УДК 517.44:004

ЗВ'ЯЗКИ МІЖ РЕКУРЕНТНИМИ МЕТОДАМИ ОБЧИСЛЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ

В.І. Волинець
Вінницький інститут економіки ТНЕУ, м. Вінниця

Розглянуто отримання рекурентних виразів для обчислення одних перетворень на підставі рекурентних виразів для обчислення інших перетворень. Зокрема, отримано рекурентні вирази для обчислення дискретного перетворення Хартлі та модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на підставі рекурентного виразу для обчислення дискретного перетворення Фур'є. На відміну від відомих способів отримання рекурентних виразів для обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі даний спосіб відрізняється наочністю та простотою і може бути використаний для отримання нових рекурентних виразів для обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі.

Вступ. На сучасному етапі розвитку засобів цифрової обробки сигналів (ЦОС) для систем різноманітного призначення, зокрема спектрального аналізу, широко застосовують методи, що ґрунтуються на дискретних перетвореннях (ДП), де основним математичним апаратом є дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ) [1]. Ефективність засобів ЦОС багато в чому визначається ефективністю використовуваних методів ЦОС. Зокрема, при проведенні динамічного спектрального аналізу необхідно обчислювати ДП на ковзних або стрибкових інтервалах, коли чергове ДП обчислюється для вхідного сигналу, до якого додається відповідно один або декілька нових відліків і така ж кількість початкових відліків вхідного сигналу відкидається. В цьому випадку для обчислення ДП доцільно використовувати рекурентні методи обчислення, котрі враховують результати попереднього обчислення ДП.

Існує ряд робіт [2 - 8], в яких описано рекурентні вирази для обчислення ДПФ і ДПХ. Зокрема, в роботах [3, 6] запропоновано загальні підходи, на основі яких отримано рекурентні вирази для обчислення ДПФ і ДПХ [3] та модифікованих ДПФ і ДПХ [6] на ковзних і стрибкових інтервалах. Однак, якщо підхід до отримання рекурентних виразів для обчислення ДПФ і ДПХ є наочним, то підхід до отримання рекурентних виразів для обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ таким не є, оскільки вимагає застосування штучних математичних перетворень. Крім того, не визначено зв'язки між рекурентними виразами для обчислення різних перетворень. Отже, актуальною є задача визначення зв'язків між рекурентними виразами для обчислення різних перетворень, використовуючи які можна отримати одні рекурентні вирази для обчислення ДПФ і ДПХ на підставі інших рекурентних виразів наочним і простим способом.

Поставлення завдання. Метою роботи є отримання рекурентних виразів для обчислення одних перетворень Фур'є та Хартлі на підставі рекурентних виразів для обчислення інших перетворень Фур'є та Хартлі.

Результати. ДПФ і ДПХ на ковзних (стрибкових) інтервалах визначаються такими виразами [3]:

$$F_i(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+i) W^{nk},\ k = \overline{0, N-1}, \tag{1}$$

$$H_i(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+i) cas(2\pi nk / N),\ k = \overline{0, N-1}, \tag{2}$$

де $F_i(k)$, $H_i(k)$ та $x(n+i)$ – відповідно ДПФ, ДПХ та вхідний сигнал на i-му інтервалі; $i=0,1,2,\ldots$; $W=\exp(-j2\pi/N)$, де $j=\sqrt{-1}$; $cas(X)=\cos(X)+\sin(X)$; N – розмір перетворення.

Модифіковані ДПФ і ДПХ на ковзних (стрибкових) інтервалах визначаються такими виразами [6]:

$$F_i^M(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n+i)W^{(n+i)k}\,,\ k=\overline{0,N-1}\,, \tag{3}$$

$$H_i^M(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n+i)cas(2\pi(n+i)k/N)\,,\ k=\overline{0,N-1}\,, \tag{4}$$

де $F_i^M(k)$, $H_i^M(k)$ – відповідно модифіковані ДПФ і ДПХ на i-му інтервалі.

З виразів (1) і (3) випливає зв'язок між ДПФ і модифікованим ДПФ:

$$\begin{gathered}F_i(k)=F_i^M(k)\cdot W^{-ik},\\ F_i^M(k)=F_i(k)\cdot W^{ik}.\end{gathered} \tag{5}$$

З виразів (2) і (4) випливає зв'язок між ДПХ і модифікованим ДПХ:

$$\begin{gathered}H_i(k)=H_i^M(k)\cdot\cos(2\pi ik/N)-H_i^M(N-k)\cdot\sin(2\pi ik/N),\\ H_i^M(k)=H_i(k)\cdot\cos(2\pi ik/N)+H_i(N-k)\cdot\sin(2\pi ik/N),\end{gathered}$$

а з виразів (1) і (2) та (3) і (4) – зв'язок між ДПХ і ДПФ для дійсного вхідного сигналу:

$$H_i(k)=\operatorname{Re}F_i(k)-\operatorname{Im}F_i(k)\,, \tag{6}$$

$$H_i^M(k)=\operatorname{Re}F_i^M(k)-\operatorname{Im}F_i^M(k)\,, \tag{7}$$

де Re та Im – дійсна та уявна частини комплексних значень ДПФ відповідно.

Розглянемо отримання рекурентних виразів обчислення ДПХ та модифікованих ДПФ і ДПХ на підставі рекурентного виразу обчислення ДПФ.

Рекурентний вираз для обчислення ДПФ на стрибкових інтервалах має такий вигляд [3]:

$$F_{i+m}(k)=\left[F_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot W^{nk}\right]\cdot W^{-mk}\,, \tag{8}$$

де $F_{i+m}(k)$, $F_i(k)$ – ДПФ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно; $m=\overline{1,N-1}$ – зсув між інтервалами вхідного сигналу, та відповідно

$$\operatorname{Re}F_{i+m}(k)=\left[\operatorname{Re}F_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\cos(2\pi nk/N)\right]\cdot\cos(2\pi mk/N)-$$

$$-\left[\operatorname{Im}F_i(k)-\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\sin(2\pi nk/N)\right]\cdot\sin(2\pi mk/N), \qquad (9)$$

$$\operatorname{Im}F_{i+m}(k)=\left[\operatorname{Re}F_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\cos(2\pi nk/N)\right]\cdot\sin(2\pi mk/N)+$$

$$+\left[\operatorname{Im}F_i(k)-\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\sin(2\pi nk/N)\right]\cdot\cos(2\pi mk/N), \qquad (10)$$

Враховуючи вирази (9), (10) та залежність (6), рекурентний вираз для обчислення ДПХ на стрибкових інтервалах визначається як

$$H_{i+m}(k)=\operatorname{Re}F_{i+m}(k)-\operatorname{Im}F_{i+m}(k)=$$

$$=\left[H_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\operatorname{cas}(2\pi nk/N)\right]\cdot\cos(2\pi mk/N)-$$

$$-\left[H_i(N-k)+\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\operatorname{cas}(2\pi n(N-k)/N)\right]\cdot\sin(2\pi mk/N), \qquad (11)$$

де $H_{i+m}(k)$, $H_i(k)$ – ДПХ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно.

Враховуючи залежність (5), вираз (8) можна записати як

$$F^M_{i+m}(k)\cdot W^{-(i+m)k}=\left[F^M_i(k)\cdot W^{-ik}+\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot W^{nk}\right]\cdot W^{-mk},$$

де $F^M_{i+m}(k)$, $F^M_i(k)$ – модифіковані ДПФ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно, звідки рекурентний вираз для обчислення модифікованого ДПФ на стрибкових інтервалах визначається як

$$F^M_{i+m}(k)=F^M_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot W^{(n+i)k}, \qquad (12)$$

та відповідно

$$\operatorname{Re}F^M_{i+m}(k)=\operatorname{Re}F^M_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\cos(2\pi(n+i)k/N), \qquad (13)$$

$$\operatorname{Im}F^M_{i+m}(k)=\operatorname{Im}F^M_i(k)-\sum_{n=0}^{m-1}[x(N+n+i)-x(n+i)]\cdot\sin(2\pi(n+i)k/N). \qquad (14)$$

Враховуючи вирази (13), (14) та залежність (7) рекурентний вираз для обчислення модифікованого ДПХ на стрибкових інтервалах визначається як

$$H^M_{i+m}(k)=\operatorname{Re}F^M_{i+m}(k)-\operatorname{Im}F^M_{i+m}(k)=$$

$$= H_i^M(k) + \sum_{n=0}^{m-1} [x(N+n+i) - x(n+i)] \cdot \mathrm{cas}(2\pi(n+i)k/N), \qquad (15)$$

де $H_{i+m}^M(k)$, $H_i^M(k)$ – модифіковані ДПХ на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно.

Вираз (11) збігається з рекурентним виразом для обчислення ДПХ на стрибкових інтервалах, наведеним в [3], а вирази (12) і (15) збігаються відповідно з рекурентними виразами для обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ, наведеними в [6].

Аналогічним чином можна отримати рекурентні вирази для обчислення ДПФ і ДПХ на підставі іншого рекурентного виразу, а також рекурентні вирази для обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ [7].

Висновки. Використовуючи залежності між звичайними та модифікованими ДПФ і ДПХ, можна отримати рекурентні вирази для обчислення одних перетворень на підставі рекурентних виразів для обчислення інших перетворень. Зокрема, в роботі розглянуто отримання рекурентних виразів для обчислення ДПХ та модифікованих ДПФ і ДПХ на підставі рекурентного виразу для обчислення ДПФ. На відміну від відомих способів отримання рекурентних виразів для обчислення ДПФ і ДПХ даний спосіб відрізняється наочністю та простотою і може бути використаний для отримання нових рекурентних виразів для обчислення ДПФ і ДПХ.

SUMMARY

Connections between the recurrent methods of calculation of discrete Fourier and Hartley transforms

Volynets V.I.

Vinnitsa institute of economics

The receipt of recurrent expressions for the calculation of one transforms on the basis of recurrent expressions for the calculation of other transforms is considered. In particular, recurrent expressions for calculation of discrete Hartley transform and modified discrete Fourier and Hartley transforms on the basis of recurrent expression for calculation of discrete Fourier transform are got. Unlike the known methods of receipt of recurrent expressions for calculation of discrete Fourier and Hartley transforms this method differs clearness and simplicity and can be used for reception new recurrent expressions for the calculation of discrete Fourier and Hartley transforms.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Солонина А.И., Улахович Д.А., Яковлев Л.А. Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 464 с.
2. Ярославский Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
3. Волынец В.И. Рекуррентные алгоритмы вычисления дискретных преобразований и энергетического спектра // Винницкий политехнический институт. – Винница. – 1988. – 14 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.11.88, № 2898-Ук88.
4. Цифровые анализаторы спектра /В.Н. Плотников, А.В. Белинский, В.А. Суханов, Ю. Н. Жигулевцев. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
5. Jacobsen E., Lyons R. The sliding DFT // IEEE Signal Processing magazine. – 2003. – Vol. 20, Is. 2. – P. 74-80.
6. Волинець В.І. Рекурентні методи обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник ВПІ. – 2003. – № 1. – С. 77–80.
7. Волинець В.І. Рекурентні методи обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник ВПІ. – 2003. – № 4. – С. 69–74.
8. Krakovsky V.Y. Moving-window discrete Fourier transform // Journal of Real-time Image Processing. – 2006. – Vol. 1, № 2. – P. 153-161.