УДК 517.44:004

В.І. Волинець
Вінницький інститут економіки ТНЕУ
victvol@mail.ru

Рекурентні методи обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі з підвищеною точністю обчислення в арифметиці з фіксованою комою

Запропоновано рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі, точність яких вища за точність відомих методів обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі при реалізації в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в додатковому коді та збігається з точністю відомих методів для інших випадків апроксимації результатів операцій множення.

Ключові слова: *рекурентні методи обчислення, багатовимірні дискретні перетворення Фур'є та Хартлі, точність обчислення, арифметика з фіксованою комою.*

Вступ

В основі динамічного спектрального аналізу багатовимірних сигналів, який проводиться на ковзних або стрибкових інтервалах вхідного сигналу, тобто коли черговий фрагмент вхідного сигналу відрізняється від попереднього фрагменту відповідно на одну або декілька груп відліків по одному або всіх вимірах, лежить використання рекурентних методів обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ) [1-3], арифметична складність яких значно нижча за складність прямих та швидких методів обчислення дискретних перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення на попередніх інтервалах вхідного сигналу.

Важливим критерієм вибору методу обчислення є точність обчислення, яку він забезпечує. У праці [4] проведений аналіз точності відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою, в основу якого покладений статистичний метод аналізу [5], при якому кожному джерелу елементарної похибки ставиться у відповідність генератор випадкової похибки з рівномірним законом розподілу та робиться припущення, що всі джерела елементарних похибок не корелюють між собою та з вхідним сигналом, а в якості кількісної оцінки точності обчислення приймаються середньоквадратичні значення (СКЗ) похибок обчислення значень перетворень та відношення СКЗ похибок обчислення до СКЗ перетворень, яке фізично інтерпретується як відношення потужності шуму до потужності сигналу.

Постановка завдання

Отримані в праці [4] СКЗ похибок обчислення значень перетворень показали, що точність відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в додатковому коді в $3dmN^{r-1}$ та $3dmN^{r-1}p$, де d – кількість вимірів зсуву вхідного сигналу (один або r), m – зсув (відстань) між інтервалами вхідного сигналу, N – розмір вхідного сигналу по одному виміру, p – кількість ітерацій обчислення, рази нижча за точність обчислення для випадку округлення результатів операцій множення в прямому, оберненому та додатковому коді при обчисленні звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ відповідно, в той час, як додатковий код є найбільш поширеним на практиці, а реалізація операції усікання є значно простішою за реалізацію операції округлення.

Метою цієї роботи є запропонувати рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ, точність яких в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в додатковому коді збігалась би з точністю відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою для випадку округлення результатів операцій множення в прямому, оберненому та додатковому коді та не знижувалась для інших випадків апроксимації результатів операцій множення.

Основні результати

Аналіз відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ показав, що на СКЗ похибок обчислення значень перетворень в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в додатковому коді суттєво впливають середні значення похибок операцій множення. Для усунення їх впливу звичайні та модифіковані багатовимірні ДПФ пропонується обчислювати за такими рекурентними виразами:

$$\operatorname{Re}F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\left[\operatorname{Re}F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)-$$
$$-\left[\operatorname{Im}F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right),\qquad(1)$$

$$\operatorname{Im}F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\left[\operatorname{Re}F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)-$$
$$-\left[\operatorname{Im}F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot\left(-\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)\right),\qquad(2)$$

$$\operatorname{Re}F_1^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\operatorname{Re}F_0^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)-$$
$$-\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot\left(-\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)\right),\qquad(3)$$

$$\operatorname{Im}F_1^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\operatorname{Im}F_0^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)-$$
$$-\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right),\qquad(4)$$

де $F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $F_1^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ та $F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $F_0^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ – комплексні значення звичайного та модифікованого r-вимірного ДПФ r-вимірного вхідного сигналу $x(n_1,n_2,\ldots,n_r)$ розміром $\prod_{i=1}^{r}N_i$ на черговому (першому) та попередньому (нульовому) інтервалах вхідного сигналу, зсунутих відносно один одного на m_i відліків по i-му виміру, де $i=\overline{1,r}$; Re та Im – дійсні та уявні частини комплексних значень багатовимірних ДПФ; M_i – зсув вхідного сигналу на попередньому інтервалі відносно початку координат по i-му виміру; дійсні та уявні частини значення $\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ визначаються за такими виразами:

$$\operatorname{Re}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\sum_{s=0}^{2^r-2}\left[\sum_{n_1=a_1}^{](a_1+b_1)/2[-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{n_1=](a_1+b_1)/2[}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot\left(-\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)\right)\right],\qquad(5)$$

$$\operatorname{Im}\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\sum_{s=0}^{2^r-2}\left[\sum_{n_1=a_1}^{](a_1+b_1)/2[-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot\left(-\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{n_1=](a_1+b_1)/2[}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)\right],\qquad(6)$$

де $a_i=m_is_i$ та $b_i=m_iq_i+N_is_i$, де s_i – $(r-i)$-й розряд двійкового представлення числа s, а $q_i=1-s_i$; $\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)=$ $=x(N_1q_1+n_1+M_1,N_2q_2+n_2+M_2,\ldots,N_rq_r+n_r+M_r)-$ $-x(n_1+M_1,n_2+M_2,\ldots,n_r+M_r)$; $]x[$ – округлене до більшого цілого значення x.

Звичайні та модифіковані багатовимірні ДПХ пропонується обчислювати за такими рекурентними виразами:

$$H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\left[H_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\Delta H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)-$$
$$-\left[H_0(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)+\Delta H_1(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\right]\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right),\qquad(7)$$

$$H_1(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)=\left[H_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\Delta H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)-$$
$$-\left[H_0(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)+\Delta H_1(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\right]\cdot\left(-\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)\right), \tag{8}$$

$$H_1^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=H_0^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\Delta H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)+$$
$$-\Delta H_1(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\cdot\left(-\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)\right), \tag{9}$$

$$H_1^{м}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)=H_0^{м}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)+\Delta H_1(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)+$$
$$-\Delta H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right), \tag{10}$$

де $H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $H_1^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ та $H_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $H_0^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ – звичайне та модифіковане r-вимірне ДПХ r-вимірного вхідного сигналу $x(n_1,n_2,\ldots,n_r)$ розміром $\prod_{i=1}^{r}N_i$ на черговому (першому) та попередньому (нульовому) інтервалах вхідного сигналу, зсунутих відносно один одного на m_i відліків по i-му виміру, де $i=\overline{1,r}$; M_i – зсув вхідного сигналу на попередньому інтервалі відносно початку координат по i-му виміру; значення $\Delta H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ та $\Delta H_1(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)$ визначаються за такими виразами:

$$\Delta H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\sum_{s=0}^{2^r-2}\left[\sum_{n_1=a_1}^{](a_1+b_1)/2[-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot\mathrm{cas}\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{n_1=](a_1+b_1)/2[}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot\left(-\mathrm{cas}\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)\right)\right], \tag{11}$$

$$\Delta H_1(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)=\sum_{s=0}^{2^r-2}\left[\sum_{n_1=a_1}^{](a_1+b_1)/2[-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot\mathrm{cas}\left(-2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{n_1=](a_1+b_1)/2[}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot\left(-\mathrm{cas}\left(-2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}\right)\right)\right], \tag{12}$$

де $\mathrm{cas}(X)=\cos(X)+\sin(X)$.

Оскільки обчислювальними операціями виразів (1) – (12) є операції додавання (віднімання) та множення, то при реалізації рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою джерелами похибок обчислення можуть бути лише похибки операцій множення, обумовлені округленням або усіканням результатів добутків, оскільки похибки операцій зсувів, виконання яких необхідно для усунення можливих переповнень розрядної сітки при виконанні операцій додавання, відсутні внаслідок вхідного масштабування, при якому значення вхідного сигналу масштабуються так, щоб в процесі обчислення не виникло переповнень.

Порівнюючи відповідні вирази обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ, видно, що вони мають однакову структуру щодо складу та порядку операцій множення, внаслідок чого точність обчислення цих виразів однакова. Враховуючи це, аналіз точності можна провести лише для рекурентних методів обчислення звичайного та модифікованого багатовимірних ДПФ, котрі ґрунтуються на таких рекурентних виразах в комплексній формі:

$$F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\left[F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot W^{-\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}}, \tag{13}$$

$$F_1^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=F_0^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot W^{\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}}, \tag{14}$$

де $W=\exp(-j2\pi)$, $j=\sqrt{-1}$;

$$\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\sum_{s=0}^{2^r-2}\left[\sum_{n_1=a_1}^{](a_1+b_1)/2[-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot W^{\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n_1=](a_1+b_1)/2[}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot\left(-W^{\sum_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}}\right)\right]. \qquad (15)$$

Враховуючи можливі джерела похибок обчислення, на підставі виразів (13) – (15) можуть бути отримані рекурентні вирази для визначення похибок обчислення звичайного та модифікованого багатовимірних ДПФ в арифметиці з фіксованою комою, котрі мають такий вигляд:

$$E(F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))=[E(F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r))+E(\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))]\cdot W^{-\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}}+E_{мк2_1}, \qquad (16)$$

$$E\left(F_1^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right)=E\left(F_0^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right)+E(\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))\cdot W^{\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}}+E_{мк2_1}, \qquad (17)$$

де $E(X)$ – похибка обчислення значення X; $E_{мк2_1}$ – похибка операції комплексного множення другого виду на черговому інтервалі; значення $E(\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))$ визначаються за таким виразом:

$$E(\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))_{\text{Cr}}=\sum_{s=0}^{2^r-2}\left[\sum_{n_1=a_1}^{](a_1+b_1)/2[-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}E_{мк1_{n_1,n_2,\ldots,n_r}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n_1=](a_1+b_1)/2[}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}E_{мк1_{n_1,n_2,\ldots,n_r}}\right], \qquad (18)$$

де $E_{мк1_{n_1,n_2,\ldots,n_r}}$ – похибки операції комплексного множення першого виду.

Ітераційні вирази для визначення похибок обчислення звичайного і модифікованого багатовимірних ДПФ отримуються на підставі обчислення багатовимірних ДПФ (13), (14) та визначення похибок обчислення (16), (17) з урахуванням того, що для $M_i=0$, де $i=\overline{1,r}$, $E(F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r))=E\left(F_0^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right)=0$, визначаються як

$$E\left(F_p(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right)=\sum_{l=1}^{p}E(\Delta F_l(k_1,k_2,\ldots,k_r))\cdot W^{-(p-l+1)\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}}+\sum_{l=1}^{p}E_{мк2_l}W^{-(p-l)\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}}, \qquad (19)$$

$$E\left(F_p^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right)=W^{\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}}\sum_{l=1}^{p}E(\Delta F_l(k_1,k_2,\ldots,k_r))+\sum_{l=1}^{p}E_{мк2_l}, \qquad (20)$$

де p – кількість ітерацій обчислення.

Дисперсії та середні значення (математичні очікування) похибок обчислення за виразами (19), (20) визначаються як

$$D\left[E\left(F_p(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right)\right]=D\left[E\left(F_p^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right)\right]=p\cdot\left(D[E(\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))]+D[E_{мк2}]\right), \qquad (21)$$

$$M\left[E\left(F_p(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right)\right]=M[E(\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))]\sum_{l=1}^{p}W^{-(p-l+1)\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}}+M[E_{мк2}]\sum_{l=1}^{p}W^{-(p-l)\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}}, \qquad (22)$$

$$M\left[E\left(F_p^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right)\right]=p\cdot M[E(\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))]\cdot W^{\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}}+p\cdot M[E_{мк2}], \qquad (23)$$

де $D[X]$ – дисперсія похибки обчислення значення X; $M[X]$ – математичне очікування значення X; дисперсії та середні значення похибок обчислення $\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ визначаються як

$$D[E(\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))]=\left(\prod_{i=1}^{r}N_i-\prod_{i=1}^{r}(N_i-m_i)\right)\cdot D[E_{мк1}], \qquad (24)$$

$$M\left[E\left(\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right)\right]=\begin{cases}0,\ m_1-\textit{парне},\ N_1-\textit{парне}\\(2^{r-1}-1)\cdot M\left[E_{мк1}\right],\ m_1-\textit{парне},\ N_1-\textit{непарне}\\2^{r-1}\cdot M\left[E_{мк1}\right],\ m_1-\textit{непарне},\ N_1-\textit{непарне}\\(2^{r}-1)\cdot M\left[E_{мк1}\right],\ m_1-\textit{непарне},\ N_1-\textit{парне}\end{cases}. \quad (25)$$

При визначенні дисперсій та середніх значень похибок обчислення ДПФ слід врахувати, що похибка операції комплексного множення першого виду, яка визначається як $E_{мк1}=E_{мд_1}+jE_{мд_2}$, має $D\left[E_{мк1}\right]=2D\left[E_{мд}\right]$ та $M\left[E_{мк1}\right]=M\left[E_{мд}\right]+jM\left[E_{мд}\right]$ і відповідно $\left|M\left[E_{мк1}\right]\right|^2=2M^2\left[E_{мд}\right]$, де $E_{мд}$ – похибка операції дійсного множення, а похибка операції комплексного множення другого виду, яка відповідно до реалізації комплексного множення в виразах $(1)-(4)$ визначається як $E_{мк2}=(E_{мд_1}-E_{мд_2})+j(E_{мд_3}-E_{мд_4})$, має $D\left[E_{мк2}\right]=4D\left[E_{мд}\right]$ та $M\left[E_{мк2}\right]=0$.

Оскільки на практиці можна вибрати такі значення m_1 та N_1, для яких середні значення похибок обчислення за виразом (25) дорівнюють нулю, то СКЗ похибок обчислення, які визначаються за виразом $M\left[\left|X\right|^2\right]=D\left[X\right]+\left|M\left[X\right]\right|^2$, де X – похибка обчислення, будуть визначатись лише значеннями їхніх дисперсій за виразами (21), (24).

В табл. 1 наведено СКЗ похибок обчислення звичайного та модифікованого багатовимірних ДПФ для $N_i=N$ та $m_i=m$, де $i=\overline{1,r}$, на основі відомих [3] та запропонованих в цій роботі рекурентних методів з врахуванням значень дисперсій та середніх значень похибок операцій множення для $(b+1)$-розрядних чисел. Оскільки СКЗ похибки обчислення комплексного значення ДПФ дорівнює сумі СКЗ похибок обчислення двох значень ДПХ, то для рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПХ приймаються вдвічі менші за наведені в табл. 1 значення.

Таблиця 1. Точність рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ

Вид апроксимації результатів операцій множення	Методи обчислення	СКЗ похибок обчислення багатовимірних ДПФ при зсуві	
		по одному виміру	по всіх вимірах
округлення прямого, оберненого та додаткового коду	відомі та запропоновані	$\frac{mpN^{r-1}}{6}\cdot 2^{-2b}$	$\frac{mprN^{r-1}}{6}\cdot 2^{-2b}$
усікання прямого та оберненого коду	відомі та запропоновані	$\frac{2mpN^{r-1}}{3}\cdot 2^{-2b}$	$\frac{2mprN^{r-1}}{3}\cdot 2^{-2b}$
усікання додаткового коду	відомі	$\left[\frac{mpN^{r-1}}{6}+\right.$ $\left.+\frac{Q\left(mN^{r-1}\right)^2}{2}\right]\cdot 2^{-2b}$	$\left[\frac{mprN^{r-1}}{6}+\right.$ $\left.+\frac{Q\left(mrN^{r-1}\right)^2}{2}\right]\cdot 2^{-2b}$
	запропоновані	$\frac{mpN^{r-1}}{6}\cdot 2^{-2b}$	$\frac{mprN^{r-1}}{6}\cdot 2^{-2b}$

Примітки:

1. $Q=p$ для звичайних ДПФ та $Q=p^2$ для модифікованих ДПФ.
2. Для випадку усікання додаткового коду наведені усереднені СКЗ похибок обчислення звичайних багатовимірних ДПФ.

Висновки

Порівнюючи точність відомих та запропонованих в цій роботі рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ, можна зробити такі висновки:

1. Точність запропонованих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ в $3dmN^{r-1}$ та $3dmN^{r-1}p$ рази вища за точність відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ для випадку усікання результатів операцій множення в додатковому коді.

2. Точність запропонованих рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ для випадку усікання результатів операцій множення в додатковому коді збігається з точністю відомих методів обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ для випадку округлення результатів операцій множення в прямому, оберненому та додатковому коді.

3. Точність запропонованих рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ збігається з точністю відомих методів обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ для випадків округлення результатів операцій множення в прямому, оберненому та додатковому коді та усікання результатів операцій множення в прямому та оберненому коді.

Таким чином, запропоновані рекурентні методи обчислення звичайних та модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ дозволяють підвищити точність обчислення в $3dmN^{r-1}$ та $3dmN^{r-1}p$, де d – кількість вимірів зсуву вхідного сигналу (один або r), m – зсув (відстань) між інтервалами вхідного сигналу, N – розмір вхідного сигналу по одному виміру, p – кількість ітерацій обчислення, при обчисленні відповідно звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ для випадку апроксимації результатів операцій множення в додатковому коді, забезпечуючи ту ж саму точність обчислення, що і відомі рекурентні методи обчислення для інших випадків апроксимації результатів операцій множення, що дозволяє використовувати запропоновані методи на практиці для різних кодів та видів апроксимації результатів операцій множення, зокрема, для випадку усікання додаткового коду, оскільки додатковий код є найбільш поширеним на практиці, а реалізація операції усікання є значно простішою за реалізацію операції округлення.

Література

1. Ярославский Л. П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику / Л. П. Ярославский. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.

2. Цифровые анализаторы спектра / В. Н. Плотников, А. В. Белинский, В. А. Суханов, Ю. Н. Жигулевцев. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.

3. Волинець В. І. Рекурентні методи обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі / В. І. Волинець // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 4. – С. 69-74.

4. Волинець В. І. Аналіз точності рекурентних методів обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з фіксованою комою / В. І. Волинець // Збірник наукових праць ІПМЕ НАН України. – 2007. – Вип. 43. – С. 39-46.

5. Оппенгейм А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – М.: Техносфера, 2006. – 856 с.

Надійшла до редакції 20.02.2011