$\times\|u(\tfrac{1}{\gamma(\tau)},\cdot)\|_p^{k(\frac{1}{\gamma(\tau)},a)}\xrightarrow[\tau\to\infty]{}0.$$

Нехай тепер $p=1$. Міркування при доведенні такі ж, як і при $p>1$: доводимо правильність співвідношення

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_{\mathbb{R}^L}Z(t,X;0,\Xi)\widetilde{\Psi}_{-1}(\tfrac{1}{\gamma(\tau)},a,\Xi)\widetilde{\Psi}_1(0,a,\Xi)\times$$

$$\times u(\tfrac{1}{\gamma(\tau)},\Xi)\,d\Xi=\int_{\mathbb{R}^L}Z(t,X;0,\Xi)\,d\mu(\Xi), \tag{6.24}$$

де $\mu\in M^{k(0,a)}$; на підставі (6.2I) записуємо

$$u(t,X)-\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\,d\mu(\Xi)\equiv$$
$$\equiv J_1^{(\tau)}+J_2^{(\tau)}+\widetilde{J}_3^{(\tau)},\ \tau\geq 1, \tag{6.25}$$

де $J_j^{(\tau)}$, $j=1,2$, - такі ж, як і в (6.22), а

$$\widetilde{J}_3^{(\tau)}\equiv\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\widetilde{\Psi}_{-1}\Big(\frac{1}{\nu(\tau)},a,\Xi\Big)u\Big(\frac{1}{\nu(\tau)},\Xi\Big)d\Xi-$$
$$-\int_{\mathbb{R}^L} Z(t,X;0,\Xi)\,d\mu(\Xi);$$

потім доводиться рівність (6.23) при $j=1,2$. Оскільки на підставі (6.24) $\lim\limits_{\tau\to\infty}\widetilde{J}_3^{(\tau)}=0$, то з (6.25) випливає рівність (5.33).

Єдиність функції φ та узагальненої міри μ безпосередньо випливає з теореми 6.I. ▶

<u>Наслідок</u>. З теорем 6.I і 6.2 випливає, що:

I) простори $L_p^{k(0,a)}$, $1<p\leq\infty$, і $M^{k(0,a)}$ є множинами початкових значень розв'язків рівняння (4.I) тоді і тільки тоді, коли розв'язки задовольняють умову (6.I9) при $1<p\leq\infty$ і $p=1$ відповідно;

2) для зображення розв'язків рівняння (4.I) у вигляді (5.6) чи (5.33) з $\varphi\in L_p^{k(0,a)}$, $1<p\leq\infty$, і $\mu\in M^{k(0,a)}$ необхідно й досить, щоб виконувалась умова (6.I9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйдельман С.Д. Параболические системы.- Москва: Наука, 1964.- 443 с.
2. Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. $\overrightarrow{2b}$ -параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу.- Киев, 1968.- № 1.- С.3-175.
3. Матийчук М.И., Эйдельман С.Д. Задача Коши для параболических систем, коэффициенты которых имеют малую гладкость // Укр. мат. журн.- 1970.- Т.22, № 1.- С.22-36.
4. Эйдельман С.Д. Параболические уравнения // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. напр.- 1990.- Т.63.- С.201-313.
5. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова.- 1965.- Т.83.- С.3-162.
6. Chabrowski J. Representation theorems and Fatou theorems for parabolic systems in the sens of Petrovskii // Colloq. Math. - 1974. - V. 31. - P. 301-315.
7. Chabrowski J. Representation theorems for parabolic systems // J. Austral. Math. Soc. 1982. - V. A32, N2. - P. 246 - 288.
8. Ивасишен С.Д. Об интегральных представлениях и свойстве Фату для решений параболических систем // Успехи мат. наук.- 1986.- Т.41, № 4.- С.173-174.
9. Ивасишен С.Д. Интегральное представление и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$ -параболических систем // Укр. мат. журн.- 1990.- Т.42, № 4.- С.500-506.
10. Матийчук М.И. Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их приложения к краевым задачам // Дифференц. уравнения.- 1974.- Т.10, № 8.- С.1463-1477; 1975.- Т.11, № 7.- С.1293-1303; 1978.- Т.14, № 2,5.- С.291-303, 885-899.
11. Калашников А.С. О растущих решениях линейных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой //

Мат. заметки.- 1968.- Т.3, № 2.- С.171-178.

12. Калашников А.С. Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка // Вест. МГУ. Сер. матем., механ.- 1971.- № 2,3.- С.42-48, 3-9.

13. Глушак А.В., Шмулевич С.Д. О некоторых корректных задачах для параболических уравнений высокого порядка, вырождающихся по временной переменной // Дифференц. уравнения.- 1986.- Т.22, № 6.- С.1065-1068.

14. Городецький В.В., Житарюк І.В. Про розв'язки задачі Коші для рівнянь параболічного типу з виродженням // Доп. АН УРСР. Сер. А.- 1989.- № 12.- С.5-8.

15. Городецкий В.В., Житарюк И.В. О разрешимости задачи Коши для эволюционных уравнений параболического типа с вырождением в некоторых пространствах // Дифференц. уравнения.- 1992.- Т.28, № 8.- С.1373-1381.

16. Kolmogoroff A.N. Zufällige Bewegungen // Ann. of Math.- 1934.- B.-35.- s. 116-117.

17. Weber M. The fundamental solution of a degenerate partial differential equation of parabolic type // Trans. Amer. Math. Soc.- 1951.- V. 71.- P. 24-37.

18. Ильин А.М. Об одном классе ультрапараболических уравнений // Докл. АН СССР.- 1964.- Т.159, № 6.- С.1214-1217.

19. Сонин И.М. Об одном классе вырождающихся диффузионных процессов // Теория вероят. и ее примен. 1967.- Т.12, вып. 3.- С.540-547.

20. Малицкая А.П. Фундаментальные решения одного класса вырождающихся параболических уравнений // Приближенные методы интегрирования дифференциальных и интегральных уравнений: Тем. сб. статей.- Киев: Киев. пед. ин-т, 1973.- С.109-130.

21. Эйдельман С.Д., Малицкая А.П. О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференц. уравнения.- 1975.- Т.11, № 5.- С.1316-1330.

22. Малицкая А.П. Построение фундаментальных решений некоторых ультрапараболических уравнений высокого порядка // Укр. мат. журн. - 1985.- Т.37, № 6.- С.713-718.

23. Ейдельман С.Д., Тичинська Л.М. Побудова фундаментальних розв'язків деяких вироджених параболічних рівнянь довільного порядку // Доп. АН УРСР. Сер. А.- 1979.- № 11.- С.896-899.

24. Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н. Фундаментальные решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений.- Черновиц. ун-т.- Черновцы, 1989.- 62 с.- Деп. в УкрНИИНТИ 16.06.89, № 1762-Ук89.

25. Івасишен С.Д., Тичинська Л.М., Ейдельман С.Д. Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь другого порядку // Доп. АН УРСР. Сер. А.- 1990.- № 5.- С.6-9.

26. Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н. Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова // Дифференц. уравнения.- 1991.- Т.27, № 3.- С.479-487.

27. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для параболічного рівняння другого порядку з виродженням по часу // Тези доповідей наукової конференції викладачів та студентів географічного факультету Тернопільського державного педінституту.- Тернопіль, 1992.- С.106-107.

28. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. Про задачу Коші для параболічного рівняння з виродженням // Тези доповідей наукової конференції викладачів та студентів географічного факультету Тернопільського державного педінституту.- Тернопіль, 1992.- С.109-110.

29. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (25-27 січня 1994 року, м. Дрогобич). - Київ, 1994.- С.31.

30. Возняк О.Г. Про задачу Коші для деяких параболічних систем з виродженням // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.- Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994.- С.48-49.

31. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України.- 1994.- № 6.- С.7-11.

32. Возняк О.Г. Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем з виродженням // Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана (10-15 жовтня 1994 року, Чернівці): Тези доповідей.- Чернівці: Рута, 1994.- С.25.

33. Возняк О.Г. Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем з виродженням // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана.- Чернівці: Рута, 1995.- С.42-60.

34. Возняк О.Г. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь // Матеріали наукової конференції викладачів, співробітників та студентів, присвяченої 120-річчю заснування Чернівецького університету (4-6 травня 1995 р.). Том 2. Фізико-математичні науки.- Чернівці: Рута, 1995.- С.79.

35. Возняк О.Г., Івасишен С.Д. Фундаментальні матриці розв'язків задачі Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині.- Чернівець. ун-т.- Чернівці, 1995.- 51 с.- Деп. в ДНТБ України 12.07.95, № 1808-Ук95.