Рекурентні методи обчислення двовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з фіксованою комою з підвищеною точністю обчислення

ВОЛИНЕЦЬ В.І.

Вінницький інститут економіки Тернопільського національного економічного університету

Запропоновано рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих двовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі, точність яких в 3dmN та 3dmNp, де d – кількість вимірів зсуву вхідного сигналу, m – зсув між інтервалами вхідного сигналу, N – розмір вхідного сигналу по одному виміру, p – кількість ітерацій обчислення, рази вища за точність відомих методів обчислення звичайних і модифікованих двовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі відповідно при реалізації в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в додатковому коді та збігається з точністю відомих методів для інших випадків апроксимації результатів операцій множення.

Предложены рекуррентные методы вычисления обыкновенных и модифицированных двухмерных дискретных преобразований Фурье и Хартли, точность которых в 3dmN и 3dmNp, где d – количество измерений сдвига входного сигнала, m – сдвиг между интервалами входного сигнала, N – размер входного сигнала по одному измерению, p – количество итераций вычисления, раза выше точности известных методов вычисления обыкновенных и модифицированных двухмерных дискретных преобразований Фурье и Хартли соответственно при реализации в арифметике с фиксированной запятой для случая усечения результатов операций умножения в дополнительном коде и совпадает с точностью известных методов для других случаев аппроксимации результатов операций умножения.

The recurrent methods of calculation of usual and modified two-dimensional discrete Fourier and Hartley transforms are offered, exactness of which in 3dmN and 3dmNp, where d is an amount of measurings of shift of input signal, m is a shift between the intervals of input signal, N is a size of input signal on one measuring, p is an amount of iterations of calculation, times higher than exactness of the known methods of calculation of usual and modified two-dimensional discrete Fourier and Hartley transforms accordingly during realization in fixed-point arithmetic for the case of truncating of results of operations of multiplications in an additional code and coincides with exactness of the known methods for other cases of approximation of results of operations of multiplication.

Вступ. В основі динамічного спектрального аналізу двовимірних сигналів, який проводиться на ковзних або стрибкових інтервалах вхідного сигналу, тобто коли черговий фрагмент вхідного сигналу відрізняється від попереднього фрагменту відповідно на одну або декілька груп відліків по одному або двох вимірах, лежить використання рекурентних методів обчислення двовимірних дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ) [1-3], арифметична складність яких значно нижча за складність прямих та швидких методів обчислення дискретних перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення на попередніх інтервалах вхідного сигналу.

Важливим критерієм вибору методу обчислення є точність обчислення, яку він забезпечує. У праці [4] проведений аналіз точності відомих рекурентних методів обчислення двовимірних звичайних і модифікованих ДПФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою, в основу якого покладений статистичний метод аналізу [5], при якому кожному джерелу елементарної похибки ставиться у відповідність генератор випадкової похибки з рівномірним законом розподілу та робиться припущення, що всі джерела елементарних похибок не корелюють між собою та з вхідним сигналом, а в якості кількісної оцінки точності обчислення приймаються середньоквадратичні значення (СКЗ) похибок обчислення значень перетворень.

Постановка завдання. Отримані в праці [4] СКЗ похибок обчислення значень перетворень показали, що точність відомих рекурентних методів обчислення двовимірних ДПФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в додатковому коді в $3dmN$ та $3dmNp$, де d – кількість вимірів зсуву вхідного сигналу (один або два), m – зсув (відстань) між інтервалами вхідного сигналу, N – розмір вхідного сигналу по одному виміру, p – кількість ітерацій обчислення, рази нижча за точність обчислення для випадку округлення результатів операцій множення в прямому, оберненому та додатковому коді при обчисленні звичайних та модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ відповідно, в той час, як додатковий код є найбільш поширеним на практиці, а реалізація операції усікання є значно простішою за реалізацію операції округлення.

Метою цієї роботи є запропонувати рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ, точність яких в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в додатковому коді збігалась би з точністю відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою для випадку округлення результатів операцій множення в прямому, оберненому та додатковому коді та не знижувалась для інших випадків апроксимації результатів операцій множення.

Основні результати. Аналіз відомих рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ показав, що на СКЗ похибок обчислення значень перетворень в арифметиці з фіксованою комою для випадку усікання результатів операцій множення в додатковому коді суттєво впливають середні значення похибок результатів операцій множення. Для усунення їх впливу пропонується обчислювати звичайні та модифіковані двовимірні ДПФ за такими рекурентними виразами:

$$\operatorname{Re} F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2) = \left[\operatorname{Re} F_{i_1,i_2}(k_1,k_2) + \operatorname{Re}\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right]\cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)\right) -$$

$$-\left[\operatorname{Im} F_{i_1,i_2}(k_1,k_2) + \operatorname{Im}\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right]\cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)\right), \qquad (1)$$

$$\operatorname{Im} F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2) = \left[\operatorname{Re} F_{i_1,i_2}(k_1,k_2) + \operatorname{Re}\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right]\cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)\right) -$$

$$-\left[\operatorname{Im} F_{i_1,i_2}(k_1,k_2) + \operatorname{Im}\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right]\cdot \left(-\cos\left(2\pi\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)\right)\right), \qquad (2)$$

$$\operatorname{Re} F^{м}_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2) = \operatorname{Re} F^{м}_{i_1,i_2}(k_1,k_2) + \operatorname{Re}\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)\right) -$$

$$-\operatorname{Im}\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\cdot\left(-\sin\left(2\pi\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)\right)\right), \qquad (3)$$

$$\operatorname{Im} F^{м}_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2) = \operatorname{Im} F^{м}_{i_1,i_2}(k_1,k_2) + \operatorname{Im}\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)\right) -$$

$$-\operatorname{Re}\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)\right), \qquad (4)$$

де $F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)$, $F_{i_1,i_2}(k_1,k_2)$ – комплексні значення звичайного двовимірного ДПФ на (i_1+m_1, i_2+m_2)-му та (i_1,i_2)-му інтервалах відповідно; $F^{м}_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)$, $F^{м}_{i_1,i_2}(k_1,k_2)$ – комплексні значення модифікованого двовимірного ДПФ на (i_1+m_1, i_2+m_2)-му та (i_1,i_2)-му інтервалах відповідно; Re та Im – дійсні та уявні частини комплексних значень двовимірних ДПФ; i_1, i_2 – номери попереднього інтервалу вхідного сигналу за першим та другим вимірами відповідно; m_1, m_2 – зсуви поточного інтервалу відносно попереднього інтервалу вхідного сигналу за першим та другим вимірами відповідно; $k_1 = \overline{0, N_1-1}$, $k_2 = \overline{0, N_2-1}$ – номери значень перетворень за першим та другим вимірами відповідно; дійсні та уявні частини значення $\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)$ визначаються за такими виразами:

$$\operatorname{Re}\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2) = \sum_{n_1=0}^{]m_1/2[-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1, N_2+n_2+i_2) - x(n_1,n_2)\right]\cdot\cos\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right) -$$

$$-\sum_{n_1=]m_1/2[}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1, N_2+n_2+i_2) - x(n_1,n_2)\right]\cdot\left(-\cos\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)\right) +$$

$$+\sum_{n_1=0}^{]m_1/2[-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1, n_2+i_2) - x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot\cos\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right) -$$

$$-\sum_{n_1=]m_1/2[}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1, n_2+i_2) - x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot\left(-\cos\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)\right) +$$

$$+\sum_{n_1=m_1}^{](N_1+m_1)/2[-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(n_1+i_1, N_2+n_2+i_2) - x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot\cos\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right) -$$

$$-\sum_{n_1=](N_1+m_1)/2[}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(n_1+i_1, N_2+n_2+i_2) - x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot\left(-\cos\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)\right), \qquad (5)$$

$$\operatorname{Im}\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2) = \sum_{n_1=0}^{]m_1/2[-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1, N_2+n_2+i_2) - x(n_1,n_2)\right]\cdot\left(-\sin\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)\right) -$$

$$-\sum_{n_1=]m_1/2[}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1, N_2+n_2+i_2) - x(n_1,n_2)\right]\cdot\sin\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right) +$$

$$+\sum_{n_1=0}^{]m_1/2[-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1, n_2+i_2) - x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot\left(-\sin\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)\right) -$$

$$-\sum_{n_1=]m_1/2[}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\left[x\left(N_1+n_1+i_1,n_2+i_2\right)-x\left(n_1+i_1,n_2+i_2\right)\right]\cdot\sin\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)+$$

$$+\sum_{n_1=m_1}^{](N_1+m_1)/2[-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x\left(n_1+i_1,N_2+n_2+i_2\right)-x\left(n_1+i_1,n_2+i_2\right)\right]\cdot\left(-\sin\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)\right)-$$

$$-\sum_{n_1=](N_1+m_1)/2[}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x\left(n_1+i_1,N_2+n_2+i_2\right)-x\left(n_1+i_1,n_2+i_2\right)\right]\cdot\sin\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right), \quad (6)$$

де $x(a,b)$ – значення двовимірного вхідного сигналу з індексами a та b за першим і другим вимірами відповідно; $]x[$ – округлене до більшого цілого знаачення x.

Звичайні та модифіковані двовимірні ДПХ пропонується обчислювати за такими рекунентними виразами:

$$H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)=\left[H_{i_1,i_2}(k_1,k_2)+\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right]\cdot\cos\left(2\pi\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)\right)-$$

$$-\left[H_{i_1,i_2}(-k_1,-k_2)+\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(-k_1,-k_2)\right]\cdot\sin\left(2\pi\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)\right), \quad (7)$$

$$H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(-k_1,-k_2)=\left[H_{i_1,i_2}(k_1,k_2)+\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right]\cdot\sin\left(2\pi\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)\right)-$$

$$-\left[H_{i_1,i_2}(-k_1,-k_2)+\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(-k_1,-k_2)\right]\cdot\left(-\cos\left(2\pi\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)\right)\right), \quad (8)$$

$$H^{м}_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)=H^{м}_{i_1,i_2}(k_1,k_2)+\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\cdot\cos\left(2\pi\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)\right)-$$

$$-\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(-k_1,-k_2)\cdot\left(-\sin\left(2\pi\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)\right)\right), \quad (9)$$

$$H^{м}_{i_1+m_1,i_2+m_2}(-k_1,-k_2)=H^{м}_{i_1,i_2}(-k_1,-k_2)+\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(-k_1,-k_2)\cdot\cos\left(2\pi\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)\right)-$$

$$-\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\cdot\sin\left(2\pi\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)\right), \quad (10)$$

де $H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)$, $H_{i_1,i_2}(k_1,k_2)$ – значення звичайного двовимірного ДПХ на (i_1+m_1,i_2+m_2)-му та (i_1,i_2)-му інтервалах відповідно; $H^{м}_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)$, $H^{м}_{i_1,i_2}(k_1,k_2)$ – значення модифікованого двовимірного ДПХ на (i_1+m_1,i_2+m_2)-му та (i_1,i_2)-му інтервалах відповідно; i_1, i_2 – номери попереднього інтервалу вхідного сигналу за першим та другим вимірами відповідно; m_1, m_2 – зсуви поточного інтервалу відносно попереднього інтервалу вхідного сигналу за першим та другим вимірами відповідно; $k_1=\overline{0,N_1-1}$, $k_2=\overline{0,N_2-1}$ – номери значень перетворень за першим та другим вимірами відповідно; значення $\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)$ та $\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(-k_1,-k_2)$ визначаються за такими виразами:

$$\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{]m_1/2[-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x\left(N_1+n_1+i_1,N_2+n_2+i_2\right)-x\left(n_1+i_1,n_2+i_2\right)\right]\cdot\mathrm{cas}\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)-$$

$$-\sum_{n_1=]m_1/2[}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x\left(N_1+n_1+i_1,N_2+n_2+i_2\right)-x\left(n_1+i_1,n_2+i_2\right)\right]\cdot\left(-\mathrm{cas}\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)\right)+$$

$$+\sum_{n_1=0}^{]m_1/2[-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\left[x\left(N_1+n_1+i_1,n_2+i_2\right)-x\left(n_1+i_1,n_2+i_2\right)\right]\cdot\mathrm{cas}\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)-$$

$$-\sum_{n_1=]m_1/2[}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\left[x\left(N_1+n_1+i_1,n_2+i_2\right)-x\left(n_1+i_1,n_2+i_2\right)\right]\cdot\left(-\mathrm{cas}\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)\right)+$$

$$+\sum_{n_1=m_1}^{](N_1+m_1)/2[-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(n_1+i_1,N_2+n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot \mathrm{cas}\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)-$$

$$-\sum_{n_1=](N_1+m_1)/2[}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(n_1+i_1,N_2+n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot\left(-\mathrm{cas}\left(2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)\right), \qquad (11)$$

$$\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(-k_1,-k_2)=\sum_{n_1=0}^{]m_1/2[-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1,N_2+n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot \mathrm{cas}\left(-2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)-$$

$$-\sum_{n_1=]m_1/2[}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1,N_2+n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot\left(-\mathrm{cas}\left(-2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)\right)+$$

$$+\sum_{n_1=0}^{]m_1/2[-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1,n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot \mathrm{cas}\left(-2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)-$$

$$-\sum_{n_1=]m_1/2[}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1,n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot\left(-\mathrm{cas}\left(-2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)\right)+$$

$$+\sum_{n_1=m_1}^{](N_1+m_1)/2[-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(n_1+i_1,N_2+n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot \mathrm{cas}\left(-2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)-$$

$$-\sum_{n_1=](N_1+m_1)/2[}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(n_1+i_1,N_2+n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot\left(-\mathrm{cas}\left(-2\pi\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)\right)\right), \qquad (12)$$

де $\mathrm{cas}(X)=\cos(X)+\sin(X)$.

Оскільки обчислювальними операціями виразів (1) – (12) є операції додавання (віднімання) та множення, то при реалізації рекурентних методів обчислення двовимірних ДПФ і ДПХ в арифметиці з фіксованою комою джерелами похибок обчислення можуть бути лише похибки операцій множення, обумовлені округленням або усіканням результатів добутків, оскільки похибки операцій зсувів, виконання яких необхідно для усунення можливих переповнень розрядної сітки при виконанні операцій додавання (віднімання), відсутні внаслідок вхідного масштабування, при якому значення вхідного сигналу масштабуються так, щоб в процесі обчислення не виникло переповнень.

Порівнюючи відповідні вирази обчислення двовимірних ДПФ і ДПХ, видно, що вони мають однакову структуру щодо складу та порядку операцій множення, внаслідок чого точність обчислення цих виразів однакова. Враховуючи це, аналіз точності можна провести лише для рекурентних методів обчислення звичайного та модифікованого двовимірних ДПФ, котрі ґрунтуються на таких рекурентних виразах в комплексній формі:

$$F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)=\left[F_{i_1,i_2}(k_1,k_2)+\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right]\cdot W^{-\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}, \qquad (13)$$

$$F^{M}_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)=F^{M}_{i_1,i_2}(k_1,k_2)+\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\cdot W^{\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)}, \qquad (14)$$

де $W=\exp(-j2\pi)$, $j=\sqrt{-1}$;

$$\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{]m_1/2[-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1,N_2+n_2+i_2)-x(n_1,n_2)\right]\cdot W^{\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)}-$$

$$-\sum_{n_1=]m_1/2[}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1,N_2+n_2+i_2)-x(n_1,n_2)\right]\cdot\left(-W^{\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)}\right)+$$

$$+\sum_{n_1=0}^{]m_1/2[-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1,n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot W^{\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)}-$$

$$-\sum_{n_1=]m_1/2[}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1,n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot\left(-W^{\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)}\right)+$$

$$+\sum_{n_1=m_1}^{](N_1+m_1)/2[-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(n_1+i_1,N_2+n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot W^{\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)}-$$

$$-\sum_{n_1=](N_1+m_1)/2[}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(n_1+i_1,N_2+n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot\left(-W^{\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)}\right). \tag{15}$$

Враховуючи можливі джерела похибок обчислення, на підставі виразів (13) – (14) можуть бути отримані рекурентні вирази для визначення похибок обчислення звичайного та модифікованого двовимірних ДПФ в арифметиці з фіксованою комою, котрі мають такий вигляд:

$$E\left(F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right)=\left[E\left(F_{i_1,i_2}(k_1,k_2)\right)+E\left(\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right)\right]\cdot W^{-\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}+E_{мк2_{i_1+m_1,i_2+m_2}}, \tag{16}$$

$$E\left(F^{м}_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right)=E\left(F^{м}_{i_1,i_2}(k_1,k_2)\right)+E\left(\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right)\cdot W^{\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)}+E_{мк2_{i_1+m_1,i_2+m_2}}, \tag{17}$$

де $E(X)$ – похибка обчислення значення X; $E_{мк2_{i_1+m_1,i_2+m_2}}$ – похибка операції комплексного множення другого виду на (i_1+m_1,i_2+m_2)-му інтервалі; значення $E\left(\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right)$ визначаються за таким виразом:

$$E\left(\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right)=\sum_{n_1=0}^{]m_1/2[-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}E_{мк1_{n1,n2}}-\sum_{n_1=]m_1/2[}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}E_{мк1_{n1,n2}}+$$
$$+\sum_{n_1=0}^{]m_1/2[-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}E_{мк1_{n_1+m_1,n_2+m_2}}-\sum_{n_1=]m_1/2[}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}E_{мк1_{n_1+m_1,n_2+m_2}}+$$
$$+\sum_{n_1=m_1}^{](N_1+m_1)/2[-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}E_{мк1_{n_1+2m_1,n_2+N_2}}-\sum_{n_1=](N_1+m_1)/2[}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}E_{мк1_{n_1+2m_1,n_2+N_2}}, \tag{18}$$

де $E_{мк1_{a,b}}$ – (a,b)-а похибка операції комплексного множення першого виду.

Ітераційні вирази для визначення похибок обчислення звичайного та модифікованого двовимірних ДПФ, котрі отримуються на підставі рекурентних виразів обчислення двовимірних ДПФ (13), (14) та визначення похибок обчислення (16), (17) з урахуванням того, що для $i_1=i_2=0$ $E\left(F_{0,0}(k_1,k_2)\right)=E\left(F^{м}_{0,0}(k_1,k_2)\right)=0$, визначаються як

$$E\left(F_{pm_1,pm_2}(k_1,k_2)\right)=\sum_{l=1}^{p}E\left(\Delta F_{lm_1,lm_2}(k_1,k_2)\right)\cdot W^{-(p-l+1)\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}+\sum_{l=1}^{p}E_{мк2_{lm_1,lm_2}}W^{-(p-l)\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}, \tag{19}$$

$$E\left(F^{м}_{pm_1,pm_2}(k_1,k_2)\right)=W^{\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)}\sum_{l=1}^{p}E\left(\Delta F_{lm_1,lm_2}(k_1,k_2)\right)+\sum_{l=1}^{p}E_{мк2_{lm_1,lm_2}}, \tag{20}$$

де p – кількість ітерацій обчислення.

Дисперсії та середні значення (математичні очікування) похибок обчислення за виразами (19), (20) визначаються як

$$D\left[E\left(F_{pm_1,pm_2}(k_1,k_2)\right)\right]=D\left[E\left(F^{м}_{pm_1,pm_2}(k_1,k_2)\right)\right]=p\cdot\left(D\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]+D\left[E_{мк2}\right]\right), \tag{21}$$

$$M\left[E\left(F_{pm_1,pm_2}(k_1,k_2)\right)\right]=M\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]\sum_{l=1}^{p}W^{-(p-l+1)\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}+M\left[E_{мк2}\right]\sum_{l=1}^{p}W^{-(p-l)\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}, \tag{22}$$

$$M\left[E\left(F^{м}_{pm_1,pm_2}(k_1,k_2)\right)\right]=p\cdot M\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]\cdot W^{\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)}+p\cdot M\left[E_{мк2}\right], \tag{23}$$

де $D[X]$ – дисперсія похибки обчислення значення X; $M[X]$ – математичне очікування значення X; значчення $D\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]$ та $M\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]$ визначаються за такими виразами:

$$D\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]=\left(m_1m_2+m_1(N_2-m_2)+m_2(N_1-m_1)\right)\cdot D\left[E_{мк1}\right], \tag{24}$$

$$M\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]=\begin{cases}0, m_1-парне,\ N_1-парне\\ M\left[E_{мк1}\right], m_1-парне,\ N_1-непарне\\ 2M\left[E_{мк1}\right], m_1-непарне,\ N_1-непарне\\ 3M\left[E_{мк1}\right], m_1-непарне,\ N_1-парне\end{cases}. \tag{25}$$

При визначенні дисперсій та середніх значень похибок обчислення ДПФ слід врахувати, що похибка операції комплексного множення першого виду, яка визначається як $E_{мк1} = E_{мд_1} + jE_{мд_2}$, має $D[E_{мк1}] = 2D[E_{мд}]$ та $M[E_{мк1}] = M[E_{мд}] + jM[E_{мд}]$ і відповідно $|M[E_{мк1}]|^2 = 2M^2[E_{мд}]$, де $E_{мд}$ – похибка операції дійсного множення, а похибка операції комплексного множення другого виду, яка відповідно до реалізації комплексного множення в виразах (1) – (4) визначається як $E_{мк2} = (E_{мд_1} - E_{мд_2}) + j(E_{мд_3} - E_{мд_4})$, має $D[E_{мк2}] = 4D[E_{мд}]$ та $M[E_{мк2}] = 0$.

Оскільки на практиці можна вибрати такі значення m_1 та N_1, для яких середні значення похибок обчислення за виразоам (25) дорівнюють нулю, то СКЗ похибок обчислення, які визначаються за виразом $M\left[|X|^2\right] = D[X] + |M[X]|^2$, де X – похибка обчислення, будуть визначатись лише значеннями їхніх дисперсій за виразами (21), (24).

В табл. 1 наведено СКЗ похибок обчислення звичайного та модифікованого двовимірного ДПФ для $N_1 = N_2 = N$ та $m_1 = m_2 = m$ на основі відомих [3] та запропонованих в цій роботі рекурентних методів з врахуванням значень дисперсій та середніх значень похибок операцій множення для $(b+1)$-розрядних чисел. Оскільки СКЗ похибки обчислення комплексного значення ДПФ дорівнює сумі СКЗ похибок обчислення двох значень ДПХ, то для рекурентних методів обчислення двовимірних ДПХ приймаються вдвічі менші за наведені в табл. 1 значення.

Таблиця 1. **Точність рекурентних методів обчислення двовимірних ДПФ**

Вид апроксимації результатів операцій множення	Методи обчислення	СКЗ похибок обчислення двовимірних ДПФ при зсуві	
		по одному виміру	по двох вимірах
округлення прямого, оберненого та додаткового коду	відомі та запропоновані	$\frac{mpN}{6} \cdot 2^{-2b}$	$\frac{mpN}{3} \cdot 2^{-2b}$
усікання прямого та оберненого коду	відомі та запропоновані	$\frac{2mpN}{3} \cdot 2^{-2b}$	$\frac{4mpN}{3} \cdot 2^{-2b}$
усікання додаткового коду	відомі	$\left[\frac{mpN}{6} + \frac{(mN)^2 Q}{2}\right] \cdot 2^{-2b}$	$\left[\frac{mpN}{3} + 2(mN)^2 Q\right] \cdot 2^{-2b}$
	запропоновані	$\frac{mpN}{6} \cdot 2^{-2b}$	$\frac{mpN}{3} \cdot 2^{-2b}$

Примітки:

1. $Q = p$ для звичайного ДПФ та $Q = p^2$ для модифікованого ДПФ.
2. Для випадку усікання додаткового коду СКЗ похибок обчислення відомих звичайних двовимірних ДПФ усереднені по k_1, k_2.

Висновки

Таким чином, запропоновані рекурентні методи обчислення звичайних та модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ дозволяють підвищити точність обчислення в $3dmN$ та $3dmNp$, де d – кількість вимірів зсуву вхідного сигналу (один або два), m – зсув (відстань) між інтервалами вхідного сигналу, N – розмір вхідного сигналу по одному виміру, p – кількість ітерацій обчислення, при обчисленні відповідно звичайних і модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ для випадку апроксимації результатів операцій множення в додатковому коді, забезпечуючи ту ж саму точність обчислення, що і відомі рекурентні методи обчислення для інших випадків апроксимації результатів операцій множення, що дозволяє використовувати запропоновані методи на практиці для різних кодів та видів апроксимації результатів операцій множення, зокрема, для випадку усікання додаткового коду, оскільки додатковий код є найбільш поширеним на практиці, а реалізація операції усікання є значно простішою за реалізацію операції округлення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ярославский Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
2. Цифровые анализаторы спектра / В.Н. Плотников, А.В. Белинский, В.А. Суханов, Ю.Н. Жигулевцев. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
3. Волинець В.І. Рекурентні алгоритми обчислення двоовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2001. – № 4. – С. 182-187.
4. Волинець В.І. Аналіз точності рекурентних методів обчислення двовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з фіксованою комою // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2007. – Т. 2. – № 3. – С. 180-185.
5. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – М.: Техносфера, 2006. – 856 с.

Дата відправлення рукопису 04.12.10 р.