

УДК 539.3

Ю. Н. Немиш, В. Н. Немиш

К РЕШЕНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ НЕКАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Предложенный в работе [1] вариант метода «возмущения формы границы» распространен в [2, 5, 6] на новые классы пространственных краевых задач механики деформируемых сред, ограниченных неканоническими (близкими к сферическим и круговым цилиндрическим) поверхностями. Эффективность указанного приближенного метода проиллюстрирована [3, 5] на задачах для эллипсоидальных поверхностей, допускающих точное решение.

В работе [7] получены приближенные аналитические решения внешних пространственных задач для изотропной среды, ограниченной замкнутыми поверхностями вращения: конической, цилиндрической и волчкообразной.

Настоящая статья посвящена рассмотрению аналогичных задач для трансверсально изотропной среды. При этом даны виды трехмерных общих решений в случае действительных, кратных и комплексных корней характеристического уравнения, а также получены числовые результаты для некоторых трансверсально изотропных материалов.

§ 1. Рассмотрим трансверсально изотропную среду с плоскостью изотропии, перпендикулярной оси r сферической системы координат θ, α, r , где θ — угол широты. В этом случае перемещения u_θ, u_α, u_r допускают представление через потенциалы $\Phi_n(\theta, \alpha, r)$ и $\Psi_n(\theta, \alpha, r)$ в виде [9]

$$\begin{aligned} u_\theta &= \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta} + \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \alpha}; \\ u_\alpha &= \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha} - \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \theta}; \\ u_r &= \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \quad (k_n = \text{const}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

* Здесь и далее все линейные величины являются безразмерными, отнесенными к некоторой характерной длине r_0 .

Соответствующие им компоненты тензора напряжений удобно представить в форме [5]

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} &= \frac{1}{r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{11} + c_{12} \end{pmatrix} \left(\Pi_1 + \frac{2k_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \begin{pmatrix} c_{33} \\ 2c_{13} \end{pmatrix} k_n \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \Phi_n; \\ \begin{pmatrix} \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\alpha\alpha} \\ \sigma_{\theta\alpha} \end{pmatrix} &= \frac{c_{11} - c_{12}}{2r_0^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 2\Pi_2 \\ \Pi_3 \end{pmatrix} \Phi_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 2\Pi_3 \\ \Pi_2 \end{pmatrix} \Psi_n \right]; \\ \begin{pmatrix} \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\alpha} \end{pmatrix} &= \frac{c_{44}}{r_0^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{pmatrix} \Pi_4 \\ \Pi_5 \end{pmatrix} + \frac{k_n}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \alpha} \right] \Phi_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \Pi_5 \\ \Pi_4 \end{pmatrix} \Psi_n \right\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь Π_j ($j = 1, 2, \dots, 5$) — дифференциальные операторы;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \pm \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \pm \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right); \quad \Pi_3 = \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \alpha} - \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} \right); \\ \Pi_4 &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right); \quad \Pi_5 = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial \alpha} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Выбирая потенциалы Φ_n и Ψ_n в виде

$$\Phi_n(\theta, \alpha, r) = r^{\nu_n + \frac{1}{2}} Y_n(\theta, \alpha); \quad \Psi_n(\theta, \alpha, r) = r^{\lambda_n + \frac{1}{2}} Y_n(\theta, \alpha), \quad (1.4)$$

где $Y_n(\theta, \alpha)$ — сферические функции, убеждаемся, что трехмерные однородные уравнения равновесия удовлетворяются, если параметры ν_n и λ_n являются корнями алгебраических уравнений

$$\nu_n^4 - 2a_n \nu_n^2 + b_n = 0; \quad \lambda_n^2 - \left[\frac{c_{11} - c_{12}}{2c_{44}} (n-1)(n+2) + \frac{9}{4} \right] = 0. \quad (1.5)$$

Коэффициенты a_n и b_n определяются выражениями

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2c_{33}c_{44}} \left\{ n(n+1) [c_{44}^2 + c_{11}c_{33} - (c_{13} + c_{44})^2] + \right. \\ &\quad \left. + c_{33}c^- + 2c_{44}(c_{11} + c_{12} - c_{13}) + \frac{1}{2} c_{33}c_{44} \right\}; \\ b_n &= \frac{1}{c_{33}c_{44}} \left\{ \left[c_{44}n(n+1) + 2(c_{11} + c_{12} - c_{13}) + \frac{1}{4}c_{33} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[c_{11}n(n+1) + c^- + \frac{1}{4}c_{44} \right] - n(n+1) \left[c^+ - \frac{1}{2}(c_{13} + c_{44}) \right]^2 \right\} \\ &\quad (c^\pm = \pm c_{11} + c_{12} + 2c_{44}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Характеристическими числами первого из уравнений (1.5) будут

$$\begin{pmatrix} \nu_n^{(1)} \\ \nu_n^{(2)} \end{pmatrix} = \pm [a_n + (a_n^2 - b_n)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}; \quad \begin{pmatrix} \nu_n^{(3)} \\ \nu_n^{(4)} \end{pmatrix} = \pm [a_n - (a_n^2 - b_n)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.7)$$

Тогда коэффициент $k_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) находится из соотношения

$$K_n^{(i)} \equiv k_n^{(i)} \left(v_n^{(i)} + \frac{1}{2} \right) = \frac{c_{11}n(n+1) - c_{44} \left(v_n^{(i)2} - \frac{1}{4} \right) + c^-}{(c_{13} + c_{44}) \left(v_n^{(i)} - \frac{1}{2} \right) + c^+}. \quad (1.8)$$

Для реальных материалов корни $v_n^{(i)}$ могут быть действительными (разными или кратными) или комплексными.

Проанализируем вид функции $\Phi_n(\theta, \alpha, r)$ в указанных трех случаях.

Предположим, что $a_n^2 - b_n > 0$. Тогда характеристические числа $v_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — действительные (разные) и потенциал Φ_n имеет вид

$$\Phi_n(\theta, \alpha, r) = \sum_{m=0}^n \sum_{i=1}^4 A_{n,m}^{(i)} \cos m\alpha \, r^{v_n^{(i)} + \frac{1}{2}} P_{n,m}(\cos \theta), \quad (1.9)$$

где $P_{n,m}(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра; $A_{n,m}^{(i)}, B_{n,m}^{(i)}$ — произвольные постоянные.

Пусть $a_n^2 - b_n = 0$. Следовательно, корни будут кратными, т. е. $v_n^{(1)} \equiv v_n^{(3)}, v_n^{(2)} \equiv v_n^{(4)}$. Для построения полного решения воспользуемся соответствующими рассуждениями, приведенными в книге [4], и будем исходить из дифференциального уравнения для функции Φ_n , т. е.

$$L\Phi_n(\theta, \alpha, r) = 0. \quad (1.10)$$

Здесь

$$L = L_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ c_{11}L_0 + [k_n(c_{13} + c_{44}) + c_{44}]r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + c^+k_n r \frac{\partial}{\partial r} - c^- \right\}; \quad (1.11)$$

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

Используя выражение (1.4) для потенциала Φ_n и рекуррентные соотношения для присоединенных функций Лежандра, получаем

$$L(r^{v_n + \frac{1}{2}} Y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(v_n) r^{v_n + \frac{1}{2}} Y_n, \quad (1.12)$$

где $P(v_n) = 0$ — характеристическое уравнение.

Поскольку в рассматриваемом случае двух кратных корней имеем

$$P(v_n^{(1)}) = P'(v_n^{(1)}) = P(v_n^{(2)}) = P'(v_n^{(2)}) = 0; \quad (1.13)$$

то потенциал Φ_n примет форму

$$\Phi_n(\theta, \alpha, r) = \sum_{m=0}^n \sum_{i=1}^2 \left(\frac{A_{n,m}^{(i)}}{B_{n,m}^{(i)}} + \ln r \frac{A_{n,m}^{(i+2)}}{B_{n,m}^{(i+2)}} \right) r^{v_n^{(i)} + \frac{1}{2}} \frac{\cos m\alpha}{\sin m\alpha} P_{n,m}(\cos \theta). \quad (1.14)$$

Предположим, что $a_n^2 - b_n < 0$. Тогда комплексные корни $v_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) представимы в виде

$$v_n^{(1)} = a_n^* + ib_n^*; \quad v_n^{(2)} = -a_n^* - ib_n^*; \quad v_n^{(3)} = \bar{v}_n^{(1)}; \quad v_n^{(4)} = \bar{v}_n^{(2)}, \quad (1.15)$$

где

$$a_n^* = \sqrt{a_n^2 + \Omega_n^2} \cos \frac{\varphi}{2}; \quad b_n^* = \sqrt{a_n^2 + \Omega_n^2} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (1.16)$$

$$\left(\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\Omega_n}{a_n}; \quad i\Omega_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2} \right).$$

Следовательно, записывая произвольные постоянные, входящие в состав сферических функций $Y_n(\theta, \alpha)$, в комплексной форме и используя известные соотношения

$$a^{ix} = e^{ix \ln a} = \cos(x \ln a) + i \sin(x \ln a), \quad (1.17)$$

получаем

$$\Phi_n(\theta, \alpha, r) = \sum_{m=0}^n \left\{ \left[\frac{A_{n,m}^{(1)}}{B_{n,m}^{(1)}} \cos(b_n^* \ln r) + \frac{A_{n,m}^{(3)}}{B_{n,m}^{(3)}} \sin(b_n^* \ln r) \right] r^{a_n^* + \frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \left[\frac{A_{n,m}^{(2)}}{B_{n,m}^{(2)}} \cos(b_n^* \ln r) + \frac{A_{n,m}^{(4)}}{B_{n,m}^{(4)}} \sin(b_n^* \ln r) \right] r^{-a_n^* + \frac{1}{2}} \right\} \frac{\cos m\alpha}{\sin m\alpha} P_{n,m}(\cos \theta). \quad (1.18)$$

Решения (1.9), (1.14) и (1.18) исчерпывают все возможные для реальных материалов представления $\Phi_n(\theta, \alpha, r)$.

Очевидно, что потенциал $\Psi_n(\theta, \alpha, r)$ допускает запись только в виде (1.9).

§ 2. Рассмотрим пространственную деформацию трансверсально изотропной однородной среды, ослабленной замкнутой неканонической (близкой к сферической) полостью, поверхность вращения $\rho=1$ которой описывается с помощью уравнений

$$z = r_0^{-1}(\rho \cos \gamma + \varepsilon \rho^{-k} \cos k\gamma); \quad R = r_0^{-1}(\rho \sin \gamma - \varepsilon \rho^{-k} \sin k\gamma). \quad (2.1)$$

Здесь z, R — цилиндрические координаты; ρ, γ, φ — криволинейные ортогональные координаты; $|\varepsilon| \ll 1$ — малый параметр, характеризующий отклонение рассматриваемой координатной поверхности $\rho=1$ от сферической радиуса r_0 .

Исследование напряженно-деформированного состояния среды под действием внешних усилий будем проводить методом «возмущения формы границы» [1]. Для этого искомые компоненты напряжений представим в виде

$$\{\sigma_{\rho\rho}, \dots, \sigma_{\gamma\varphi}\} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \{\sigma_{\rho\rho}^{(j)}, \dots, \sigma_{\gamma\varphi}^{(j)}\}, \quad (2.2)$$

где составляющие $\sigma_{\rho\rho}^{(j)}, \dots, \sigma_{\gamma\varphi}^{(j)}$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\rho\rho}^{(j)} \\ \sigma_{\gamma\gamma}^{(j)} \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^j \left[\Lambda_1^{(j-m)} \begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(m)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(m)} \end{pmatrix} \pm \Lambda_3^{(j-m)} (\sigma_{\theta\theta}^{(m)} - \sigma_{rr}^{(m)}) \pm \Lambda_3^{(j-m)} \sigma_{r\theta}^{(m)} \right]; \\ \sigma_{\rho\gamma}^{(j)} = \sum_{m=0}^j \left[\Lambda_4^{(j-m)} \sigma_{r\theta}^{(m)} + \frac{1}{2} \Lambda_3^{(j-m)} (\sigma_{\theta\theta}^{(m)} - \sigma_{rr}^{(m)}) \right]; \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(j)} = \sum_{m=0}^j \Lambda_1^{(j-m)} \sigma_{\alpha\alpha}^{(m)}; \quad (2.3) \\ \begin{pmatrix} \sigma_{\rho\varphi}^{(j)} \\ \sigma_{\gamma\varphi}^{(j)} \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^j \left[\Lambda_5^{(j-m)} \begin{pmatrix} \sigma_{r\alpha}^{(m)} \\ \sigma_{\theta\alpha}^{(m)} \end{pmatrix} \pm \Lambda_6^{(j-m)} \begin{pmatrix} \sigma_{\theta\alpha}^{(m)} \\ \sigma_{r\alpha}^{(m)} \end{pmatrix} \right].$$

Дифференциальные операторы $\Lambda_i^{(j)}$ для общего вида граничной поверхности в произвольном приближении приведены в работе [6]. В частности, для рассматриваемой поверхности (2.1) в первых трех приближениях имеем известные операторы

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{(0)} &= 1; \quad \Lambda_1^{(1)} = \frac{\cos(k+1)\gamma}{\rho^k} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin(k+1)\gamma}{\rho^{k+1}} \frac{\partial}{\partial \gamma}; \\ \Lambda_1^{(2)} &= \frac{1 + \cos 2(k+1)\gamma}{4\rho^{2k}} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\sin 2(k+1)\gamma}{2\rho^{2k}} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \gamma} \frac{1}{\rho} + \\ &+ \frac{1 - \cos 2(k+1)\gamma}{4\rho^{2k+2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

и т. д.

Составляющие напряжений, входящие в правые части соотношений (2.3), записываются на основании (1.2) формальной заменой переменных r, θ, α на ρ, γ, φ , например

$$\sigma_{rr}^{(j)}(\rho, \gamma, \varphi) = \frac{1}{r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_{13} \left(\Pi_1 + \frac{2k_n}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + c_{33} k_n \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right] \Phi_n^{(j)}(\rho, \gamma, \varphi). \quad (2.5)$$

§ 3. Для конкретности и простоты рассмотрим осесимметричную задачу о напряженном состоянии трансверсально изотропной среды, ограниченной изнутри свободной от напряжений неканонической поверхностью (2.1) при $\rho=1$, находящейся в однородном поле всесторонних внешних усилий интенсивности p ($p>0$ — соответствует растяжению, $p<0$ — сжатию). Следовательно, компоненты основного напряженного состояния, т. е. для среды без полости, будут

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(0)} &= \hat{\sigma}_{\gamma\gamma}^{(0)} = \hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(0)} = p; \quad \hat{\sigma}_{\rho\gamma}^{(0)} = \hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(0)} = \hat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(0)} = 0; \\ \hat{\sigma}_{kl}^{(j)} &= 0 \quad (j \geq 1; k, l = \rho, \gamma, \varphi). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Предположим, что трансверсально изотропная среда характеризуется такими упругими постоянными c_{ij} , которые соответствуют действительным (разным) корням $\nu_n^{(i)}$, т. е. справедливо решение (1.9). Тогда в рассматриваемом осесимметричном случае ($m=0$) компоненты $\sigma_{rr}^{(j)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(j)}$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}$, $\sigma_{r\theta}^{(j)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(j)} &= \frac{1}{r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=2,4} A_n^{(i,j)} \rho^{\nu_n^{(i)} - \frac{3}{2}} \gamma_n^{(i)} P_n(\mu); \\ \begin{pmatrix} \sigma_{\theta\theta}^{(j)} \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{(j)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=2,4} A_n^{(i,j)} \rho^{\nu_n^{(i)} - \frac{3}{2}} \left[\begin{pmatrix} \eta_n^{(i)} \\ q_n^{(i)} \end{pmatrix} P_n(\mu) \pm (c_{11} - c_{12}) \mu P_n'(\mu) \right]; \\ \sigma_{r\theta}^{(j)} &= \frac{1}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2,4} A_n^{(i,j)} \rho^{\nu_n^{(i)} - \frac{3}{2}} \delta_n^{(i)} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \left(P_n' = \frac{dP_n}{d\mu}; \mu = \cos \gamma \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь

$$\gamma_n^{(i)} = K_n^{(i)} \left[2c_{13} + c_{33} \left(v_n^{(i)} - \frac{1}{2} \right) \right] - n(n+1)c_{13}; \quad \delta_n^{(i)} = c_{44} \left(K_n^{(i)} + v_n^{(i)} - \frac{3}{2} \right); \quad (3.3)$$

$$\begin{pmatrix} \eta_n^{(i)} \\ \varrho_n^{(i)} \end{pmatrix} = K_n^{(i)} \left[c_{11} + c_{12} + c_{13} \left(v_n^{(i)} - \frac{1}{2} \right) \right] - n(n+1) \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix}.$$

Произвольные постоянные $A_n^{(i,j)}$ в соответствии с (2.3), (3.1) определяются из граничных условий

$$[\sigma_{\rho\rho}^{(j)} + \hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(j)}]_{\rho=1} = 0; \quad [\sigma_{\rho\gamma}^{(j)} + \hat{\sigma}_{\rho\gamma}^{(j)}]_{\rho=1} = 0 \quad (3.4)$$

и имеют вид

$$A_0^{(2,j)} = \frac{c_0^{(j)}}{\gamma_0^{(2)}}; \quad A_n^{(2,j)} = -\frac{c_n^{(j)}\delta_n^{(4)} - d_n^{(j)}\gamma_n^{(4)}}{\delta_n^{(2)}\gamma_n^{(4)} - \delta_n^{(4)}\gamma_n^{(2)}}; \quad A_n^{(4,j)} = \frac{c_n^{(j)}\delta_n^{(2)} - d_n^{(j)}\gamma_n^{(2)}}{\delta_n^{(2)}\gamma_n^{(4)} - \delta_n^{(4)}\gamma_n^{(2)}} \quad (3.5)$$

$$(j = 0 \sim n = 0; \quad j = 1 \sim n = 0, 2, 4; \quad j = 2 \sim n = 0, 2, 4, 6, 8),$$

где $c_n^{(j)}$, $d_n^{(j)}$ — коэффициенты разложений в ряды по полиномам Лежандра и их производных правых частей, соответствующих условиям (3.4) алгебраических уравнений, зависящих как от формы поверхности, так и от решения граничной задачи в предыдущих приближениях.

Напряжения $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^{*(j)} + O(\varepsilon^{j+1})$, т. е. с точностью до членов порядка ε^{j+1} по сравнению с единицей, будем определять по формулам

$$\sigma_{kl}^{*(0)} = \hat{\sigma}_{kl}^{(0)} + \sigma_{kl}^{(0)}; \quad \sigma_{kl}^{*(j)} = \sigma_{kl}^{*(j-1)} + \varepsilon^j \sigma_{kl}^{(j)} \quad (j \geq 1). \quad (3.6)$$

В частности, для напряжения $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)} = & \rho + \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + \varepsilon \left[\sigma_{\theta\theta}^{(1)} + \frac{1}{r_0^2} A_0^{(2,0)} \left(v_0^{(2)} - \frac{3}{2} \right) \eta_0^{(2)} \rho^{v_0^{(2)} - k - \frac{5}{2}} \cdot \cos(k+1)\gamma \right] + \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} + \frac{1}{4r_0^2} A_0^{(2,0)} \rho^{v_0^{(2)} - 2k - \frac{7}{2}} \left[\eta_0^{(2)} \left(v_0^{(2)} - \frac{3}{2} \right)^2 - 2(\eta_0^{(2)} - \gamma_0^{(2)})(k+1)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\eta_0^{(2)} \left(v_0^{(2)} - \frac{3}{2} \right) \left(v_0^{(2)} - \frac{7}{2} \right) + 2(\eta_0^{(2)} - \gamma_0^{(2)})(k+1)^2 \right) \cos 2(k+1)\gamma \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r_0^2} \sum_{n=1,3} \sum_{i=2,4} A_n^{(i,1)} \rho^{v_n^{(i)} - k - \frac{5}{2}} \left[\left(v_n^{(i)} - \frac{3}{2} \right) \left(\eta_n^{(i)} P_n(\mu) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - (c_{11} - c_{12}) \operatorname{ctg} \gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \right) \cos(k+1)\gamma - \left(\eta_n^{(i)} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} - (c_{11} - c_{12}) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\operatorname{ctg} \gamma \frac{d^2 P_n(\mu)}{d\gamma^2} - \frac{1}{\sin^2 \gamma} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \right) + 2(k+1)\delta_n^{(i)} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \right) \sin(k+1)\gamma \right] \right\}. \quad (3.7) \end{aligned}$$

§ 4. Числовые расчеты проведены в случаях замкнутых цилиндрической ($k=3$, $\varepsilon=-1/9$) и волчкообразной ($k=3$, $\varepsilon=1/9$) поверхностей для однородных сред, упругие постоянные которых приведены в табл. 1.

Значения для материалов 3, 4 близки к изотропному случаю и взяты из работы [8]; они использовались также в работе [9]. Для указанных числовых значений расчеты проводились по формулам вида (3.7). При этом для всех материалов и обеих форм поверхностей при $\rho=1$ нормальные напряжения имеют следующую аналитическую структуру:

$$\sigma_{ll}^{*(2)} = \rho \sum_{k=0,2,\dots}^8 \tau_{kl} P_k(\mu) \quad (l = \rho, \gamma, \varphi) \quad (4.1)$$

(τ_{kl} — соответствующие числовые коэффициенты).

Характер изменения относительных напряжений $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/\rho$ и $\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}/\rho$ вдоль четверти меридиональных сечений рассматриваемых поверхностей по-

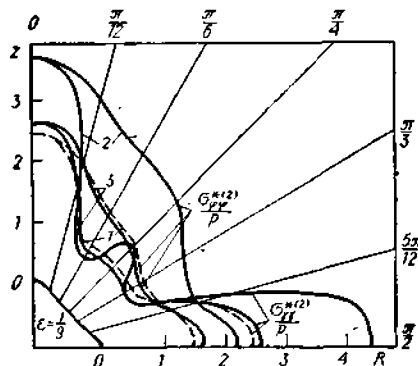


Рис. 1.

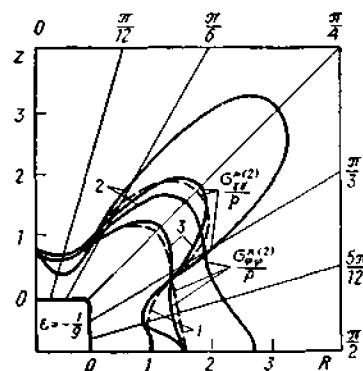


Рис. 2.

казан на рисунках 1, 2. Заметим, что кривые (нумерация кривых соответствует нумерации материалов табл. 1) для материала 4 практически совпадают с кривыми для изотропного материала 1 и здесь не приводятся.

Таблица 1

Материал	ν_{12}	ν_{13}	$\frac{E_1}{G}$	$\frac{E_3}{G}$	$\frac{E_1}{E_3}$
1	0,300	0,300	2,600	2,600	1,000
2	0,300	0,100	5,000	1,250	4,000
3	0,357	0,253	2,771	3,094	0,896
4	0,365	0,288	2,244	2,712	0,828

Аналитическая структура напряжений по степеням ρ (при $\gamma = \text{const}$) существенно зависит от типа материала, например, материал 2 ($\gamma=0, \epsilon=1/9$)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{\rho} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{\rho} \cong & 1 + \frac{0,2257}{\rho^4} + \frac{1,3600}{\rho^5} - \frac{1,0025}{\rho^6} - \frac{1,1102}{\rho^7} - \\ & - \frac{0,0333}{\rho^8} - \frac{0,0955}{\rho^9} + \frac{4,4114}{\rho^{10}} - \frac{1,4311}{\rho^{11}} - \\ & - \frac{1,8826}{\rho^{13}} - \frac{4,6064}{\rho^{14}} + \frac{6,8249}{\rho^{16}}; \end{aligned} \quad (4.2)$$

материал 4 ($\gamma = 0, \varepsilon = 1/9$)

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{\rho} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{\rho} \cong 1 + \frac{0,4901}{\rho^3} - \frac{0,7733}{\rho^5} + \frac{1,8260}{\rho^7} - \frac{3,8554}{\rho^9} + \frac{5,0279}{\rho^{10}} - \frac{1,2662}{\rho^{11}}. \quad (4.3)$$

Распределение напряжений около неканонических полостей имеет ярко выраженный локальный характер и показано на рисунках 3, 4 для

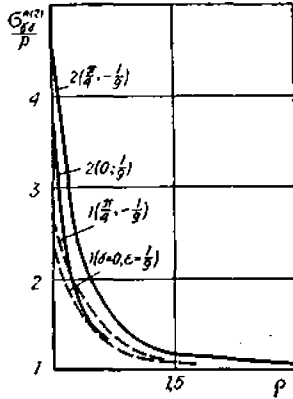


Рис. 3.

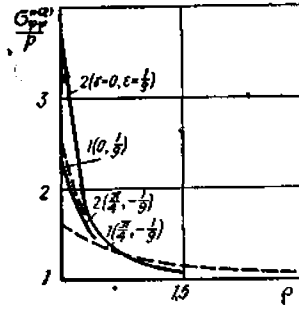


Рис. 4.

материалов 1, 2 (аналогичный характер имеют графики для материалов 3, 4). Для указанных четырех материалов максимальное значение относительного отклонения

$$\frac{|\sigma_{ll}^{*(2)} - \hat{\sigma}_{ll}^{(0)}|}{\hat{\sigma}_{ll}^{(0)}} \quad (l = \gamma, \varphi),$$

т. е. нормальных напряжений от соответствующих для среды без полости не превышает 6,4% при $\rho=2$ и 1,9% при $\rho=3$.

Графики на рисунках 1—4 указывают на существенное влияние анизотропии материала на величину напряженного состояния в окрестности неканонической полости. Это особенно заметно, если упругие постоянные значительно отличаются от соответствующих в изотропном случае, как это проиллюстрировано на примере материала 2, для которого влияние анизотропии на величину максимальных напряжений $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/\rho$ при $\rho=1$ в точках $\gamma=0, \pi/4, \pi/2$ доходит до 78% по сравнению с изотропным случаем.

Об эффективности применяемого приближенного метода можно судить, например, на основании табл. 2, где показан вклад $\Delta_{\gamma}^{(i)} = |\varepsilon^i \sigma_{\gamma\gamma}^{(i)}|/\rho$ каждого из первых трех приближений в сумму их абсолютных величин, которая условно принята за 100%. Отметим, что все числовые значения табл. 2 удовлетворяют неравенству $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/\sigma_{\gamma\gamma}^{*(1)} < \sigma_{\gamma\gamma}^{*(1)}/\sigma_{\gamma\gamma}^{*(0)}$. Если предположить, что и третье приближение $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(3)}$ будет удовлетворять аналогичному неравенству, то для его оценки получим

$$|\sigma_{\gamma\gamma}^{*(3)}| < \frac{[\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}]^2}{|\sigma_{\gamma\gamma}^{*(1)}|}. \quad (4.4)$$

Следовательно, вычисленная на основе оценки (4.4) максимальная погрешность $\Delta_{\gamma}^{(3)}$, которая допускается при пренебрежении членами порядка ϵ^3 по сравнению с единицей, меньше 5,4%; она соответствует материалу 2 при $\gamma = \pi/2$ и $\gamma = \pi/4$.

Таблица 2

Материал	$\frac{ \sigma_{\gamma\gamma}^{*(0)} }{\rho}$	$\Delta_{\gamma}^{(0)}, \%$	$\frac{ \epsilon\sigma_{\gamma\gamma}^{*(1)} }{\rho}$	$\Delta_{\gamma}^{(1)}, \%$	$\frac{ \epsilon^2\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)} }{\rho}$	$\Delta_{\gamma}^{(2)}, \%$
$\epsilon = 1/9, \gamma = 0$						
1	1,5	62,4	0,819	34,0	0,086	3,6
2	2,373	58,0	1,503	36,7	0,216	5,3
3	1,513	58,1	0,959	36,8	0,133	5,1
4	1,475	60,3	0,836	34,1	0,138	5,6
$\epsilon = 1/9, \gamma = \pi/2$						
1	1,5	58,4	0,765	29,8	0,302	11,8
2	2,373	52,4	1,527	33,7	0,629	13,9
3	1,513	56,5	0,845	31,5	0,323	12,0
4	1,475	59,5	0,723	29,1	0,283	11,4
$\epsilon = -1/9, \gamma = \pi/4$						
1	1,5	59,5	0,738	29,3	0,283	11,2
2	2,373	53,0	1,489	33,2	0,618	13,8
3	1,513	57,6	0,813	31,0	0,300	11,4
4	1,475	60,4	0,700	28,7	0,267	10,9

Приемлемость высказанного предположения для оценки вида (4.4) пренебрегаемых приближений проверена на основе решения [5] изложенным приближенным методом граничной задачи для эллипсоидальной полости в изотропной среде, допускающей точное решение.

Замечание. Если трансверсально изотропная среда с неканонической полостью находится под внутренним давлением интенсивности ρ , приложенным к ее поверхности $\rho = 1$, то граничные условия имеют вид, аналогичный (3.4), т. е.

$$\sigma_{\rho\rho}|_{\rho=1} = -\rho; \quad \sigma_{\rho\gamma}|_{\rho=1} = 0. \quad (4.5)$$

В этом случае числовые значения для относительных напряжений $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/\rho$ и $\sigma_{\phi\phi}^{*(2)}/\rho$ получаются из решения вышеизложенной задачи, если из последних вычесть значения основного напряженного состояния, т. е. уменьшить на единицу все числовые значения, представленные на рисунках 1—4. При этом локальность поля напряжений сохраняется и, следовательно, полученные результаты с погрешностью до 2% соответствуют толсто-стенным оболочкам, образованным координатными поверхностями $\rho = 1$, $\rho = \rho_0 \geq 3$ и находящимися под внутренним давлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь О. М. Про набліжений метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках.— Прикл. механіка, 1962, 8, № 6, с. 605—612.
2. Гузь О. М. Про один метод розв'язування тривимірних лінійних задач механіки суцільного середовища для неканонічних областей.— ДАН УРСР, 1970, сер. А, № 4, с. 352—355.

3. Лялюк Д. Ф., Немиш Ю. Н. Приближенный метод исследования напряженного состояния толстостенных неканонических оболочек вращения.— В кн.: Труды IX Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Л., «Судостроение», 1975, с. 280—282.
4. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Высшая школа», 1976, 564 с.
5. Немиш Ю. Н. О приближенном решении пространственных задач теории упругости для трансверсально изотропной среды.— Прикл. механика, 1969, 5, № 8, с. 26—34.
6. Немиш Ю. Н. Метод «возмущения формы границы» в пространственных задачах механики деформируемых сред.— Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 5, с. 17—26.
7. Немиш Ю. Н., Немиш В. Н., Ярема П. Ф. Распределение напряжений около неканонических поверхностей.— Прикл. механика, 1971, 7, № 12, с. 41—50.
8. Хантингтон Г. Упругие постоянные кристаллов.— Усп. физ. наук, 74, № 3, с. 462—520.
9. Чен В. Т. О некоторых задачах для упругих материалов со сферической изотропией.— Труды амер. о-ва инж.-механиков, Прикл. механика, 1966, 33, № 3, с. 71—79.

Институт механики АН УССР
Киев
Тернопольский
финансово-экономический институт

Поступила
24.II 1976 г.