1971 ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА Том VII, в. 12
ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КИБЕРНЕТИКИ АН УССР

УДК 539.3

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО НЕКАНОНИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Ю. Н. Немиш, В. Н. Немиш, П. Ф. Ярема

(Киев, Черновцы)

В работе [13] дан обзор исследований некоторых классов задач механики сплошной среды для неканонических (не допускающих решения краевых задач методом непосредственного разделения переменных) односвязных и многосвязных областей. В частности, рассматриваются вопросы, относящиеся к теории оболочек и пластин, плоским статическим и динамическим задачам теории упругости как в классической, так и в уточненных постановках, двумерным задачам аэрогидроупругости для сжимаемой и несжимаемой жидкости и др. Для решения указанных классов задач использовался единый подход, основанный на развитии методов теории возмущений [6].

Статьи [2, 3, 4, 7, 8, 9, 10] посвящены распространению метода «возмущения формы границы» на пространственные задачи механики сплошной среды для неканонических областей, граничные поверхности которых мало отличаются от сферических. Для фигур, близких к эллипсоиду вращения, приближенный метод решения краевых задач теории упругости развит в работах [11, 12].

В данной статье рассматриваются внешние осесимметричные задачи теории упругости для однородной изотропной среды, ограниченной неканоническими поверхностями вращения. В частности, аналитические и числовые исследования проведены для конической и замкнутых цилиндрических полостей.

§ 1. Рассмотрим поверхность S, образованную вращением вокруг оси oz гипотрохоидной кривой Г, уравнение которой в произвольной меридиональной плоскости zoR записывается на основании зависимостей

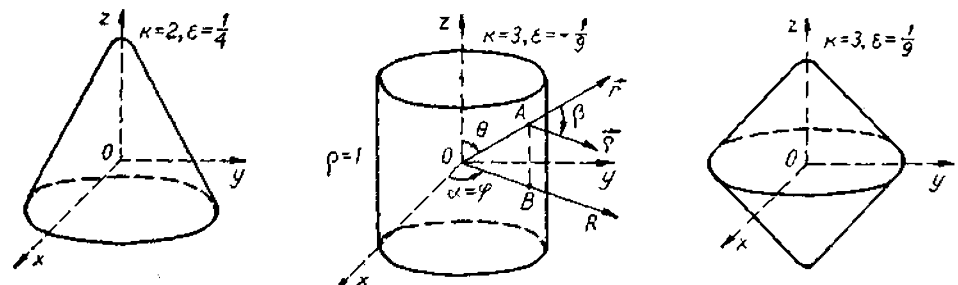
$$\varrho = \text{const}; \quad z + iR = \frac{1}{r_0}\,\omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon\zeta^{-k} = re^{i\theta}$$
$$\left(\zeta = \varrho e^{i\vartheta}, \quad \varepsilon = \frac{m}{k}, \quad 0<|m|<1\right). \tag{1.1}$$

Здесь линейная величина r_0 характеризует абсолютные размеры контура Г.

При $k = 1$ уравнениям (1.1) отвечают вытянутые ($\varepsilon>0$) или сжатые ($\varepsilon < 0$) эллипсоиды вращения.

Если $k > 1$, то при определенных значениях параметра ε из соотношений (1.1) можно получить уравнения, соответствующие «правильному»

($k+1$)-угольнику с закругленными углами, при вращении которого вокруг оси oz образуются неканонические поверхности. Так, например, при $k = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{3} \div \frac{1}{4}$ на основании (1.1) можно построить «правильный» трехугольник, которому соответствует конус, изображенный на рис. 1, *а* (при $\varepsilon = -\frac{1}{3} \div \frac{1}{4}$ конус зеркально отображается относительно плоско-



а *б* *в*

Рис. 1.

сти xoy). Значениям $k = 3$, $\varepsilon = \pm\frac{1}{6} \div \frac{1}{9}$ отвечает «квадрат», а следовательно, пространственные фигуры, представленные на рис. 1 *б*, *в*.

Связь между безразмерными декартовыми x, y, z и криволинейными ортогональными ϱ, ϑ, φ координатами имеет вид

$$\begin{aligned} x &= (\varrho \sin\vartheta - \varepsilon\varrho^{-k} \sin k\vartheta)\cos\varphi; \\ y &= (\varrho \sin\vartheta - \varepsilon\varrho^{-k} \sin k\vartheta)\sin\varphi; \\ z &= \varrho\cos\vartheta + \varepsilon\varrho^{-k}\cos k\vartheta. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Безразмерные сферические координаты r, θ и угол β между радиальным направлением $\vec{r}$ и нормалью $\vec{\rho}$ к контуру Γ выражаются через отображающую функцию $\omega(\zeta)$ по формулам

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{r_0}\sqrt{\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}}; \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\omega(\zeta)}{\operatorname{Re}\omega(\zeta)}; \\ e^{i\beta} &= \frac{\zeta\omega'(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}}{|\zeta||\omega'(\zeta)||\overline{\omega(\zeta)}|}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Следовательно, произвольная функция, зависящая от переменных x, y, z или r, θ, β, может быть представлена в виде ряда по степеням малого параметра ε ($|\varepsilon| \ll 1$).

Рассмотрим задачу о напряженном состоянии однородной изотропной среды, ограниченной неканонической поверхностью ($k > 1$) в случае нагрузки, симметрично распределенной относительно оси oz (осесимметричная задача). Исследование напряженного состояния среды будем проводить методом «возмущения формы границы». Для этого представим компоненты σ_ϱ, σ_ϑ, σ_φ, $\tau_{\varrho\vartheta}$ в виде рядов по степеням параметра ε, т. е.

$$\sigma_\varrho = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \sigma_\varrho^{(j)}, \ldots, \tau_{\varrho\vartheta} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \tau_{\varrho\vartheta}^{(j)}. \tag{1.4}$$

Используя формулы перехода от напряжений в сферической системе координат r, θ, α к соответствующим составляющим в криволинейной ортогональной системе координат ϱ, ϑ, φ и соотношения (1.3), а затем разлагая их в ряды вида (1.4), после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях параметра ε для определения компонентов j-го приближения получаем рекуррентные соотношения [7]

$$\begin{Bmatrix}\sigma_\varrho^{(j)}\\ \sigma_\vartheta^{(j)}\end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{j}\left[\Lambda_1^{(j-m)}\begin{Bmatrix}\sigma_r^{(m)}\\ \sigma_\theta^{(m)}\end{Bmatrix} \pm \Lambda_2^{(j-m)}(\sigma_\theta^{(m)}-\sigma_r^{(m)}) \pm \Lambda_3^{(j-m)}\tau_{r\theta}^{(m)}\right];$$

$$\sigma_\varphi^{(j)} = \sum_{m=0}^{j}\Lambda_1^{(j-m)}\sigma_\alpha^{(m)}; \tag{1.5}$$

$$\tau_{\varrho\vartheta}^{(j)} = \sum_{m=0}^{j}\left[\Lambda_4^{(j-m)}\tau_{r\theta}^{(m)} + \frac{1}{2}\Lambda_3^{(j-m)}(\sigma_\theta^{(m)}-\sigma_r^{(m)})\right].$$

Здесь $\Lambda_i^{(j)}$ — дифференциальные операторы, которые для отображающей функции (1.1) в нулевом, первом и втором приближениях имеют вид

$$\Lambda_1^{(0)} = \Lambda_4^{(0)} = 1;\quad \Lambda_2^{(0)} = \Lambda_3^{(0)} = \Lambda_2^{(1)} = 0;$$

$$\Lambda_1^{(1)} = \Lambda_4^{(1)} = \frac{\cos(k+1)\vartheta}{\varrho^k}\frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{\sin(k+1)\vartheta}{\varrho^{k+1}}\frac{\partial}{\partial\vartheta};$$

$$\Lambda_3^{(1)} = \frac{2(k+1)\sin(k+1)\vartheta}{\varrho^{k+1}};\quad \Lambda_4^{(2)} = \Lambda_1^{(2)} - 2\Lambda_2^{(2)};$$

$$\Lambda_1^{(2)} = \frac{1+\cos 2(k+1)\vartheta}{4\varrho^{2k}}\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} - \frac{\sin 2(k+1)\vartheta}{2\varrho^{2k}}\frac{\partial^2}{\partial\varrho\partial\vartheta}\frac{1}{\varrho} + \tag{1.6}$$

$$+\frac{1-\cos 2(k+1)\vartheta}{4\varrho^{2k+2}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\right);$$

$$\Lambda_2^{(2)} = \frac{(k+1)^2[1-\cos 2(k+1)\vartheta]}{2\varrho^{2k+2}};\quad \Lambda_3^{(2)} = \frac{(k^2-1)\sin 2(k+1)\vartheta}{\varrho^{2k+2}} +$$

$$+\frac{(k+1)\sin 2(k+1)\vartheta}{\varrho^{2k+1}}\frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{(k+1)[1-\cos 2(k+1)\vartheta]}{\varrho^{2k+2}}\frac{\partial}{\partial\vartheta}.$$

Компоненты $\sigma_r^{(m)}(\varrho,\vartheta)$, $\sigma_\theta^{(m)}(\varrho,\vartheta)$, $\sigma_\alpha^{(m)}(\varrho,\vartheta)$, $\tau_{r\theta}^{(m)}(\varrho,\vartheta)$ записываются на основании их представлений в безразмерных (отнесенных к величине r_0) сферических координатах, если формально заменить переменные r, θ соответственно на ϱ, ϑ, а произвольные постоянные снабдить индексом (m). Следовательно, согласно результатам монографии [5] в рассматриваемом случае для внешней задачи имеем

$$\sigma_r^{(m)}(\varrho,\vartheta) = \frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{n(n^2+3n-2\nu)}{\varrho^{n+1}}C_n^{(m)} + \frac{(n+1)(n+2)}{\varrho^{n+3}}D_n^{(m)}\right]P_n(\cos\vartheta);$$

$$\sigma_\theta^{(m)}(\varrho,\vartheta) = \frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{n(n^2-2n-1+2\nu)}{\varrho^{n+1}}C_n^{(m)} - \frac{(n+1)^2}{\varrho^{n+3}}D_n^{(m)}\right]P_n(\cos\vartheta) -\right.$$

$$-\left[\frac{-n+4-4\nu}{\varrho^{n+1}}C_n^{(m)}+\frac{1}{\varrho^{n+3}}D_n^{(m)}\right]\operatorname{ctg}\vartheta\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\Bigg\};$$

$$\sigma_\alpha^{(m)}(\varrho,\vartheta)=\frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\left[\frac{n(n+3-4n\nu-2\nu)}{\varrho^{n+1}}C_n^{(m)}-\frac{n+1}{\varrho^{n+3}}D_n^{(m)}\right]P_n(\cos\vartheta)+ \tag{1.7}$$

$$+\left[\frac{-n+4-4\nu}{\varrho^{n+1}}C_n^{(m)}+\frac{1}{\varrho^{n+3}}D_n^{(m)}\right]\operatorname{ctg}\vartheta\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\Bigg\};$$

$$\tau_{r\theta}^{(m)}(\varrho,\vartheta)=\frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^2-2+2\nu}{\varrho^{n+1}}C_n^{(m)}-\frac{n+2}{\varrho^{n+3}}D_n^{(m)}\right]\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}.$$

Здесь $P_n(\cos\vartheta)$—полиномы Лежандра; $C_n^{(m)}$, $D_n^{(m)}$ — произвольные постоянные, подлежащие определению из граничных условий; ν — коэффициент Пуассона.

Чтобы записать соответствующие выражения для внутренней задачи, достаточно в формулах (1.7) заменить n на $-n-1$.

Заметим, что для каждого конкретного значения n компоненты $\sigma_\theta^{(m)}(\varrho,\vartheta)$, $\sigma_\alpha^{(m)}(\varrho,\vartheta)$ могут быть представлены разложениями только по полиномам $P_n(\cos\vartheta)$. Для этого необходимо воспользоваться формулой

$$\operatorname{ctg}\vartheta\frac{dP_n}{d\vartheta}=-nP_n-(2n-3)P_{n-2}-(2n-7)P_{n-4}-(2n-11)P_{n-6}-P'_{n-7}, \tag{1.8}$$

которая следует из рекуррентных соотношений [1]

$$nP_n-\cos\vartheta P'_n+P'_{n-1}=0;\quad P'_{n+1}-P'_{n-1}=(2n+1)P_n, \tag{1.9}$$

где штрихом отмечена производная по $\cos\vartheta$.

Краевые условия для последовательных приближений в случае заданных усилий на граничной поверхности $\varrho=1$ будут

$$(\hat{\sigma}_\varrho^{(i)}+\sigma_\varrho^{(i)})_{\varrho=1}=\sigma^{(i)}(\vartheta);\quad (\hat{\tau}_{\varrho\theta}^{(i)}+\tau_{\varrho\theta}^{(i)})_{\varrho=1}=\tau^{(i)}(\vartheta). \tag{1.10}$$

Здесь $\hat{\sigma}_\varrho^{(i)}$, $\hat{\tau}_{\varrho\theta}^{(i)}$ — известные величины, соответствующие действующим усилиям «на бесконечности»; $\sigma^{(i)}$, $\tau^{(i)}$ — заданные функции на поверхности тела.

Используя соотношения (1.5) — (1.7) и граничные условия (1.10), получаем

$$\frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}[-n(n^2+3n-2\nu)C_n^{(m)}+(n+1)(n+2)D_n^{(m)}]P_n(\cos\vartheta)=\Phi^{(m)}(\nu,\vartheta); \tag{1.11}$$

$$\frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}[(n^2-2+2\nu)C_n^{(m)}-(n+2)D_n^{(m)}]\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}=\Psi^{(m)}(\nu,\vartheta),$$

где $\Phi^{(m)}(\nu,\vartheta)$, $\Psi^{(m)}(\nu,\vartheta)$ — известные функции, которые могут быть представлены в виде

$$\Phi^{(m)}(\nu,\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(m)}(\nu)P_n(\cos\vartheta);\quad \Psi^{(m)}(\nu,\vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{(m)}(\nu)\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}. \tag{1.12}$$

Коэффициенты $a_n^{(m)}(\nu)$, $b_n^{(m)}(\nu)$ определяются формулами

$$
\begin{aligned}
a_n^{(m)}(\nu) &= \frac{2n+1}{2}\int\limits_0^{\pi} \Phi^{(m)}(\nu, \vartheta) P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta; \\
b_n^{(m)}(\nu) &= \frac{2n+1}{2n(n+1)}\int\limits_0^{\pi} \Psi^{(m)}(\nu, \vartheta)\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\sin\vartheta d\vartheta.
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

Заметим, что в функции $\Phi^{(m)}(\nu, \vartheta)$ входят произведения вида $\cos k\vartheta\cdot P_n(\cos\vartheta)$, $\sin k\vartheta\cdot\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}$, а в функции $\Psi^{(m)}(\nu, \vartheta)$ — выражения $\cos k\vartheta\cdot\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}$, $\sin k\vartheta\cdot P_n(\cos\vartheta)$, $\sin k\vartheta\cdot\frac{d^2P_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta^2}$. Следовательно, специфика этих функций дает возможность получить представления (1.12) с помощью соответствующих рекуррентных соотношений [1,8], т. е. без использования формул (1.13).

Подставляя выражения (1.12) в уравнения (1.11), после приравнивания коэффициентов при одинаковых полиномах Лежандра и их производных получаем систему уравнений, из которой находим

$$
\begin{aligned}
&C_n^{(m)} = -\frac{a_n^{(m)}(\nu) + (n+1)b_n^{(m)}(\nu)}{2[n(n+1)+1-(2n+1)\nu]}; \quad D_0^{(m)} = \frac{a_0^{(m)}}{2}; \\
&D_n^{(m)} = \frac{1}{n+2}\left[(n^2-2+2\nu)C_n^{(m)} - \frac{r_0^2}{2G}b_n^{(m)}(\nu)\right] \quad (n \geqslant 1).
\end{aligned} \tag{1.14}
$$

Таким образом, исходная граничная задача математической теории упругости для неканонических поверхностей формально свелась к последовательности краевых задач для сферических поверхностей.

§ 2. Предположим, что однородная изотропная среда с конической полостью (см. рис. 1, *а*) находится «на бесконечности» под действием внешних усилий

$$
\sigma_x^{(\infty)} = \sigma_y^{(\infty)} = \sigma_z^{(\infty)} = p \quad (\tau_{xy}^{(\infty)} = \tau_{xz}^{(\infty)} = \tau_{yz}^{(\infty)} = 0), \tag{2.1}
$$

где p — интенсивность нагрузки (значение $p > 0$ соответствует растяжению, $p < 0$ — сжатию).

Допустим, что коническая поверхность $\varrho = 1$ свободна от напряжений. Следовательно, согласно граничным условиям (1.10) имеем

$$
\begin{aligned}
&\hat{\sigma}_\varrho^{(0)} = \hat{\sigma}_\vartheta^{(0)} = \hat{\sigma}_\varphi^{(0)} = p; \quad \hat{\tau}_{\varrho\vartheta}^{(0)} = 0; \quad \hat{\sigma}_\varrho^{(j)} = \hat{\sigma}_\vartheta^{(j)} = \hat{\sigma}_\varphi^{(j)} = \hat{\tau}_{\varrho\vartheta}^{(j)} = 0 \quad (j \geqslant 1); \\
&\sigma^{(j)} = \tau^{(j)} = 0 \quad (j \geqslant 0).
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

При этом в первых трех приближениях отличными от нуля являются следующие постоянные (1.14): $C_3^{(1)}$, $C_2^{(2)}$, $C_4^{(2)}$, $C_6^{(2)}$, $D_0^{(0)}$, $D_1^{(1)}$, $D_3^{(1)}$, $D_0^{(2)}$, $D_2^{(2)}$, $D_4^{(2)}$, $D_6^{(2)}$.

Опуская промежуточные выкладки, которые проводятся по описанной в § 1 методике, приведем (с погрешностью порядка ε^3 по сравнению с единицей) окончательные выражения для напряжений

$$
\sigma_i^{*(j)} = \sigma_i^{*(j-1)} + \varepsilon^j\sigma_i^{(j)} \quad (i = \varrho, \vartheta, \varphi). \tag{2.3}
$$

Здесь $\sigma_i^{*(0)} = \hat{\sigma}_i^{(0)} + \sigma_i^{(0)}$, откуда следует

$$\frac{\sigma_\varrho^{*(0)}}{p} = 1 - \frac{1}{\varrho^3}; \quad \frac{\sigma_\vartheta^{*(0)}}{p} = \frac{\sigma_\varphi^{*(0)}}{p} = 1 + \frac{1}{2\varrho^3}. \tag{2.4}$$

По формулам (2.4) определяется напряженное состояние среды со сферической полостью.

В первом приближении получаем

$$\frac{\sigma_\varrho^{(1)}}{p} = \frac{9}{5}\left(\frac{1}{\varrho^4} - \frac{1}{\varrho^6}\right)\left[P_1(\cos\vartheta) + \frac{8(9-\nu)}{13-7\nu}P_3(\cos\vartheta)\right];$$

$$\frac{\sigma_\vartheta^{(1)}}{p} = \frac{9}{10(13-7\nu)}\left[-\frac{3(7-13\nu)}{\varrho^4} - \frac{19-\nu}{\varrho^6}\right]P_1(\cos\vartheta) +$$

$$+ \frac{48}{5(13-7\nu)}\left(-\frac{3-2\nu}{\varrho^4} + \frac{13-2\nu}{\varrho^6}\right)P_3(\cos\vartheta); \tag{2.5}$$

$$\frac{\sigma_\varphi^{(1)}}{p} = \frac{9}{2(13-7\nu)}\left[-\frac{1+5\nu}{\varrho^4} + \frac{3(3-\nu)}{\varrho^6}\right]P_1(\cos\vartheta) -$$

$$- \frac{36}{13-7\nu}\left(\frac{1-2\nu}{\varrho^4} - \frac{1}{\varrho^6}\right)P_3(\cos\vartheta).$$

Компонентам второго приближения при $\varrho = 1$ соответствуют выражения

$$\left.\frac{\sigma_\vartheta^{(2)}}{p}\right|_{\varrho=1} = a(\nu) + b(\nu)P_2(\cos\vartheta) + c(\nu)P_4(\cos\vartheta) + d(\nu)P_6(\cos\vartheta);$$

$$\left.\frac{\sigma_\varphi^{(2)}}{p}\right|_{\varrho=1} = -a(\nu) + b^*(\nu)P_2(\cos\vartheta) + \nu c(\nu)P_4(\cos\vartheta) + \nu d(\nu)P_6(\cos\vartheta). \tag{2.6}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a(\nu) = \frac{1}{5\Omega(\nu)}(230146 - 877650\nu + 930734\nu^2 - 283230\nu^3);$$

$$b(\nu) = \frac{1}{\Omega(\nu)}(-193508 + 153072\nu + 176420\nu^2 - 115920\nu^3);$$

$$b^*(\nu) = \frac{1}{\Omega(\nu)}(13328 - 40740\nu + 23824\nu^2 + 23652\nu^3); \tag{2.7}$$

$$c(\nu) = \frac{7-5\nu}{5\Omega(\nu)}(-455616 + 483264\nu); \quad d(\nu) = \frac{15360}{77(13-7\nu)};$$

$$\Omega(\nu) = 77(7-3\nu)(7-5\nu)(13-7\nu).$$

По меридиальному сечению $\vartheta = 0$ имеет место формула

$$\left.\frac{\sigma_\vartheta^{(2)}}{p}\right|_{\vartheta=0} = \left.\frac{\sigma_\varphi^{(2)}}{p}\right|_{\vartheta=0} = \frac{4334 - 13176\nu + 9610\nu^2}{35(7-5\nu)(13-7\nu)\varrho^3} +$$

$$+ \frac{587391 - 3140793\nu + 3907641\nu^2 - 1349775\nu^3}{5\Omega(\nu)\varrho^5} +$$

$$+ \frac{-280938 + 264960\nu - 41382\nu^2}{77(7-3\nu)(13-7\nu)\varrho^7} + \frac{5101 - 439\nu}{11(13-7\nu)\varrho^9}. \tag{2.8}$$

На рис. 2 дано распределение напряжений вдоль половины меридионального сечения конической полости $\varrho = 1$ при $\nu = 0{,}3$; $\varepsilon = 0{,}25$. Исследования показали, что зона повышенной концентрации напряжений носит ярко выраженный локальный характер (рис. 3).

§ 3. Рассмотрим задачу о напряженном состоянии однородной изотропной среды, ограниченной изображенными на рис. 1 *б*, *в* неканоническими поверхностями вращения. Как и в § 2, предполагается, что «на бесконечности» среда находится под действием усилий (2.1), а поверхность $\varrho = 1$

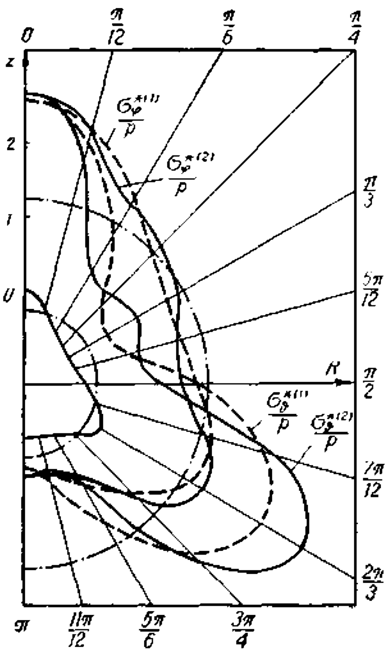


Рис. 2.

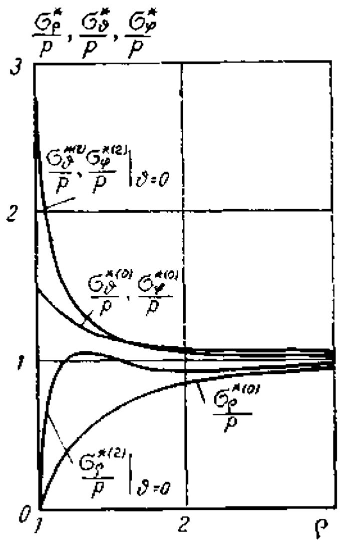


Рис. 3.

свободна от напряжений. Тогда для этой задачи справедливы формулы (2.4).

В первом приближении коэффициенты разложений (1.12) имеют простой вид

$$a_0^{(1)} = \frac{1}{5}p; \quad a_2^{(1)} = \frac{16}{7}p; \quad a_4^{(1)} = -\frac{192}{35}p; \quad b_2^{(1)} = -\frac{8}{7}p; \quad b_4^{(1)} = \frac{96}{35}p. \tag{3.1}$$

Следовательно, по формулам (1.14) легко определить коэффициенты $C_2^{(1)}$, $C_4^{(1)}$, $D_0^{(1)}$, $D_2^{(1)}$, $D_4^{(1)}$ ($C_n^{(1)} = 0$ при $n \neq 2, 4$ и $D_n^{(1)} = 0$ при $n \neq 0, 2, 4$). Тогда на основании соотношений (1.5)—(1.7) получаем

$$\frac{\sigma_\varrho^{(1)}}{p} = \sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} h_{kj}(\nu)\,\varrho^{-2j-3}P_{2k}(\cos\vartheta) + 3\varrho^{-7}\cos 4\vartheta;$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_\vartheta^{(1)}\\ \sigma_\varphi^{(1)}\end{Bmatrix} = p\sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\begin{Bmatrix} l_{kj}(\nu)\\ t_{kj}(\nu)\end{Bmatrix}\varrho^{-2j-3}P_{2k}(\cos\vartheta) - \frac{3}{2}p\varrho^{-7}\cos 4\vartheta; \tag{3.2}$$

$$\frac{\tau_{\varrho\vartheta}^{(1)}}{p} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2} q_{kj}(\nu)\,\varrho^{-2j-3}\frac{dP_{2k}(\cos\vartheta)}{d\vartheta} + 6\varrho^{-7}\sin 4\vartheta.$$

Здесь $h_{kj}(\nu)$, $l_{kj}(\nu)$, $t_{kj}(\nu)$, $q_{kj}(\nu)$ — известные выражения, причем

$$\sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} l_{kj}(\nu) = \sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} t_{kj}(\nu) = -\frac{1}{10} - \frac{16(5-\nu)}{7(7-5\nu)} + \frac{96(21+11\nu)}{35(7-3\nu)}. \quad (3.3)$$

При отыскании компонентов второго приближения задача значительно усложняется. Так, например, для составляющей $\sigma_\varrho^{(2)}$ имеем формулу

$$\frac{\sigma_\varrho^{(2)}}{p} = \frac{\sigma_r^{(2)}(\varrho,\vartheta)}{p} + \sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \varrho^{-2j-7}\Big[(8q_{kj} - h_{kj})\sin 4\vartheta \frac{dP_{2k}(\cos\vartheta)}{d\vartheta} -$$
$$- (2j+3)h_{kj}\cos 4\vartheta P_{2k}(\cos\vartheta)\Big] + \frac{3}{4}\varrho^{-11}(13 - 21\cos 8\vartheta), \quad (3.4)$$

где выражение $\sigma_r^{(2)}(\varrho,\vartheta)$ определяется формулой (1.7).

После соответствующих представлений типа (1.12) и группирования выражений при одинаковых полиномах Лежандра и их производных коэффициенты $a_n^{(2)}(\nu)$, $b_n^{(2)}(\nu)$ принимают вид

$$\begin{aligned}
a_0^{(2)}(\nu) &= \frac{1}{5}\left[-\frac{251}{5} + \frac{128(5-7\nu)}{49(7-5\nu)} + \frac{8192(7-5\nu)}{147(7-3\nu)}\right]p;\\
a_2^{(2)}(\nu) &= \frac{16}{7}\left[-\frac{46}{55} - \frac{5(41-31\nu)}{7(7-5\nu)} + \frac{64(133-65\nu)}{231(7-3\nu)}\right]p;\\
a_4^{(2)}(\nu) &= \frac{192}{385}\left[\frac{38}{13} - \frac{48(15-11\nu)}{7(7-5\nu)} + \frac{17423-8095\nu}{91(7-3\nu)}\right]p;\\
a_6^{(2)}(\nu) &= \frac{1024}{11}\left[-\frac{1}{5} + \frac{115-77\nu}{49(7-5\nu)} + \frac{161-73\nu}{147(7-3\nu)}\right]p;\\
a_8^{(2)}(\nu) &= \frac{4096}{11}\left[\frac{7}{65} - \frac{2(49-17\nu)}{39(7-3\nu)}\right]p;\\
b_2^{(2)}(\nu) &= \frac{8}{7}\left[\frac{38}{165} - \frac{71-45\nu}{7(7-5\nu)} - \frac{64(49-69\nu)}{231(7-3\nu)}\right]p;\\
b_4^{(2)}(\nu) &= \frac{96}{35}\left[-\frac{118}{715} + \frac{8(25-26\nu)}{77(7-5\nu)} - \frac{8085-8017\nu}{1001(7-3\nu)}\right]p;\\
b_6^{(2)}(\nu) &= \frac{512}{77}\left[\frac{1}{15} - \frac{5-3\nu}{7-5\nu} - \frac{77-69\nu}{21(7-3\nu)}\right]p;\\
b_8^{(2)}(\nu) &= \frac{2048}{429}\left[-\frac{1}{5} + \frac{4(7-2\nu)}{7-3\nu}\right]p.
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Тогда формулы (1.14) дают возможность определить ненулевые коэффициенты $C_n^{(2)}$ $(n = 2, 4, 6, 8)$ и $D_n^{(2)}$ $(n = 0, 2, 4, 6, 8)$, входящие в компоненты $\sigma_r^{(2)}(\varrho,\vartheta)$, $\sigma_\theta^{(2)}(\varrho,\vartheta)$, $\sigma_\alpha^{(2)}(\varrho,\vartheta)$, $\tau_{r\theta}^{(2)}(\varrho,\vartheta)$ согласно соотношениям (1.7). Следовательно, с точностью порядка ε^3 по сравнению с единицей могут быть найдены все составляющие напряжений. Ввиду громоздкости приведем соответствующие им выражения лишь для некоторых характерных числовых значений ε, ν, ϱ, ϑ. Так, при $\nu = 0,3$ на основании формулы (2.3) имеем

$$\frac{\sigma_\vartheta^{*(2)}}{p}\Bigg|_{\substack{\varrho=1,\\ \varepsilon=-1/9}} \cong 1,5404 + 0,4514P_2 - 1,4763P_4 - 0,3709P_6 + 0,6492P_8;$$

$$\frac{\sigma_\varphi^{*(2)}}{p}\Bigg|_{\substack{\varrho=1,\\ \varepsilon=-1/9}} \cong 1,4551 - 0,3549P_2 - 0,3900P_4 - 0,1113P_6 + 0,1948P_8; \quad (3.6)$$

$$\frac{\sigma_\vartheta^{*(2)}}{p}\Bigg|_{\substack{\vartheta=0,\\ \varepsilon=1/9}} = \frac{\sigma_\varphi^{*(2)}}{p}\Bigg|_{\substack{\vartheta=0,\\ \varepsilon=1/9}} \cong 1 + \frac{0,5205}{\varrho^3} - \frac{0,7672}{\varrho^5} + \frac{1,6911}{\varrho^7} - \frac{1,7125}{\varrho^9} + \frac{1,7004}{\varrho^{11}}.$$

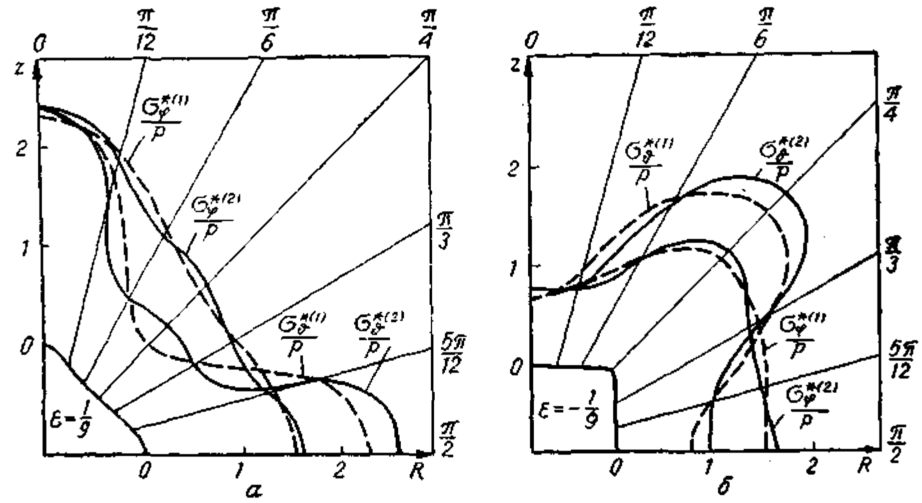


Рис. 4.

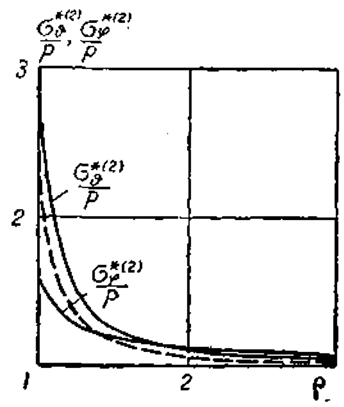


Рис. 5.

На рис. 4 *а*, *б* дано распределение напряжений вдоль четверти меридионального сечения неканонических поверхностей вращения, изображенных на рис. 1, *б*, *в* при $\nu = 0,3$, $\varepsilon = \pm \frac{1}{9}$. Штриховые линии соответствуют компонентам напряженного состояния в первом приближении, сплошные — во втором.

Кривые на рис. 5 построены для $\nu = 0,3$, $\varepsilon = -\frac{1}{9}$, $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ (штриховая линия соответствует напряжениям $\frac{\sigma_\vartheta^{*(2)}}{p}$, $\frac{\sigma_\varphi^{*(2)}}{p}$ при $\vartheta = 0$, $\varepsilon = \frac{1}{9}$). Графики показывают, что на незначительном расстоянии от поверхности полости концентрация напряжений резко уменьшается.

В заключение отметим, что аналогично могут быть рассмотрены осесимметричные статические граничные задачи о напряженном состоянии среды с жесткими или упругими включениями, а также краевые задачи о деформации замкнутых толстостенных неканонических оболочек вращения, находящихся в поле силовых или температурных воздействий.