УДК 517.44:004

В.І. ВОЛИНЕЦЬ
Вінницький торговельно-економічний інститут

АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ РЕКУРЕНТНИХ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ В АРИФМЕТИЦІ З ФІКСОВАНОЮ КОМОЮ

На основі статистичного методу проведено аналіз точності рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на стрибкових і ковзних інтервалах в арифметиці з фіксованою комою. Отримано аналітичні вирази для визначення середньоквадратичних значень похибок обчислення перетворень в залежності від розрядності даних та кількості ітерацій обчислення, на підставі яких проведено порівняльний аналіз точності рекурентних методів обчислення.

В основі динамічного спектрального аналізу, який проводиться на ковзних або стрибкових інтервалах вхідного сигналу, тобто коли черговий інтервал вхідного сигналу включає відповідно один або декілька нових відліків і така ж кількість початкових відліків вхідного сигналу відкидається, лежить використання рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ) [1, 2], арифметична складність яких значно нижча за складність прямих та швидких методів обчислення дискретних перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення на попередніх інтервалах вхідного сигналу.

Рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах базуються на таких рекурентних виразах [2]:

$$F_{i+m}(k) = \left[F_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} [x(N+n+i) - x(n+i)] \cdot W^{nk} \right] \cdot W^{-mk}, \tag{1}$$

$$H_{i+m}(k) = \left[H_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} [x(N+n+i) - x(n+i)] \cdot \operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N} \right] \cdot \cos\frac{2\pi mk}{N} -$$

$$- \left[H_i(N-k) + \sum_{n=0}^{m-1} [x(N+n+i) - x(n+i)] \cdot \operatorname{cas}\frac{2\pi n(N-k)}{N} \right] \cdot \sin\frac{2\pi mk}{N}, \tag{2}$$

$$X_{i+m}(k) = X_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} [x(N+n+i) - x(n+i)] \cdot \alpha((n+i)k, \tag{3}$$

де $F_{i+m}(k)$, $F_i(k)$ – звичайне ДПФ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно;

$H_{i+m}(k)$, $H_i(k)$ – звичайне ДПХ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно;

$X_{i+m}(k)$, $X_i(k)$ – модифіковане ДПФ або ДПХ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно;

$i = 0, 1, 2, \ldots$ – номер попереднього інтервалу вхідного сигналу;

m – зсув поточного інтервалу вхідного сигналу відносно попереднього інтервалу в межах від 1 до $N-1$;

$k = \overline{0, N-1}$ – номер значення перетворення;

N – розмір перетворення;

$x(n)$ – послідовність вхідного сигналу;

$W^{nk} = \exp(-j2\pi nk/N)$ – базові функції ядра звичайного перетворення Фур'є ($j = \sqrt{-1}$);

$\operatorname{cas}(2\pi nk/N) = \cos(2\pi nk/N) + \sin(2\pi nk/N)$ – базові функції ядра звичайного перетворення Хартлі;

$\alpha((n+i)k)$ – базові функції ядра модифікованого перетворення, які для модифікованого ДПФ визначаються як $W^{(n+i)k}$, а для модифікованого ДПХ – як $\operatorname{cas}(2\pi(n+i)k/N)$.

Рекурентні вирази для обчислення звичайних і модифікованих ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах отримуються з виразів (1) – (3) при $m=1$ та відповідно $n=0$ і мають такий вигляд [2]:

$$F_{i+1}(k)=\left[F_i(k)+[x(N+i)-x(i)]\right]\cdot W^{-k}, \tag{4}$$

$$H_{i+1}(k)=\left[H_i(k)+[x(N+i)-x(i)]\right]\cdot\cos\frac{2\pi k}{N}-\left[H_i(N-k)+[x(N+i)-x(i)]\right]\cdot\sin\frac{2\pi k}{N}, \tag{5}$$

$$X_{i+1}(k)=X_i(k)+[x(N+i)-x(i)]\cdot\alpha(ik). \tag{6}$$

Важливим критерієм вибору методу обчислення є точність обчислення, яку він забезпечує. В ряді робіт, зокрема, в [3 – 7], проведений аналіз точності прямих та швидких методів обчислення ДПФ та ДПХ, в основу якого покладений статистичний метод аналізу, при якому кожному джерелу елементарної похибки ставиться у відповідність генератор випадкової похибки з рівномірним законом розподілу та робиться припущення, що всі джерела елементарних похибок не корелюють між собою та з вхідним сигналом. В якості кількісної оцінки точності обчислення приймаються середньоквадратичне значення (СКЗ) похибки обчислення перетворення та відношення СКЗ похибки обчислення до СКЗ перетворення, яке фізично інтерпретується як відношення потужності шуму до потужності сигналу.

В даній роботі ставиться задача провести аналіз точності рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових і ковзних інтервалах в арифметиці з фіксованою комою.

Оскільки обчислювальними операціями виразів (1) – (6) є операції додавання та множення, то при реалізації рекурентних методів обчислення ДПФ та ДПХ в арифметиці з фіксованою комою джерелами похибок обчислення можуть бути лише похибки операцій множення, обумовлені округленням або усіканням результатів добутків, оскільки похибки операцій зсувів, виконання яких необхідно для усунення можливих переповнень розрядної сітки при виконанні операцій додавання, відсутні внаслідок вхідного масштабування, при якому значення вхідного сигналу масштабуються так, щоб в процесі обчислення не виникло переповнень.

Враховуючи можливі джерела похибок обчислення, на підставі виразів (1) – (6) можуть бути отримані рекурентні вирази для визначення похибок обчислення звичайних і модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових та ковзних інтервалах в арифметиці з фіксованою комою, котрі мають такий вигляд:

$$E\big(F_{i+m}(k)\big)=\left[E\big(F_i(k)\big)+\sum_{n=1}^{m}E_{мк1_{n,i+m}}\right]\cdot W^{-mk}+E_{мк2_{i+m}}, \tag{7}$$

$$E\big(H_{i+m}(k)\big)=\left[E\big(H_i(k)\big)+\sum_{n=1}^{m}E_{мд_{n,i+m}}\right]\cdot\cos\frac{2\pi mk}{N}+E_{мд_{m+1,i+m}}-$$

$$-\left[E\big(H_i(N-k)\big)+\sum_{n=1}^{m}E_{мд_{n+m+1,i+m}}\right]\cdot\sin\frac{2\pi mk}{N}-E_{мд_{2m+2,i+m}}, \tag{8}$$

$$E\big(X_{i+m}(k)\big)=E\big(X_i(k)\big)+\sum_{n=1}^{m}E_{м_{n,i+m}}, \tag{9}$$

$$E\big(F_{i+1}(k)\big)=E\big(F_i(k)\big)\cdot W^{-k}+E_{мк2_{i+1}}, \tag{10}$$

$$E\big(H_{i+1}(k)\big)=E\big(H_i(k)\big)\cdot\cos\frac{2\pi k}{N}+E_{мд_{1,i+1}}-E\big(H_i(N-k)\big)\cdot\sin\frac{2\pi k}{N}-E_{мд_{2,i+1}}, \tag{11}$$

$$E\big(X_{i+1}(k)\big)=E\big(X_i(k)\big)+E_{м_{i+1}}, \tag{12}$$

де $E(X)$ – похибка обчислення значення X;

$E_{мк1_{n,i+m}}$ – похибка n -ої операції комплексного множення першого виду (множення дійсного та комплексного значень) на $(i+m)$ -му інтервалі;

$E_{мк2_{i+m}}$ – похибка операції комплексного множення другого виду (множення двох комплексних значень) на $(i+m)$ -му інтервалі;

$E_{мд_{n,i+m}}$ – похибка n -ої операції дійсного множення на $(i+m)$ -му інтервалі;

$E_{м_{n,i+m}}$ – похибка n -ої операції множення на $(i+m)$-му інтервалі, котра для модифікованого ДПФ визначається як $E_{мк1_{n,i+m}}$, а для модифікованого ДПХ – як $E_{мд_{n,i+m}}$ (у виразі (12), де кількість операцій множення дорівнює одному, n не вказується).

Не зважаючи на те, що вирази (7), (8) та (10), (11) для визначення похибок обчислення звичайних ДПФ та ДПХ різняться між собою, між ними існує тісний зв'язок у випадку дійсної вхідної послідовності $x(n)$. Це випливає з того, що обчислення ДПФ , наприклад, за виразом (1) відповідає обчисленню за виразами

$$\operatorname{Re} F_{i+m}(k) = \left[\operatorname{Re} F_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} [x(N+n+i) - x(n+i)] \cdot \cos\frac{2\pi nk}{N} \right] \cdot \cos\frac{2\pi mk}{N} -$$

$$-\left[\operatorname{Im} F_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} [x(N+n+i) - x(n+i)] \cdot \left(-\sin\frac{2\pi nk}{N} \right) \right] \cdot \sin\frac{2\pi mk}{N}, \quad (13)$$

$$\operatorname{Im} F_{i+m}(k) = \left[\operatorname{Re} F_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} [x(N+n+i) - x(n+i)] \cdot \cos\frac{2\pi nk}{N} \right] \cdot \sin\frac{2\pi mk}{N} +$$

$$+\left[\operatorname{Im} F_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} [x(N+n+i) - x(n+i)] \cdot \left(-\sin\frac{2\pi nk}{N} \right) \right] \cdot \cos\frac{2\pi mk}{N}, \quad (14)$$

де Re та Im – дійсні та уявні частини значень ДПФ, а обчислення значень $H_{i+m}(N-k)$ ДПХ за виразом (2) визначається як

$$H_{i+m}(N-k) = \left[H_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} [x(N+n+i) - x(n+i)] \cdot \operatorname{cas}\frac{2\pi nk}{N} \right] \cdot \sin\frac{2\pi mk}{N} +$$

$$+\left[H_i(N-k) + \sum_{n=0}^{m-1} [x(N+n+i) - x(n+i)] \cdot \operatorname{cas}\frac{2\pi n(N-k)}{N} \right] \cdot \cos\frac{2\pi mk}{N}, \quad (15)$$

внаслідок чого рекурентні вирази для визначення похибок обчислення дійсної частини значень звичайного ДПФ мають однаковий вигляд із виразами (8) та (11) для визначення похибок обчислення значень $H(k)$ звичайного ДПХ, а рекурентні вирази для визначення похибок обчислення уявної частини значень звичайного ДПФ мають однаковий вигляд із виразами для визначення похибок обчислення значень $H(N-k)$ звичайного ДПХ, подібний до виразів (8) та (11) з заміною в них знаків операцій мінус на плюс. Отже, похибки обчислення дійсної та уявної частини значень звичайного ДПФ і відповідно значень $H(k)$ та $H(N-k)$ звичайного ДПХ мають однакові значення, внаслідок чого похибка обчислення комплексного значення ДПФ $F(k)$ дорівнює сумі похибок обчислення дійсних значень ДПХ $H(k)$ та $H(N-k)$.

Враховуючи це, обмежимось отриманням ітераційних виразів для визначення похибок обчислення звичайного ДПФ і модифікованих ДПФ та ДПХ, котрі отримуються на підставі рекурентних виразів обчислення (1), (3), (4), (6) та визначення похибок обчислення (7), (9), (10), (12) ДПФ та ДПХ з урахуванням того, що для $i=0$ $E\big(F_0(k)\big) = E\big(X_0(k)\big) = 0$, і визначаються як

$$E\big(F_{pm}(k)\big)=\Bigg[\ldots\Bigg[\Bigg[\sum_{n=1}^{m}E_{мк1_{n,m}}\Bigg]\cdot W^{-mk}+E_{мк2_{m}}+\sum_{n=1}^{m}E_{мк1_{n,2m}}\Bigg]\cdot W^{-mk}+E_{мк2_{2m}}+$$

$$+\ldots+\sum_{n=1}^{m}E_{мк1_{n,pm}}\Bigg]\cdot W^{-mk}+E_{мк2_{pm}}=\sum_{l=1}^{p}W^{-(p-l+1)mk}\sum_{n=1}^{m}E_{мк1_{n,lm}}+\sum_{l=1}^{p}E_{мк2_{lm}}W^{-(p-l)mk}\,, \qquad (16)$$

$$E\big(X_{pm}(k)\big)=\sum_{n=1}^{m}E_{м_{n,m}}+\sum_{n=1}^{m}E_{м_{n,2m}}+\ldots+\sum_{n=1}^{m}E_{м_{n,pm}}=\sum_{l=1}^{p}\sum_{n=1}^{m}E_{м_{n,lm}}\,, \qquad (17)$$

$$E\big(F_{r}(k)\big)=\Big[\ldots\Big[E_{мк2_{1}}\cdot W^{-k}+E_{мк2_{2}}\Big]\times\ldots\Big]\cdot W^{-k}+E_{мк2_{r}}=\sum_{l=1}^{r}E_{мк2_{l}}W^{-(r-l)k}\,, \qquad (18)$$

$$E\big(X_{r}(k)\big)=E_{м_{1}}+E_{м_{2}}+\ldots+E_{м_{r}}=\sum_{l=1}^{r}E_{м_{l}}\,, \qquad (19)$$

де p та r – будь-які натуральні числа, що задають кількість ітерацій обчислення на стрибкових та ковзних інтервалах відповідно.

Для визначення СКЗ похибок обчислення необхідно визначити дисперсії та квадрати середніх значень похибок обчислення за виразами (16) – (19).

Враховуючи те, що дисперсія суми (різниці) некорельованих похибок дорівнює сумі дисперсій цих похибок, а дисперсія добутку похибки на константу W^{nk} дорівнює дисперсії самої похибки вирази для визначення дисперсій похибок обчислення за виразами (16) – (19) мають такий вигляд:

$$D\Big[E\big(F_{pm}(k)\big)\Big]=\sum_{l=1}^{p}\sum_{n=1}^{m}D\Big[E_{мк1_{n,lm}}\Big]+\sum_{l=1}^{p}D\Big[E_{мк2_{lm}}\Big]=pmD\big[E_{мк1}\big]+pD\big[E_{мк2}\big], \qquad (20)$$

$$D\Big[E\big(X_{pm}(k)\big)\Big]=\sum_{l=1}^{p}\sum_{n=1}^{m}D\Big[E_{м_{n,lm}}\Big]=pmD\big[E_{м}\big], \qquad (21)$$

$$D\Big[E\big(F_{r}(k)\big)\Big]=\sum_{l=1}^{r}D\Big[E_{мк2_{l}}\Big]=rD\big[E_{мк2}\big], \qquad (22)$$

$$D\Big[E\big(X_{r}(k)\big)\Big]=\sum_{l=1}^{r}D\Big[E_{м_{l}}\Big]=rD\big[E_{м}\big], \qquad (23)$$

де $D[X]$ – дисперсія значення X.

Квадрати середніх значень похибок обчислення можуть бути визначені на підставі середніх значень похибок, котрі для похибок за виразами (16) – (19) визначаються як

$$M\Big[E\big(F_{pm}(k)\big)\Big]=\sum_{l=1}^{p}W^{-(p-l+1)mk}\sum_{n=1}^{m}M\Big[E_{мк1_{n,lm}}\Big]+\sum_{l=1}^{p}M\Big[E_{мк2_{lm}}\Big]W^{-(p-l)mk}=$$

$$=mM\big[E_{мк1}\big]\sum_{l=1}^{p}W^{-(p-l+1)mk}+M\big[E_{мк2}\big]\sum_{l=1}^{p}W^{-(p-l)mk}\,, \qquad (24)$$

$$M\Big[E\big(X_{pm}(k)\big)\Big]=\sum_{l=1}^{p}\sum_{n=1}^{m}M\Big[E_{м_{n,lm}}\Big]=pmM\big[E_{м}\big], \qquad (25)$$

$$M\Big[E\big(F_{r}(k)\big)\Big]=\sum_{l=1}^{r}M\Big[E_{мк2_{l}}\Big]\cdot W^{-(r-l)k}=M\big[E_{мк2}\big]\sum_{l=1}^{r}W^{-(r-l)k}\,, \qquad (26)$$

$$M\left[E\left(X_r(k)\right)\right]=\sum_{l=1}^{r} M\left[E_{м_l}\right]=rM\left[E_м\right], \qquad (27)$$

де $M[X]$ – математичне очікування значення X.

При визначенні дисперсій та квадратів середніх значень похибок необхідно враховувати, що похибка операції комплексного множення першого виду $E_{мк1}=E_{мд_1}+jE_{мд_2}$ має $D[E_{мк1}]=2D[E_{мд}]$ та $M[E_{мк1}]=M[E_{мд}]+jM[E_{мд}]$ і відповідно $\left|M[E_{мк1}]\right|^2=2M^2[E_{мд}]$, а похибка операції комплексного множення другого виду $E_{мк2}=(E_{мд_1}-E_{мд_2})+j(E_{мд_3}+E_{мд_4})$ має $D[E_{мк2}]=4D[E_{мд}]$ та $M[E_{мк2}]=j2M[E_{мд}]$ і відповідно $\left|M[E_{мк2}]\right|^2=4M^2[E_{мд}]$. В таблиці 1 наведені значення статистичних характеристик похибок операцій комплексного множення з урахуванням статистичних характеристик операцій дійсного множення $(b+1)$- розрядних чисел для різних видів апроксимації результатів добутків, визначених в [3].

Таблиця 1

Статистичні характеристики похибок операцій множення

Вид апроксимації результатів операцій множення	**Статистична характеристика**					
	$M[E_{мд}]$	$D[E_{мд}]$	$M[E_{мк1}]$	$D[E_{мк1}]$	$M[E_{мк2}]$	$D[E_{мк2}]$
округлення прямого, оберненого та доповняльного коду	0	$\frac{2^{-2b}}{12}$	0	$\frac{2^{-2b}}{6}$	0	$\frac{2^{-2b}}{3}$
усікання прямого та оберненого коду	0	$\frac{2^{-2b}}{3}$	0	$\frac{2\cdot 2^{-2b}}{3}$	0	$\frac{4\cdot 2^{-2b}}{3}$
усікання доповняльного коду	$-\frac{2^{-b}}{2}$	$\frac{2^{-2b}}{12}$	$-\frac{2^{-b}}{2}(1+j)$	$\frac{2^{-2b}}{6}$	$-2^{-b}j$	$\frac{2^{-2b}}{3}$

Оскільки $M[E_{мк1}]=M[E_{мк2}]=0$ для операцій множення з округленням прямого, оберненого та доповняльного коду і усіканням прямого та оберненого коду, то середні значення похибок обчислення за виразами (24) – (27) також дорівнюють нулю, отже, для визначення СКЗ похибок обчислення можуть бути використані вирази для визначення дисперсій похибок обчислення (20) – (23). Для операцій множення з усіканням доповняльного коду СКЗ похибок обчислення визначаються за формулами $M\left[X^2\right]=D[X]+M^2[X]$ для дійсних значень X і $M\left[|X|^2\right]=D[X]+\left|M[X]\right|^2$ для комплексних значень X з використанням значень виразів (20) – (27). Значення СКЗ похибок рекурентних методів обчислення ДПФ представлені в таблиці 2. Оскільки СКЗ похибок обчислення значень ДПФ $F(k)$ дорівнюють сумі СКЗ похибок обчислення двох значень ДПХ $H(k)$ та $H(N-k)$, то для рекурентних методів обчислення ДПХ приймаються вдвічі менші за наведені в таблиці значення.

Для визначення відношення СКЗ похибок обчислення до СКЗ ДПФ та ДПХ, слід врахувати, що для вхідного масштабування, при якому значення вхідного сигналу $|x(n)|<1/N$, СКЗ ДПФ та ДПХ співпадають та, зокрема, при рівномірному законі розподілу вхідного сигналу дорівнюють $1/(3N)$ для інтервалу $(pm=r)\geq N$ [3].

В результаті порівняльного аналізу точності рекурентних методів обчислення ДПФ та ДПХ можна зробити такі основні висновки:

1. Точність рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ для $r = N$ збігається з точністю прямих методів обчислення звичайних і модифікованих ДПФ та ДПХ.

2. Точність рекурентних методів обчислення ДПХ вдвічі вища за точність рекурентних методів обчислення ДПФ.

3. Точність рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах збігається з точністю обчислення на ковзних інтервалах та вдвічі вища за точність обчислення звичайних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах і практично однакова з найвищою точністю обчислення звичайних ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах, котра досягається при $m \to N$, для всіх видів апроксимації результатів операцій множення, окрім усікання доповняльного коду.

Таблиця 2

Точність рекурентних методів обчислення ДПФ

Вид апроксимації результатів операцій множення	СКЗ похибки	
	обчислення звичайних ДПФ на ковзних інтервалах	обчислення модифікованих ДПФ на ковзних та стрибкових інтервалах
округлення прямого, оберненого та доповняльного коду	$\frac{r}{3} \cdot 2^{-2b}$	$\frac{r}{6} \cdot 2^{-2b}$
усікання прямого та оберненого коду	$\frac{4r}{3} \cdot 2^{-2b}$	$\frac{2r}{3} \cdot 2^{-2b}$
усікання доповняльного коду	$\left[r/3 + \left| \sum_{l=1}^{r} W^{-(r-l)k} \right|^2 \right] \cdot 2^{-2b}, \ k = \overline{0, N-1}$ $\frac{4r}{3} \cdot 2^{-2b}$, усереднене по k	$\left[\frac{r}{6} + \frac{r^2}{2} \right] \cdot 2^{-2b}$

Отримані результати можуть бути використані для визначення розрядності даних при апаратурній та програмній реалізації ДПФ та ДПХ на основі рекурентних методів обчислення в залежності від необхідної точності та кількості ітерацій обчислення.

Література

1. Рекуррентные алгоритмы вычисления дискретных преобразований и энергетического спектра / Волынец В.И.; Винницкий политехнический институт. – Винница, 1988. – 14 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.11.88; № 2898 – Ук88.

2. Волинець В.І. Рекурентні методи обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур’є та Хартлі // Вісник ВПІ. – 2003. – № 1. – С. 77-80.

3. Оппенгейм А.В. Цифровая обработка сигналов / А.В. Оппенгейм, Р.В. Шафер: Пер. с англ. – М.: Связь, 1979. – 416 с.

4. Бовбель Е.И. Ошибки цифровых систем, основанных на вычислении дискретного преобразования Фуре / Бовбель Е.И., Зайцева Е.М., Микулович В.И. // Зарубежная радиоэлектроника. – 1981. – № 5. – С. 3-25.

5. Байкова А.Т. Анализ вычислительных ошибок процессоров быстрого преобразования Фурье. – Л.: 1987. – 29 с. (Препр. / АН СССР, Спец. астрофиз. обсерватория: № 44Л).

6. Zakhor A. Quantization errors in the computation of the discrete Hartley transform / Zakhor A., Oppengejm A.V. // IEEE Trans. on ASSP. – 1987. – V. 35, № 11. – P. 1592-1602.

7. Шихов Н.Б. Дискретное преобразование Хартли для систем автоматизации эксперимента. – Минск: 1987. – 62 с. (Препр. / АН БССР, Ин-т техн. кибернетики: № 28).