

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Західноукраїнський національний університет
Факультет комп'ютерних інформаційних технологій
Кафедра інформаційно-обчислювальних систем і управління

РАЮК Олена Ігорівна

**Регресійні моделі функцій перетворення сенсорів
для Інтернету речей / Regression Models of Conversion Characteristics of
Sensors for Internet of Things**

спеціальність: 122 - Комп'ютерні науки
освітньо-професійна програма - Комп'ютерні науки

Кваліфікаційна робота

Виконав студент групи
КНМ-21
О. Раюк

Науковий керівник:
к.т.н., професор В.В. Кочан

Кваліфікаційну роботу
допущено до захисту:
«__» _____ 20__ р.
Завідувач кафедри
_____ М.П. Комар

ТЕРНОПІЛЬ - 2022

Факультет комп'ютерних інформаційних технологій
Кафедра інформаційно-обчислювальних систем і управління
Освітній ступінь «магістр»
спеціальність: 122 – Комп'ютерні науки
освітньо-професійна програма – Комп'ютерні науки

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
_____ М.П. Комар
«_____» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

РАЮК Олені Ігорівні
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема кваліфікаційної роботи

Регресійні моделі функцій перетворення сенсорів для Інтернету речей / Regression Models of Conversion Characteristics of Sensors for Internet of Things

керівник роботи к.т.н., професор В.В. Кочан

затверджені наказом по університету від 31 грудня 2021 року № 606.

2. Строк подання студентом закінченої кваліфікаційної роботи 16 листопада 2022 року.

3. Вихідні дані до кваліфікаційної роботи: завдання на кваліфікаційну роботу студента, наукові статті, технічна література.

4. Основні питання, які потрібно розробити

- огляд предметної області;
- аналіз методів розпізнавання та апроксимації індивідуальних функцій перетворення;
- аналіз методу найменших квадратів;
- розроблення методу умовних найменших квадратів;
- порівняння методу найменших квадратів та розроблення методу умовних найменших квадратів;
- дослідження впливу похибок вимірювання на похибку апроксимації методами найменших квадратів та умовних найменших квадратів.

5. Перелік графічного матеріалу у роботі

- результати дослідження методів найменших квадратів та умовних найменших квадратів.

6. Консультанти розділів кваліфікаційної роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 11 жовтня 2021 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів кваліфікаційної роботи	Примітка
1	Аналіз процесу створення вимірювального каналу у технології інтернету речей	12.2021 р. – 03.2022 р.	
2	Метод умовних найменших квадратів	03.2022 р. – 05.2022 р.	
3	Дослідження ідентифікації індивідуальних функцій перетворення елементів вимірювального каналу методом умовних найменших квадратів	05.2022 р. – 11.2022 р.	
4	Повне завершення та представлення кваліфікаційної роботи на кафедрі	16.11.2022 р.	

Студент _____ О. Раюк
підписКерівник роботи _____ к.т.н., професор В.В. Кочан
підпис

РЕЗЮМЕ

Дипломна робота магістра ” Дослідження методичних похибок лінеаризації функцій перетворення сенсорів за допомогою регресійного аналізу”. 88с., 10 рис., 26 табл., 3 додатки, 35 джерела.

Метою даної дипломної роботи магістра є дослідження можливості використання методу умовних найменших квадратів для апроксимації індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу.

Об’єктом дослідження є процес формування вимірювального каналу у технології Інтернету речей. **Предметом дослідження** є можливість використання методу умовних найменших квадратів для апроксимації індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу.

Наукова новизна.

Отримало подальший розвиток застосування регресійного аналізу для автоматизованої ідентифікації (апроксимації) індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу методом умовних найменших квадратів шляхом співставлення його з класичним методом найменших квадратів, що сприяє переходу від індивідуального проектування до автоматизованого компонування процесів опрацювання даних у технології Інтернету речей.

Ключові слова: ТЕХНОЛОГІЯ ІНТЕРНЕТУ РЕЧЕЙ, ІНДИВІДУАЛЬНА ФУНКЦІЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ, АПРОКСИМАЦІЯ, РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ, МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ.

RESUME

Master's thesis "Study of methodical errors of linearization of sensor conversion characteristics using regression analysis". 88 pp., 10 figures, 26 tables, 3 appendices, 35 sources.

The purpose of this master's thesis is to study the method of conditional least squares to fit the individual conversion characteristics of sensors and other components of the measuring channel.

The object of the study is the process of designing a measuring channel within the internet of things technology.

The subject of the study is the possibility of using the method of conditional least squares to fit the individual conversion characteristics of sensors and other components of the measuring channel.

Scientific novelty.

The application of regression analysis for the automated identification (fitting) of individual conversion characteristics of sensors and other components of the measuring channel by the method of conditional least squares was further developed by comparing it with the conventional method of least squares, which facilitates the process of transition from the individual to automated designing of data processing procedures within the Internet of Things technology .

Keywords: TECHNOLOGY OF THE INTERNET OF THINGS, INDIVIDUAL CONVERSION CHARACTERISTICS, FITTING CURVE TO DATA, REGRESSION ANALYSIS, METHOD OF LEAST SQUARES.

ЗМІСТ

РЕЗЮМЕ	4
RESUME	5
ЗМІСТ	6
ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ	8
ВСТУП	9
1. АНАЛІЗ ПРОЦЕСУ СТВОРЕННЯ ВИМІРЮВАЛЬНОГО КАНАЛУ У ТЕХНОЛОГІЇ ІНТЕРНЕТУ РЕЧЕЙ	16
1.1 Структурна схема вимірювального каналу у технології Інтернету речей	16
1.2 Методи визначення індивідуальної функції перетворення елементів вимірювального каналу	20
1.3. Нелінійні моделі, які зводяться до лінійних	24
Висновки до першого розділу	29
2 МЕТОД УМОВНИХ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ	30
2.1 Аналіз похибок апроксимації індивідуальних функцій перетворення елементів вимірювального каналу за допомогою регресійного аналізу	30
2.2. Метод умовних найменших квадратів	44
2.3. Застосування методу умовних найменших квадратів	55
2.4 Збіжність методу умовних найменших квадратів і класичного методу найменших квадратів	58
Висновки до другого розділу	60
3. ДОСЛІДЖЕННЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ВИМІРЮВАЛЬНОГО КАНАЛУ МЕТОДОМ УМОВНИХ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ	62
3.1 Узагальнений алгоритм ідентифікації індивідуальних функцій перетворення елементів вимірювального каналу	62

3.2 Дослідження методу умовних найменших квадратів при відсутності вільного члена	63
3.3 Дослідження методу умовних найменших квадратів при наявності вільного члена	69
Висновки до третього розділу	74
ВИСНОВКИ	76
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	78
Додаток А. Тези «Моделювання процесу тестування стану електродів термоелектричних перетворювачів під час експлуатації»	82
Додаток Б. «Моделювання процесу визначення поточної похибки термоелектричних перетворювачів під час експлуатації»	85
Додаток В	88

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ
І ТЕРМІНІВ

ІоТ	– Інтернет речей;
МНК	– метод найменших квадратів;
МУНК	– метод умовних найменших квадратів;
ТО	– термометр опору;
ТП	– термопара;
ТЕП	– термоелектричний перетворювач;

ВСТУП

Актуальність теми. Інтернет речей (англійською Internet of Things, IoT) – концепція комп'ютеризованої мережі, що складається із взаємно пов'язаних пристроїв, які мають вбудовані датчики, засоби перетворення їх сигналів та їх передачі за допомогою мережі Інтернет, а також відповідне програмне забезпечення, що дає змогу здійснювати обмін даними між навколишнім фізичним світом і комп'ютерними системами опрацювання даних в автоматичному режимі, за допомогою стандартних протоколів зв'язку [1 – 3]. Таким чином, окрім датчиків, для впливу на навколишній фізичний світ, мережа, що використовує технологію Інтернету речей [4, 5], повинна також мати виконавчі пристрої, вбудовані у фізичні об'єкти і пов'язані між собою через дротові чи бездротові мережі на базі Інтернету [6]. Ці взаємно пов'язані пристрої повинні мати можливість зчитування команд з мережі, використовує технологію Інтернету речей, та їх виконання, тобто приведення в дію виконавчих пристроїв [4]. Також використання технології Інтернету речей передбачає функцію програмування пристроїв різного рівня та ідентифікацію всіх пристроїв у мережі. Це повинно у значній мірі виключити необхідність участі людини, зокрема, за рахунок використання інтелектуальних інтерфейсів [1, 2]. Також набуває поширення також англійський термін Internet of Everything, IoE – всеохопний, або всеосяжний Інтернет [1, 2]. Це явище спричинило занепокоєння в конфіденційності інформації й сприяло появі нового терміну безпека Інтернету речей [7].

На сьогодні немає більш гарячого технологічного сектора, ніж Інтернет речей. Його стрімке розширення викликає багато проблем, які з цим пов'язані. Зокрема, створення нових технічних засобів, особливо сенсорів, вимагає подолання суперечності між масовістю пропонованих та розроблюваних елементів та їх вартістю, а також вартістю їх підключення як до каналів обміну даними, так і до програмного забезпечення, яке веде

опрацювання даних. Подолати цю суперечність дозволяє масове застосування мікроелектронних технологій [8]. Мікроелектроніка це галузь сучасної промисловості, яка займається виробництвом кремнієвих кристалів інтегральних мікросхем. Вона є непорушним фундаментом не тільки всієї сучасної індустрії інформаційних і комп'ютерних технологій, але і дуже багатьох суміжних галузей — побутової електроніки, індустрії розваг (включаючи музику і відео), медицини, військової та цивільної промисловості тощо. Економічна ефективність мікроелектронних пристроїв базується на тому, що хоча її промислові об'єкти дуже затратні, її продукція є масовою, причому сам випуск є принципово велико-серійним – адже кремнієві пластини, які випускає мікроелектронне виробництво містять тисячі кристалів, які є основою мікроелектронних пристроїв. Відповідно до закону Мура [9] «кількість транзисторів, які розміщуються на одному кристалі інтегральної мікросхеми, подвоюється кожного року, але також їх ціна зменшується вдвічі». Хоча такі темпи розвитку мікроелектроніки були характерні для минулого століття (на сьогодні вони зменшилися майже вдвоє), все одно лише використання технологій мікроелектроніки дає змогу розвиватися Інтернет речей.

Особливо технології мікроелектроніки дають змогу розвиватися індустрії сенсорів – як випускати у масовій кількості традиційні мікроелектронні сенсори, так і створювати нові типи і види сенсорів [10]. Але мікроелектронні технології на практиці дуже рідко забезпечують високі метрологічні характеристики своїх виробів. Зокрема, за даними аналізу, проведеного у [11], відхилення індивідуальної функції перетворення мікроелектронних сенсорів світлових величин [12 - 15] від номінальної можуть сягати 10...20%. Зрозуміло, що такі індивідуальні відхилення, якщо не вжити відповідних заходів, ведуть до аналогічної похибки вимірювання. А такі похибки вимірювання не можуть задовольнити технології Інтернету речей.

Вирішити задачу різкого підвищення точності каналу вимірювання можна вирішити шляхом переходу до індивідуальної функції перетворення кожного сенсора. Однак такий перехід різко збільшує трудомісткість створення вимірювального каналу. Наприклад, відповідно до [16], при індивідуальному калібруванні при випуску аналого-цифрових перетворювачів шляхом лазерного налаштування схеми на кремнієвому кристалі трудомісткість такого налаштування складає приблизно 60% загальних затрат праці на виготовлення цих аналого-цифрових перетворювачів.

У [11] для вирішення задачі різкого підвищення точності каналу вимірювання світлових величин було запропоновано метод зменшення трудомісткості експериментальних досліджень при переході до індивідуальної функції перетворення багато-параметричних сенсорів за рахунок попередніх експериментальних досліджень групи однотипних сенсорів. При цьому розглянуто варіант зменшення кількості експериментів при дослідженнях від 49 (повні попередні дослідження групи однотипних сенсорів світлових величин) до 9 (поточні дослідження однотипних сенсорів світлових величин при визначенні індивідуальної функції перетворення конкретних сенсорів світлових величин). Тобто завдяки запропонованим у [11] рішенням вдалося зменшити трудомісткість експериментальних досліджень у майже 5 разів.

Однак, незважаючи на наявні при реалізації описаного у [11] методу результати експериментальних досліджень, які дають змогу відтворити індивідуальну функцію перетворення сенсора, їх використання при опрацюванні результатів вимірювання вимагає відповідної адаптації, наприклад, апроксимації. У [11] така проблема не розглядається тому, що ідентифікація індивідуальної функції перетворення відбувається за допомогою нейронної мережі [17], яка є універсальним засобом функціонального перетворення. У [11] процес відтворення індивідуальної функції перетворення багато-параметричного сенсора відбувається за

допомогою попередньо навченої нейронної мережі, яка у майбутньому служила засобом апроксимації. Але нейронна мережа вимагає доволі значних обчислювальних ресурсів [18]. Тому не завжди нейронні мережі є оптимальним рішенням. Значно економнішим щодо обчислювальних ресурсів є використання регресійних моделей [19].

Але використання регресійних моделей при апроксимації індивідуальних функцій перетворення навіть одно-параметричних сенсорів наштовхується на деякі перешкоди. Однією з них є проблеми з апроксимацією функцій, які при нульовому аргументі мають нульове значення, тобто проходять через початок координат. Як показано у [20], у випадку апроксимацією функцій, які проходять через початок координат, класичний метод найменших квадратів дає зміщення, яке і є похибкою апроксимації.

У [21, 22] запропоновано метод усунення цих проблем за рахунок застосування множників Лагранжа. Новий метод регресійного аналізу названо методом умовних найменших квадратів (МУНК). Але новий метод вимагає всебічних досліджень, доказу його коректності, вивчення властивостей, окреслення меж застосування. Інакше його застосування у настільки масовій технології, як Інтернет речей, не може бути допущено. Вирішення цієї проблеми вимагає деталізації, подальшого дослідження та розроблення алгоритмів використання у технології ІоТ. Також необхідно вирішити питання сумісності запропонованого у [21, 22] методу умовних найменших квадратів з класичним методом найменших квадратів.

Таким чином, задача дослідження МУНК, його коректності, особливостей, доцільних умов використання з метою створення універсального засобу ідентифікації функцій перетворення елементів, які використовуються у технології Інтернету речей, є цілком актуальною задачею.

Слід зауважити, що затрати праці на розроблення індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу

виходять доволі значними. Крім того, перехід до індивідуальних функцій перетворення мікроелектронних сенсорів підвищує затрати праці висококваліфікованих спеціалістів.

У [23] висунуто гіпотезу, що усунення згаданих недоліків технологій IoT, зокрема у області інформаційно-вимірювальних систем, як підгалузі спеціалізованих комп'ютерних систем, можливе за рахунок: 1) адаптації аспектів методології побудови універсальних систем (які забезпечують їх переваги) – розробки структури відкритої модульної апаратно-незалежної взаємодії їх прикладного програмного забезпечення; 2) виділення і створення мінімальної множини високоефективних низьковартісних універсальних структурних елементів, які забезпечують компонування широкою гамою інформаційно-вимірювальних каналів.

Взагалі подальший розвиток Інтернету речей вимагає переходу від проектування вимірювальних і керуючих каналів до їх компонування [23]. Вирішення такої задачі вимагає стандартизації як апаратних, так і програмних модулів та включення їх у комп'ютеризовані програми автоматизованого проектування. Але поки що немає алгоритмів використання МУНК при впровадженні у технологію Інтернету речей.

Таким чином, різке зменшення трудомісткості можливе при переході від індивідуального проектування до компонування. Актуальним є створення методики ефективного (за вартісно-функціональними характеристиками) проектування вимірювальних каналів інформаційно-вимірювальних систем на доступній алгоритмічно-програмній базі (типових програмних платформах, які використовуються при реалізації технологій IoT) шляхом їх компонування. Для цього слід розробити відповідне методичне забезпечення. Тому розроблення відповідних методів та алгоритмів їх реалізації, придатних для такого переходу, відповідно до [23], є актуальною задачею.

Метою даної дипломної роботи магістра є дослідження можливості використання методу умовних найменших квадратів для апроксимації

індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу.

Задачі дослідження:

- 1) Провести аналіз структурної схеми вимірювального каналу у технології Інтернету речей та методів забезпечення їх високої точності.
- 2) Провести аналіз похибок апроксимації індивідуальних функцій перетворення елементів вимірювального каналу класичним методом регресійного аналізу.
- 3) Запропонувати та дослідити метод апроксимації індивідуальних функцій перетворення елементів вимірювального каналу, який не створює додаткової похибки при апроксимації функцій перетворення, що проходять через початок координат.
- 4) Дослідити вплив на похибку методу умовних найменших квадратів похибок експериментальних досліджень.

Об'єкт дослідження: Процес формування вимірювального каналу у технології Інтернету речей.

Предмет дослідження: Можливість використання методу умовних найменших квадратів для апроксимації індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу.

Наукова новизна. Отримало подальший розвиток застосування регресійного аналізу для автоматизованої ідентифікації (апроксимації) індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу методом умовних найменших квадратів шляхом співставлення його з класичним методом найменших квадратів, що сприяє переходу від індивідуального проектування до автоматизованого компонування процесів опрацювання даних у технології Інтернету речей.

Практична цінність.

- 1) Підтверджена коректність методу умовних найменших квадратів при апроксимації індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу;

- 2) Розроблено алгоритм ідентифікації індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу, зокрема, методом умовних найменших квадратів.

Публікації.

За результатами проведених досліджень опубліковано двоє тез доповідей на конференції.

- 1) Моделювання процесу тестування стану електродів термоелектричних перетворювачів під час експлуатації. Орест Кочан, Олена Раюк, Владислав Богатирчук, Андрій Гром'як, Володимир Кочан. Наукова конференція «Інформаційно-вимірювальні технології» кафедри Інформаційно-вимірювальних технологій Національного університету «Львівська політехніка», 2022.
- 2) Моделювання процесу визначення поточної похибки термоелектричних перетворювачів під час експлуатації. Орест Кочан, Олена Раюк, Владислав Богатирчук, Андрій Гром'як, Володимир Кочан. Наукова конференція «Інформаційно-вимірювальні технології» кафедри Інформаційно-вимірювальних технологій Національного університету «Львівська політехніка», 2022.

Структура та обсяг роботи.

Дана кваліфікаційна робота складається із змісту, вступу, трьох розділів, висновків, списку посилань і додатків та містить 88 сторінок тексту, 10 рисунків, 26 таблиць, і 3 додатки, список посилань містить 35 позицій.

1. АНАЛІЗ ПРОЦЕСУ СТВОРЕННЯ ВИМІРЮВАЛЬНОГО КАНАЛУ У ТЕХНОЛОГІЇ ІНТЕРНЕТУ РЕЧЕЙ

1.1 Структурна схема вимірювального каналу у технології Інтернету речей

Узагальнена архітектура технології Інтернету речей подана на рисунку 1.1 [1, 4, 5]. У цій архітектурі можна умовно виділити три рівні:

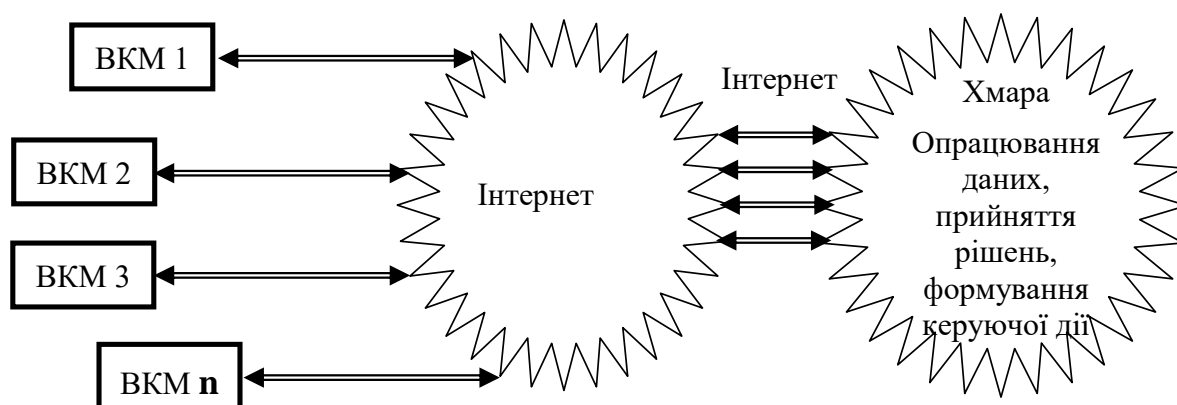


Рисунок 1.1 – Узагальнена архітектура технології Інтернету речей

1. Рівень сенсорики. З точки зору технології Інтернету речей цей рівень включає як власне сенсори, так і засоби попереднього опрацювання даних. Він повинен забезпечити отримання результатів вимірюваних фізичних величин із заданою точністю та достовірністю, а також доступ до мережі.
2. Мережевий рівень. З точки зору технології Інтернету речей цей рівень повинен максимально використовувати існуючу інфраструктуру, тобто мобільні та мережеві технології, які забезпечують підключення до Інтернет.
3. Рівень інтелектуального опрацювання даних. Саме цей рівень має ключове значення для технології Інтернету речей і відрізняє її від звичайних інформаційно-вимірювальних систем. Він повинен забезпечити не лише візуалізацію даних (у зручному для сприйняття вигляді), а і можливості як короткострокового, так і довгострокового прогнозування розвитку ситуації, моделювання наслідків дій клієнтів (можливо деструктивних) тощо.

Масове застосування технології Інтернету речей вимагає здешевлення та зменшення трудомісткості нових вимірювальних каналів. Лише прогрес у галузі мікроелектроніки дав змогу забезпечити дуже високу якість засобів попереднього опрацювання даних. На рівні сенсорики це мікроконвертори [24], що поєднують у кристалі прецизійні високочутливі аналого-цифрові перетворювачі та обчислювальні засоби, що мають достатні для попереднього опрацювання даних обчислювальні ресурси.

Аналіз показує, що до рівня сенсорики ставляться такі основні вимоги:

- 1) Масовість випуску. Для реалізації технології Інтернету речей необхідна дуже велика кількість сенсорів, тому можливість масового випуску апаратного забезпечення має велике значення.
- 2) Достатня точність. Можливість прийняття адекватних управлінських рішень при низькій точності є сумнівною. Крім того, оплата використаних ресурсів вимагає достатньої точності їх обліку.
- 3) Висока надійність. Але тут вимагається не лише висока функціональна надійність. Необхідна також висока метрологічна надійність. Це означає, що точність сенсорів повинна залишатися не нижчою за необхідну на протязі тривалого часу;
- 4) Уніфікація та легкість інтеграції у архітектуру технології Інтернету речей;

Реалізувати ці вимоги дає змогу узагальнена структура вимірювального каналу у складі технології Інтернету речей, подана на рисунку 1.2. Як видно з цієї структури перші три вимоги повинні бути реалізовані на нижньому рівні. Інакше можливе використання на верхньому рівні результатів вимірювання, які ще не пройшли повний цикл попереднього опрацювання даних.

Аналіз розвитку технології Інтернету речей показує, що останнім часом найбільш слабкою ланкою у вимірювальних каналах є саме сенсори. Мікроелектронні сенсори погано відповідають пп. 2 і 3 перелічених вище вимог. Більшість відомих мікроелектронних сенсорів мають великі індивідуальні відхилення функції перетворення від номінальної та значний

вплив на результат вимірювання не вимірюваних факторів, зокрема, температури.



Рисунок 1.2 - Узагальнена структура вимірювального каналу у складі технології Інтернету речей (на прикладі «розумного міста»)

У такому випадку найбільш ефективним є перехід до індивідуальних функцій перетворення. При використанні мікроконтролерів опрацювання результатів вимірювання з врахуванням індивідуальних функцій перетворення мікроелектронних сенсорів не є складною задачею. Але ідентифікація індивідуальних функцій перетворення сенсорів є відносно трудомісткою задачею. Хоча останні дослідження дають змогу значного зменшення її трудомісткості [11], особливо при масовому випуску.

Крім самих апаратних процедур ідентифікації індивідуальних функцій перетворення виникає також задача гнучкого стандартизованого їх опису для сенсорів та інших елементів вимірювального каналу. Також при

представленні та опрацюванні даних необхідна стандартизація форми подання даних при забезпеченні єдності вимірювань [25]. При цьому найдоцільніше подавати результати вимірювання фізичних величин у форматі, передбаченому системою СІ. Перелічені задачі вимагають відносно значних обчислювальних ресурсів, тому їх виконання на рівні сенсорики недоцільне.

Рівень інтелектуального опрацювання даних реалізується, зазвичай, хмарними технологіями [26] з використанням технології опрацювання даних великого обсягу [27]. На цьому рівні потрібні для ідентифікації індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу обчислювальні ресурси не проблема. Але виникає суперечність із п. 4 перелічених вище вимог. Для його виконання необхідна уніфікація методів ідентифікації індивідуальних функцій перетворення.

За даними [19, 28 - 31] одним із поширених методів встановлення закономірностей та апроксимації функцій є регресійний аналіз. Однак створенню на його базі уніфікованого методу ідентифікації індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу заважає те, що його основа, метод найменших квадратів, погано працює із функціональними залежностями, які проходять через нуль [20 - 22]. Таким чином, реалізація уніфікованого методу ідентифікації індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу буде вимагати ще якогось методу апроксимації та створить проблему вибору.

У даному параграфі розглянута структура вимірювального каналу у технології Інтернету речей та показано, що однією із задач при його формуванні є приведення сигналу сенсора до форми, придатної для використання клієнтами на верхньому рівні технології Інтернету речей. При цьому актуальною задачею є побудова математичних моделей для апроксимації індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу.

1.2 Методи визначення індивідуальної функції перетворення елементів вимірювального каналу

Інтерполяція – в обчислювальній математиці спосіб знаходження проміжних значень величини за наявним дискретним набором відомих значень. Багатьом із тих, хто стикається з науковими та інженерними розрахунками часто доводиться оперувати наборами значень, отриманих експериментальним шляхом чи методом випадкової вибірки. Як правило, на підставі цих наборів потрібно побудувати функцію, зі значеннями якої могли б з високою точністю збігатися інші отримувані значення. Така задача називається апроксимацією кривої. Інтерполяцією називають такий різновид апроксимації, при якій крива побудованої функції проходить точно через наявні точки даних [32]. Нехай маємо n значень x_i , кожному з яких відповідає своє значення y_i . Потрібно знайти таку функцію F , що $F(x_i) = y_i$, $i = 1; 2; \dots; n$.

При цьому: x_i називають вузлами інтерполяції, пари (x_i, y_i) називають точками даних чи базовими точками, різницю між «сусідніми» значеннями $x_i - x_{i-1}$ — кроком, функцію $F(x)$ — функцією, що інтерполює чи інтерполянтю. Однак, часто вимірювання містять похибки, тому такий підхід на практиці працює погано, бо функція має бути високого порядку, щоб їй належали всі точки. А така функція погано відтворює міжточкові інтервали, бо осцилює через свій високий порядок. Тому на практиці часто застосовують інший підхід – метод найменших квадратів.

Часто явища та процеси визначаються великим числом діючих чинників. Це зумовлює необхідність дослідження залежності однієї результуючої змінної y від пояснюючих (незалежних) змінних x_1, x_2, \dots, x_m . Така задача розв'язується з допомогою регресійного аналізу.

Об'єктом дослідження є така модель множинної лінійної регресії [19, 28 - 31]

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m + u, \quad (1.1)$$

де y та u – випадкові величини (u – збурення або залишок), $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ – невідомі детерміновані параметри.

Нехай $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}$ ($i = \overline{1, n}$) – спостережні значення пояснюючих змінних. Тоді модель (4.1) набере такого виду

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} + \dots + \alpha_m x_{im} + U_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.2)$$

Систему n рівнянь (4.2) запишемо у векторно-матричному вигляді:

$$Y_M = X\alpha + U, \quad (1.3)$$

$$\text{де } Y_M = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}.$$

Оцінкою цієї моделі по вибірці $\{y_i, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}\}$ обсягом n є векторно-матричне рівняння

$$Y = Xa + E, \quad (1.4)$$

де $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$, $a = (a_0, a_1, \dots, a_m)'$, $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)'$, штрих означає операцію транспонування матриці.

Покладемо, що стосовно моделі (1.3) виконуються передумови [19]:

Передумова 1. U – випадковий вектор, змінні x_1, x_2, \dots, x_m – детерміновані величини, а тому X – детермінована матриця.

Передумова 2. $M(U) = \mathbf{0}_n = (0, 0, \dots, 0)'$.

Передумова 3. $\sum U = M(UU') = \sigma^2 I_n$, де I_n – одинична матриця порядку n , σ – стала.

Передумова 4. U – нормально розподілений випадковий вектор, тобто $U \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$.

Передумова 5. Ранг матриці X дорівнює $m + 1 < n$.

Таким чином, при $m = 1$ всі передумови лінійної моделі парної регресії виконуються. Саме такий випадок розглянемо у параграфі 2.1.

2. Детерміновану складову моделі (1.4) позначимо $\hat{Y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n)'$, тобто

$$\hat{Y} = Xa, \quad (1.5)$$

Тоді критерієм вибору вектора оцінок a згідно з методом найменших квадратів є мінімізація суми квадратів залишків [19]

$$Q(a) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 = E'E = (Y - Xa)'(Y - Xa) \rightarrow \min. \quad (1.6)$$

Після розкриття дужок і певних перетворень отримаємо

$$Q(a) = Y'Y - 2a'X'Y + a'X'Xa \rightarrow \min. \quad (1.7)$$

За необхідною умовою екстремуму функції $Q(a)$ $m + 1$ змінних a_0, a_1, \dots, a_m слід прирівняти до нуля всі частинні похідні першого порядку від $Q(a)$ по цих змінних (матричній формі вектор частинних похідних

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial a_0}, \frac{\partial Q}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial a_m} \right). \quad (1.8)$$

Із (1.7) отримаємо

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2(X'Y)' + 2a'XX = -2Y'X + 2a'XX. \quad (1.9)$$

Врахувавши необхідну умову екстремуму

$$-2Y'X + 2a'XX = (0,0,\dots,0), \quad -2X'Y + 2X'Xa = (0,0,\dots,0)' \quad (1.10)$$

Прийдемо до системи нормальних рівнянь [19, 29] у матричній формі для визначення вектора a :

$$X'Xa = X'Y. \quad (1.11)$$

Згідно з передумовою 5 $(m+1) \times (m+1)$ – матриця $X'X$ є невивроженою, тому розв'язком рівняння (1.8) є вектор

$$a = (X'X)^{-1} X'Y, \quad (1.12)$$

де $(X'X)^{-1}$ – обернена матриця до матриці $X'X$.

Основні властивості отриманих оцінок (1.12) визначаються наступними твердженнями.

Теорема Гаусса-Маркова. Нехай стосовно моделі (1.3) виконуються передумови 1-3, 5. Тоді оцінки (1.12) вектора параметрів α мають найменшу дисперсію в класі лінійних незміщених оцінок.

Якщо вектор a знайдено, тоді вибіркоче рівняння множинної регресії [19, 28 - 31] можна зобразити у такому вигляді

$$\hat{y} = X'_0 a = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m, \quad (1.13)$$

де \hat{y} – групова (умовна) середня змінної y при заданому векторі значень пояснюючих змінних

$$X'_0 = (1, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) = (1, x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (1.14)$$

У даному параграфі розглянутий загальний процес оцінки коефіцієнтів апроксимації лінійних регресійних моделей. В загальному випадку розглянутий випадок багатопараметричної регресії, який може звестися до випадку парної регресії.

1.3. Нелінійні моделі, які зводяться до лінійних

Не всі процеси описуються лінійними моделями. У реальних умовах залежність між змінними може адекватно представлятися, як правило, у нелінійній формі. Ця залежність описується формулою

$$Y = f(x) + U, \quad (1.15)$$

де $f(x)$ – нелінійна функція аргументу x , U – випадковий чинник. Відповідна регресійна модель має вид $\hat{y} = f(x)$.

Вид спостережної моделі вибирається на основі графічного зображення у системі координат (x, y) статистичної інформації (побудови діаграми розсіяння).

Розглянемо найважливіші нелінійні моделі.

Гіперболічна (зворотна) [19] залежність має вид

$$\hat{y} = a_0 + \frac{a_1}{x}. \quad (1.16)$$

Вона зводиться до лінійної заміною $z = \frac{1}{x}$. Одержимо

$$\hat{y} = a_0 + a_1 z. \quad (1.17)$$

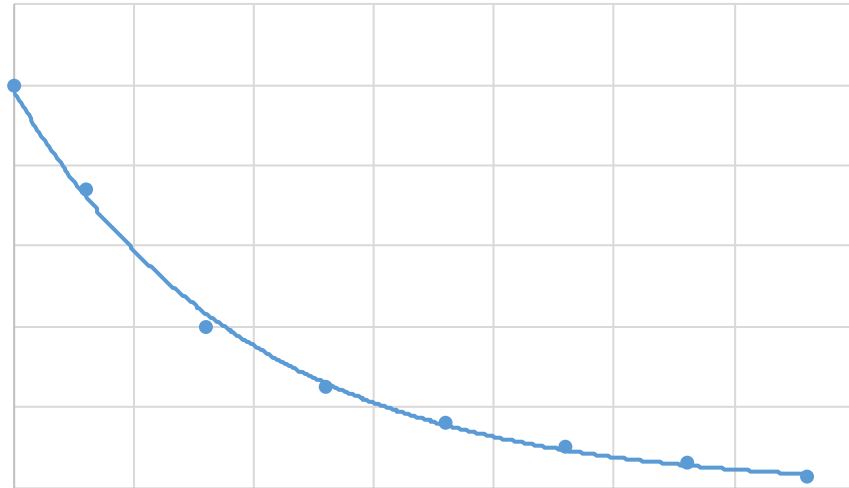


Рисунок 1.3 - Загальний вигляд гіперболічної залежності

Перевірка моделі на адекватність та побудова прогнозу здійснюється як і для лінійної моделі з урахуванням розглянутої заміни змінної x .

Степенева (мультиплікативна) [19] залежність має наступний вид

$$\hat{y} = a_0 \cdot x^{a_1}, \quad a_0 > 0, \quad x > 0. \quad (1.18)$$

Вона зводиться до лінійної моделі логарифмуванням за довільною основою, наприклад, e . Тоді отримаємо співвідношення

$$\ln \hat{y} = \ln a_0 + a_1 \ln x. \quad (1.19)$$

Застосуємо такі заміни

$$\ln \hat{y} = \hat{y}^*, \ln x = x^* . \quad (1.20)$$

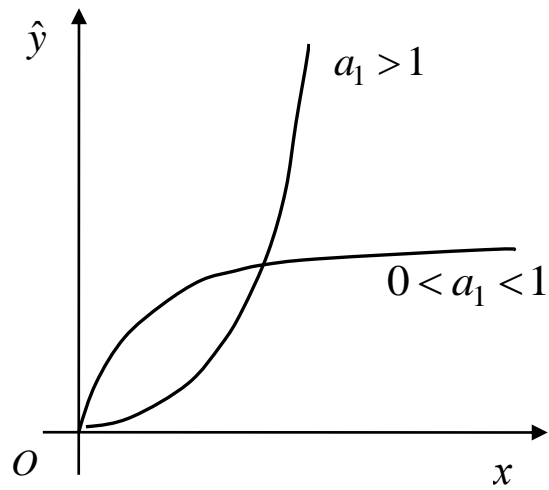


Рисунок 1.4 – Загальний вигляд степеневі моделі

Отримаємо

$$\hat{y}^* = a_0^* + a_1 x^* . \quad (1.21)$$

Експоненційна (показникова) модель записується так [19]

$$\hat{y} = a_0 \cdot a_1^x, \quad a_0 > 0, a_1 > 0, a_1 \neq 1. \quad (1.22)$$

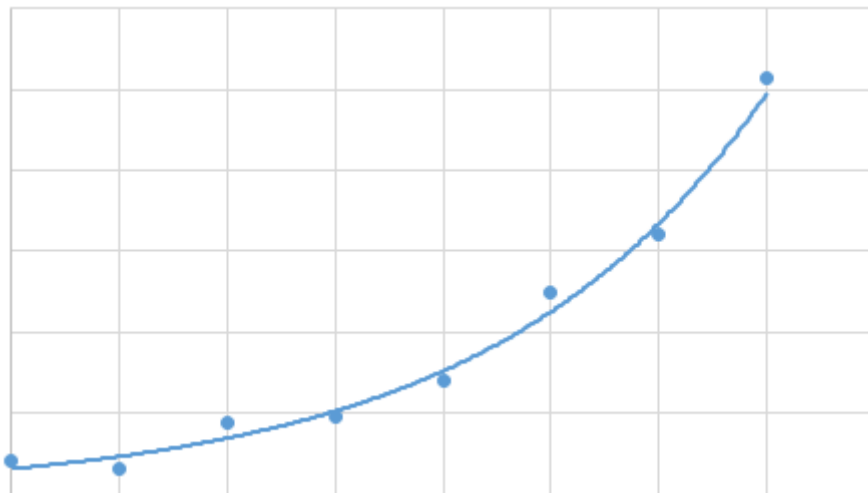


Рисунок 1.5 – Загальний вигляд експоненційної (показникової) моделі

Для одержання лінійної залежності застосуємо логарифмування. Тоді

$$\ln \hat{y} = \ln a_0 + x \ln a_1. \quad (1.23)$$

Здійснивши заміну змінних $\ln \hat{y} = \hat{y}^*$, $\ln a_0 = a_0^*$, $\ln a_1 = a_1^*$, отримаємо

$$\hat{y}^* = a_0^* + a_1^* x. \quad (1.24)$$

Для моделювання немонотонних (коливних) процесів набули широкого використання многочлени (поліноми) [19]

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m. \quad (1.25)$$

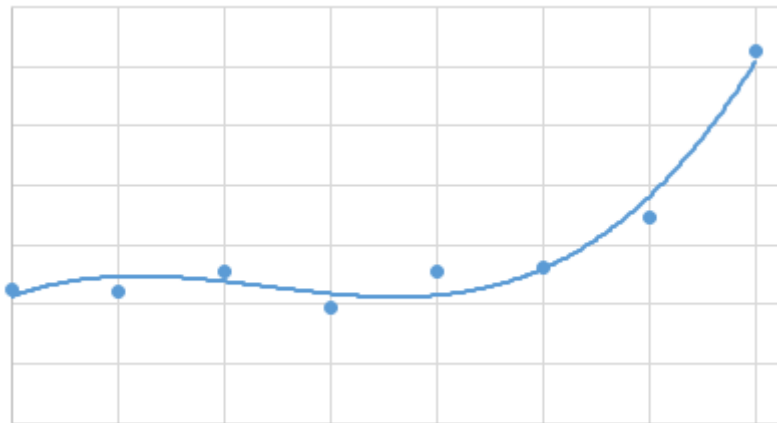


Рисунок 1.6 - Загальний вигляд поліноміальної моделі

Якщо всі статистичні значення x_i ($i=1,2,\dots,n$) різні, то, як відомо з теорії інтерполяції, через n точок можна єдиним способом провести многочлен степені $n-1$.

Для одержання лінійної моделі використаємо заміну $x^m = x_m^*$.
Одержимо

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + \dots + a_m x_m^*. \quad (1.26)$$

Ця множина лінійна залежність з числом змінних m , $m < n - 1$.

Крива Гомперця [19]

$$\hat{y} = e^{a_0 \cdot a_1^x + a_2}, \quad 0 < a_1 < 1. \quad (1.27)$$

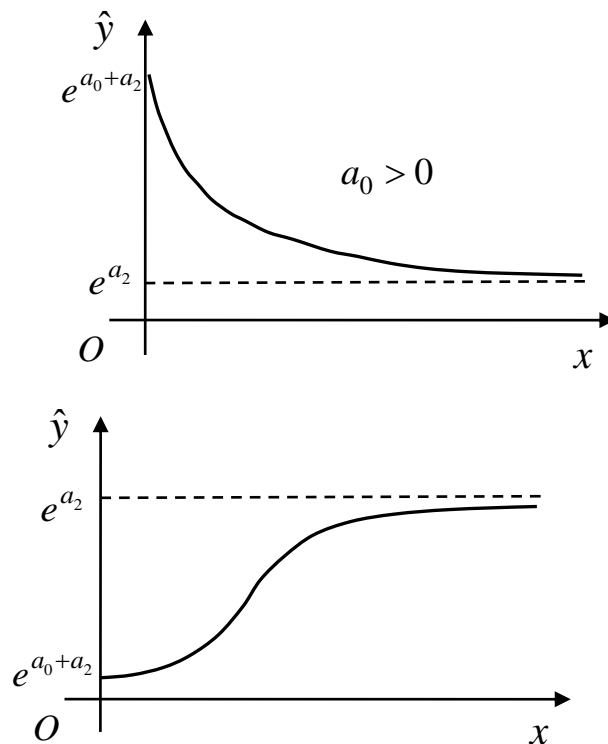


Рисунок 1.7 – Загальний вигляд кривої Гомперця

Логарифмуванням ця крива зводиться до модифікованої експоненційної моделі

$$\hat{y}^* = a_0 \cdot a_1^x + a_2, \quad (1.28)$$

де $\hat{y}^* = \ln \hat{y}$.

У даному параграфі розглянутий загальний процес оцінки коефіцієнтів апроксимації нелінійних функцій шляхом їх лінеаризації, а також методи лінеаризації.

Висновки до першого розділу

- 1) Аналіз структури вимірювального каналу у технології Інтернету речей показав, що однією із задач при його формуванні є приведення сигналу сенсора до форми, придатної для використання клієнтами на верхньому рівні технології Інтернету речей, зокрема, побудова математичних моделей для апроксимації індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу.
- 2) Аналіз методів апроксимації функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу показав, що універсальним методом, придатним для формування вимірювальних каналів у технології Інтернету речей міг би стати регресійний аналіз.

2 МЕТОД УМОВНИХ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

2.1 Аналіз похибок апроксимації індивідуальних функцій перетворення елементів вимірювального каналу за допомогою регресійного аналізу

У ряді важливих задач практики потрібно встановити залежність деякого параметра від одного або кількох інших параметрів та оцінити похибки отриманої залежності. Але будь які вимірювання зазнають впливу впливаючих величин і мають похибки. Тому з точки зору математики їх можна інтерпретувати як випадкові величини.

Випадкові впливаючі величини можуть бути як пов'язані функціонально, так і стохастично. Строга функціональна залежність рідко реалізується на практиці через похибки вимірювань. Переважно спостерігається стохастична залежність, коли зміна можливих значень однієї випадкової величини призводить до зміни умовного закону розподілу імовірності іншої. Нехай встановлено, що параметр x впливає на параметр y . Наявні статистичні дані можна представити як деякі можливі значення випадкових величин X та Y . Тоді кореляційну залежність між ними буде

$$M(Y | x) = f(x), \quad (2.1)$$

де $M(Y | x) = M(Y | X = x)$ – математичне сподівання випадкової величини Y при умові, що X має значення x (умовне математичне сподівання);

$f(x)$ – функція регресії Y на X (її графік називають лінією регресії). При цьому X є незалежною змінною, а Y – залежною (залежність двох випадкових величин називають парною регресією).

Реальні значення залежної змінної не завжди співпадають із умовним математичним сподіванням, тому

$$M(Y | x) = Y - U, \quad (2.2)$$

де U – випадкова величини.

Із (2.1) і (2.2) можна записати:

$$Y = f(x) + U, \quad (2.3)$$

Модель (2.3) називають однофакторною. Основна мета дослідження (2.3) – це знайти теоретично обґрунтований і статистично надійний прогноз значень залежної змінної Y або її математичного сподівання. При лінійній залежності між X та Y модель (2.3) набере вигляду

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X + U, \quad (2.4)$$

де α_0, α_1 – невідомі детерміновані параметри (теоретичні);

U – невідома випадкова величина (збурення).

Нехай x набирає значень x_1, x_2, \dots, x_n , де n – обсяг вибірки. Тоді отримаємо систему n рівнянь виду

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + U_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

При цьому потрібна виконання наступних передумов щодо випадкової складової правої частини (2.3).

Передумова 1. Математичне сподівання збурень дорівнює нулю

$$M(U_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.6)$$

Передумова 2. Дисперсія збурення однакова

$$D(U_i) = \sigma_u^2, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.7)$$

де σ_u^2 – невідоме число, яке слід оцінити.

Передумова 3. При $i \neq j$ збурення U_i і U_j не корелюють між собою.

Передумова 4. Збурення U_i , $i = \overline{1, n}$, випадкові та розподілені за нормальним законом.

Нехай a_0 та a_1 є відповідно оцінками невідомих параметрів α_0 та α_1 . Тоді оцінкою моделі (2.5) за вибіркою є n система рівнянь

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + u_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.8)$$

або

$$y_i = \hat{y}_i + u_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.9)$$

де \hat{y}_i – умовна або групова середня, знайдена за рівнянням регресії;

u_i – вибіркова оцінка збурення U_i (залишок регресії або відхилення).

Рівняння регресії можемо записати у такому виді

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x, \quad (2.10)$$

тобто $\hat{y}_i = a_0 + a_1 x_i$.

Теоретично обґрунтованим і найпоширенішим є метод, коли мінімізується $\sum_{i=1}^n u_i^2$ – його називають метод найменших квадратів (МНК). У

такому випадку функція $Q(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2$ має мінімум

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) x_i = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Умову (2.11) можна переписати в такому вигляді

$$\begin{cases} n a_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a_1 = \sum_{i=1}^n y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a_1 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases} \quad (2.12)$$

Знайдені з допомогою МНК, тобто отримані з (2.12), оцінки a_0 і a_1 називають МНК-оцінками. МНК-оцінки a_0 , a_1 є незміщеними, спроможними та ефективними оцінками параметрів α_0 , α_1 , тобто найкращими лінійними оцінками.

Початковою інформацією для оцінювання σ_u^2 будуть значення $u_i = y_i - \hat{y}_i$, $i = \overline{1, n}$, тобто $\overline{u^2} - (\overline{u})^2$ – це можлива оцінка σ_u^2 . Але тоді

$$\overline{u} = \sum_{i=1}^n u_i / n = 0, \quad (2.13)$$

Незміщеною оцінкою невідомої σ_u^2 є

$$S_u^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n u_i^2 \left(= \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \right) \quad (2.14)$$

Величина S_u^2 (2.14), розподілена за χ^2 при $k = n - 2$ становить

$$\chi^2 = \frac{(n-2)S_u^2}{\sigma_u^2} \quad (2.15)$$

Довірчий інтервал для оцінки σ_u^2 можна отримати із (2.15)

$$\frac{(n-2)S_u^2}{\chi_2^2} < \sigma_u^2 < \frac{(n-2)S_u^2}{\chi_1^2}. \quad (2.16)$$

Для наявних статистичних даних виникає питання про значущість коефіцієнтів регресії α_0 та α_1 . Статистична нульова гіпотеза каже що $H_0: \alpha_m = 0$, де $m = 0, 1$. А альтернативна гіпотеза каже, що $H_1: \alpha_m \neq 0$. Якщо задати рівень значущості α , то незміщені оцінки $\sigma_{a_m}^2$ рівні

$$S_{a_0}^2 = \frac{S_u^2 \overline{x^2}}{n\sigma_x^2}, \quad S_{a_1}^2 = \frac{S_u^2}{n\sigma_x^2}. \quad (2.17)$$

Якщо виконується нерівність

$$\left| \frac{a_m}{S_{a_m}} \right| > t_{кр.}, \quad (2.18)$$

де $t_{кр.} = t_{двост.кр.}(\alpha, n-2)$;

$\alpha = 1 - \gamma$, – критична точка розподілу Стюдента,

то на рівні значущості α приймається гіпотеза H_1 , тобто вважається, що $\alpha_m \neq 0$ (двосторонній критерій значущості оцінок a_0, a_1).

Коли нерівність (2.18) виконується для $m=1$ і $m=0$, то існує стохастичний зв'язок між змінними Y та x . Тоді довірчий інтервал для

функції регресії (умовного математичного сподівання $M(Y|x)$, який із заданою надійністю γ покриває невідоме значення $\alpha_0 + \alpha_1 x$) має вигляд

$$\hat{y} - t(\gamma; n-2)S_{\hat{y}} < M(Y|x) < \hat{y} + t(\gamma; n-2)S_{\hat{y}}, \quad (2.19)$$

де $S_{\hat{y}} = \sqrt{S_{\hat{y}}^2}$, $S_{\hat{y}}^2$ визначається формулою

$$S_{\hat{y}}^2 = \left[1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} \right] \frac{S_u^2}{n}. \quad (2.20)$$

Довірчі інтервали для невідомих параметрів α_0 та α_1 будуть

$$a_0 - t_0(\gamma, k)S_{a_0} < \alpha_0 < a_0 + t_0(\gamma, k)S_{a_0}, \quad (2.21)$$

$$a_1 - t_1(\gamma, k)S_{a_1} < \alpha_1 < a_1 + t_1(\gamma, k)S_{a_1}, \quad (2.22)$$

де S_{a_0} , S_{a_1} – визначаються за (2.17).

Коефіцієнт детермінації позначається R^2

$$R^2 = \frac{\sigma_{\text{регр.}}^2}{\sigma_{\text{заг.}}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{n\sigma_y^2}. \quad (2.23)$$

Рівність (2.23) можна переписати як

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_{\text{ном.}}^2}{\sigma_{\text{заг.}}^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n\sigma_y^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n u_i^2}{n\sigma_y^2}. \quad (2.24)$$

R^2 є найбільш ефективною оцінкою адекватності регресійної моделі, тобто мірою її якості. Значення R^2 показує, яка частка варіації залежної змінної зумовлена варіацією незалежної. З (2.23) і (2.24) отримаємо нерівність $0 \leq R^2 \leq 1$. Чим значення R^2 ближче до одиниці, тим краще модель апроксимує отримані емпіричні дані (результати спостережень знаходяться ближче до лінії регресії). Якщо $R^2 = 1$, то між змінними Y та x існує функціональна залежність. Якщо ж $R^2 = 0$, то змінні незалежні повністю. Рівняння регресії значуще на рівні α , якщо виконується умова

$$F_{\text{сност.}} = \frac{СКП \cdot (n-2)}{СКН \cdot 1} = \frac{S_R^2}{S_u^2} > F_{\text{кр.}}(\alpha; k_1; k_2), \quad (2.25)$$

де $F_{\text{кр.}}(\alpha; k_1; k_2)$ – табличне значення F -критерія Фішера-Снедекора, визначене на рівні значущості α при $k_1 = 1$ і $k_2 = n - 2$ ступенях вільності.

Якщо модель адекватна, то можна знаходити прогнознi значення залежної змінної. Можливі два типи прогнозів: точковий та інтервальний. Коли задано значення x_{n+1} незалежної змінної, то за моделлю (2.5) точковий прогноз для значення залежної змінної має вид

$$\hat{y}_{n+1} = a_0 + a_1 x_{n+1}, \quad (2.26)$$

$$S_{u_{n+1}}^2 = S_u^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{n\sigma_x^2} \right], \quad (2.27)$$

де S_u^2 визначена за (2.14).

Довірчий інтервал для прогнозного значення залежної змінної

$$\hat{y}_{n+1} - t(\gamma; n-2)S_{u_{n+1}} < y_{n+1} < \hat{y}_{n+1} + t(\gamma; n-2)S_{u_{n+1}}. \quad (2.28)$$

Для широкого кола явищ і процесів широко розповсюджені поліноми

$$\hat{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m. \quad (2.29)$$

Якщо всі статистичні значення x_i ($i=1,2,\dots,n$) різні, то, як відомо з теорії інтерполяції, через n точок можна провести поліном степені $n-1$. Для одержання лінійної моделі використаємо заміну $x^m = x_m^*$. Одержимо

$$\hat{y} = a_0 + a_1x_1^* + a_2x_2^* + \dots + a_mx_m^*. \quad (2.30)$$

Це множина лінійна залежність з числом змінних m , $m < n - 1$. Її параметри можна оцінювати аналогічно до множинної моделі [19].

Застосуємо описаний вище метод для дослідження кореляції між температурою і опором для платиногового термометра опору (ТО). Відповідність між опором і температурою подано у таблиці 2.1

Таблиця 2.1. Залежність опору R 100-омного платиногового термометра опору від температури.

№	t, °C	R, Ω
1	0	100
2	40	115,54
3	90	134,7
4	130	149,82
5	180	168,47
6	230	186,82
7	280	204,89
8	330	222,66
9	380	240,15
10	420	253,93
11	470	270,89
12	510	284,26
13	540	294,16
середнє	276,9	202,02

Діаграма розсіяння, подана на рисунку 2.1, зумовлює гіпотезу про лінійний зв'язок між опором та температурою виду (2.8). Результати оцінювання параметрів регресії подані у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2. Статистика регресії для лінійної моделі.

Множинний R	0,9997
R-квадрат	0,9994
Нормований R-квадрат	0,9994
Стандартна помилка	1,6
Кількість спостережень	13

У таблиці 2.2 коефіцієнт детермінації (R-квадрат у таблиці) рівний 0,9994 (дуже високе значення), тобто модель значуща, як і її коефіцієнти.

Скоригований коефіцієнт детермінації, у таблиці 2.2 поданий як «Нормований R-квадрат», враховує, що коефіцієнт детермінації враховує число ступенів вільності та зростає з додаванням нових змінних у модель. Тому він кращий для оцінки багатопараметричних моделей, хоча його фізичний зміст той же, як і у коефіцієнта детермінації. Для лінійної моделі обидва коефіцієнти співпадають. Як «Стандартна помилка» у таблиці 2.2 подано оцінку кореня квадратного з оцінки дисперсії залишків за 2.14.

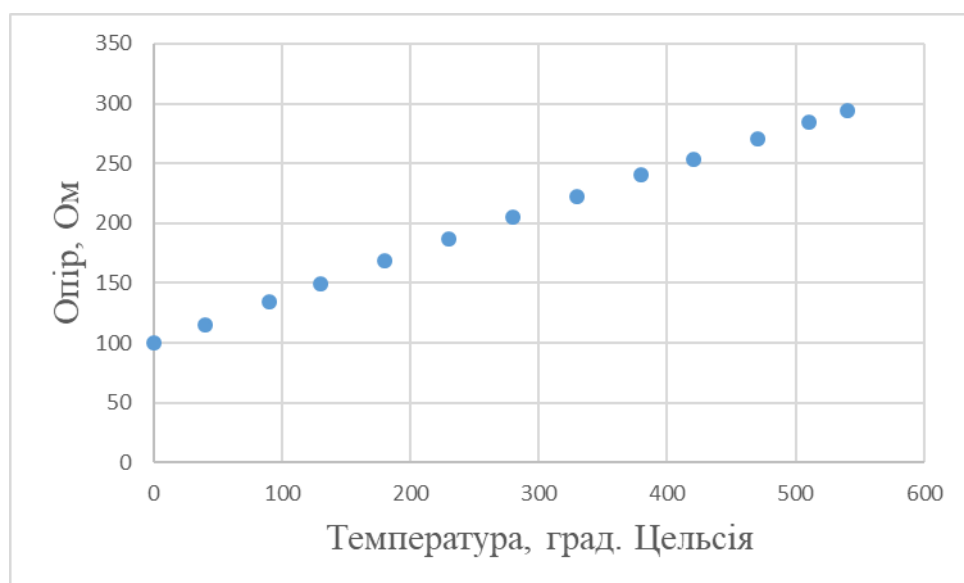


Рисунок 2.1. Діаграма розсіяння для залежності опору від температури

Але аналіз поданих на рисунку 2.2 залишків лінійної моделі показує, що є неврахована нелінійність, бо знаки на кінцях діапазону досліджень і у середині різні.

Тому застосуємо для дослідження кореляційної залежності між температурою і опором платинового термометра опору поліном другого порядку. У загальному вигляді модель можна записати як

$$\hat{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad (2.31)$$

де \hat{y} - опір платинового термометра опору, обчислений згідно моделі;

x – температура.

Результати побудови моделі приведені у таблиці 2.3.

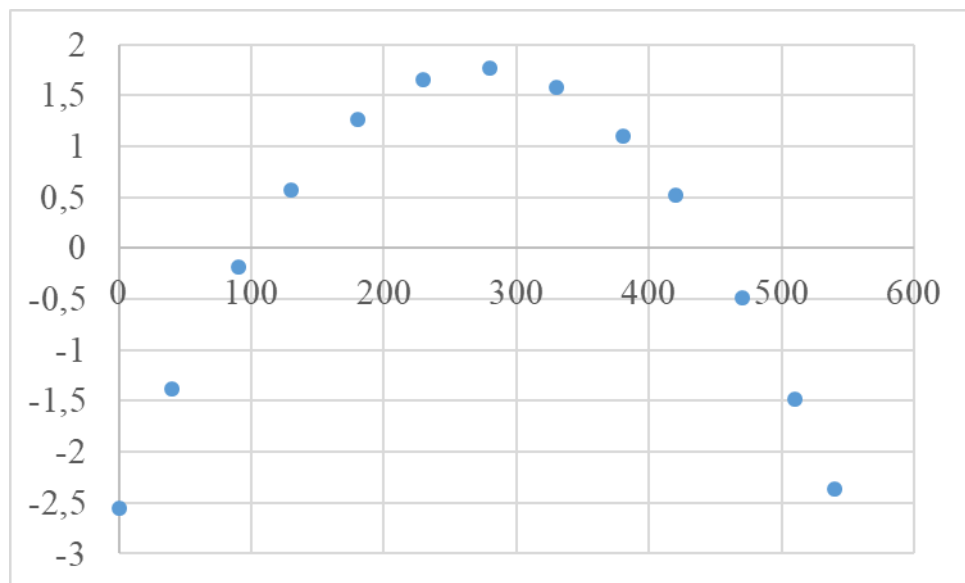


Рисунок 2.2. Залишки лінійної моделі залежності опору від температури.

Таблиця 2.3. Статистика регресії поліноміальної моделі другого порядку.

Множинний R	0,9999999992
R-квадрат	0,9999999984
Нормований R-квадрат	0,9999999981
Стандартна помилка	0,0028
Кількість спостережень	13

Як видно з таблиці 2.3, поліном другого степеню краще описує залежність опору 100-омного платиного термометра опору від температури бо нормований коефіцієнт детермінації ближчий до одиниці. Це підтверджує загальна оцінка значущості моделі та аналіз значущості коефіцієнтів. Їх аналіз поданий у таблиці 2.4, де перший стовпець відповідає за назви змінних. Y -перетин це вільний член, t це температура у першому, а t^2 у другому степені відповідно. Стовпець «Коефіцієнти» – це оцінки коефіцієнтів регресії, а стовпець «Стандартна похибка» – це значення стандартних похибок коефіцієнтів. Стовпець t - статистика – це t -критерій для відповідних коефіцієнтів. P -значення менші за обраний рівень значущості у 0,05, тому всі коефіцієнти моделі значущі.

Таблиця 2.4. Аналіз коефіцієнтів регресійної моделі.

	<i>Коефіцієнти</i>	<i>Стандартна похибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значення</i>	<i>Нижні 95%</i>	<i>Верхні 95%</i>
Y -перетин	99,9990	0,002	49760,4	2,6E-43	99,9945	100,0034
T	0,391	1,7E-05	22362,7	7,9E-40	0,3908	0,3908
t^2	-5,784E-05	3,1E-08	-1871,4	4,7E-29	-5,791E-05	-5,778E-05

Межі довірчого інтервалу показують стовбці Нижні та Верхні 95% відповідних коефіцієнтів. З таблиці 2.4 видно, що стандартні похибки коефіцієнтів дуже малі – модель з високою точністю описує залежність опору від температури, її коефіцієнти добре описують залежність.

Регресійну модель дрейфу термопар як залежність зміни їх функції перетворення від часу експлуатації побудуємо на поданих у [33] найбільш повних результатах експериментальних досліджень. Графіки дрейфу подано на рисунку 2.3. Розміщення точок кривих дає змогу побудувати поліноміальну регресію. Як незалежну змінну τ (регресор, факторна ознака) для моделі похибки від дрейфу функції перетворення термопар обираю час експлуатації. Як залежну (результативну) змінну Y вибрано зміну термoe.p.c.

від початкової. Тому характерною ознакою є рівність нулю похибки термопар на початку експлуатації.

Але регресійна модель працює лише за умов, коли похибка наявна лише для результативної ознаки, а факторна ознака відома без похибки [19]. Для даного випадку це лише приблизно відповідає дійсності. Але похибка часу визначення термо-е.р.с. одна година за час експлуатації від 1000 до 10000 годин становить від 0,1 до 0,01%, чим можна нехтувати. Відхилення поточної температури від номінальної при експериментальних дослідженнях не перевищує 4 ... 5°C, а функції похибки є гладкими, не мають розривів та стрибків. Тому похибкою виміряних змін також можна нехтувати як похибками другої степені малості.

Як видно з рисунка 2.3, загальний вид рівняння регресії для хромелю близький до функцій виду $\hat{y} = \sqrt[n]{x}$. Для алюмелю можна використати аналогічний вид рівняння регресії або поліном третього степеня. У табл. 2.5 представлено регресійні моделі часового дрейфу електродів термопар.

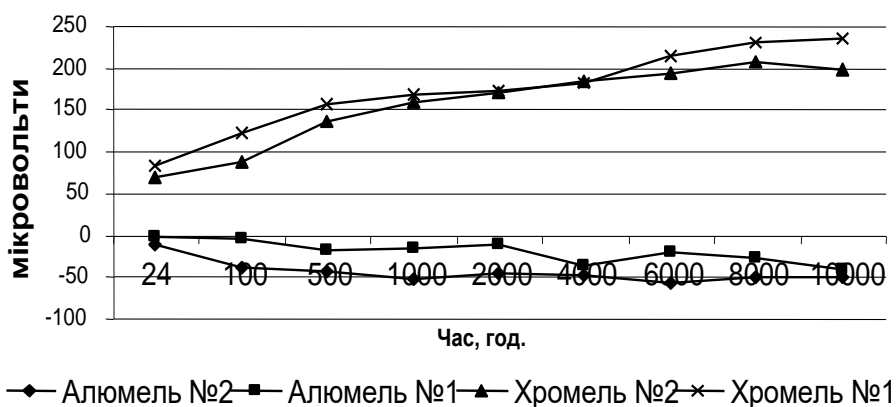


Рисунок 2.3 - Залежності часового дрейфу функції перетворення електродів термопар

Всі моделі без вільного члена ($a_0 = 0$, дивись рядки 1, 2 табл. 2.5) обох електродів мають однакову особливість. Для них сума залишків (збурень) моделі не дорівнює нулю (рядок 6). А умова $a_0 = 0$ є наслідок фізичної суті отримання результатів експерименту, тому нею не можна нехтувати. Тому

отримана регресійна модель не описує процес дрейфу оскільки оцінки її коефіцієнтів є зміщеними [19, 22]. Також занижується дисперсія оцінок коефіцієнтів моделі, що, веде до спотворення їх довірчих інтервалів. Тоді коефіцієнт детермінації \hat{R}^2 (кореляційне відношення) вже не служить адекватною характеристикою якості моделі [21, 22].

Можна зауважити, що у досліджених класичним МНК та його модифікаціях регресійних моделях [19, 28. 31], автори явно або неявно задають відмінність вільного члена від нуля.

Таблиця 2.5. Регресійні моделі часового дрейфу функції перетворення електродів термопар

№		Хромель №1	Хромель №2	Алюмель №1	Алюмель №1	Алюмель №2	Алюмель №2
1	Вид моделі	$\hat{y} = a_1 \sqrt[4]{\tau} + a_2 \sqrt[3]{\tau}$	$\hat{y} = a_1 \sqrt[4]{\tau} + a_2 \sqrt[3]{\tau}$	$\hat{y} = a_1 \sqrt[4]{\tau} + a_2 \sqrt[3]{\tau}$	$\hat{y} = a_1 \sqrt[4]{\tau} + a_2 \sqrt{\tau}$	$\hat{y} = a_1 \sqrt[4]{\tau} + a_2 \sqrt[3]{\tau}$	$\hat{y} = a_1 \sqrt[4]{\tau} + a_2 \sqrt{\tau}$
2	Коефіцієнти моделі	$a_1 = 47,96$ $a_2 = -11,53$	$a_1 = 58,22$ $a_2 = -17,43$	$a_1 = 13,71$ $a_2 = -10$	$a_1 = 1,48$ $a_2 = -0,95$	$a_1 = -20,87$ $a_2 = 3,1$	$a_1 = -16,86$ $a_2 = 0,27$
3	Сума залишків	-7,73 мкВ	4,61 мкВ	-0,82 мкВ	1,03 мкВ	-0,06 мкВ	-1,68 мкВ
4	Вид моделі	$\hat{y} = a_0 + a_1 \sqrt[4]{\tau} + a_2 \sqrt[3]{\tau}$	$\hat{y} = a_0 + a_1 \sqrt[4]{\tau} + a_2 \sqrt[3]{\tau}$	$\hat{y} = a_0 + a_1 \sqrt[4]{\tau} + a_2 \sqrt[3]{\tau}$	$\hat{y} = a_0 + a_1 \sqrt[4]{\tau} + a_2 \sqrt{\tau}$	$\hat{y} = a_0 + a_1 \sqrt[4]{\tau} + a_2 \sqrt[3]{\tau}$	$\hat{y} = a_0 + a_1 \sqrt[4]{\tau} + a_2 \sqrt{\tau}$
5	Коефіцієнти моделі	$a_0 = -61,13$ $a_1 = 91,4$ $a_2 = -29,16$	$a_0 = 36,47$ $a_1 = 32,30$ $a_2 = -6,91$	$a_0 = -6,52$ $a_1 = 18,34$ $a_2 = -11,88$	$a_0 = 4,39$ $a_1 = -0,05$ $a_2 = -0,84$	$a_0 = -0,48$ $a_1 = -20,53$ $a_2 = 2,96$	$a_0 = -7,19$ $a_1 = -14,37$ $a_2 = 0,08$
6	Сума залишків	Менше $3 \cdot 10^{-13}$ мкВ	0	Менше $3 \cdot 10^{-14}$ мкВ	Менше $3 \cdot 10^{-14}$ мкВ	Менше $6 \cdot 10^{-14}$ мкВ	Менше 10^{-13} мкВ

У моделях, де вільний член присутній ($a_0 \neq 0$, рядки 4, 5 табл. 2.5), вказаний недолік відсутній. Але ці моделі не мають фізичного змісту (суперечать умові рівності нулю дрейфу на початку досліджень) і у табл. 2.5

приведені для того, щоб показати принципову змогу побудови кривої, яка задовольняє умову рівності нулю суми залишків регресії (рядок 6).

Аналогічно до табл. 2.5, отримано моделі часового дрейфу електродів термопар опрацьовано експериментальні дані [33], які мають найменшу суму квадратів залишків. У табл. 2.6 подано регресійні моделі залежності похибки від температури діапазону (рядки 4, 5 для $n = 2$, рядки 10, 11 для $n = 3$). У таблиці 2.6, аналогічно до таблиці 2.5, чітко видно закономірність – при відсутності вільного члена ($a_0 = 0$, рядки 4, 5 та 10, 11 таблиці 2) сума залишків (збурень) моделі не рівна нулю (рядки 6 і 12 таблиці 2). Як було показано раніше, це не дозволяє використовувати метод МНК для дослідження даної моделі.

Таблиця 2.6. Регресійні моделі дрейфу електродів ТТ по діапазону вимірювання температури

		Хромель №1	Хромель №2	Алюмель №1	Алюмель №2
1	2	3	4	5	6
1	Час експлуат.	1000 год.	1000 год.	1000 год.	1000 год.
2	Темпер. експлуат.	800 °С	800 °С	800 °С	800 °С
3	Темпер. діапаз.	Від 0 до 800 °С	Від 0 до 800 °С	Від 0 до 800 °С	Від 0 до 800 °С
4	Вид моделі	$\hat{y} = a_1t + a_2t^2$	$\hat{y} = a_1t + a_2t^2$	$\hat{y} = a_1t + a_2t^2$	$\hat{y} = a_1t + a_2t^2$
5	Коефіц. моделі	$a_1 = 0,4603$ $a_2 = -0,0003$	$a_1 = 0,526476$ $a_2 = -0,00044$	$a_1 = -0,07483$ $a_2 = 7 \cdot 10^{-05}$	$a_1 = -0,08755$ $a_2 = -3 \cdot 10^{-05}$
6	Сума залишків	11,79339 мкВ	-5,41435 мкВ	13,93251 мкВ	15,89955 мкВ
7	Вид моделі	$\hat{y} = a_0 + a_1t + a_2t^2$	$\hat{y} = a_0 + a_1t + a_2t^2$	$\hat{y} = a_0 + a_1t + a_2t^2$	$\hat{y} = a_0 + a_1t + a_2t^2$
8	Коефіц. моделі	$a_0 = -22,955$ $a_1 = 0,56771$ $a_2 = -0,00041$	$a_0 = 10,53864$ $a_1 = 0,477166$ $a_2 = -0,00039$	$a_0 = -27,1186$ $a_1 = 0,052058$ $a_2 = -5 \cdot 10^{-05}$	$a_0 = -30,947$ $a_1 = 0,05725$ $a_2 = -0,0002$
9	Сума залишків	Менше 10^{-12} мкВ	0	Менше 10^{-13} мкВ	Менше 10^{-13} мкВ

1	2	3	4	5	6
10	Вид моделі	$\hat{y} = a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$	$\hat{y} = a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$	$\hat{y} = a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$	$\hat{y} = a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$
11	Коефіц. моделі	$a_1 = 0,36423$ $a_2 = 7 \cdot 10^{-05}$ $a_3 = -0,00041$	$a_1 = 0,609592$ $a_2 = -0,00077$ $a_3 = 3 \cdot 10^{-07}$	$a_1 = -0,19275$ $a_2 = 0,000537$ $a_3 = -4 \cdot 10^{-07}$	$a_1 = -0,2474$ $a_2 = 0,0006$ $a_3 = -5 \cdot 10^{-07}$
12	Сума залишків	-3,17164 мкВ	2,044359 мкВ	-3,34995 мкВ	1,555334 мкВ
13	Вид моделі	$\hat{y} = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$	$\hat{y} = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$	$\hat{y} = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$	$\hat{y} = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$
14	Коефіц. моделі	$a_0 = -19,2564$ $a_1 = 0,5292$ $a_2 = -0,00031$ $a_3 = -7 \cdot 10^{-08}$	$a_0 = -12,4122$ $a_1 = 0,715948$ $a_2 = -0,00101$ $a_3 = 4 \cdot 10^{-07}$	$a_0 = -20,339$ $a_1 = -0,01848$ $a_2 = 0,00013$ $a_3 = 1 \cdot 10^{-07}$	$a_0 = -9,4431$ $a_1 = -0,1665$ $a_2 = 0,000414$ $a_3 = 4 \cdot 10^{-07}$
15	Сума залишків	Менше 10^{-12} мкВ	Менше 10^{-12} мкВ	Менше 10^{-12} мкВ	Менше 10^{-12} мкВ

У порівняльних моделях з вільним членом ($a_0 \neq 0$, рядки 7, 8 та 13, 14 таблиці 2.6) сума залишків рівна нулю (див. рядки 9 і 15 таблиці 2.6).

У даному параграфі показано, що у поліноміальних регресійних моделях з вільним членом, отриманих за допомогою МНК, сума залишків рівна нулю – вони мають як фізичний, так і математичний зміст. А у поліноміальних моделях без вільного члена сума залишків відмінна від нуля – моделі мають фізичний зміст, але не мають математичного.

2.2. Метод умовних найменших квадратів

Розглянемо поліноміальну регресійну модель

$$\tilde{Y} = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_k t^k + \tilde{U} . \quad (2.32)$$

Нехай t має значення $t_1, t_2, \dots, t_n, t_i \neq t_j, i \neq j, i, j = \overline{1, n}$. Тоді з (2.32) отримуємо n рівнянь

$$Y_i = \sum_{j=1}^k \alpha_j t_i^j + U_i, i = \overline{1, n}. \quad (2.33)$$

Для специфікації моделі (2.32) приймемо, що виконуються умови

$$M(U_i) = 0, D(U_i) = \sigma^2, \text{cov}(U_i, U_j) = 0, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j, \quad (2.34)$$

де σ^2 – невідомий параметр, який оцінюємо.

За вибіркою $\{(y_i, t_i), i = \overline{1, n}\}$ отримаємо оцінку моделі (2.32)

$$y_i = \sum_{j=1}^k a_j t_i^j + u_i, i = \overline{1, n}, \quad (2.35)$$

де a_1, a_2, \dots, a_k - оцінки невідомих параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ відповідно;

u_i - емпіричний залишок регресії при умові $t = t_i$.

Умовно позначимо

$$u_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \sum_{j=1}^k a_j t_i^j, i = \overline{1, n}. \quad (2.36)$$

Емпіричні залишки моделі неоднозначно залежать від методу оцінки параметрів моделі. Але за умовою (2.34), завжди має виконуватися рівність

$$\sum_{i=1}^n u_i = 0 \quad . \quad (2.37)$$

При використанні МНК оцінки a_1, a_2, \dots, a_k з урахуванням (2.36) знаходяться як розв'язок системи k нормальних рівнянь

$$\left\{ \sum_{i=1}^n u_i t_i^j = 0, \quad j = \overline{1, k}. \right. \quad (2.38)$$

Очевидно, що отримані МНК-оцінки не будуть задовольняти рівність (2.37) у загальному випадку – вільний член вимагає приєднання рівняння (2.37) до системи (2.38). Більше того, невиконання (2.37) унеможлиблює так звану декомпозицію дисперсій [20, 22], оскільки виконується рівність

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 - 2\bar{y} \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad (2.39)$$

де $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i / n$.

Рівність (2.39) не дає змоги коректно визначити коефіцієнт детермінації R^2 . Далі інші оцінки параметрів моделі, позбавлені недоліку МНК-оцінок, та їх числові характеристики подамо через МНК-оцінки a_1, a_2, \dots, a_k та їх характеристики і так звану сумарну нев'язку

$$\varepsilon(k) = \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{j=1}^k T_j a_j, \quad (2.40)$$

де

$$T_j = \sum_{i=1}^n t_i^j, \quad j = \overline{1, k}. \quad (2.41)$$

Для ліквідації недоліку МНК-оцінок знайдемо умовний екстремум

$$Q(b_1, b_2, \dots, b_k) = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^k b_j t_i^j \right)^2 \rightarrow \min, \quad \text{при умові } T_1 b_1 + T_2 b_2 + \dots + T_k b_k = \sum_{i=1}^n y_i.$$

$$b = BT_y, \quad (2.46)$$

де

$$B = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1,k+1} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2,k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{k,1} & B_{k,2} & \cdots & B_{k,k+1} \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

де B_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента $(.)_{ij}$ транспонованої матриці T' .

Задамо вектор b через вектор МНК-оцінок $a = col(a_1, a_2, \dots, a_k)$, тобто знайдемо такий k -вимірний вектор c , який виконує рівність

$$b = a + c. \quad (2.48)$$

Для цього врахуємо, що систему (2.38) можна представити як

$$\tilde{T}a = \begin{pmatrix} T_{y,1} \\ T_{y,2} \\ \cdots \\ T_{y,k} \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

де

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} T_2 & T_3 & \cdots & T_{k+1} \\ T_3 & T_4 & \cdots & T_{k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{k+1} & T_{k+2} & \cdots & T_{2k} \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

Із (2.40), (2.44), (2.48) і (2.49) отримаємо $T \begin{pmatrix} c \\ \lambda/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(k) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, звідки

$$c = \Delta^{-1} \varepsilon(k) B_{*1}, \quad \lambda/2 = \Delta^{-1} \varepsilon(k) B_{k+1,1}, \quad (2.51)$$

де B_{*1} – перший стовпець матриці ΔB (B визначена (2.47)). Отже, остаточно

$$b = a + \Delta^{-1} \varepsilon(k) B_{*1}. \quad (2.52)$$

Пропонований метод назвемо методом умовних найменших квадратів (МУНК), а отримані оцінки (компоненти вектора b) невідомих параметрів – МУНК-оцінками. Для їх дослідження розглянемо випадок нефіксованої вибірки. Тоді результуюча ознака має значення Y_1, Y_2, \dots, Y_n , які є випадковими. З'ясуємо залежність вектора b від них. Тому позначимо

$$\tau = \begin{pmatrix} t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^k \\ t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_n & t_n^2 & \dots & t_n^k \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Тоді модель (2.33) у векторно-матричній формі запишеться як

$$Y = \tau \alpha + U, \quad (2.54)$$

а з урахуванням (2.41), (2.43), (2.44) і (2.50) рівняння (2.49) буде мати вид

$$\tau' \tau \alpha = \tau' Y, \quad (2.55)$$

Звідки

$$a = (\tau' \tau)^{-1} \tau' Y. \quad (2.56)$$

Крім того з (2.40) $\varepsilon(k) = (1, 1, \dots, 1)Y - (T_1, T_2, \dots, T_k)(\tau' \tau)^{-1} \tau' Y$, з (2.48) і (2.52)

$$b = (\tau' \tau)^{-1} \tau' Y + \Delta^{-1} [(1, 1, \dots, 1)Y - (T_1, T_2, \dots, T_k)(\tau' \tau)^{-1} \tau' Y] B_{*1}, \quad (2.57)$$

а з урахуванням (2.54)

$$b = \alpha + (\tau' \tau)^{-1} \tau' U + \Delta^{-1} \left[\sum_{i=1}^n U_i - (T_1, T_2, \dots, T_k)(\tau' \tau)^{-1} \tau' U \right] B_{*1}. \quad (2.58)$$

За (2.55) безпосередньо отримуємо рівність

$$a_j = x^{(j)} Y, \quad j = \overline{1, k}, \quad (2.59)$$

де

$$x^{(j)} = \Delta_1^{-1} A_{j*} \tau', \quad \Delta_1 = \det \tilde{T} = \det(\tau' \tau), \quad (2.60)$$

де A_{j*} – j -й рядок матриці A .

Елементи A є алгебраїчні доповнення елементів матриці $(\tau' \tau) = \tilde{T}$.

Властивість 1. МУНК-оцінки – лінійні комбінації спостережених значень Y_1, Y_2, \dots, Y_k , тобто

$$b_j = v^{(j)} Y, \quad j = \overline{1, k}, \quad (2.61)$$

де вектори $v^{(j)}$ вагових коефіцієнтів визначаються формулами

$$v^{(j)} = x^{(j)} + \Delta^{-1} B_{j1} [(1,1,\dots,1) - \Delta_1^{-1} \sum_{s=1}^k T_s x^{(s)}], \quad j = \overline{1, k}, \quad (2.62)$$

і задовольняють співвідношення

$$\begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ \dots \\ v^{(k)} \end{pmatrix} \tau = I_k, \quad (2.63)$$

$$\sum_{j=1}^k T_j v^{(j)} = (1,1,\dots,1) \quad . \quad (2.64)$$

Рівності (2.61) і (2.62) отримані із (2.57) з урахуванням (2.59) та (2.60), а співвідношення (2.63) випливає з (2.62) та рівностей

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \dots \\ x^{(k)} \end{pmatrix} \tau = I_k, \quad (1,1,\dots,1)\tau = (T_1, T_2, \dots, T_k).$$

З першого рівняння системи (2.42) і співвідношень (2.43) та (2.61) отримаємо рівність відносно випадкових величин Y_1, Y_2, \dots, Y_k , отже $[T_1 v^{(1)} + T_2 v^{(2)} + \dots + T_k v^{(k)} - (1,1,\dots,1)]Y = 0$, з чого випливає рівність (2.64).

Властивість 2. Якщо виконується умова (2.34), тоді МУНК-оцінки b_1, b_2, \dots, b_k є незміщеними оцінками відповідних параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, тобто

$$M(b) = \alpha. \quad (2.65)$$

Ця рівність отримана з (2.58) з умови властивостей математичного сподівання, детермінованості матриці T і першої умови (2.34). Щоби знайти коваріаційну матрицю Σ_b вектора b позначимо скаляр

$$d = \Delta^{-1} \left[\sum_{i=1}^n U_i - (T_1, \dots, T_k) (\tau' \tau)^{-1} \tau' U \right]. \quad (2.66)$$

Використавши (2.58) та симетричність матриці $\tau' \tau$, отримаємо

$$\Sigma_b = M \left[(b - \alpha)(b - \alpha)' \right] = M \left\{ (\tau' \tau)^{-1} \tau' U + dB_{*1} \left[U' \tau (\tau' \tau)^{-1} + dB_{*1}' \right] \right\}.$$

З урахуванням (2.34), властивостей математичного сподівання і детермінованості T послідовно знайдемо

$$\begin{aligned} M \left[(\tau' \tau)^{-1} \tau' U U' \tau (\tau' \tau)^{-1} \right] &= (\tau' \tau)^{-1} \tau' M(UU') \tau (\tau' \tau)^{-1} = \sigma^2 (\tau' \tau)^{-1}, \\ M(\tau' U d) &= \Delta^{-1} \left\{ \tau' \left[M \left(U \sum_{i=1}^n U_i \right) - M(UU') \tau (\tau' \tau)^{-1} (T_1, \dots, T_k)' \right] \right\} = \\ &= \sigma^2 \Delta^{-1} \left[\tau' (1, \dots, 1)' - \tau' \tau (\tau' \tau)^{-1} (T_1, \dots, T_k)' \right] = O_{k,1}, \\ M(d^2) &= \Delta^{-2} \left[M \left(\sum_{i=1}^n U_i \right)^2 - 2M \left(U' \sum_{i=1}^n U_i \right) \tau (\tau' \tau)^{-1} (T_1, \dots, T_k)' + \right. \\ &+ (T_1, \dots, T_k) (\tau' \tau)^{-1} \tau' M(UU') \tau (\tau' \tau)^{-1} (T_1, \dots, T_k)' \left. \right] = \\ &= \sigma^2 \Delta^{-2} \left[n - 2(1, \dots, 1) \tau (\tau' \tau)^{-1} (T_1, \dots, T_k)' + (T_1, \dots, T_k) (\tau' \tau)^{-1} (T_1, \dots, T_k)' \right] = \\ &= \sigma^2 \Delta^{-2} \left[n - (T_1, \dots, T_k) (\tau' \tau)^{-1} (T_1, \dots, T_k)' \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

де $O_{k,1}$ - нульовий k -вимірний вектор-стовпець. Тобто

$$\Sigma_b = \sigma^2 \left\{ (\tau' \tau)^{-1} + \Delta^{-2} \left[n - (T_1, \dots, T_k) (\tau' \tau)^{-1} (T_1, \dots, T_k)' \right] B_{*1} B_{*1}' \right\}. \quad (2.68)$$

Для остаточного спрощення отриманого виразу врахуємо рівність

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & \dots & T_k & 0 \\ & & & & T_1 \\ & \tau' \tau & & & T_2 \\ & & & & \dots \\ & & & & T_k \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

а також симетричність матриці $\tilde{T} = \tau' \tau$. Тоді, розклавши спочатку визначник за елементами першого рядка, знайдемо $\Delta = \det T$, а потім розкладаючи отримані визначники порядку k за елементами останніх стовпців отримаємо

$$(T_1, \dots, T_k)(\tau' \tau)^{-1}(T_1, \dots, T_k)' = (-1)^{k+1} \Delta \Delta_1^{-1}. \quad (2.70)$$

Відзначимо, що відповідно до (2.50), Δ_1 є визначником Грама, породженим системою k лінійно незалежних n -вимірних векторів $\{t_1^j, t_2^j, \dots, t_n^j\}$, $j = \overline{1, k}$, де $k < n$. А тому згідно [20] $\Delta_1 > 0$ і квадратична форма $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \tau' \tau (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)' > 0$ для всіх нетривіальних значень ξ_i . Тоді $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) (\tau' \tau)^{-1} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)' > 0$, якщо $\sum_{i=1}^k \xi_i^2 \neq 0$. Тобто, з (2.70) випливає, що матриця T невироджена і $(-1)^{k+1} \Delta > 0$.

Отже, врахувавши (2.70) і рівність $\sum_a = (\tau' \tau)^{-1}$, з (2.68) отримаємо

$$\Sigma_b = \sigma^2 \left[\Sigma_a + \Delta^{-2} (n - |\Delta| |\Delta_1^{-1}|) B_{*1} B_{*1}' \right], \quad (2.71)$$

тобто

$$\begin{aligned} \sigma_{b_i}^2 &= D(b_i) = \sigma^2 \left[K_{ii} + \Delta^{-2} (n - |\Delta| |\Delta_1^{-1}|) B_{i1}^2 \right], \quad i = \overline{1, k}, \\ \text{cov}(b_i, b_j) &= \sigma^2 \left[\text{cov}(a_i, a_j) + \Delta^{-2} (n - |\Delta| |\Delta_1^{-1}|) B_{i1} B_{j1} \right], \quad i, j = \overline{1, k}, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (2.72)$$

де K_{ii} - i -й діагональний елемент матриці $(\tau'/\tau)^{-1}$.

Матриця $I_n - \tau(\tau'/\tau)^{-1}\tau'$ ідемпотентна, а другий і третій доданки рівні нулю, тому отримаємо

$$M(u'u) = M\left\{U' \left[I_n - \tau(\tau'/\tau)^{-1}\tau' \right] U\right\} + M(d^2)B_{*1}'\tau'\tau B_{*1}. \quad (2.73)$$

Стандартні обчислення, з використанням (2.34) дають рівність

$$M\left\{U' \left[I_n - \tau(\tau'/\tau)^{-1}\tau' \right] U\right\} = (n-k)\sigma^2. \quad (2.74)$$

У відповідності із змістом B_{ij} та (2.47)

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} B \\ \Delta^{-1}B_{k+1,1} \dots \Delta^{-1}B_{k+1,k+1} \end{pmatrix};$$

всі рядки від другого до $(k+1)$ -го матриці T ортогональні до першого стовпця матриці T^{-1} , а тому з врахуванням (2.69), $\tau'\tau B_{*1} = -B_{k+1,1}(T_1, \dots, T_k)$.

Розклад $\det T'$ по першому стовпцю дає рівність $(T_1, \dots, T_k)B_{*1} = \Delta$, враховуючи яку отримаємо $B_{*1}'\tau\tau' B_{*1} = -B_{k+1,1}\Delta$. Але згідно з означенням та (2.60) $B_{k+1,1} = (-1)^{k+2}\Delta_1 = (-1)^k\Delta_1$. Тому

$$B_{*1}'\tau'\tau B_{*1} = (-1)^{k+1}\Delta_1\Delta = \Delta_1|\Delta|. \quad (2.75)$$

З (2.67) та (2.70) випливає рівність

$$M(d^2) = \sigma^2 \Delta^{-2} (n - |\Delta| \Delta_1^{-1}) \quad . \quad (2.76)$$

Підставивши (2.74) - (2.76) в (2.73), отримаємо остаточно

$$M(u'u) = \sigma^2 \left[n(1 + \Delta_1 |\Delta|^{-1}) - k - 1 \right] \quad . \quad (2.77)$$

Відповідно до (2.77) незміщену оцінку S^2 параметра σ^2 визначмо як

$$S^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2 \left[n(1 + \Delta_1 |\Delta|^{-1}) - k - 1 \right]^{-1} \quad . \quad (2.78)$$

Властивість 3 підсумовує викладене – якщо виконуються умови (2.34), тоді отримана коваріаційна матриця МУНК-оцінок b має такий вид

$$\widehat{\Sigma}_b = S^2 \left[\Sigma_a + \Delta^{-2} (n - |\Delta| \Delta_1^{-1}) B_{*1} B_{*1}' \right], \quad (2.79)$$

де S^2 , Δ і Δ_1 визначені співвідношеннями (2.78), (2.44) і (2.60) відповідно.

Як видно із (2.79), обчислити стандартні похибки коефіцієнтів регресійної моделі можна за відомими співвідношеннями [19].

У даному параграфі запропоновано і обґрунтовано метод умовних найменших квадратів, який, шляхом примусового встановлення суми залишків рівною нулю, дає змогу отримати поліноміальну регресійну модель без вільного члена, в якій є як фізичний, так і математичний зміст.

2.3. Застосування методу умовних найменших квадратів

Як було показано вище, математичні моделі дрейфу функції перетворення термодинамічних параметрів, побудовані класичним МНК, не мають фізичного

змісту або не дають адекватних оцінок коефіцієнтів через невиконання умови рівності нулю суми залишків. Тому дослідимо регресію при умові рівності нулю математичного сподівання збурень (умови МУНК)

$$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i) = 0 \quad . \quad (2.80)$$

Для цього будемо функцію Лагранжа

$$L(a_1, \dots, a_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i), \quad (2.80)$$

де a_1, \dots, a_n – параметри регресії;

y_i, \hat{y}_i – спостережені та обчислені за моделлю значення $\Delta_i^{X,A}$.

Коефіцієнти регресійної моделі знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a_i} = 0, & \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, & i = \overline{1, \dots, n} . \end{cases} \quad (2.82)$$

Коефіцієнти a_1, \dots, a_n , отримані з (2.82), мають властивості незміщеності, внаслідок чого показники якості моделі стають коректними.

В таблиці 2.7 подані результати МУНК оцінок регресійної моделі без вільного члена похибки дрейфу електродів термопар для тих же умов, що і в таблиці 2.5. Для МУНК моделі сума залишків несуттєво відрізняється від нуля. Відхилення від нуля можна пояснити похибками заокруглення.

В таблиці 2.8 приведені результати МУНК оцінок регресійної моделі без вільного члена похибки неоднорідності електродів термопар, для тих же умов що і в таблиці 2.6. Відхилення від нуля суми залишків теж пояснюються похибками заокруглення.

Таблиця 2.7. Регресійні моделі часового дрейфу електродів термопар

№		Хромель	Хромель	Алюмель	Алюмель	Алюмель	Алюмель
		№1	№2	№1	№1	№2	№2
1	Час експлуат.	Від 0 до 10000 год.	Від 0 до 10000 год.	Від 0 до 10000 год.	Від 0 до 10000 год.	Від 0 до 10000 год.	Від 0 до 10000 год.
2	Темпер. Експл.	800°C	800°C	800°C	800°C	800°C	800°C
3	Вид моделі	$\hat{y} = a_1\sqrt[4]{\tau} + a_2\sqrt[3]{\tau}$	$\hat{y} = a_1\sqrt[4]{\tau} + a_2\sqrt[3]{\tau}$	$\hat{y} = a_1\sqrt[4]{\tau} + a_2\sqrt[3]{\tau}$	$\hat{y} = a_1\sqrt[4]{\tau} + a_2\sqrt{\tau}$	$\hat{y} = a_1\sqrt[4]{\tau} + a_2\sqrt[3]{\tau}$	$\hat{y} = a_1\sqrt[4]{\tau} + a_2\sqrt{\tau}$
4	Коефіцієнти моделі	$a_1 = 47,35$ $a_2 = 6,30$	$a_1 = 43,4$ $a_2 = 5,55$	$a_1 = 13,94$ $a_2 = -4,95$	$a_1 = 2,48$ $a_2 = -0,88$	$a_1 = -21,74$ $a_2 = -4,52$	$a_1 = -27,06$ $a_2 = -0,6$
5	Сума похибок	менше $1,7 \cdot 10^{-12}$ мкВ	менше 10^{-12} мкВ	менше $1,1 \cdot 10^{-13}$ мкВ	менше $4,3 \cdot 10^{-13}$ мкВ	менше $7,8 \cdot 10^{-14}$ мкВ	менше $9,3 \cdot 10^{-13}$ мкВ

Таблиця 2.8. Регресійні моделі дрейфу електродів ТТ по діапазону вимірювання температури

		Хромель №1	Хромель №2	Алюмель №1	Алюмель №2
1	2	3	4	5	6
1	Час експлуат.	1000 год.	1000 год.	1000 год.	1000 год.
2	Темпер. експлуат.	800 °C	800 °C	800 °C	800 °C
3	Темпер. діапаз.	Від 0 до 800 °C	Від 0 до 800 °C	Від 0 до 800 °C	Від 0 до 800 °C

1	2	3	4	5	6
4	Вид моделі	$\hat{y} = a_1 t + a_2 t^2$	$\hat{y} = a_1 t + a_2 t^2$	$\hat{y} = a_1 t + a_2 t^2$	$\hat{y} = a_1 t + a_2 t^2$
5	Коефіц. моделі	$a_1 = 0,529859$ $a_2 = -0,00044$	$a_1 = 0,452935$ $a_2 = -0,0003$	$a_1 = -0,083535$ $a_2 = 7,85 \cdot 10^{-5}$	$a_1 = -0,097483$ $a_2 = -2,03 \cdot 10^{-5}$
6	Сума похибок	менше $1,2 \cdot 10^{-12}$ мкВ	менше $2,7 \cdot 10^{-13}$ мкВ	менше $4,3 \cdot 10^{-14}$ мкВ	менше $1,8 \cdot 10^{-13}$ мкВ
7	Вид моделі	$\hat{y} = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$	$\hat{y} = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$	$\hat{y} = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$	$\hat{y} = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$
8	Коефіц. моделі	$a_1 = 0,36076$ $a_2 = 8,509 \cdot 10^{-5}$ $a_3 = 3,445 \cdot 10^{-7}$	$a_1 = 0,607357$ $a_2 = -0,00076$ $a_3 = 2,9 \cdot 10^{-07}$	$a_1 = -0,19641$ $a_2 = 0,000546$ $a_3 = -4,22 \cdot 10^{-7}$	$a_1 = -0,249094$ $a_2 = 0,0006$ $a_3 = -5,7 \cdot 10^{-7}$
9	Сума похибок	менше $3,2 \cdot 10^{-11}$ мкВ	менше $5,2 \cdot 10^{-11}$ мкВ	менше $1,6 \cdot 10^{-12}$ мкВ	менше $5,7 \cdot 10^{-12}$ мкВ

У даному параграфі показано, що для досліджених з допомогою МУНК поліноміальних моделей без вільного члена, сума залишків мало відрізняється від нуля. Це відхилення викликане похибками заокруглення.

2.4 Збіжність методу умовних найменших квадратів і класичного методу найменших квадратів

Розглянемо застосування МУНК для побудови поліноміальних моделей з вільним членом. Для цього запишемо функцію Лагранжа

$$\begin{aligned}
L(a_0, a_1, \dots, a_n, \lambda) &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i) = \\
&= \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i)^2 + \\
&\quad + \lambda \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i)
\end{aligned} \quad (2.83)$$

Для знаходження коефіцієнтів a_0, \dots, a_n МУНК моделі візьмемо похідні від функції Лагранжа по відповідних коефіцієнтах, а також по параметру λ . Оскільки шукаємо умовний екстремум функції, то всі похідні прирівнюємо до нуля

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial a_0} &= 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial a_1} &= 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i + \lambda \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial a_2} &= 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i^2 + \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \\
&\dots\dots\dots \\
\frac{\partial L}{\partial a_m} &= 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i^m + \lambda \sum_{i=1}^n x_i^m = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) = 0
\end{aligned} \right. \quad (2.84)$$

Після перетворень можна записати систему рівнянь, з якої можна визначити невідомі коефіцієнти МУНК

$$\left\{ \begin{array}{l}
 na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^m + \frac{\lambda}{2} = \sum_{i=1}^n y_i \\
 a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\
 a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\
 \dots \\
 a_0 \sum_{i=1}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{2m} + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n x_i^m y_i \\
 na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n y_i
 \end{array} \right. \quad (2.85)$$

Звернемо увагу на перше і останнє рівняння. Якщо їх відняти, то результат можна записати так

$$\frac{\lambda}{2} = 0. \quad (2.86)$$

Таким чином, множник Лагранжа λ при використанні МУНК для дослідження поліноміальної моделі з вільним членом рівний нулю, незалежно від порядку полінома. А це означає, що, якщо немає заборони на наявність вільного члена, МУНК збігається з МНК і оцінки їх будуть аналогічні.

У даному параграфі аналітично доведено, що при використанні МУНК і МНК для оцінки коефіцієнтів поліноміальної моделі з вільним членом, обидва методи дають однакові оцінки, що підтверджує коректність МУНК.

Висновки до другого розділу

1) У даному розділі показано, що у поліноміальних регресійних моделях з вільним членом, отриманих за допомогою МНК, сума залишків дорівнює нулю, тому вони мають як фізичний, так і математичний зміст. В той же час,

у поліноміальних моделях без вільного члена, отриманих за допомогою МНК, сума залишків відмінна від нуля. Тому моделі мають фізичний зміст, але не має математичного, через те, що регресійна крива не є математичним сподіванням процесу.

2) Запропонований та обґрунтований метод умовних найменших квадратів, за рахунок примусового встановлення суми залишків рівною нулю, дає змогу отримати коректну поліноміальну регресійну модель без вільного члена, в якій є як фізичний, так і математичний зміст.

3) Коректність методу умовних найменших квадратів підтверджена також аналітично – при умові дозволу не рівності вільного члена нулю моделі отримані МНК і МУНК співпадають.

4) З точки зору уніфікації програмного забезпечення при розробленні системи компонування вимірювальних каналів у технології Інтернету речей МУНК поглинає МНК.

3. ДОСЛІДЖЕННЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ВИМІРЮВАЛЬНОГО КАНАЛУ МЕТОДОМ УМОВНИХ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

3.1 Узагальнений алгоритм ідентифікації індивідуальних функцій перетворення елементів вимірювального каналу

Для ідентифікації індивідуальної функції перетворення слід провести експериментальні дослідження, в яких порівнюється вихідний сигнал зі зразковим засобом. Діапазон вимірювань слід поділити бажано, але не обов'язково, на рівномірні відрізки. Вимірювання слід проводити за допомогою еталонного засобу, який вимірюватиме вихідну фізичну величину у згаданих точках діапазону. Результати вимірювань слід заносити у таблицю, де кожному значенню виміряного сигналу поставлене у відповідність значення виміряне еталонним засобом. Для ідентифікації індивідуальної функції перетворення потрібно підготувати дані у формі, зручній для подальшого опрацювання у прикладному програмному забезпеченні. Оскільки сучасні блоки збирання даних мають широкий спектр типів файлів, у які вони можуть записувати інформацію, то доцільно обрати тип файлу, який сумісний з електронними таблицями, такий як txt, xls, чи.xlsx, бо електронні таблиці є найбільш поширеним прикладним програмним забезпеченням, яке дає широкі можливості для опрацювання даних. Після відкриття записаного файлу у електронних таблицях слід безпосередньо перейти до ідентифікації індивідуальної функції перетворення. Для цього слід побудувати діаграму розсіяння. Вона показує розміщення точок і це дасть змогу підібрати вигляд функції перетворення для апроксимації даних. У переважній більшості функції перетворення мають вигляд поліноміальних функцій. Отже з найбільшою імовірністю слід обрати одну з них. Однак, часто декілька функцій можуть бути підібрані для апроксимації даних. Тому

слід спробувати кілька альтернативних функцій. Щоб обрати найкращу з моделей слід проаналізувати додаткові параметри, такі як коефіцієнт детермінації чи скоригований коефіцієнт детермінації. Чим він ближчий до одиниці, тим краще. Також слід перевірити значущість моделі у цілому і значущість окремих коефіцієнтів. У разі, коли якийсь з коефіцієнтів не є значущим, то слід виключити його з моделі і побудувати нову модель, але вже без степені, коефіцієнт при якому виявився незначущий. На останньому етапі слід проаналізувати залишки. Їх розміщення має бути випадковим, візуально не має бути якоїсь залежності, а також не має бути значних відхилень від основного масиву залишків (так званих викидів). В інакшому випадку, слід буде побудувати нову модель, яка усуне ці проблеми із залишками. Слід мати на увазі, що залишки напряму не спостерігаються і їх значення змінюються в залежності від обраної моделі. Тому їх аналіз має проводитися окремо для кожної моделі. Після аналізу показників доцільно обрати найбільш підходящу модель апроксимації даних.

Для обраної моделі за потреби можна провести масштабування, тобто привести отриману функцію перетворення до вихідного діапазону.

У даному параграфі описаний узагальнений алгоритм ідентифікації індивідуальних функцій перетворення елементів вимірювального каналу, який дає змогу обрати оптимальну функцію перетворення за допомогою регресійного аналізу.

3.2 Дослідження методу умовних найменших квадратів при відсутності вільного члена

Доцільно дослідити різницю між коефіцієнтами моделей, досліджених як за допомогою МНК так і за допомогою МУНК. У одному з параграфів другого розділу був приклад застосування МУНК для моделювання похибки термоелектричних перетворювачів, а також функція перетворення платинового термометра опору. Однак безпосередньо порівняти коефіцієнти

моделей не можна, бо МУНК і МНК використані для побудови моделей для різних сенсорів. А доцільно було б порівняти відповідні коефіцієнти моделей для тих самих явищ чи процесів, отримані МУНК і МНК. Для цього розроблено відповідну методику досліджень, яка передбачає виконання таких операцій:

1) Вибір базової поліноміальної функції першого, другого чи третього порядку, для генерування базових значень функції для апроксимації, виду

$$\sum_{m=1}^n a_m x^m, \text{ де } m \text{ може набувати значень } 1, 2 \text{ або } 3.$$

2) Вибір діапазону моделювання і розбиття його на 20 точок.

3) Обчислення значень поліноміальної функції, заданої у пункті 1, у точках, заданих у п. 2.

4) Генерування за допомогою інструмента електронних таблиць Data Analysis масиву з 20 нормально розподілених випадкових чисел з середнім значенням 0 і дисперсією рівною приблизно 1,5% від максимального значення з масиву обчисленого у п. 3.

5) Додавання відповідних значень масивів випадкових чисел, обчислених у пункті 4, до значень поліноміальної функції, обчисленої у пункті 3.

6) Апроксимації отриманого при виконанні п. 5 масиву за допомогою МНК та інструмента Regression електронних таблиць з групи інструментів Data Analysis. Степінь полінома той сам, що і поліном у п. 1.

7) Апроксимації отриманого при виконанні п. 5 масиву за допомогою МУНК відповідно до (2.81) та (2.82). Степінь полінома обрати той сам, що і поліном у пунктах 1 та 6.

Для першого варіанту моделі обрано поліном першого порядку виду $y = 2x$. У таблиці 3.1 подані масиви значень незалежної змінної у стовпці x_i , функції без накладання випадкової похибки у стовпці y , накладеної випадкової похибки у відповідному стовпці, та функції, після накладання випадкової похибки у стовпці y_i . Параметри випадкової похибки подані у таблиці 3.2. Результати моделювання подані у таблиці 3.3.

Таблиця 3.1. Точки та відповідні значення полінома першого порядку без вільного члена, а також значення з накладеною випадковою похибкою.

№	x_i	y	Випадкова похибка	y_i
1	-50	-100	50,82844	-49,1716
2	-10	-20	-41,8521	-61,8521
3	30	60	22,78309	82,78309
4	70	140	7,266315	147,2663
5	110	220	11,61625	231,6162
6	150	300	-49,0151	250,9849
7	190	380	25,78905	405,789
8	230	460	-7,79914	452,2009
9	270	540	17,76897	557,769
10	310	620	37,13972	657,1397
11	350	700	-4,11055	695,8895
12	390	780	-5,12112	774,8789
13	430	860	-10,9481	849,0519
14	470	940	16,65629	956,6563
15	510	1020	-17,8934	1002,107
16	550	1100	9,339362	1109,339
17	590	1180	11,42764	1191,428
18	630	1260	43,11993	1303,12
19	670	1340	-13,5566	1326,443
20	710	1420	29,99893	1449,999

Таблиця 3.2. Параметри випадкової похибки для полінома першого порядку без вільного члена.

Назва параметра	Значення параметра
Розподіл	Нормальний
Математичне сподівання	0
Середньоквадратичне відхилення	21

Таблиця 3.3. Коефіцієнти апроксимації полінома першого порядку без вільного члена після накладання на нього випадкової похибки

	МУНК	МНК
Коефіцієнти	$a_1=2,020218$	$a_1=2,016728$
Абсолютна похибка	$\Delta a_1=0,020218$	$\Delta a_1=0,016728$
Відносна похибка	$\delta a_1=1,01\%$	$\delta a_1=0,83\%$
Відносна різниця (приведена до дійсного значення коефіцієнта)	$\varepsilon a_1=0,17\%$	

Для другого варіанту моделі було обрано поліном другого порядку виду $y = 0,02x^2 + x$. У таблиці 3.4 приведені масиви значень незалежної змінної у стовпці x_i , функції без накладання випадкової похибки у стовпці y , накладеної випадкової похибки у відповідному стовпці, та функції, після накладання випадкової похибки у стовпці y_i . Параметри випадкової похибки для полінома другого порядку подані у таблиці 3.5. Результати моделювання подані у таблиці 3.6.

Таблиця 3.4. Точки та відповідні значення полінома другого порядку без вільного члена, а також значення з накладеною випадковою похибкою.

№	x_i	y	Випадкова похибка	y_i
1	2	3	4	5
1	-50	-45	1,7	-43,3
2	-10	-9,8	18,0	8,2
3	30	31,8	-49,0	-17,2
4	70	79,8	35,4	115,2
5	110	134,2	29,5	163,7
6	150	195	-0,5	194,5
7	190	262,2	12,3	274,5
8	230	335,8	27,4	363,2
9	270	415,8	37,4	453,2
10	310	502,2	-59,7	442,5
11	350	595	-24,9	570,1
12	390	694,2	-54,6	639,6
13	430	799,8	-15,7	784,1
14	470	911,8	-14,7	897,1
15	510	1030,2	28,9	1059,1
16	550	1155	33,1	1188,1
17	590	1286,2	-34,4	1251,8
18	630	1423,8	-12,5	1411,3
19	670	1567,8	14,3	1582,1
20	710	1718,2	-6,3	1711,9

Таблиця 3.5. Параметри випадкової похибки для полінома другого порядку без вільного члена

Назва параметра	Значення параметра
Розподіл	Нормальний
Математичне сподівання	0
Середньоквадратичне відхилення	26

Таблиця 3.6. Коефіцієнти апроксимації полінома другого порядку без вільного члена після накладання на нього випадкової похибки

	МУНК	МНК
Коефіцієнти	$a_1=0,987$ $a_2=0,002$	$a_1=0,975$ $a_2=0,002$
Абсолютна похибка	$\Delta a_1=-0,013$ $\Delta a_2=-0,018$	$\Delta a_1=0,025$ $\Delta a_2=-0,018$
Відносна похибка	$\delta a_1=1,30\%$ $\delta a_2=89,91\%$	$\delta a_1=2,51\%$ $\delta a_2=89,85\%$
Відносна різниця (приведена до дійсного значення коефіцієнта)	$\varepsilon a_1=1,2\%$ $\varepsilon a_2=0,07\%$	

Для третього варіанту моделі було обрано поліном третього порядку виду $y = 0,00004x^3 - 0,025x^2 + x$. У таблиці 3.7 приведені масиви значень незалежної змінної у стовпці x_i , функції без накладання випадкової похибки у стовпці y , накладеної випадкової похибки у відповідному стовпці, та функції, після накладання випадкової похибки у стовпці y_i . Параметри випадкової похибки для полінома третього порядку подані у таблиці 3.8. Результати моделювання подані у таблиці 3.9.

Як видно з таблиць, найбільша відносна різниця між коефіцієнтами МУНК і МНК становить 1,4%, тобто є незначною. У більшості випадків ця різниця між коефіцієнтами більша, ніж похибка коефіцієнтів. У більшості випадків абсолютна відносна похибка для коефіцієнтів МНК є меншою, ніж відносна похибка для коефіцієнтів МУНК.

Таблиця 3.7. Точки та відповідні значення полінома третього порядку без вільного члена, а також значення з накладеною випадковою похибкою.

№	x_i	y	Випадкова похибка	y_i
1	-50	-117,5	-11,3107	-128,811
2	-10	-12,54	44,75936	32,21936
3	30	8,58	-7,02983	1,55017
4	70	-38,78	20,19985	-18,5801
5	110	-139,26	-12,6526	-151,913
6	150	-277,5	43,21411	-234,286
7	190	-438,14	-18,6012	-456,741
8	230	-605,82	-10,0845	-615,904
9	270	-765,18	21,54546	-743,635
10	310	-900,86	7,164604	-893,695
11	350	-997,5	80,54158	-916,958
12	390	-1039,74	19,18592	-1020,55
13	430	-1012,22	17,39973	-994,82
14	470	-899,58	86,38075	-813,199
15	510	-686,46	43,1745	-643,286
16	550	-357,5	4,482599	-353,017
17	590	102,66	17,59496	120,255
18	630	709,38	43,41859	752,7986
19	670	1478,02	51,86614	1529,886
20	710	2423,94	80,0773	2504,017

Таблиця 3.. Параметри випадкової похибки для полінома третього порядку

Назва параметра	Значення параметра
Розподіл	Нормальний
Математичне сподівання	0
Середньоквадратичне відхилення	36

Таблиця 3.9. Коефіцієнти апроксимації полінома третього порядку без вільного члена після накладання на нього випадкової похибки

	МУНК	МНК
Коефіцієнти	$a_1=1,092, a_2=-0,0251$ $a_3=4,01 \cdot 10^{-5}$	$a_1=1,0778, a_2=-0,025$ $a_3=4,009 \cdot 10^{-5}$
Абсолютна похибка	$\Delta a_1=0,09, \Delta a_2=-8,7 \cdot 10^{-5}$ $\Delta a_3=1,1 \cdot 10^{-7}$	$\Delta a_1=0,08, \Delta a_2=-5,7 \cdot 10^{-5}$ $\Delta a_3=9,1 \cdot 10^{-8}$
Відносна похибка	$\delta a_1=9,2\%, \delta a_2=0,35\%$ $\delta a_3=0,28\%$	$\delta a_1=7,8\%, \delta a_2=0,23\%$ $\delta a_3=0,23\%$
Відносна різниця	$\varepsilon a_1=1,4\%, \varepsilon a_2=0,12\%, \varepsilon a_3=0,05\%$	

У даному параграфі проведена апроксимація даних за допомогою МНК і МУНК. Порівняні коефіцієнти МНК та МУНК і показано, що різниця між коефіцієнтами є незначною і меншою, ніж відносна похибка коефіцієнтів.

3.3 Дослідження методу умовних найменших квадратів при наявності вільного члена

Доцільно дослідити різницю між коефіцієнтами МУНК і МНК поліноміальних моделей з вільним членом і порівняти відповідні коефіцієнти моделей для тих самих функцій. Для цього слід розробити методику досліджень. Для цього розроблено відповідну методику досліджень, яка передбачає виконання таких операцій:

1) Вибір базової поліноміальної функції першого, другого чи третього порядку, для генерування базових значень функції для апроксимації, виду

$$\sum_{m=0}^n a_m x^m, \text{ де } m \text{ може набувати значень } 0, 1, 2 \text{ або } 3.$$

2) Вибір діапазону моделювання і розбиття його на 20 точок.

3) Обчислення значень полінома, заданого у п. 1, у точках, заданих у п. 2.

4) Генерація за допомогою інструмента електронних таблиць Data Analysis масиву з 20 нормально розподіленими випадковими числами з середнім значенням 0 і дисперсією рівною приблизно 1,5% від максимального значення з масиву обчисленого у п. 3.

5) Додавання значення масивів випадкових чисел, обчислених у п. 4 до значень поліноміальної функції обчисленої у п. 3.

6) Апроксимації отриманого при виконанні п. 5 масиву за допомогою МНК та інструмента Regression електронних таблиць з групи інструментів Data Analysis. Степінь полінома той сам, що і поліном у п. 1.

7) Апроксимації отриманого при виконанні п. 5 масиву за допомогою МУНК, відповідно до (2.83) – (2.85). Степінь полінома обрати той сам, що і поліном у пп. 1 та 6.

Для першого варіанту моделі було обрано поліном першого порядку виду $y = 2x + 400$. У таблиці 3.10 приведені масиви значень незалежної змінної у стовпці x_i , функції без накладання випадкової похибки у стовпці y , накладеної випадкової похибки у відповідному стовпці, та функції, після накладання випадкової похибки у стовпці y_i . Параметри випадкової похибки подані у таблиці 3.11. Результати моделювання подані у таблиці 3.12. Як і було передбачено у параграфі 2.4 всі значення коефіцієнтів співпали як для МУНК-оцінок, так і для МНК.

Таблиця 3.10. Точки та відповідні значення полінома першого порядку з вільним членом, а також значення з накладеною випадковою похибкою.

№	x	y	Випадкова похибка	y_i
1	2	3	4	5
1	-50	300	-92,53621101	207,4638
2	-10	380	26,19027555	406,1903
3	30	460	32,20351346	492,2035
4	70	540	-12,39893436	527,6011
5	110	620	-55,0214645	564,9785
6	150	700	-48,520169	651,4798
7	190	780	13,45049895	793,4505
8	230	860	-46,0254887	813,9745
9	270	940	-16,20605985	923,7939
10	310	1020	-0,74881541	1019,251
11	350	1100	-13,74830617	1086,252
12	390	1180	-3,507691417	1176,492
13	430	1260	24,78104761	1284,781
14	470	1340	-40,53235443	1299,468
15	510	1420	-4,196282362	1415,804
16	550	1500	34,35311555	1534,353
17	590	1580	5,596946266	1585,597
18	630	1660	-1,828282166	1658,172
19	670	1740	-39,64304597	1700,357
20	710	1820	12,12184657	1832,122

Таблиця 3.11. Параметри випадкової похибки для полінома першого порядку з вільним членом.

Назва параметра	Значення параметра
Розподіл	Нормальний
Математичне сподівання	0
Середньоквадратичне відхилення	27

Таблиця 3.12. Коефіцієнти апроксимації полінома першого порядку з вільним членом після накладання на нього випадкової похибки

	МУНК і МНК
Коефіцієнти	$a_1=2,037$ $a_0=376,4$
Абсолютна похибка	$\Delta a_1= 0,037$ $\Delta a_0= - 23,57$
Відносна похибка	$\delta a_1=1,86\%$ $\delta a_0= 5,89\%$
Відносна різниця (приведена до дійсного значення коефіцієнта)	$\varepsilon a_1= 0\%$ $\varepsilon a_0= 0\%$

Для другого варіанту моделі було обрано поліном другого порядку виду $y = 0,02x^2 - 5x + 400$. У таблиці 3.13 приведені масиви значень незалежної змінної у стовпці x_i , функції без накладання випадкової похибки у стовпці y , накладеної випадкової похибки у відповідному стовпці, та функції, після накладання випадкової похибки у стовпці y_i . Параметри випадкової похибки подані у таблиці 3.14. Результати моделювання подані у таблиці 3.15. Як і було передбачено у параграфі 2.4 всі значення коефіцієнтів співпали як для МУНК-оцінок, так і для МНК.

Таблиця 3.13. Точки та відповідні значення полінома другого порядку з вільним членом, а також значення з накладеною випадковою похибкою.

x_i	y	Випадкова похибка	y_i
-50	700	142,2814	842,2814
-10	452	-147,459	304,5414
30	268	-1,28136	266,7186
70	148	10,50341	158,5034

1	2	3	4
110	92	-96,3055	-4,30548
150	100	-52,5727	47,42734
190	172	-13,8328	158,1672
230	308	-92,7182	215,2818
270	508	26,57532	534,5753
310	772	16,37864	788,3786
350	1100	-123,376	976,6239
390	1492	-71,5173	1420,483
430	1948	195,8488	2143,849
470	2468	48,47016	2516,47
510	3052	-26,0763	3025,924
550	3700	-30,5358	3669,464
590	4412	34,00919	4446,009
630	5188	-118,636	5069,364
670	6028	120,0549	6148,055
710	6932	15,56509	6947,565

Таблиця 3.14. Параметри випадкової похибки для полінома другого порядку з вільним членом.

Назва параметра	Значення параметра
Розподіл	Нормальний
Математичне сподівання	0
Середньоквадратичне відхилення	100

Таблиця 3.15. Коефіцієнти апроксимації полінома другого порядку з вільним членом після накладання на нього випадкової похибки

	МУНК і МНК
Коефіцієнти	$a_0=389,2, a_1=-5,14, a_2=0,0203$
Абсолютна похибка	$\Delta a_0= -10,8, \Delta a_1= -0,14,$ $\Delta a_2= 0,0003$
Відносна похибка	$\delta a_0= 2,7\%, \delta a_1=2,8\%, \delta a_2=1,5\%$
Відносна різниця (приведена до дійсного значення коефіцієнта)	$\varepsilon a_0= 0\%, \varepsilon a_1= 0\%, \varepsilon a_2=0\%$

Для другого варіанту моделі було обрано поліном третього порядку виду $y = 0,00004x^3 - 0,025x^2 + x + 400$. У таблиці 3.16 приведені масиви значень незалежної змінної у стовпці x_i , функції без накладання випадкової

похибки у стовпці y , накладеної випадкової похибки у відповідному стовпці, та функції, після накладання випадкової похибки у стовпці y_i . Параметри випадкової похибки подані у таблиці 3.17. Результати моделювання подані у таблиці 3.18. Як і було передбачено у параграфі 2.4 всі значення коефіцієнтів співпали як для МУНК-оцінок, так і для МНК.

Таблиця 3.16. Точки та відповідні значення полінома третього порядку з вільним членом, а також значення з накладеною випадковою похибкою.

х	у	Випадкова похибка	У _і
1	2	3	4
-50	282,5	51,38748	333,8875
-10	387,46	-40,4738	346,9862
30	408,58	-52,7382	355,8418
70	361,22	38,15829	399,3783
110	260,74	-57,4044	203,3356
150	122,5	11,94581	134,4458
190	-38,14	50,12052	11,98052
230	-205,82	0,676357	-205,144
270	-365,18	45,61249	-319,568
310	-500,86	-88,9229	-589,783
350	-597,5	24,23512	-573,265
390	-639,74	-49,1261	-688,866
430	-612,22	45,58346	-566,637
470	-499,58	52,54796	-447,032
510	-286,46	-30,9868	-317,447
550	42,5	39,14458	81,64458
590	502,66	-98,7805	403,8795
630	1109,38	27,07357	1136,454
670	1878,02	13,69636	1891,716
710	2823,94	-9,87859	2814,061

Таблиця 3.17. Параметри випадкової похибки для полінома третього порядку з вільним членом.

Назва параметра	Значення параметра
Розподіл	Нормальний
Математичне сподівання	0
Середньоквадратичне відхилення	42

Таблиця 3.18. Коефіцієнти апроксимації полінома третього порядку з вільним членом після накладання на нього випадкової похибки

	МУНК і
Коефіцієнти	$a_0=399,0, a_1=0,948, a_2=-0,0247$ $a_3=3,97E-05$
Абсолютна похибка	$\Delta a_0= -0,96, \Delta a_1= -0,052, \Delta a_2= 0,00026$ $\Delta a_3=-2,9E-07$
Відносна похибка	$\delta a_0= 0,24\%, \delta a_1=5,25\%, \delta a_2=1,05\%$ $\delta a_3=0,72\%$
Відносна різниця (приведена до дійсного значення коефіцієнта)	$\varepsilon a_0= 0\%, \varepsilon a_1= 0\%, \varepsilon a_2=0\%, \varepsilon a_3=0\%$

У цьому параграфі проведений обчислювальний експеримент для того, щоб перевірити теоретичний висновок зроблений у параграфі 2.4 про те, що для поліноміальних регресійних моделей з вільним членом оцінки коефіцієнтів моделі отримані за допомогою МУНК збігаються з оцінками отриманими за допомогою класичного МНК. Результати обчислювального експерименту показали, що теоретичний висновок підтверджується.

Висновки до третього розділу

- 1) Розроблено узагальнений алгоритм ідентифікації індивідуальних функцій перетворення елементів вимірювального каналу, який дає змогу обрати оптимальну функцію перетворення за допомогою регресійного аналізу.
- 2) Апроксимація різних варіантів даних за допомогою МНК і МУНК показали, що різниця між отриманими коефіцієнтами є незначною і меншою, ніж відносна похибка коефіцієнтів.
- 3) Обчислювальний експеримент, проведений для перевірки зробленого у параграфі 2.4 теоретичного висновку про збіжність коефіцієнтів моделей, отриманих за допомогою МУНК і класичного МНК, показав, що теоретичний

висновок підтверджується, МУНК буде коректні моделі та може бути використаний у складі технології Інтернету речей.

ВИСНОВКИ

Відповідно до рекомендацій [34, 35] сформулюємо висновки до кваліфікаційної дипломної роботи магістра:

- 1) Аналіз структури вимірювального каналу у технології Інтернету речей показав, що однією із задач при його формуванні є приведення сигналу сенсора до форми, придатної для використання клієнтами на верхньому рівні технології Інтернету речей, зокрема, побудова математичних моделей для апроксимації індивідуальних функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу.
- 2) Аналіз методів апроксимації функцій перетворення сенсорів та інших елементів вимірювального каналу показав, що універсальним методом, придатним для формування вимірювальних каналів у технології Інтернету речей міг би стати регресійний аналіз.
- 3) Аналіз показав, що у поліноміальних регресійних моделей з вільним членом, які отримані за допомогою методу найменших квадратів, сума залишків дорівнює нулю, тому вони мають як фізичний, так і математичний зміст. В той же час, у поліноміальних моделей без вільного члена, отриманих тим же методом, сума залишків відмінна від нуля. Тому моделі мають фізичний зміст, але не має математичного, через те, що регресійна крива не є математичним сподіванням процесу.
- 4) Запропонований та обґрунтований метод умовних найменших квадратів, за рахунок примусового встановлення суми залишків рівною нулю, дає змогу отримати коректну поліноміальну регресійну модель без вільного члена, в якій є як фізичний, так і математичний зміст.
- 5) Коректність методу умовних найменших квадратів підтверджена також аналітично – при умові дозволу не рівності вільного члена нулю моделі отримані МНК і МУНК співпадають. Тому, з точки зору уніфікації програмного забезпечення при розробленні системи компонування

вимірювальних каналів у технології Інтернету речей, метод умовних найменших квадратів поглинає метод найменших квадратів.

6) Розроблена узагальнена методика ідентифікації індивідуальних функцій перетворення елементів вимірювального каналу дає змогу обрати оптимальну функцію перетворення за допомогою регресійного аналізу.

7) Апроксимація різних варіантів даних за допомогою методу найменших квадратів і методу умовних найменших квадратів показала, що різниця між отриманими коефіцієнтами є незначною і меншою, ніж відносна похибка коефіцієнтів.

3) Обчислювальний експеримент, проведений для перевірки зробленого теоретичного висновку про збіжність коефіцієнтів моделей, отриманих за допомогою методу найменших квадратів і методу умовних найменших квадратів показав, що теоретичний висновок підтверджується, метод умовних найменших квадратів буде коректні моделі та може бути використаний у складі технології Інтернету речей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Інтернет речей. Матеріал з Вікіпедії — вільної енциклопедії.
https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%86%D0%BD%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%B5%D1%82_%D1%80%D0%B5%D1%87%D0%B5%D0%B9
2. Андрощук, Геннадій (2017). Інтелектуальна власність у системі Інтернету речей: економіко-правовий аспект. Теорія і практика інтелектуальної власності 9. Архів оригіналу за 2 жовтня 2021. Процитовано 2 жовтня 2021.
3. Брайчевський, С. М. (2019). Проблема персональних даних в системах Інтернету речей з елементами штучного інтелекту. Інформація і право 4 (31). doi:10.37750/2616-6798.2019.4(31).194348.
Архів оригіналу за 2 жовтня 2021. Процитовано 2 жовтня 2021.
4. Що таке інтернет речей і як він працює? <https://server-shop.ua/ua/the-internet-of-things-and-the-scope-of-its-use.html>
5. Лекція 1. Основи Інтернету Речей.
<http://edu.asu.in.ua/mod/book/tool/print/index.php?id=112>
6. Інтернет. Матеріал з Вікіпедії — вільної енциклопедії.
<https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%86%D0%BD%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%B5%D1%82>
7. Что такое безопасность Интернета вещей? https://iot-ssl.com.ua/iot_what_is_security.html
8. Мікроелектроніка. Матеріал з Вікіпедії — вільної енциклопедії.
<https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D1%96%D0%BA%D1%80%D0%BE%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BD%D1%96%D0%BA%D0%B0>
9. Что такое Закон Мура и как он работает теперь? Матеріал з Вікіпедії — вільної енциклопедії.
<https://www.google.com/search?q=%D0%B7%D0%B0%D0%BA%D0%BE>

%D0%BD+%D0%BC%D1%83%D1%80%D0%B0+%D0%B4%D0%BB%D1%8F+%D1%87%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B2&client=avast-a-2&sxsrf=ALiCzsYPHkpdLCLRXkx3

10. Мікроелектронні сенсори фізичних величин.
<http://edu.lp.edu.ua/moduli/mikroelektronni-sensory-fizychnykh-velychn>
11. Рощупкін, О. Ю. (2015). Методи і засоби підвищення точності інформаційно-вимірювальних систем ультрафіолетового випромінювання. автореф. дис. канд. техн. наук: 05.13.05. Тернопільський національний економічний ун-т. Тернопіль.
12. Silicon Photodiodes of series s1226. [Електронний ресурс] : [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Режим доступу: http://www.hamamatsu.com/resources/pdf/ssd/s1226_series_kspd1034e.pdf (дата звернення 01.05.2015). – Назва з екрана.
13. Photodiodes of series s2592. [Електронний ресурс]. : [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Режим доступу: http://www.hamamatsu.com/resources/pdf/ssd/s2592-03_etc_kspd1003e.pdf (дата звернення 02.05.2015). – Назва з екрана.
14. Photodiodes of series s4349. [Електронний ресурс]. : [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Режим доступу: <http://www.hamamatsu.com/jp/en/product/category/3100/4001/4204/4106/S4349/index.html> (дата звернення 30.01.2015). – Назва з екрана.
15. Photodiode s8550. [Електронний ресурс]. : [Веб-сайт]. – Електронні дані. – Режим доступу: <http://www.hamamatsu.com/jp/en/product/category/3100/4003/4112/S8550-02/index.html> (дата звернення 22.01.2015). – Назва з екрана.
16. Федорков, Б. Г., & Телец, В. А. (1990). *Микросхеми ЦАП і АЦП: функціонування, параметри, застосування*. Энергоатомиздат.
17. Турченко, В. (2001). Нейромережові методи і засоби підвищення ефективності дистрибутивних мереж збору та обробки сенсорних даних

- (Кандидатська дисертація). Національний університет «Львівська політехніка». Львів.
18. Kröse, B., Krose, B., van der Smagt, P., & Smagt, P. (1993). *An introduction to neural networks*. Amsterdam: University of Amsterdam.
19. Єрмоєнко, В. О., Алілуйко, А. М., Мартинюк, О. М., & Попіна, С. Ю. (2012). *Економетрія (Економетрика)*. Тернопіль: Підручники і посібники
20. Кочан, О. В. (2020). *Методи і засоби підвищення точності вимірювання температури термоелектричними перетворювачами з неоднорідними термопарами*. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук. Львів.
21. Yeromenko, V., & Kochan, O. (2013). The conditional least squares method for thermocouples error modeling. In *Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems (IDAACS), 2013 IEEE 7th International Conference* (Vol. 1, pp. 157-162).
22. Єрмоєнко, В. О., & Кочан, О. В. (2013). Застосування регресійного аналізу для побудови моделі дрейфу функції перетворення термопар. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: Технічні науки*, 8, 50-61.
23. Тимчишин, В. (1999). *Підвищення ефективності проектування спеціалізованих комп'ютерних систем на базі типових мікропроцесорних платформ*. (Кандидатська дисертація). Львів.
24. Готра, З. Ю. (2002). *Мікроелектронні сенсори фізичних величин*. Том 1. Львів: Ліга-Прес.
25. Полицук Е.С. (1981). *Измерительные преобразователи*. - К.: Вища школа, 296с.
26. Хмарні технології **Cloud computing** Матеріал з Вікіпедії — вільної енциклопедії. https://en.wikipedia.org/wiki/Cloud_computing

27. Великі дані. Матеріал з Вікіпедії — вільної енциклопедії. Big data.
https://en.wikipedia.org/wiki/Big_data
28. Rawlings, J. O., Pantula, S. G., & Dickey, D. A. (Eds.). (1998). *Applied regression analysis: a research tool*. New York, NY: Springer New York.
29. Грубер, Й. (1996). *Економетрія, том 1. Введення в економетрію*. Київ: Астарт.
30. Seber, G. A., & Lee, A. J. (2012). *Linear regression analysis*. John Wiley & Sons.
31. Дж, Д. (1980). *Економетрические методы*. М.: Статистика.
32. Steffensen, J. F. (2006). *Interpolation (Second ed.)*. Mineola, N.Y.
33. Рогельберг, И., Пигидина, Н., Покровская, Г. и др. (1969). Изменения термоэлектрической силы проволок из хромеля и алюмеля при нагреве на воздухе при 800°C продолжительностью до 10000 ч. В *Исследование сплавов для термонар (Сборник трудов института Гипроцветметобработка, сс 33-41)*. Москва: Металлургия.
34. Загальні рекомендації з підготовки, оформлення, захисту та оцінювання випускних кваліфікаційних робіт здобувачів вищої освіти першого «бакалаврського» і другого «магістерського» рівнів / За ред. доц. М.І. Шинкарика. Тернопіль: ТНЕУ, 2018. 67 с.
35. Комар М.П., Саченко А.О., Васильків Н.М. Методичні рекомендації до виконання кваліфікаційної роботи з освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» за другим (магістерським) рівнем вищої освіти. Тернопіль: ЗУНУ, 2021. 32 с

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕСТУВАННЯ СТАНУ ЕЛЕКТРОДІВ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ПІД ЧАС ЕКСПЛУАТАЦІЇ

© Орест Кочан¹, Олена Раюк², Владислав Богатирчук², Андрій Гром'як², Володимир Кочан³, 2022

¹Національний університет „Львівська політехніка” (Львів, Україна), професор кафедри інформаційно-вимірювальних технологій, д.т.н., професор, orest.v.kochan@lpnu.ua

²Західноукраїнський національний університет (Тернопіль, Україна), студенти кафедри інформаційно-обчислювальних систем і управління

³Західноукраїнський національний університет (Тернопіль, Україна), професор кафедри інформаційно-обчислювальних систем і управління, к.т.н., професор, volodymyr/kochan@gmail.net

Поширені при вимірюванні температур 600-1100°C термоелектричні перетворювачі на базі термопар (ТП) [1] мають широкий діапазон вимірювання, простоту і міцність. Недоліки ТП – деградація при тривалій експлуатації при високих температурах проявляють себе як дві похибки [2]: а) від дрейфу функції перетворення (ФП); б) від набутої термоелектричної неоднорідності – зміни ФП ТП при зміні профілю температурного поля вздовж її електродів. Метод корекції поточної похибки ТП [3] підвищує точність і збільшує строк її експлуатації. Але зростає небезпека руйнування ТП (катастрофічної відмови). Через характер похибки ТП та вплив домішок на швидкість деградації похибка ТП у цілому погано відображає стан її електродів. Тому розроблено метод тестування електродів ТП під час експлуатації [4]. **Метою** роботи є моделювання процесу тестування стану електродів ТП під час експлуатації.

Метод [4] реалізується термоелектричним перетворювачем з керованим профілем температурного поля (ТЕП з КПТП) [5]. На рис. 1 подано зміщення профілю температурного поля, яке формує ТЕП з КПТП при діагностуванні стану електродів його головної ТП. Профіль температурного поля при діагностиці поступово змінюється від ABCD до AB2C2D, (проміжні температурні поля подані штриховими лініями). Кожній зміні профілю відповідає віртуальна ділянка електродів ТП (на рис. 1 позначені як 1, 2 - k) та її похибка від дрейфу її ФП $\Delta E_1^{DR} \dots \Delta E_{k+1}^{DR}$. При зміні профілю температурного поля ділянки 1, 2 ... (прилягають до B...B2), по одній виходять із зони градієнту (перестають, за законом Зеебека [1], генерувати термо-е.р.с., а тоді їх похибки $\Delta E_1^{DR} \dots \Delta E_{k+1}^{DR}$ перестають впливати на термо-е.р.с. ТП). На місце ділянок, що вийшли із зони градієнту, у неї потрапляють ділянки, що прилягають до зон C ... C2 (вони не деградують бо експлуатуються при температурі вільних кінців).

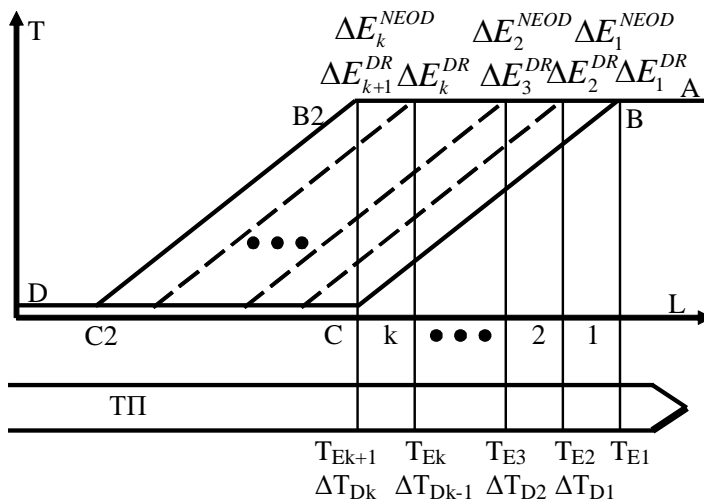


Рис. 1. Зміни профілю температурного поля при діагностуванні стану електродів ТП

За результатами вимірювань можна скласти систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k (E_i^{POCH} + \Delta E_i^{DR}) = E_1^{VYM} \\ \dots \\ \sum_{i=k}^k (E_i^{POCH} + \Delta E_i^{DR}) = E_k^{VYM} \end{cases} \quad (1)$$

де E_i^{POCH} , ΔE_i^{DR} – початкова термо-е.р.с. і дрейф i -тої ділянки ТП; $E_1^{VYM} \dots E_k^{VYM}$ – результати виміру термо-е.р.с. ТП при тестуванні у всіх k профілях

температурного поля.

Рішення (1) дає змогу визначити ΔE_i^{DR} ділянок ТП. Порівнявши їх із значеннями ΔE_{DOSLi}^{DR} , отриманими при дослідженні однотипних ТП у аналогічних умовах експлуатації, можна виявити ділянки, які деградують швидше за інші. Коли ΔE_i^{DR} ділянки ТП наближається до критичного значення, необхідна заміна ТП (імовірність катастрофічної відмови). При цьому сумарна похибка ТП, за рахунок меншого дрейфу інших ділянок, може не перевищувати значень, характерних для інших ТП.

Моделювання методу тестування електродів ТЕП з КПТП передбачає такі операції:

1. Ввести температури експлуатації і тестування кінців 8-ми зон головної ТП, обчислити їх середню температуру та її зміни під час тестування, а також згенерувати 1000 реалізацій матриці випадкових похибок ΔE_{8x8} при вимірюванні температури цих зон.
2. Ввести номінальну питому термо-е.р.с. e_{N8x1} і закон її зміни від температури експлуатації $\Delta e = f(T_{EXP})$, за яким обчислити зміну питомої термо-е.р.с. ділянок Δe_{8x1} та дійсну питому термо-е.р.с. кожної ділянки $e_{8x1} = (e_{N8x1} + \Delta e_{8x1})$.
3. Розрахувати термо-е.р.с. у 8 полях за п.1 як $E_{8x1} = \Delta T_{8x8} * e_{8x1}$, а також Додати термо-е.р.с. ділянок E_{8x1} до похибок ΔE_{8x8} їх вимірювання $(E_{8x1} + \Delta E_{8x8})$.
4. Вирішити систему рівнянь $(\Delta T_{8x8} + dT_{8x8}) \bar{e}_{8x1} = (E_{8x1} + \Delta E_{8x8})$, де dT_{8x8} різниці температур зон, відносно питомих термо-е.р.с. \bar{e}_{8x1} , які отримуємо при діагностуванні для 1000 реалізацій ΔE_{8x8} та різниць температур зон $(\Delta T_{8x8} + dT_{8x8})$.
5. Знайти похибки визначення питомої термо-е.р.с. ділянок $\bar{e}_{8x1} - e_{8x1}$ для всіх значень \bar{e}_{8x1} .
6. Провести моделювання похибки ділянок для всіх комбінацій випадкової похибки вимірювання різниці температур зон $0...10^\circ C$ та вимірювання термо-е.р.с. $0...20 \mu V$.

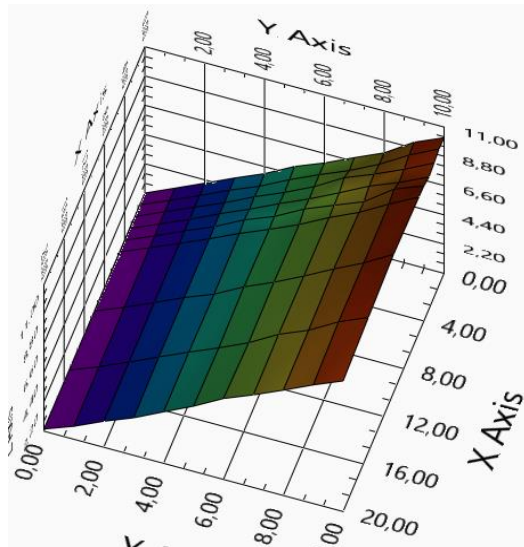


Рис. 2. Залежності дисперсії похибки визначення питомої термо-е.р.с.

В результаті моделювання побудовано поверхню (рис. 2) залежності дисперсії похибки визначення питомої термо-е.р.с. ділянок ТП (вісь Z, $^\circ C$) від похибки вимірювання термо-е.р.с (вісь X, $20 \mu V$) та похибки вимірювання температури зон (вісь Y, $10^\circ C$). Відхилення середнього значення $\bar{e}_{8x1} - e_{8x1}$ для 1000 реалізацій не перевищує $0,05 \mu V$, тобто метод практично не має систематичної похибки.

Перевагою даного методу тестування стану електродів ТП є простота реалізації, можливість визначення та прогнозу стану ділянок електродів ТП при експлуатації, можливість прогнозу генерованої термо-е.р.с. в різних температурних полях, а також відсутність необхідності використання еталонного обладнання.

1. Webster, J. G. (1999). The Measurement, Instrumentation, and Sensors: Handbook. CRC Press.
2. Su Jun, O. Kochan. The Mechanism of the Occurrence of Acquired Thermoelectric Inhomogeneity of Thermocouples and its Effect on the Result of Temperature Measurement. Measurement Techniques. - 2015. - Volume 57. - Issue 10. – P. 1160-1166.
3. Пат. 102981 Україна, МПК G01K 7/02. Спосіб корекції похибки головної термопари / О.В.Кочан, Р.В.Кочан; власники заявники. - № а201213268; заявл. 21.11.2012; опублік. 10.08.13, Бюл. № 16.
4. Пат. 104952 Україна, МПК G01K 13/00. Спосіб самодіагностики термопар на місці

експлуатації та пристрій для його реалізації / О.В.Кочан; власник заявник. № а201213269; заявл. 21.11.2012, опублік. 27.08.13, бюл. № 16 від 27.08.2013.

5. Пат. № 97464 Україна, МПК G01K 15/00. Термоелектричний перетворювач / Кочан О.В., Кочан Р.В. - заявл. 22.02.2007.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВИЗНАЧЕННЯ ПОТОЧНОЇ ПОХИБКИ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ПІД ЧАС ЕКСПЛУАТАЦІЇ

© Орест Кочан¹, Олена Раюк², Владислав Богатирчук², Андрій Гром'як², Володимир Кочан³, 2022

¹Національний університет „Львівська політехніка” (Львів, Україна), професор кафедри інформаційно-вимірювальних технологій, д.т.н., професор, orest.v.kochan@lpnu.ua

²Західноукраїнський національний університет (Тернопіль, Україна), студенти кафедри інформаційно-обчислювальних систем і управління

³Західноукраїнський національний університет (Тернопіль, Україна), професор кафедри інформаційно-обчислювальних систем і управління, к.т.н., професор, volodymyr/kochan@gmail.net

При вимірюванні температур 500 - 1100°C у промисловості найбільш розповсюджені термоелектричні перетворювачі (ТЕП) [1]. Їх недолік – деградація електродів при тривалій експлуатації, що проявляє себе як: а) дрейф функції перетворення (ФП) – для типу К до 6,5°C за 1000 годин при 800°C [2]; б) похибка від набутої термоелектричної неоднорідності [2] при зміні профілю температурного поля – до 11 °C за 1000 годин при 800°C [3].

Відомі методи корекції похибок ТЕП вимагають визначення поточної похибки на місці експлуатації [3] або у лабораторії [1]. У [4] запропоновано метод, що не вимагає еталонів, а лише сталої температури робочого кінця при калібруванні. Він: а) не дає змоги проявитися похибці від набутої неоднорідності; б) забезпечує визначення поточної похибки ТЕП при експлуатації. Метод реалізує ТЕП з керованим профілем температурного поля (ТЕП з КПТП) [5], що забезпечує зміну профілю температурного поля вздовж електродів термопар (ТП).

Дослідження методу [4] проведемо шляхом імітаційного моделювання у Excel. Слід:

1. Розбити електроди на $i = 100$ ділянок – від 0°C (вільні кінці) до 800°C (робочий кінець).
2. Задати профілі температурних полів експлуатації ТП у вигляді сигмоїд і відрізків прямих.
3. Провести аналіз впливу на термо-е.р.с. ТП похибок від дрейфу ФП їх ділянок і від набутої термоелектричної неоднорідності при переміщенні профілю температурного поля при заданому законі зміни питомої термо-е.р.с. від температури експлуатації. Для цього:
 - 3.1 Розрахувати (у 10 профілях температурного поля) номінальні та дійсні термо-е.р.с., що генеруються кожною ділянкою електродів ТП та ТП у цілому. При цьому номінальна питома термо-е.р.с. ділянок e_i , а її зміну від дрейфу Δe_i приймаємо наступною

$$\Delta e_i = AT_{EKS_i} + BT_{EKS_i}^2, \quad (1)$$

де T_{EKS_i} – температура постійної експлуатації ділянки; $A = 0,0025$, $B = 2 \cdot 10^{-6}$ – коефіцієнти, підбрані так, щоби сумарна похибка ТП $\approx 11^\circ\text{C}$ [2, 3];

- 3.2 Розрахувати похибки від дрейфу ділянок ТП як різниці між термо-е.р.с., що генерується ТП у кожному профілі температурного поля та її номінальною термо-е.р.с.

$$E_i^{NOM} = e \cdot (T_{i+1} - T_i), E_i^{REAL} = (e + \Delta e_i) \cdot (T_{i+1} - T_i), \quad (2)$$

де E_i^{NOM} , E_i^{REAL} – номінальна та дійсна термо-е.р.с. ділянки при температурах T_{i+1}, T_i .

- 3.3 Розрахувати похибки від дрейфу ФП ТП ΔE_j^{DR} як суми викликаних деградацією відхилень термо-е.р.с. від номінальної, що генерують ділянки ТП у поточному профілі температурного поля, профіль якого розміщений від $i = i_p$ до $i = i_k$

$$\Delta E_j^{DR} = \sum_{i=i_p}^{i_k} \Delta e_i . \quad (3)$$

3.4 Розрахувати похибки від набутої термоелектричної неоднорідності ТП ΔE_j^{NEOD} як різниці між сумою викликаних деградацією відхилень термо-е.р.с. від номінальної, що генерують ділянки ТП у профілі температурного поля експлуатації, та сумою викликаних деградацією відхилень термо-е.р.с. від номінальної, що генерують ділянки ТП у поточному профілі температурного поля

$$\Delta E_j^{NEOD} = \sum_{i=0}^{100} \Delta e_i - \sum_{i=i_p}^{i_k} \Delta e_i . \quad (4)$$

3.5 Розрахувати для кожного профілю температурного поля суму абсолютних значень похибок від набутої неоднорідності (за п. 3.3) та від дрейфу ФП ТП (за п. 3.2).

Отримані у п. 3.5 значення похибок від набутої термоелектричної неоднорідності та від дрейфу ФП ТП для кожного профілю температурного поля у як виді сигмоїд, так і у виді відрізків прямих з різними параметрами, подані на рис. 1.

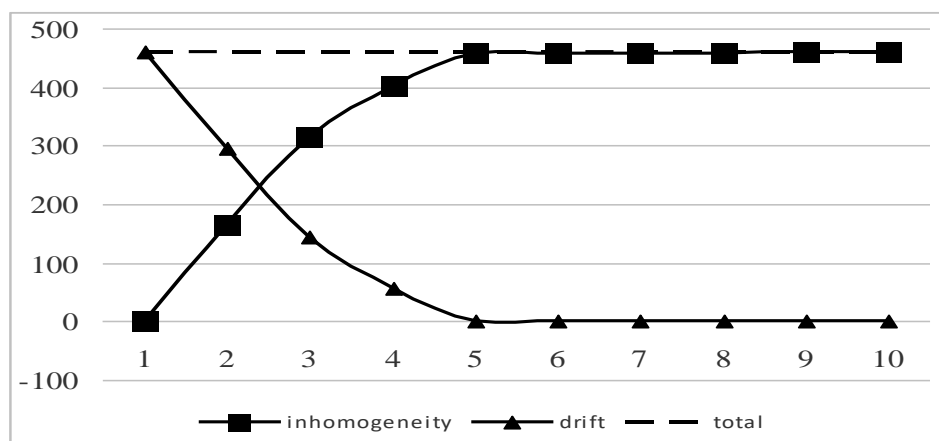


Рис. 1. Зміни похибок від набутої термоелектричної неоднорідності та від дрейфу ФП ТП для кожного профілю температурного поля у виді сигмоїд та у виді відрізків прямих

Проведені дослідження дають можливість зробити наступні висновки: а) при зміщенні зони градієнту температурного поля у бік вільних кінців, проходить поступове «витіснення» похибки від дрейфу ФП ТП (початок із 452 мкВ, рис. 1) похибкою від набутої неоднорідності (початок з нуля); б) сума абсолютних значень цих похибок залишається сталою (пунктирна лінія); в) максимальні абсолютні значення похибок від дрейфу і від неоднорідності рівні між собою; г) сума абсолютних значень цих похибок рівна їх максимальним значенням в будь-якому температурному полі; д) визначена методом [4] похибка ТП не залежить від форми профілю температурного поля в зоні опорної ділянки; е) результат визначення похибки ТП не залежить від виду функції похибки від температури; д) метод, запропонований у [4], правильно відображає тісний зв'язок між похибками від дрейфу ФП ТП та від набутої термоелектричної неоднорідності як проявів одного процесу деградації електродів ТП.

1. Park, R.M. (ed.) (1993). Manual on the Use of Thermocouples in Temperature Measurement. ASTM International.

2. Su Jun, Kochan O. (2015). The mechanism of the occurrence of acquired thermoelectric inhomogeneity of thermocouples and its effect on the result of temperature measurement. Measurement Techniques, 57 (10), 1160-1166.

3. Васильків, Н. (2010). Підвищення точності вимірювання температури термопарами в процесі експлуатації. (Кандидатська дисертація). Львів.

4. Shu, C., Kochan, O. (2013). Method of thermocouples self verification on operation place. *Sensors & Transducers*, 160 (12), 55-61.
5. Jun, S., Kochan, O., Chunzhi, W., Kochan, R. (2015). Theoretical and experimental research of error of method of thermocouple with controlled profile of temperature field. *Measurement science review*, 15 (6), 304-312.



Додаток В
**Науково-дослідний інститут інтелектуальних
 комп'ютерних систем**

**Research Institute of
 Intelligent Computer Systems**

Західноукраїнський національний університет
 Міністерство освіти і науки України
 Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова
 Національна академія наук України
 площа Перемоги 3, Тернопіль, 46009, Україна
 Тел/Факс: (0352) 43-60-38
www.ics.tneu.edu.ua ics@tneu.edu.ua

West Ukrainian National University
 Ministry of Education and Science of Ukraine
 Glushkov Institute of Cybernetics
 National Academy of Sciences of Ukraine
 3 Peremoga Square, Ternopil, 46009,
 Ukraine
 Tel/Fax: +380 (352) 43-60-38
www.ics.tneu.edu.ua ics@tneu.edu.ua

Довідка про використання

Видана студентці групи КНм-41 Раюк Олені для пред'явлення на факультеті комп'ютерних інформаційних технологій Західноукраїнського національного університету, яка підтверджує, що результати її дипломної роботи магістра на тему «Дослідження методичних похибок лінеаризації функцій перетворення сенсорів за допомогою регресійного аналізу» будуть використані науково-дослідним інститутом Інтелектуальних комп'ютерних систем в подальших наукових дослідженнях.

Вчений секретар НДІ ІКС,
 проф. кафедри ІОСУ, д.т.н., доц.

М. Комар