УДК 519.688: 517.443

РЕКУРЕНТНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ МОДИФІКОВАНИХ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ

В. І. Волинець, к.т.н., доц.

При проведенні динамічного спектрального аналізу, що базується на дискретному перетворенні Фур'є (ДПФ) або дискретному перетворенні Хартлі (ДПХ), необхідно обчислювати дискретні перетворення (ДП) на ковзних та стрибкових інтервалах, коли чергове ДП обчислюється для вхідного сигналу, до якого додається відповідно один або декілька нових відліків і така ж кількість початкових відліків вхідного сигналу відкидається. В цьому випадку для обчислення ДП доцільно використовувати рекурентні методи обчислення, котрі враховують результати попереднього обчислення ДП, оскільки ефективність рекурентних методів значно вища, ніж ефективність прямих та швидких методів обчислення ДП.

Існує ряд робіт, зокрема, [1 - 4], в яких описані рекурентні вирази для обчислення ДП. Так, в роботі [1], на основі загального підходу до розробки рекурентних методів були отримані рекурентні вирази для обчислення ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах, котрі мають такий вигляд:

$$F_{i+m}(k)=\left[F_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot W^{nk}\right]\cdot W^{-mk}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}H_{i+m}(k)=&\left[H_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot \operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N}\right]\cdot\cos\frac{2\pi mk}{N}-\\&-\left[H_i(N-k)+\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot \operatorname{cas}\frac{2\pi n(N-k)}{N}\right]\cdot\sin\frac{2\pi mk}{N},\end{aligned} \tag{2}$$

де $F_{i+m}(k), F_i(k)$ – ДПФ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно; $H_{i+m}(k), H_i(k)$ – ДПХ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно; $x(n)$ – вхідний сигнал; $W=\exp(-j2\pi/N)$, де $j=\sqrt{-1}$, N – розмір перетворення; $\operatorname{cas} k=\cos k+\sin k$; $i=0, 1, 2, ...$; $m=\overline{1, N-1}$; $k=\overline{0, N-1}$.

З виразів (1) та (2) можна отримати рекурентні вирази для обчислення ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах для $m=1$, котрі мають такий вигляд:

$$F_{i+1}(k)=\left[F_i(k)+[x(N+i)-x(i)]\right]\cdot W^{-k}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}H_{i+1}(k)=&\left[H_i(k)+[x(N+i)-x(i)]\right]\cdot\cos\frac{2\pi k}{N}-\\&-\left[H_i(N-k)+[x(N+i)-x(i)]\right]\cdot\sin\frac{2\pi k}{N}.\end{aligned} \tag{4}$$

В [5, 6] наведено рекурентний вираз для обчислення модифікованого ДПФ на ковзних інтервалах, на основі якого можна обчислити енергетичний спектр. Цей вираз має такий вигляд:

$$F_{i+1}(k)=F_i(k)+[x(N+i)-x(i)]\cdot W^{ik}. \tag{5}$$

Аналіз арифметичної складності виразів (3) та (5), показує, що при використанні класичного методу множення комплексних чисел, який вимагає чотирьох операцій дійсного множення та двох операцій дійсного додавання, рекурентний метод на основі виразу (5) вимагає вдвічі меншої кількості операцій дійсного множення та в півтора разу меншої кількості операцій дійсного додавання в порівнянні з рекурентним методом на основі виразу (3) у випадку, коли вхідний сигнал $x(n)$ є дійсним. Ця обставина може бути використана в аналізаторах спектра для підвищення їх швидкодії або зменшення апаратурних витрат.

Метою даної роботи є отримання рекурентних виразів для обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових та ковзних інтервалах на основі загального підходу до розробки рекурентних методів їх обчислення.

Для спільності міркувань визначимо ДПФ та ДПХ як

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\alpha(nk), \tag{6}$$

де $X(k)$ та $x(n)$ – ДП та вхідний сигнал відповідно; $\alpha(nk)$ – ядро перетворення, котре для ДПФ є W^{nk}, а для ДПХ є $\operatorname{cas}(2\pi nk/N)$, де N – розмір перетворення; $k=\overline{0,\, N-1}$.

Модифіковані ДПФ та ДПХ визначимо як

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\alpha((n+i)k), \tag{7}$$

де $i=0,\, 1,\, 2,\, \ldots$.

Обчислимо енергетичні спектри на основі перетворень (7). Оскільки енергетичний спектр на основі ДПФ визначається як $\left|X(k)\right|^2$, то його обчислення на основі ДПФ за виразом (7) дає такий результат:

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{(n+i)k}\right|^2=\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk}W^{ik}\right|^2=\left|W^{ik}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk}\right|^2= \\ &\qquad=\left[\left|W^{ik}\right|\cdot\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk}\right|\right]^2=\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk}\right|^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Енергетичний спектр на основі ДПХ визначається як $\left\{[X(k)]^2+[X(N-k)]^2\right\}/2$, а тому його обчислення на основі ДПХ за виразом (7) дає такий результат:

$$\begin{aligned} &\left\{\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi(n+i)k}{N}\right]^2+\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi(n+i)(N-k)}{N}\right]^2\right\}\Big/2= \\ &=\left\{\left[\cos ik\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N}+\sin ik\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi n(N-k)}{N}\right]^2+\right. \\ &\left.+\left[\cos ik\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi n(N-k)}{N}-\sin ik\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N}\right]^2\right\}\Big/2= \\ &=\left\{\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N}\right]^2+\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\operatorname{cas}\frac{2\pi n(N-k)}{N}\right]^2\right\}\Big/2. \end{aligned} \tag{9}$$

Вирази (8) та (9) доводять, що енергетичні спектри, обчислені на основі перетворень (6) та (7), співпадають.

Для отримання рекурентних виразів для обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ позначимо через $X_i(k)$ та $X_{i+m}(k)$ модифіковані перетворення на i-му та $i+m$-му інтервалах відповідно, котрі визначаються як

$$X_i(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n+i)\alpha((n+i)k), \tag{10}$$

$$X_{i+m}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n+i+m)\alpha((n+i+m)k). \tag{11}$$

Якщо у виразі (11) виконати підстановку $l=n+m$, то отримаємо такий вираз:

$$X_{i+m}(k)=\sum_{l=m}^{N+m-1}x(l+i)\alpha((l+i)k). \tag{12}$$

Вирази (10) та (12) можна перетворити таким чином:

$$X_i(k)=\sum_{n=0}^{m-1}x(n+i)\alpha((n+i)k)+\sum_{n=m}^{N-1}x(n+i)\alpha((n+i)k), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}X_{i+m}(k)&=\sum_{l=m}^{N-1}x(l+i)\alpha((l+i)k)+\sum_{l=N}^{N+m-1}x(l+i)\alpha((l+i)k)=\\&=\sum_{l=m}^{N-1}x(l+i)\alpha((l+i)k)+\sum_{l=0}^{m-1}x(N+l+i)\alpha((N+l+i)k)=\\&=\sum_{l=m}^{N-1}x(l+i)\alpha((l+i)k)+\sum_{l=0}^{m-1}x(N+l+i)\alpha((l+i)k).\end{aligned} \tag{14}$$

Вираз (14) отриманий з врахуванням того, що ядро перетворення $\alpha(nk)$ має періодичний характер, період якого дорівнює N.

Порівнюючи вирази (13) та (14), визначаємо, що

$$X_{i+m}(k)=X_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\alpha((n+i)k. \tag{15}$$

Для $m=1$ вираз (15) приймає такий вигляд:

$$X_{i+1}(k)=X_i(k)+[x(N+i)-x(i)]\cdot\alpha(ik). \tag{16}$$

Вирази (15) та (16) є рекурентними виразами для обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових та ковзних інтервалах відповідно. Вираз (16) співпадає з виразом (5), наведеним в [5, 6], для обчислення модифікованого ДПФ на ковзних інтервалах.

Арифметична складність рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ на основі виразів (15) та (16) і рекурентних методів обчислення ДПФ та ДПХ на основі виразів (1) – (4) для випадку, коли вхідний сигнал $x(n)$ є дійсним, з вираховуванням того, що обчислення ДПФ необхідно виконувати лише для $k=\overline{0, N/2-1}$, оскільки ДПФ дійсного сигналу має комплексно-спряжений характер, наведена в таблиці.

Таблиця

Арифметична складність рекурентних методів обчислення ДПФ та ДПХ

Рекурентний метод на основі виразу	Кількість операцій дійсного	
	множення	додавання
(1) (2)	$N(m+2)$	$N(m+1+m/N)$
(15)	Nm	$N(m+m/N)$
(3) (4)	$2N$	$3N/2+1$ $2N+1$
(16)	N	$N+1$

Порівнюючи наведені в таблиці результати, отримуємо, що рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ на основі виразу (15) в порівнянні з рекурентними методами обчислення ДПФ та ДПХ та основі виразів (1) та (2) забезпечують виграш в $(m+2)/m$ та $(m+1+m/N)/(m+m/N)$ разів за кількістю операцій дійсного множення та дійсного додавання відповідно, котрий для $m \rightarrow N$ зменшується до одного разу, а рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ на основі виразу (16) в порівнянні з рекурентними методами обчислення ДПФ та ДПХ та основі виразів (3) та (4) забезпечують виграш в 2 та 1,5÷2 рази за кількістю операцій дійсного множення та дійсного додавання відповідно. Крім того, слід звернути увагу на те, що арифметична складність обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ на основі виразу (16) однакова, в той час, як рекурентний метод обчислення ДПХ на основі виразу (4) має більшу арифметичну складність за кількістю операцій дійсного додавання, ніж рекурентний метод обчислення ДПФ на основі виразу (3).

Таким чином, в даній роботі отримані рекурентні вирази, що лежать в основі рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових та ковзних інтервалах, котрі можуть бути використані для обчислення енергетичного спектра. Проведений порівняльний аналіз арифметичної складності рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ у порівнянні з відомими рекурентними методами обчислення ДПФ та ДПХ показав, що перші методи забезпечують виграш, який на ковзних інтервалах досягає 2 та 1,5÷2 разів за кількістю операцій дійсного множення та дійсного додавання відповідно. Отримані результати можуть бути використані в аналізаторах спектра для підвищення їх швидкодії або зменшення апаратурних витрат.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Волынец В. И. Рекуррентные алгоритмы вычисления дискретных преобразований и энергетического спектра // Винницкий политехнический институт. – Винница. – 1988. – 14 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.11.88, № 2898-Ук88.

2. Белецкий А. Я. Рекуррентный алгоритм дискретного преобразования Фурье // Электронное моделирование. – 1987. – № 2. – С. 94–95.

3. Иваненко В. Г. Рекуррентное вычисление дискретного преобразования Фурье. – М.: Препринт МИФИ № 014-87. – 1987. – 16 с.

4. Бернанди А., Брейсуэлл Р. Н. Обновление спектральной функции действительного сигнала методом Хартли // ТИИЭР. – 1987. – Т. 75. – № 7. – С. 111–112.

5. Лейтес Р. Д., Соболев В. Н. Цифровое моделирование систем синтетической телефонии. – М.: Связь, 1969. – 128 с.

6. Цифровые анализаторы спектра /В. Н. Плотников, А. В. Белинский, В. А. Суханов, Ю. Н. Жигулевцев. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.

Рекомендована кафедрою електроніки