

КРУЧЕНИЕ ОРТОТРОПНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С НЕКАНОНИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ И ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Ю. Н. НЕМИЩ, В. Н. НЕМИЩ

(Киев, Тернополь)

Исследование напряженного состояния при кручении упругих изотропных элементов конструкций в виде стержней и тел вращения, ослабленных внутренними или внешними выточками, проводилось в [1, 2]. Наряду с другими вопросами теории упругости [3, 4] рассмотрено кручение упругих анизотропных стержней.

В данной статье исследуется напряженное состояние при кручении ортотропных тел вращения с полостями и включениями, близкими к сферическим. Так как в рассматриваемом случае переменные в граничных условиях не разделяются, то задача решается приближенным методом «возмущения формы границы», эффективность которого иллюстрируется на задаче о кручении тела вращения с вытянутой или сжатой эллипсоидальной полостью, допускающей точное решение [2, 3, 5].

Возможности метода показаны на примерах кручения однородного ортотропного упругого тела вращения с замкнутой конической полостью и жестким коническим включением.

1. Рассмотрим трехмерное однородное тело вращения, упругие свойства которого ортотропны относительно безразмерных сферических координат r, θ, α (сферическая ортотропия), отнесенных к некоторой линейной величине r_0 . При кручении такого тела отличными от нуля является перемещение $u_\alpha(r, \theta)$ и, следовательно, напряжения

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{G_1}{r_0 r} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \theta} - u_\alpha \operatorname{ctg} \theta \right), \quad \sigma_{r\alpha} = \frac{G_2}{r_0} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\alpha \right) \quad (1.1)$$

где α — угол долготы; G_1, G_2 — модули сдвига в плоскостях $(\theta\alpha)$ и $(r\alpha)$.

Напряжения (1.1) в статическом случае (при отсутствии массовых сил) должны удовлетворять уравнению равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{r\alpha}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\alpha} + 2 \operatorname{ctg} \theta \sigma_{\alpha\alpha}) = 0 \quad (1.2)$$

и соответствующим краевым условиям на граничных поверхностях.

По аналогии с [6, 7] перемещение $u_\alpha(r, \theta)$ будем искать в виде

$$u_\alpha = - \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\lambda_n - 1/2} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \quad (1.3)$$

Здесь A_n — произвольные постоянные, $P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра, λ_n — константы, подлежащие определению.

Согласно соотношениям (1.1), (1.3) напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}$ и $\sigma_{r\alpha}$ имеют вид

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{G_1}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\lambda_n - 1/2} \left[n(n+1) P_n(\cos \theta) + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right] \quad (1.4)$$

$$\sigma_{r\alpha} = - \frac{G_2}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - \frac{3}{2} \right) A_n r^{\lambda_n - 1/2} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}$$

Легко убедиться, что при таком выборе напряжений уравнение равновесия (1.2) будет удовлетворено, если постоянные λ_n являются корнями алгебраического уравнения

$$\lambda_n^2 - [(n-1)(n+2)G_1/G_2 + 9/4] = 0 \quad (1.5)$$

Заметим, что в изотропном случае ($G_1 = G_2$) имеем $\lambda_n = \pm(n+1/2)$. Это согласуется с представлением перемещений и напряжений [3, 8], полученных на основе решения в форме Папковича — Нейбера.

2. Предположим, что рассматриваемое тело ограничено изнутри поверхностью S , образованной вращением симметричного относительно оси oz контура Γ , параметрическое уравнение которого в произвольной плоскости zOR (R — безразмерная цилиндрическая координата) имеет вид

$$z = r_0^{-1} \operatorname{Re} \omega(\xi) |_{\rho=1}, \quad R = r_0^{-1} \operatorname{Im} \omega(\xi) |_{\rho=1} \quad (2.1)$$

$$r_0^{-1} \omega(\xi) = \xi + \varepsilon f(\xi) = r e^{i\theta} \quad (\xi = \rho e^{i\alpha}, |\varepsilon| \ll 1) \quad (2.2)$$

При этом функция $f(\xi)$ и малый параметр ε характеризуют форму контура Γ , а величина r_0 — его абсолютные размеры.

Для определения напряжений $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ и перемещения u_φ используем формулы преобразования вектора и тензора второго ранга при переходе от сферических r, θ, α к криволинейным ортогональным координатам ρ, γ, φ

$$\sigma_{r\varphi}(\rho, \gamma) = \sigma_{\theta\alpha}(r, \theta) \cos \beta - \sigma_{r\alpha}(r, \theta) \sin \beta \quad (2.3)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \gamma) = \sigma_{r\alpha}(r, \theta) \cos \beta + \sigma_{\theta\alpha}(r, \theta) \sin \beta$$

$$u_\varphi(\rho, \gamma) = u_\alpha(r, \theta)$$

Здесь β — угол между радиальным направлением и нормалью к контуру Γ в произвольной точке.

Следовательно, сферические координаты r, θ и экспонента $e^{i\theta}$ согласно (2.2) выражаются через переменные ρ, γ и параметр ε по формулам

$$r = r_0^{-1} \sqrt{\omega(\xi) \overline{\omega(\xi)}}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \omega(\xi)}{\operatorname{Re} \omega(\xi)}, \quad e^{i\theta} = \frac{\xi \overline{\omega'(\xi)} \overline{\omega(\xi)}}{|\xi| |\omega'(\xi)| |\omega(\xi)|} \quad (2.4)$$

Граничные условия на координатной поверхности $S(\rho=1)$ при заданных усилиях $\Phi(\gamma)$ или перемещениях $V(\gamma)$ соответственно будут

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \gamma) |_{\rho=1} = \Phi(\gamma), \quad U_\varphi(\rho, \gamma) |_{\rho=1} = V(\gamma) \quad (2.5)$$

Из соотношений (2.4) видно, что правые части (2.3) являются достаточно сложными функциями от переменных ρ, γ и, следовательно, удовлетворить точно граничным условиям (2.5) на поверхности $\rho=1$ не представляется возможным. Однако при $\varepsilon=0$ на основе (2.2), (2.4) имеем

$$r|_{\varepsilon=0} = \rho, \quad \theta|_{\varepsilon=0} = \gamma, \quad \omega(\xi)|_{\varepsilon=0} = r_0 \xi, \quad \beta|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (2.6)$$

т. е. кривая Γ переходит в окружность радиуса r_0 , и граничные условия (2.5) в этом случае удовлетворяются точно.

Такие близкие к сферическим поверхности, не допускающие решения краевых задач методом непосредственного разделения переменных, следуя [9], будем называть неканоническими.

Для решения краевой задачи о напряженном состоянии при кручении ортотропного тела вращения с неканонической полостью или включением воспользуемся приближенным методом «возмущения формы границы» [10].

Представим искомые компоненты в виде

$$\{u_\varphi, \sigma_{\gamma\varphi}, \sigma_{\rho\varphi}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \{u_\varphi^{(n)}, \sigma_{\gamma\varphi}^{(n)}, \sigma_{\rho\varphi}^{(n)}\} \quad (2.7)$$

Для удовлетворения граничным условиям (2.5) правые части соотношений (2.3) необходимо представить в форме (2.7). В общем виде это удается сделать с помощью рекуррентных соотношений [11], на основании которых имеем

$$\begin{aligned} u_\varphi^{(n)}(\rho, \gamma) &= \sum_{m=0}^n \Lambda_1^{(n-m)} u_\alpha^{(m)}(\rho, \gamma) \\ \sigma_{\gamma\varphi}^{(n)}(\rho, \gamma) &= \sum_{m=0}^n [\Lambda_5^{(n-m)} \sigma_{\theta\alpha}^{(m)}(\rho, \gamma) - \Lambda_6^{(n-m)} \sigma_{r\alpha}^{(m)}(\rho, \gamma)] \\ \sigma_{\rho\varphi}^{(n)}(\rho, \gamma) &= \sum_{m=0}^n [\Lambda_5^{(n-m)} \sigma_{r\alpha}^{(m)}(\rho, \gamma) + \Lambda_6^{(n-m)} \sigma_{\theta\alpha}^{(m)}(\rho, \gamma)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\Lambda_j^{(n)}$ — дифференциальные операторы, зависящие от вида функции $f(\xi)$; выражения для $u_\alpha^{(m)}(\rho, \gamma)$, $\sigma_{\theta\alpha}^{(m)}(\rho, \gamma)$, $\sigma_{r\alpha}^{(m)}(\rho, \gamma)$ записываются на основе (1.3), (1.4) в результате формальной замены r, θ на ρ, γ , например

$$u_\alpha^{(m)} = -\frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \rho^{\lambda_n - 1/2} \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma} \quad (2.9)$$

Таким образом, граничные задачи для тел вращения с неканоническими полостями или включениями формально сводятся к последовательности краевых задач для тела вращения со сферическими полостями или включениями. При этом неоднородные краевые условия для произвольного приближения согласно (2.5), (2.8) будут

$$\begin{aligned} \sigma_{r\alpha}^{(0)}|_{\rho=1} &= \Phi^{(0)}, \quad u_\alpha^{(0)}|_{\rho=1} = V^{(0)} \\ \sigma_{r\alpha}^{(n)}|_{\rho=1} &= \Phi^{(n)} - \sum_{m=0}^{n-1} [\Lambda_5^{(n-m)} \sigma_{r\alpha}^{(m)} + \Lambda_6^{(n-m)} \sigma_{\theta\alpha}^{(m)}]|_{\rho=1} \\ u_\alpha^{(n)}|_{\rho=1} &= V^{(n)} - \sum_{m=0}^{n-1} \Lambda_1^{(n-m)} u_\alpha^{(m)}|_{\rho=1} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Сложность решения граничных задач состоит в том, что правые части (2.10) зависят не только от коэффициентов $\Phi^{(n)}$ и $V^{(n)}$ разложений известных функций Φ и V в ряды по степеням ε , но и от всех предыдущих приближений.

3. Исследуем эффективность метода возмущения формы границы в теории кручения упругих тел вращения. Для этого рассмотрим функцию $f(\xi) = \xi^{-h}$, которой при определенных значениях параметра ε соответст-

вует в плоскости zoR $(k+1)$ -угольник¹ с закругленными углами и, следовательно, в трехмерном евклидовом пространстве — специальный класс поверхностей вращения. Соответствующие этому классу дифференциальные операторы $\Lambda_j^{(n)}$ ($n=0, 1, 2$), фигурирующие в соотношениях (2.8), (2.10), имеют вид

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{(0)} &= \Lambda_5^{(0)} = 1, \quad \Lambda_6^{(0)} = 0 \\ \Lambda_1^{(1)} &= \Lambda_5^{(1)} = \frac{\cos(k+1)\gamma}{\rho^k} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin(k+1)\gamma}{\rho^{k+1}} \frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad \Lambda_6^{(1)} = \frac{(k+1)\sin(k+1)\gamma}{\rho^{k+1}} \\ \Lambda_1^{(2)} &= \frac{1 + \cos 2(k+1)\gamma}{4\rho^{2k}} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\sin 2(k+1)\gamma}{2\rho^{2k}} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \gamma} \frac{1}{\rho} + \\ &\quad + \frac{1 - \cos 2(k+1)\gamma}{4\rho^{2k+2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \\ \Lambda_5^{(2)} &= \Lambda_1^{(2)} - \frac{(k+1)^2 [1 - \cos 2(k+1)\gamma]}{4\rho^{2k+2}} \\ \Lambda_6^{(2)} &= \frac{k+1}{2} \left[\frac{(k-1)\sin 2(k+1)\gamma}{\rho^{2k+2}} + \frac{\sin 2(k+1)\gamma}{\rho^{2k+1}} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1 - \cos 2(k+1)\gamma}{\rho^{2k+2}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Предположим, что сплошной цилиндр радиуса R_1 подвержен кручению моментом M относительно его оси oz . Тогда напряжения σ_{xz}^0 и σ_{yz}^0 в безразмерных прямоугольных координатах x, y, z имеют вид [5]

$$\sigma_{xz}^0 = p' r_0 y, \quad \sigma_{yz}^0 = -p' r_0 x, \quad p' = 2M / \pi R_1^4 \quad (3.2)$$

Следовательно, в сферических координатах будем иметь

$$\sigma_{\theta z}^0 = 0.5 p' r_0 r (1 - \cos 2\theta), \quad \sigma_{r z}^0 = -0.5 p' r_0 r \sin 2\theta \quad (3.3)$$

Напряженное состояние цилиндра, соответствующее компонентам (3.2), (3.3), будем называть основным.

Составляющие основного напряженного состояния в криволинейных ортогональных координатах с точностью до ε^3 по сравнению с единицей получим на основе формул (2.3), (2.7), (2.8), (3.1), (3.3)

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\varphi}^0 &= \sum_n \varepsilon^n \sigma_{\gamma\varphi}^{0(n)} = \\ &= \frac{p' r_0}{3} \left\{ 2\rho(1-P_2) + \varepsilon \rho^{-k} \left[2 \cos(k+1)\gamma(1-P_2) + (1-k)\sin(k+1)\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \rho^{-2k-1} \left[k(1 - \cos 2(k+1)\gamma) (-k-1 + (k-2)P_2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - k(k+1)\sin 2(k+1)\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} \right] + O(\varepsilon^3) \right\} \\ \sigma_{\rho\varphi}^0 &= \sum_n \varepsilon^n \sigma_{\rho\varphi}^{0(n)} = \end{aligned} \quad (3.4)$$

¹ С увеличением числа сторон многоугольника (т. е. при $k \geq 2$) уменьшается соответствующее ему значение параметра ε , например: треугольник ($k=2$, $|\varepsilon|=1/4$), квадрат ($k=3$, $|\varepsilon|=1/9$), пятиугольник ($k=4$, $|\varepsilon|=1/16$), шестиугольник ($k=5$, $|\varepsilon|=1/25$).

$$= \frac{p'r_0}{3} \left\{ \rho \frac{dP_2}{d\gamma} + \varepsilon \rho^{-k} \left[\cos(k+1)\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} + \sin(k+1)\gamma (2k+1-2(k-1)P_2) \right] + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \rho^{-2k-1} \left[-\frac{k(k-2)}{4} (1-\cos 2(k+1)\gamma) \frac{dP_2}{d\gamma} + \right. \right. \\ \left. \left. + k(k+1) \sin 2(k+1)\gamma (1-P_2) \right] + O(\varepsilon^3) \right\}$$

Напряжениям (3.4) согласно [3] соответствует перемещение

$$u_\varphi^0 = \sum_n \varepsilon^n u_\varphi^{(n)} = \frac{p'qr_0^2}{3G_2} \left\{ \rho^2 \frac{dP_2}{d\gamma} + \right. \\ \left. + \varepsilon \rho^{-k+1} \left[2 \cos(k+1)\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} - \sin(k+1)\gamma (1-4P_2) \right] + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \rho^{-2k} \left[\cos 2(k+1)\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} - \frac{1}{2} \sin 2(k+1)\gamma (1-4P_2) \right] + O(\varepsilon^3) \right\} \quad (3.5) \\ q = (G_2/G_1+1)/2$$

Рассмотрим далее задачу о кручении цилиндра с неканонической полостью. При этом предполагается, что внешняя цилиндрическая поверхность находится на таком расстоянии от полости, что она не влияет на распределение напряжений у поверхности неканонической полости. Если полость свободна от напряжений, то имеет место только первое граничное условие (2.10), в котором следует положить

$$\Phi^{(n)}(\gamma) = -\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)} \Big|_{\rho=1} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

Естественно, что для удовлетворения граничным условиям необходимо переразложить произведения тригонометрических функций на полиномы Лежандра или их производные в ряды, содержащие в качестве слагаемых только первые производные от полиномов Лежандра. Это можно осуществить при конкретных значениях k на основе рекуррентных соотношений

$$(2n+1)\mu P_n = \frac{dP_{n-1}}{d\gamma} - \frac{dP_{n+1}}{d\gamma} \\ (2n+1)\mu P_n = \frac{n}{2n-1} \frac{dP_{n-2}}{d\gamma} - \frac{2n+1}{(2n-1)(2n+3)} \frac{dP_n}{d\gamma} - \frac{n+1}{2n+3} \frac{dP_{n+2}}{d\gamma} \\ (2n+1)\mu \frac{dP_n}{d\gamma} = (n+1) \frac{dP_{n-1}}{d\gamma} + n \frac{dP_{n+1}}{d\gamma} \quad (3.6) \\ (2n+1)\mu^2 \frac{dP_n}{d\gamma} = \frac{n(n+1)}{2n-1} \frac{dP_{n-2}}{d\gamma} + \\ + \frac{4n^3+6n^2-4n-3}{(2n+1)(2n+3)} \frac{dP_n}{d\gamma} + \frac{n(n+1)}{2n+3} \frac{dP_{n+2}}{d\gamma} \\ (2n+1)\mu \frac{d^2 P_n}{d\gamma^2} = -(n+1)^2 \frac{dP_{n-1}}{d\gamma} + n^2 \frac{dP_{n+1}}{d\gamma}, \quad \mu = \cos \gamma, \quad \mu = \sin \gamma$$

которые следуют из основных рекуррентных соотношений для сферических функций [12].

Приближенные выражения для компонент $u_\varphi^{*(n)}$, $\sigma_{\gamma\varphi}^{*(n)}$, $\sigma_{\rho\varphi}^{*(n)}$ ($n \geq 1$) будем определять по формулам

$$u_\varphi^{*(n)} = u_\varphi^{*(n-1)} + \varepsilon^n (u_\varphi^{(n)} + u_\varphi^{o(n)}), \quad \sigma_{\gamma\varphi}^{*(n)} = \sigma_{\gamma\varphi}^{*(n-1)} + \varepsilon^n (\sigma_{\gamma\varphi}^{(n)} + \sigma_{\gamma\varphi}^{o(n)}) \quad (3.7)$$

где $u_\varphi^{(n)}$, $\sigma_{\gamma\varphi}^{(n)}$, $\sigma_{\rho\varphi}^{(n)}$ — составляющие n -го приближения дополнительного напряженно-деформированного состояния скручиваемого цилиндра, которое возникло в результате наличия в нем полости или включения.

Отметим, что функции $f(\zeta) = \zeta^{-k}$ при $k=1$ согласно (2.1), (2.2) соответствуют вытянутые ($\varepsilon > 0$) или сжатые ($\varepsilon < 0$) эллипсоиды вращения с эксцентриситетом $\varepsilon = (a-b)/(a+b)$ (a, b — полуоси эллипсоида).

В предположении, что поверхность эллипсоидальной полости в изотропном цилиндре свободна от напряжений, т. е. $\sigma_{\rho\varphi}^{(n)} + \sigma_{\rho\varphi}^{o(n)} = 0$ при $\rho=1$, задача решалась с учетом трех приближений ($n=0, 1, 2$). При этом, очевидно, наибольший интерес представляют напряжения $\sigma_{\gamma\varphi}^{*(n)}/p'b$ при $\gamma=\pi/2$, которые согласно (2.7), (2.8), (2.10), (3.4), (3.6), (3.7) определяются по формуле

$$\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p'b} \Big|_{\gamma=\pi/2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left[\rho + \frac{1}{4} \rho^{-4} - \varepsilon \left(\rho^{-1} + \frac{25}{28} \rho^{-4} + \frac{1}{14} \rho^{-6} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{325}{294} \rho^{-4} + \frac{135}{49} \rho^{-6} - \frac{95}{42} \rho^{-8} \right) \right] \quad (3.8)$$

Ниже в таблице наряду с точными числовыми значениями коэффициента концентрации [3] k_γ (при $\gamma=\pi/2, \rho=1$) приведены приближенные значения $k_\gamma^{(n)}$, полученные по формуле (3.8), а также относительные погрешности Δ_n (в процентах)

$$k_\gamma = \sigma_{\gamma\varphi}/p'b, \quad k_\gamma^{(n)} = \sigma_{\gamma\varphi}^{*(n)}/p'b, \quad \Delta_n = |k_\gamma - k_\gamma^{(n)}|/k_\gamma \quad (3.9)$$

Анализ числовых результатов свидетельствует о достаточно быстрой практической сходимости изложенного приближенного метода в теории кручения тел вращения с неканоническими полостями и включениями.

b/a	ε	k_γ	$k_\gamma^{(1)}$	Δ_1	$k_\gamma^{(2)}$	Δ_2
2	-1/3	1.633	1.429	12.5	1.562	4.4
3/2	-1/5	1.437	1.369	4.7	1.422	1.0
4/3	-1/7	1.375	1.339	2.6	1.368	0.5
3/4	1/7	1.162	1.131	2.7	1.169	0.6
2/3	1/5	1.137	1.071	5.8	1.151	1.3
1/2	1/3	1.087	0.893	17.9	1.159	6.6

Если при конкретных инженерных расчетах допустима погрешность до 5%, то согласно таблице для значений параметра $|\varepsilon| < 0.2$ искомый результат дает первое приближение поставленной задачи.

4. Рассмотрим задачу о распределении напряжений, возникающих при кручении ортотропного тела вращения, ослабленного замкнутой конической полостью. Под конической полостью или включением понимаются фигуры, образованные вращением треугольника со скругленными углами. В этом случае компоненты основного напряженного состояния определяются по формулам (3.4), в которых следует положить $k=2, \varepsilon=1/4$.

Предполагая, что поверхность конической полости $\rho=1$ свободна от напряжений, для составляющих нулевого приближения получим формулы

$$\sigma_{\rho\varphi}^{*(0)} = \frac{p'r_0}{3} (\rho - \rho^{\lambda_2 - 1/2}) \frac{dP_2}{d\gamma}, \quad \sigma_{\gamma\varphi}^{*(0)} = \frac{2p'r_0}{3} \left(\rho - \frac{G_1}{G_2} \frac{1}{\lambda_2 - 1/2} \rho^{\lambda_2 - 1/2} \right) (1 - P_2). \quad (4.1)$$

Заметим, что эти компоненты соответствуют точному решению задачи о распределении напряжений в упругой однородной ортотропной среде со сферической полостью, подверженной кручению.

На основе соотношений (2.8), (2.10), (3.4), (3.6) в первом приближении имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\varphi}^{(1)} + \sigma_{\rho\varphi}^{o(1)} &= p'r_0 \left\{ \frac{1}{70} [20\rho^{-2} - 9(2\lambda_2 - 4\kappa + 3)\rho^{\lambda_2 - 1/2} + (18\lambda_2 - 36\kappa + 7)\rho^{\lambda_2 - 3/2}] \times \right. \\ &\times \frac{dP_1}{d\gamma} - \frac{1}{45} [40\rho^{-2} - (2\lambda_2 + 21\kappa - 7)\rho^{\lambda_2 - 1/2} + (2\lambda_2 + 21\kappa - 47)\rho^{\lambda_2 - 3/2}] \frac{dP_3}{d\gamma} + \\ &\left. + \frac{16}{315} [4\rho^{-2} - (2\lambda_2 + 3\kappa - 7)\rho^{\lambda_2 - 1/2} + (2\lambda_2 + 3\kappa - 11)\rho^{\lambda_2 - 3/2}] \frac{dP_5}{d\gamma} \right\} \\ \sigma_{\gamma\varphi}^{(1)} + \sigma_{\gamma\varphi}^{o(1)} &= \frac{G_1}{r_0^2} \sum_{n=1,3,5} A_n^{(1)} \rho^{\lambda_n - 1/2} \left[n(n+1)P_n + 2 \operatorname{ctg} \gamma \frac{dP_n}{d\gamma} \right] + \\ &+ p'r_0 \left\{ \frac{1}{3} \left[2\rho^{-2} - \kappa \left(\lambda_2 - \frac{3}{2} \right) \rho^{\lambda_2 - 1/2} \right] \cos 3\gamma (1 - P_2) - \right. \\ &\left. - \left[\frac{1}{3} \rho^{-2} - \left(1 - \frac{\kappa}{3} \right) \rho^{\lambda_2 - 1/2} \right] \sin 3\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

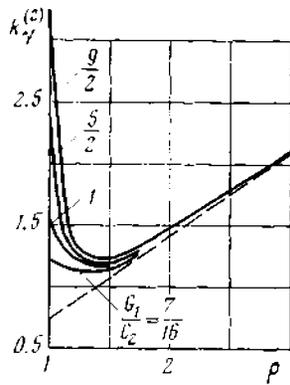
где коэффициенты $A_1^{(1)}, A_3^{(1)}, A_5^{(1)}$ определяются из граничных условий (2.10) при $n=1$ и имеют вид

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} &= \frac{9(2\lambda_2 - 4\kappa + 3)}{35(2\lambda_1 - 3)} \frac{p'r_0^3}{G_2}, \quad A_3^{(1)} = \frac{2(2\lambda_2 + 21\kappa - 47)}{45(2\lambda_3 - 3)} \frac{p'r_0^3}{G_2} \\ A_5^{(1)} &= -\frac{32(2\lambda_2 + 3\kappa - 11)}{315(2\lambda_5 - 3)} \frac{p'r_0^3}{G_2}, \quad \kappa = \frac{2}{(\lambda_2 - 3/2)} \frac{G_1}{G_2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

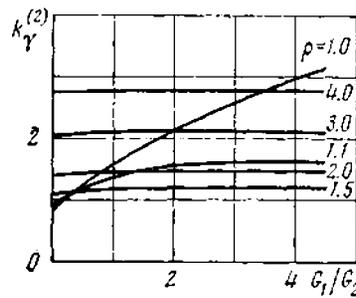
Аналогично поступим при нахождении компонентов напряжений во втором приближении. Однако ввиду громоздкости приведем только формулу для определения $\sigma_{\gamma\varphi}^{(2)}$ при $\gamma=2\pi/3$

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\varphi}^{(2)} \Big|_{\gamma=2\pi/3} &= \frac{G_1}{r_0^2} \left\{ \sum_{n=2,4,6,8} A_n^{(2)} \rho^{\lambda_n - 1/2} \left[n(n+1)P_n + 2 \operatorname{ctg} \gamma \frac{dP_n}{d\gamma} \right] \Big|_{\gamma=2\pi/3} + \right. \\ &+ \frac{45}{8} \left(\lambda_3 - \frac{3}{2} \right) A_3^{(1)} \rho^{\lambda_3 - 1/2} - \frac{315}{64} \left(\lambda_5 - \frac{3}{2} \right) A_5^{(1)} \rho^{\lambda_5 - 1/2} \Big\} - \\ &- \frac{3}{16} p'r_0 \kappa \left(\lambda_2 - \frac{3}{2} \right) \left(\lambda_2 - \frac{5}{2} \right) \rho^{\lambda_2 - 1/2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Произвольные постоянные $A_n^{(2)}$ ($n=2, 4, 6, 8$) определяются из краевых условий (2.10) для второго приближения.



Фиг. 1



Фиг. 2

Напряжения в цилиндре с конической полостью существенным образом зависят от отношения G_1/G_2 . Так, например, при $\gamma=2\pi/3$, $\varepsilon=1/4$ напряжения $\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}$ в соответствии с обозначениями (3.7) характеризуются выражениями

$$\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{\rho' r_0} = 0.75\rho + \frac{0.1875}{\rho^2} + \frac{0.2095}{\rho^4} + \frac{0.3906}{\rho^5} + \frac{0.0820}{\rho^6} - \frac{0.0312}{\rho^7} + \frac{0.1073}{\rho^8} + \frac{0.0320}{\rho^{10}} \quad \text{при } \frac{G_1}{G_2} = 1 \quad (4.5)$$

$$\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{\rho' r_0} = 0.75\rho + \frac{0.1875}{\rho^2} + \frac{0.5659}{\rho^5} + \frac{0.8873}{\rho^7} - \frac{0.3421}{\rho^8} - \frac{1.1048}{\rho^{10}} + \frac{0.3516}{\rho^{11}} + \frac{1.5486}{\rho^{12}} - \frac{0.8206}{\rho^{13}} + \frac{0.5083}{\rho^{15}} \quad \text{при } \frac{G_1}{G_2} = \frac{5}{2}$$

Изменение относительных напряжений (коэффициента концентрации)

$$k_\gamma^{(2)} = \frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{\rho' b'} \Big|_{\gamma=2\pi/3} \quad \left(b' = r_0 R \Big|_{\gamma=2\pi/3} = \frac{5\sqrt{3}}{8} r_0 \right) \quad (4.6)$$

при различных отношениях G_1/G_2 и расстояниях от поверхности конической полости показано на Фиг. 1, 2, где штриховая линия соответствует основному напряженному состоянию.

Отметим, что максимальное отклонение коэффициента концентрации $k_\gamma^{(2)}$ ($0 < G_1/G_2 \leq 9/2$) от соответствующих ему числовых значений в сплошном цилиндре при $\rho=2$ составляет 1.7%, а при $\rho=3$ не превышает 0.2%.

5. Исследуем напряженное состояние при кручении ортотропного упругого цилиндра с жестким коническим включением. В этом случае граничные условия в n -м приближении будут

$$[u_\varphi^{(n)}(\rho, \gamma) + u_\varphi^{o(n)}(\rho, \gamma)]_{\rho=1} = 0 \quad (n \geq 0) \quad (5.1)$$

где компоненты $u_\varphi^{(n)}$ определяются из рекуррентных соотношений (2.8), а $u_\varphi^{o(n)}$ — из (3.5) при $k=2$, $\varepsilon=1/4$.

В нулевом приближении (сферическое включение) составляющие тензора напряжений находятся по формулам

$$\sigma_{\rho\rho}^{*(0)} = \frac{p'r_0}{3} \left[\rho - q \left(\lambda_2 - \frac{3}{2} \right) \rho^{\lambda_2 - 3/2} \right] \frac{dP_2}{d\gamma}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{*(0)} = \frac{2p'r_0}{3} \left(\rho - \frac{G_1}{G_2} q \rho^{\lambda_2 - 3/2} \right) (1 - P_2)$$

На основе соотношений (2.8) в первом приближении получим выражения

$$u_\alpha^{(1)}(\rho, \gamma) = u_\alpha^{(1)}(\rho, \gamma) - \frac{1}{r_0} A_2^{(0)} \rho^{\lambda_2 - 1/2} \left[-\frac{3}{70} (18\lambda_2 + 25) \frac{dP_1}{d\gamma} - \right. \\ \left. - \frac{1}{15} (2\lambda_2 - 5) \frac{dP_3}{d\gamma} + \frac{16}{105} (2\lambda_2 - 5) \frac{dP_5}{d\gamma} \right]$$

$$\sigma_{\gamma\alpha}^{(1)}(\rho, \gamma) = \sigma_{\gamma\alpha}^{(1)}(\rho, \gamma) + \frac{1}{r_0^2} A_2^{(0)} \rho^{\lambda_2 - 3/2} \left\{ 2G_1 \left(\lambda_2 - \frac{3}{2} \right) \cos 3\gamma (P_2 - 1) + \right. \\ \left. + \left[3G_2 \left(\lambda_2 - \frac{3}{2} \right) - 2G_1 \right] \sin 3\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} \right\}$$

$$\sigma_{r\alpha}^{(1)}(\rho, \gamma) = \sigma_{r\alpha}^{(1)}(\rho, \gamma) + \frac{1}{r_0^2} A_2^{(0)} \rho^{\lambda_2 - 3/2} \left[- \left(\lambda_2 - \frac{3}{2} \right)^2 G_2 \cos 3\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} + \right. \\ \left. + \left(\lambda_2 - \frac{3}{2} \right) G_2 \sin 3\gamma \frac{d^2 P_2}{d\gamma^2} + 6G_1 \sin 3\gamma (P_2 - 1) \right]$$

Здесь $u_\alpha^{(1)}$, $\sigma_{\gamma\alpha}^{(1)}$, $\sigma_{r\alpha}^{(1)}$ определяются формулами вида (2.9), в которых произвольные постоянные $A_n^{(m)}$ ($m=1, n=1, 3, 5$) находятся из граничных условий (5.1) с учетом соотношений (3.5), (3.6) и имеют вид

$$A_1^{(1)} = \frac{27}{14} A, \quad A_3^{(1)} = \frac{1}{3} A, \quad A_5^{(1)} = -\frac{16}{21} A$$

$$A = \frac{2\lambda_2 - 5}{5} A_2^{(0)} = \frac{2\lambda_2 - 5}{15} \frac{p' q r_0^3}{G_2}$$

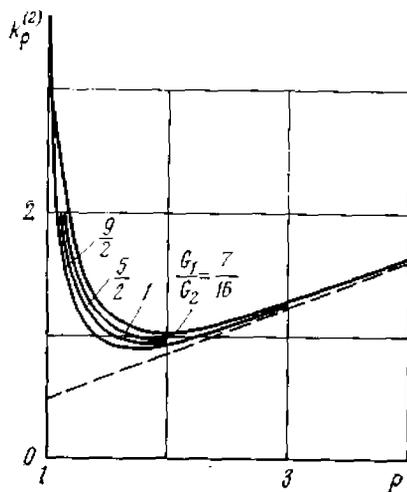
Аналогично поступим при определении компонентов второго приближения. В частности, при $\gamma = 2\pi/3$ напряжения $\sigma_{\rho\rho}^{(2)}$ находятся по формуле

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)} \Big|_{\gamma=2\pi/3} = -\frac{G_2}{r_0^2} \sum_{n=2,4,6,8} \left(\lambda_n - \frac{3}{2} \right) A_n^{(2)} \rho^{\lambda_n - 3/2} \frac{dP_n}{d\gamma} \Big|_{\gamma=2\pi/3} +$$

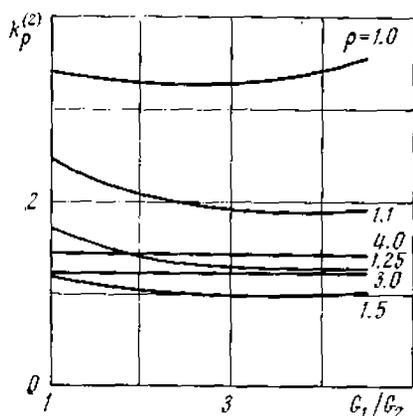
$$+ p'r_0 \sqrt{3} \left\{ -\frac{1}{64} (2\lambda_2 - 3) (4\lambda_2^2 - 16\lambda_2 + 15) \rho^{\lambda_2 - 15/2} + \frac{2\lambda_2 - 5}{15} \left[\frac{27}{28} \left(\lambda_1 - \frac{3}{2} \right)^2 \rho^{\lambda_1 - 9/2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{16} \left(\lambda_3 - \frac{3}{2} \right)^2 \rho^{\lambda_3 - 9/2} + \frac{95}{112} \left(\lambda_5 - \frac{3}{2} \right)^2 \rho^{\lambda_5 - 9/2} \right] \right\}$$

где постоянные $A_n^{(2)}$ ($n=2, 4, 6, 8$) определяются из граничных условий (5.1).

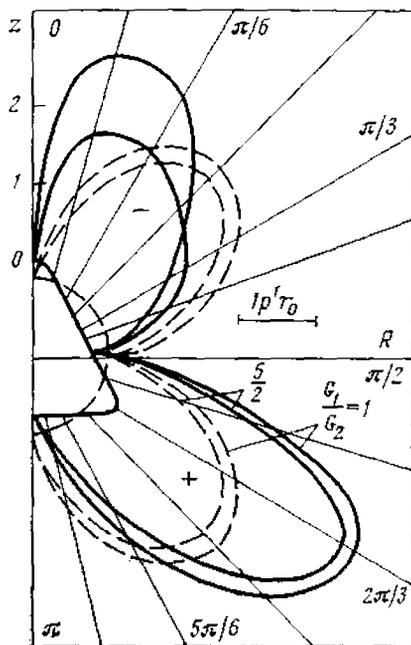
В рассматриваемом случае представление напряжений по степеням ρ в основном аналогично (4.5). Изменение коэффициента концентрации напряжений $k_\rho^{(2)} = \sigma_{\rho\rho}^{*(2)} / p' b'$ при $\gamma = 2\pi/3$ имеет ярко выраженный локальный характер (фиг. 3). Влияние ортотропии материала на величину $k_\rho^{(2)}$ при различных значениях ρ показано на фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Распределение напряжений $\sigma_{\rho\phi}^{*(2)}$ вдоль контура меридионального сечения конического включения ($\rho=1, e_2/4, G_1/G_2=5/2$) в соответствии с обозначениями (3.7) характеризуется формулой

$$\sigma_{\rho\phi}^{*(2)} = p'r_0 \left(-0.4886 \frac{dP_1}{d\gamma} + 1.8194 \frac{dP_2}{d\gamma} + 0.1447 \frac{dP_3}{d\gamma} + 0.0056 \frac{dP_4}{d\gamma} + 0.3619 \frac{dP_5}{d\gamma} + 0.0395 \frac{dP_6}{d\gamma} + 0.0738 \frac{dP_8}{d\gamma} \right)$$

и изображено на фиг. 5. При этом для сравнения на фигуре приведены штриховые кривые, соответствующие изменению напряжений около сферического включения.

Заметим, что при $G_1/G_2 \geq 7/16, \gamma = 2\pi/3$ максимальное отклонение относительных напряжений $\sigma_{\rho\phi}^{*(2)}/p'b'$ от соответствующих напряжений в сплошном цилиндре при $\rho=3$ составляет 4.1%, а при $\rho=4$ не превышает 1.2%.

Таким образом, графики на фиг. 1, 3 позволяют судить, в каком соотношении должны находиться абсолютные размеры конической полости (включения) и цилиндра, чтобы при изложенном в п. 1, 2 подходе к решению поставленной задачи его внешние (боковая и торцевые) поверхности не влияли на распределение напряжений около внутренней конической полости или включения.

Поступила 24 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян П. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
2. Соляник-Красса Р. В. Кручение валов переменного сечения. Л.—М., Гостехиздат, 1949.
3. Лехмицкий С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М., «Наука», 1971.
4. Vors C. I. Teoria elasticității corpurilor anisotrope. București, Editura Academiei R. S. România, 1970.
5. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
6. Hai-Chang Hu. On the general theory of elasticity for a spherically isotropic medium. Acta sci. sinica, 1954, vol. 3.
7. Chen W. T. On some problems in spherically isotropic elastic materials. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 3. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж. механ. Сер. Е, 1966, т. 33, № 3.)
8. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
9. Sawin G. N., Guž A. N., Kosmodamianskij A. S. Zagadnienia mechaniki ośrodków ciągłych dla obszarów niekanonicznych. Mechanika teoretyczna i stosowana, 1970, t. 8, z. 1.
10. Гузь О. М. Про наблизний метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках. Прикл. механ., 1962, т. 8, вип. 6.
11. Немиш Ю. Н. Метод «возмущения формы границы» в пространственных задачах механики деформируемых сред. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 1.
12. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., Изд-во иностр. лит., 1932.