

УДК 539.3

В. Н. Немиш

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ЗАМКНУТЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОЛОСТЕЙ И ВКЛЮЧЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Исследование напряженного состояния при кручении ортотропных цилиндрических валов с замкнутыми коническими полостями и включениями приведено в работе [5]. На примере задачи о кручении тела вращения с вытянутой или сжатой эллипсоидальной полостью, допускающей точное решение [2, 3, 6] проиллюстрирована эффективность приближенного метода «возмущения формы границы».

В данной статье рассматриваются задачи о кручении ортотропных тел вращения с замкнутыми цилиндрическими и «волчкообразными» полостями и жесткими включениями.

§ 1. Рассмотрим в некоторой области S плоскость zOR , ограниченную контуром Γ , близким к круговому; функция $\omega(\zeta)$, осуществляющая конформное отображение внешности $|\zeta| \geq 1$ (внутренности $|\zeta| \leq 1$) единичной окружности на внешность (внутренность) кривой Γ , имеет вид

$$z + iR = \frac{1}{r_0} \omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta) = r \exp i\theta \quad (\zeta = \rho \exp i\gamma), \quad (1.1)$$

где r_0 — характеризует абсолютные размеры контура Γ и его ориентацию по отношению к системе координат zOR , а малый параметр ε ($|\varepsilon| \ll 1$) и функция $f(\zeta) = \zeta^{-k}$ определяют форму указанного контура.

Напряженно-деформированное состояние цилиндрических тел с неканоническими полостями и включениями (поверхность описывается уравнениями (1.1)) будем исследовать предложенным в работе [1] методом «возмущения формы границы». Для этого представим искомые компоненты $\sigma_{\gamma\varphi}$, $\sigma_{\rho\varphi}$, u_φ в виде

$$\{\sigma_{\gamma\varphi}, \sigma_{\rho\varphi}, u_\varphi\} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \{\sigma_{\gamma\varphi}^{(n)}, \sigma_{\rho\varphi}^{(n)}, u_\varphi^{(n)}\}. \quad (1.2)$$

Согласно формуле (1.1) величины r , θ , угол между радиальным направлением и нормалью к контуру Γ , а также произвольная функция $F(r, \theta)$ могут быть представлены в виде рядов по степеням малого параметра ε . Если использовать формулы перехода от цилиндрических координат (r, θ, z) к криволинейным ортогональным координатам (ρ, γ, φ) , а также выражения (1.2), то для определения компонентов последовательных приближений получим рекуррентные соотношения [5]

$$\sigma_{\gamma\varphi}^{(j)}(\rho, \gamma) = \sum_{m=0}^j [\Delta_5^{(j-m)} \sigma_{\theta\alpha}^{(m)}(\rho, \gamma) - \Lambda_6^{(j-m)} \sigma_{r\alpha}^{(m)}(\rho, \gamma)];$$

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(j)}(\rho, \gamma) = \sum_{m=0}^j [\Lambda_5^{(j-m)} \sigma_{r\alpha}^{(m)}(\rho, \gamma) + \Lambda_6^{(j-m)} \sigma_{\theta\alpha}^{(m)}(\rho, \gamma)]; \quad (1.3)$$

$$u_{\varphi}^{(j)}(\rho, \gamma) = \sum_{m=0}^j \Lambda_1^{(j-m)} u_{\alpha}^{(m)}(\rho, \gamma).$$

Здесь $\Lambda_i^{(j)}$ — дифференциальные операторы, которые зависят от вида функции $f(\xi)$ и при $j = 0, 1, 2$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{(0)} = \Lambda_5^{(0)} = 1; \quad \Lambda_6^{(0)} = 0; \quad \Lambda_1^{(1)} = \Lambda_5^{(1)} = \frac{\cos(k+1)\gamma}{\rho^k} \frac{\partial}{\partial \rho} - \\ - \frac{\sin(k+1)\gamma}{\rho^{k+1}} \frac{\partial}{\partial \gamma}; \\ \Lambda_1^{(2)} = \frac{1 + \cos 2(k+1)\gamma}{4\rho^{2k}} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\sin 2(k+1)\gamma}{2\rho^{2k}} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \gamma} \frac{1}{\rho} + \\ + \frac{1 - \cos 2(k+1)\gamma}{4\rho^{2k+2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right); \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\Lambda_5^{(2)} = \Lambda_1^{(2)} - \frac{(k+1)^2 [1 - \cos 2(k+1)\gamma]}{4\rho^{2k+2}}; \quad \Lambda_6^{(1)} = \frac{(k+1) \sin(k+1)\gamma}{\rho^{k+1}};$$

$$\begin{aligned} \Lambda_6^{(2)} = \frac{k+1}{2} \left[\frac{(k-1) \sin 2(k+1)\gamma}{\rho^{2k+2}} + \frac{\sin 2(k+1)\gamma}{\rho^{2k+1}} \frac{\partial}{\partial \rho} - \right. \\ \left. - \frac{1 - \cos 2(k+1)\gamma}{\rho^{2k+2}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right]. \end{aligned}$$

Выражения для компонентов $\sigma_{\theta\alpha}^{(m)}(\rho, \gamma)$, $\sigma_{r\alpha}^{(m)}(\rho, \gamma)$, $u_{\alpha}^{(m)}(\rho, \gamma)$ из (1.3) согласно данным [7] записываются в криволинейной ортогональной системе координат в результате формальной замены r, θ на ρ, γ , т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\alpha}^{(m)} = \frac{G_1}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \rho^{\lambda_n - \frac{3}{2}} \left[n(n+1) P_n(\cos \gamma) + 2 \operatorname{ctg} \gamma \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma} \right]; \\ \sigma_{r\alpha}^{(m)} = -\frac{G_2}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \rho^{\lambda_n - \frac{3}{2}} \left(\lambda_n - \frac{3}{2} \right) \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma}; \\ u_{\alpha}^{(m)} = -\frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \rho^{\lambda_n - \frac{1}{2}} \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $P_n(\cos \gamma)$ — полиномы Лежандра, а постоянные величины λ_n должны удовлетворять алгебраическому уравнению

$$\lambda_n^2 - \left[\frac{G_1}{G_2} (n-1)(n+2) + \frac{9}{4} \right] = 0. \quad (1.6)$$

Здесь G_1, G_2 — модули сдвига в плоскостях $(\theta\alpha)$ и $(r\alpha)$.

Составляющие основного напряженного состояния, т. е. для сплошного цилиндра, в криволинейных ортогональных координатах имеют вид

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_{\gamma\varphi} &= \sum_n \varepsilon^n \widehat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(n)} = \frac{\rho' r_0}{3} \left\{ 2\rho(1 - P_2) + \varepsilon\rho^{-k} \left[2 \cos(k+1)\gamma(1 - P_2) + \right. \right. \\ &+ (1 - k) \sin(k+1)\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} \left. \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} \rho^{-2k-1} \left[k(1 - \cos 2(k+1)\gamma) \times \right. \\ &\times (-k-1 + (k-2)P_2) - k(k+1) \sin 2(k+1)\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} \left. \right] + \dots \left. \right\}; \\ \widehat{\sigma}_{\rho\varphi} &= \sum_n \varepsilon^n \widehat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(n)} = \frac{\rho' r_0}{3} \left\{ \rho \frac{dP_2}{d\gamma} + \varepsilon\rho^{-k} \left[\cos(k+1)\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} + \right. \right. \\ &+ \sin(k+1)\gamma(2k+1 - 2(k-1)P_2) \left. \right] + \varepsilon^2 \rho^{-2k-1} \left[-\frac{k(k-2)}{4} \times \right. \\ &\times (1 - \cos 2(k+1)\gamma) \frac{dP_2}{d\gamma} + k(k+1) \sin 2(k+1)\gamma(1 - P_2) \left. \right] + \dots \left. \right\},\end{aligned}\quad (1.7)$$

которым соответствует перемещение

$$\begin{aligned}\widehat{u}_\varphi &= \sum_n \varepsilon^n \widehat{u}_\varphi^{(n)} = \frac{\rho' r_0^2}{3G_2} q \left\{ \rho^2 \frac{dP_2}{d\gamma} + \varepsilon\rho^{-k+1} \left[2 \cos(k+1)\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} - \right. \right. \\ &- \sin(k+1)\gamma(1 - 4P_2) \left. \right] + \varepsilon^2 \rho^{-2k} \left[\cos 2(k+1)\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \sin 2(k+1)\gamma(1 - 4P_2) \right] + \dots \left. \right\} \quad \left(q = \frac{G_1 + G_2}{2G_1}; \quad \rho' = \frac{2M}{\pi R_1^3} \right),\end{aligned}\quad (1.8)$$

причем R_1 — радиус сплошного цилиндра; M — крутящий момент.

Следует отметить, что исходные краевые задачи математической теории упругости для тел вращения с неканоническими полостями или включениями формально сводятся к последовательности граничных задач для сферических полостей или включений.

§ 2. Исследуем напряженное состояние при кручении ортотропного тела с замкнутыми цилиндрическими и «волчкообразными» полостями. Допустим, что поверхности свободны от напряжений, тогда граничные условия в j -м приближении будут

$$[\sigma_{\rho\varphi}^{(j)} + \widehat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(j)}]_{\rho=1} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $\sigma_{\rho\varphi}^{(j)}$ определяются по формулам (1.3), а составляющая основного напряженного состояния $\widehat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(j)}$ из (1.7) при $k=3$, $\varepsilon = \pm \frac{1}{9}$.

Представим напряжения j -го приближения в виде

$$\sigma_{i\varphi}^{*(j)} = \sigma_{i\varphi}^{*(j-1)} + \varepsilon^j (\sigma_{i\varphi}^{(j)} + \widehat{\sigma}_{i\varphi}^{(j)}) \quad (i = \gamma, \rho), \quad (2.2)$$

$$\sigma_{\gamma\varphi}^{*(0)} = \sigma_{\gamma\varphi}^{(0)} + \widehat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(0)} = \frac{2\rho' r_0}{3} (1 - P_2) \left(\rho - \frac{G_1}{G_2} \frac{1}{\lambda_2 - \frac{3}{2}} \rho^{\lambda_2 - \frac{3}{2}} \right); \quad (2.3)$$

$$\sigma_{\rho\varphi}^{*(0)} = \frac{\rho' r_0}{3} (\rho - \rho^{\lambda_2 - \frac{3}{2}}) \frac{dP_2}{d\gamma}$$

соответствуют напряжениям для ортотропной среды со сферической полостью.

Согласно (1.3), (1.7) в первом приближении получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\varphi}^{(1)} + \widehat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(1)} &= \frac{\rho' r_0}{3} \left\{ \rho^{\lambda_1 - \frac{11}{2}} \left[\kappa \left(\lambda_2 - \frac{3}{2} \right) (P_2 - 1) \cos 4\gamma + (4 - \kappa) \sin 4\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2\rho^{-3} \left[(1 - P_2) \cos 4\gamma - \sin 4\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{G_1}{r_0^2} \sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} \rho^{\lambda_n - \frac{3}{2}} \left[n(n+1) P_n + 2 \operatorname{ctg} \gamma \frac{dP_n}{d\gamma} \right]; \\ \sigma_{\rho\varphi}^{(1)} + \widehat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(1)} &= \frac{\rho' r_0}{3} \left\{ \rho^{\lambda_1 - \frac{11}{2}} \left[\sin 4\gamma \frac{d^2 P_2}{d\gamma^2} - \left(\lambda_2 - \frac{3}{2} \right) \cos 4\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4\kappa (1 - P_2) \sin 4\gamma \right] + \rho^{-3} \left[\cos 4\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} + (7 - 4P_2) \sin 4\gamma \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{G_2}{r_0^2} \sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} \left(\lambda_n - \frac{3}{2} \right) \rho^{\lambda_n - \frac{3}{2}} \frac{dP_n}{d\gamma}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Неизвестные коэффициенты $A_n^{(1)}$ ($n = 2, 4, 6$) определяются из краевых условий (2, 1) и имеют вид

$$\begin{aligned} A_2^{(1)} &= \frac{22\lambda_2 - 64\kappa + 73 \rho' r_0^3}{63(2\lambda_2 - 3)} \frac{1}{G_2}; & A_4^{(1)} &= \frac{16(2\lambda_2 + 26\kappa - 57) \rho' r_0^3}{385(2\lambda_4 - 3)} \frac{1}{G_2}; \\ A_6^{(1)} &= -\frac{64(2\lambda_2 + 4\kappa - 13) \rho' r_0^3}{693(2\lambda_6 - 3)} \frac{1}{G_2} \left(\kappa = \frac{2}{\lambda_2 - \frac{3}{2}} \frac{G_1}{G_2} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Во втором приближении выражения для напряжений значительно усложняются, поэтому, например, при $\gamma = \frac{\pi}{2}$ для $\sigma_{\gamma\varphi}^{(2)} + \widehat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(2)}$ имеет место формула

$$\begin{aligned} (\sigma_{\gamma\varphi}^{(2)} + \widehat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(2)})_{\gamma = \frac{\pi}{2}} &= -\frac{\rho' r_0}{2} \frac{G_1}{G_2} \left(\lambda_2 - \frac{5}{2} \right) \rho^{\lambda_2 - \frac{19}{2}} + \\ &+ \frac{G_1}{r_0^2} \left\{ \sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} \rho^{\lambda_n - \frac{11}{2}} \left(\lambda_n - \frac{3}{2} \right) \left[n(n+1) P_n + 2 \operatorname{ctg} \gamma \frac{dP_n}{d\gamma} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2,4,\dots}^{10} A_n^{(2)} \rho^{\lambda_n - \frac{3}{2}} \left[n(n+1) P_n + 2 \operatorname{ctg} \gamma \frac{dP_n}{d\gamma} \right] \right\}_{\gamma = \frac{\pi}{2}}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где постоянные коэффициенты $A_n^{(2)}$ ($n = 2, 4, \dots, 10$) определяются из граничных условий (2.1) при $j = 2$ и из-за громоздкости не приводятся.

При некоторых характерных значениях $\varepsilon = \frac{1}{9}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ и отношения $\frac{G_1}{G_2}$ в силу обозначений (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\Phi}^{*(2)} \Big|_{\frac{G_1}{G_2} = 1} &\approx \left(\rho + \frac{1}{9\rho^3} + \frac{0,2876}{\rho^4} + \frac{0,2163}{\rho^6} + \frac{0,1098}{\rho^8} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,0535}{\rho^{10}} + \frac{0,0220}{\rho^{12}} \right) \rho' r_0; \\ \sigma_{\gamma\Phi}^{*(2)} \Big|_{\frac{G_1}{G_2} = \frac{5}{2}} &\approx \left(\rho + \frac{1}{9\rho^3} + \frac{0,6259}{\rho^5} + \frac{0,4586}{\rho^7} - \frac{0,3219}{\rho^9} + \frac{0,0760}{\rho^{12}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,0926}{\rho^{13}} + \frac{0,5058}{\rho^{15}} - \frac{0,4489}{\rho^{16}} + \frac{0,3738}{\rho^{18}} \right) \rho' r_0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

На поверхности цилиндрической $\left(\rho = 1, \varepsilon = -\frac{1}{9} \right)$ и «волчкообразной» $\left(\rho = 1, \varepsilon = \frac{1}{9} \right)$ полостей при различных значениях $\frac{G_1}{G_2}$ изменение напряжений $\sigma_{\gamma\Phi}^{*(2)}$ имеет единый характер, например,

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\Phi}^{*(2)} \Big|_{\substack{\varepsilon = -\frac{1}{9} \\ \frac{G_1}{G_2} = \frac{5}{2}}} &\approx (0,9508P_0 - 0,5137P_2 - 0,9233P_4 + 0,1931P_6 + \\ &\quad + 0,5625P_8 - 0,2694P_{10}) \rho' r_0; \\ \sigma_{\gamma\Phi}^{*(2)} \Big|_{\substack{\varepsilon = \frac{1}{9} \\ \frac{G_1}{G_2} = \frac{5}{2}}} &\approx (0,9463P_0 - 1,3618P_2 + 0,9658P_4 - 0,8434P_6 + \\ &\quad + 0,5625P_8 - 0,2694P_{10}) \rho' r_0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

На рис. 1 а, б показано распределение напряжений $\sigma_{\gamma\Phi}^{*(0)}$ и $\sigma_{\gamma\Phi}^{*(2)}$ вдоль четверти меридионального сечения неканонических поверхностей, где штриховые линии соответствуют распределению напряжений на поверхности сферической полости.

Изменение коэффициента концентрации напряжений

$$K_\gamma = \frac{\sigma_{\gamma\Phi}^{*(2)}}{\rho' a'} \quad (a' = r_0 R) \Big|_{\gamma = \frac{\pi}{2}, \varepsilon = \frac{1}{9}} \quad (2.9)$$

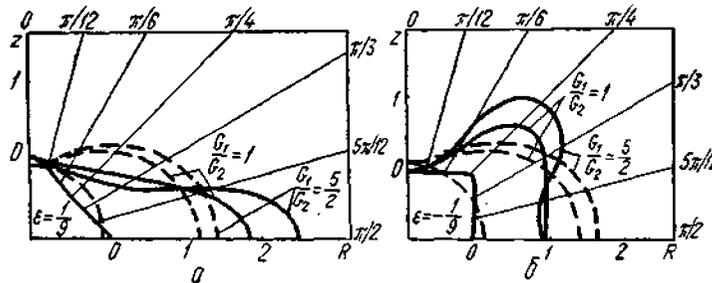
в зависимости от значения переменной ρ и отношения $\frac{G_1}{G_2}$ показано на рис. 2, 3, где штриховая линия соответствует напряжениям сплошного цилиндра.

Исследования показали, что максимальное отклонение относительных напряжений для $0 \leq \frac{G_1}{G_2} \leq \frac{9}{2}$ от напряжений для среды без полости при $\rho = 2$ составляет 1,1 %, а при $\rho = 3$ — соответственно 0,1 %.

§ 3. Рассмотрим аналогичную задачу о распределении напряжений при кручении упругого ортотропного тела с жесткими неканоническими включениями (цилиндрическими и «волчкообразными»). Для этого случая краевые условия в j -м приближении имеют вид

$$[u_{\varphi}^{(j)}(\rho, \gamma) + \widehat{u}_{\varphi}^{(j)}(\rho, \gamma)]_{\rho=1} = 0, \quad (3.1)$$

где перемещения $u_{\varphi}^{(j)}(\rho, \gamma)$ определяются из соотношений (1.3), а $\widehat{u}_{\varphi}^{(j)}(\rho, \gamma)$ — формулой (1.8) при $k = 3$, $\varepsilon = \pm \frac{1}{9}$.



Р и с. 1

Для сферического включения имеют место выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\varphi}^{*(0)} &= \frac{2p'r_0}{3} \left(\rho - \frac{G_1}{G_2} q \rho^{\lambda_2 - \frac{3}{2}} \right) (1 - P_2); \\ \sigma_{\rho\varphi}^{*(0)} &= \frac{p'r_0}{3} \left[\rho - \left(\lambda_2 - \frac{3}{2} \right) q \rho^{\lambda_2 - \frac{3}{2}} \right] \frac{dP_2}{d\gamma}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Перемещения в первом приближении имеют вид

$$\begin{aligned} u_{\varphi}^{(1)} + \widehat{u}_{\varphi}^{(1)} &= -\frac{A_2^{(0)}}{r_0} \left\{ \rho^{\lambda_2 - \frac{3}{2}} \left[\left(\lambda_2 - \frac{1}{2} \right) \cos 4\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} - \sin 4\gamma \frac{d^2P_2}{d\gamma^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \rho^{-2} \left(2 \cos 4\gamma \frac{dP_2}{d\gamma} - \sin 4\gamma \frac{d^2P_2}{d\gamma^2} \right) \right\} - \frac{1}{r_0} \sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} \rho^{\lambda_n - \frac{1}{2}} \frac{dP_n}{d\gamma}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.1), получаем формулы для определения постоянных $A_n^{(1)}$ ($n = 2, 4, 6$)

$$A_2^{(1)} = \frac{11}{21} A; \quad A_4^{(1)} = \frac{48}{385} A; \quad A_6^{(1)} = -\frac{64}{231} A, \quad (3.4)$$

где

$$A = A_2^{(0)} \left(\lambda_2 - \frac{5}{2} \right) = \frac{p'r_0 q^3}{3G_2} \left(\lambda_2 - \frac{5}{2} \right).$$

Напряжения $\sigma_{\gamma\varphi}^{(1)} + \widehat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(1)}$ и $\sigma_{\rho\varphi}^{(1)} + \widehat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(1)}$ определяются формулами (2.4) при заданных значениях коэффициентов (3.4). В частности, во втором прибли-

жении для напряжений $\sigma_{\rho\Phi}^{(2)} + \widetilde{\sigma}_{\rho\Phi}^{(2)}$ при $\gamma = \frac{\pi}{4}$ получим

$$\begin{aligned} [\sigma_{\rho\Phi}^{(2)} + \widetilde{\sigma}_{\rho\Phi}^{(2)}]_{\gamma = \frac{\pi}{4}} &= \frac{3G_2}{4r_0^2} \left(\lambda_2 - \frac{3}{2}\right)^2 \left(\lambda_2 - \frac{5}{2}\right) A_2^{(0)} + \\ &+ \frac{G_2}{r_0^2} \left[\sum_{n=2,4,6} \left(\lambda_n - \frac{3}{2}\right)^2 A_n^{(1)} \rho^{\lambda_n - \frac{11}{2}} \frac{dP_n}{d\gamma} - \right. \\ &\left. - \sum_{n=2,4,\dots}^{10} \left(\lambda_n - \frac{3}{2}\right) A_n^{(2)} \rho^{\lambda_n - \frac{3}{2}} \frac{dP_n}{d\gamma} \right]_{\gamma = \frac{\pi}{4}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

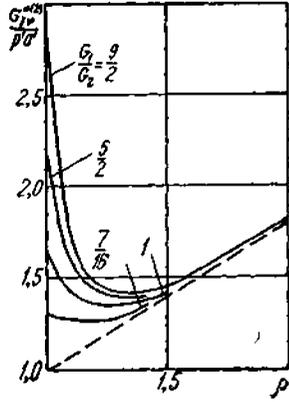


Рис. 2

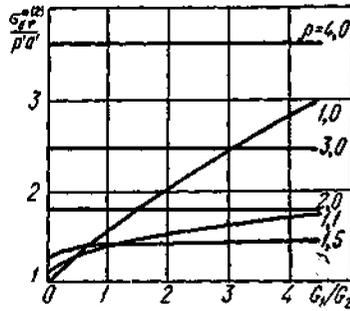


Рис. 3

Постоянные $A_n^{(2)}$ ($n = 2, 4, \dots, 10$) определяются из условий (3.1) при $j=2$, например,

$$\begin{aligned} A_2^{(2)} &= \frac{A_2^{(1)}}{21} \left(11\lambda_2 + \frac{29}{2} \right) + \frac{160}{693} A_4^{(1)} (\lambda_4 + 1) - \frac{2240}{3003} A_6^{(1)} \left(\lambda_6 + \frac{13}{2} \right) - \\ &- \frac{A_2^{(0)}}{4} \left\{ \frac{59}{3003} \left[\left(\lambda_2 - \frac{1}{2} \right) \left(\lambda_2 - \frac{3}{2} \right) - \left(\lambda_2 - \frac{7}{2} \right) \right] + \right. \\ &\left. + \left(\lambda_2 - \frac{1}{2} \right) \left(\lambda_2 - \frac{3}{2} \right) + \frac{16}{143} \left(\lambda_2 - \frac{5}{2} \right) + \lambda_2 - \frac{9}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Выражения для других коэффициентов имеют аналогичный вид.

На поверхности ($\rho = 1$) цилиндрического и «волчкообразного» включений напряжения $\sigma_{\rho\Phi}^{*(2)}$ имеют следующую структуру:

$$\sigma_{\rho\Phi}^{*(2)} = \rho' r_0 \sum_{n=2,4,\dots}^{10} a_n \frac{dP_n}{d\gamma} \quad (3.7)$$

(a_n — некоторые числовые коэффициенты).

Изменение напряжений $\sigma_{\rho\Phi}^{*(2)}/\rho'b'$ вдоль четверти меридионального сечения неканонических включений при $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ показано на рис. 4 а, б

(числовые значения для $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ в основном отрицательны, а при $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$ — положительны), причем штриховые кривые соответствуют сферическому включению.

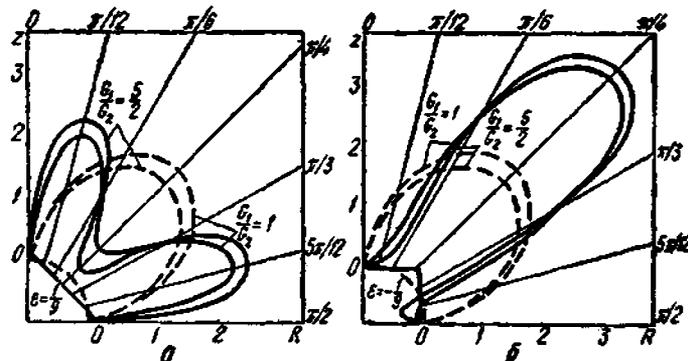


Рис. 4

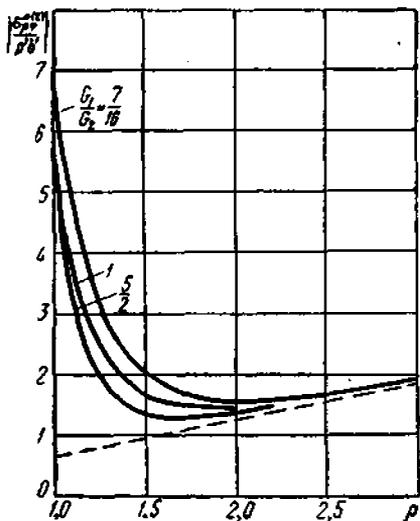


Рис. 5

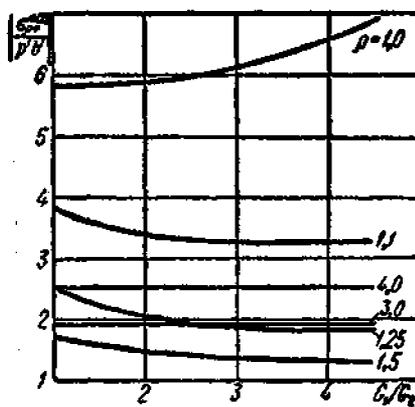


Рис. 6

Аналогично (2.7) приведем следующие формулы для значений $\gamma = \frac{\pi}{4}$,

$$\varepsilon = -\frac{1}{9} :$$

$$\sigma_{\rho\Phi}^{*(2)} \Big|_{\frac{G_1}{G_2}=1} \approx \left(-\frac{\rho}{2} - \frac{0,0556}{\rho^3} - \frac{2,6049}{\rho^4} - \frac{0,1056}{\rho^6} - \frac{1,2127}{\rho^8} - \frac{0,0156}{\rho^{10}} - \frac{0,1068}{\rho^{12}} \right) \rho' r_0;$$

$$\sigma_{\rho\Phi}^{*(2)} \Big|_{\frac{G_1}{G_2}=\frac{5}{2}} \approx \left(-\frac{\rho}{2} - \frac{0,0556}{\rho^3} - \frac{2,4933}{\rho^5} - \frac{0,1236}{\rho^8} + \frac{0,0617}{\rho^9} - \frac{1,4757}{\rho^{12}} - \frac{0,3241}{\rho^{13}} - \frac{0,1168}{\rho^{16}} + \frac{1,4830}{\rho^{18}} - \frac{1,1720}{\rho^{18}} \right) \rho' r_0.$$

(3.8)

На рис. 5, 6 приведено изменение коэффициентов концентрации

$$|K_\rho| = \left| \frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{\rho' b'} \right| \left(b' = r_0 R \left|_{\gamma = \frac{\pi}{4}, \nu = -\frac{1}{9}} \right. \right) \quad (3.9)$$

в зависимости от изменения переменной ρ и отношения $\frac{G_1}{G_2}$ (штриховая линия, как и раньше, соответствует основному напряженному состоянию). Следовательно, поле напряжений в окрестности жесткого включения носит ярко выраженный локальный характер, так что при $\frac{G_1}{G_2} \geq \frac{7}{16}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$ на расстоянии в два радиуса ($\rho = 3$) максимальное отличие относительных напряжений K_ρ от соответствующих сплошного цилиндра составляет 3,1 %, а на расстоянии трех радиусов — 0,7 %.

Таким образом, если расстояние между поверхностями в многосвязной среде не меньше диаметра, то полученные результаты для односвязной среды могут быть с погрешностью не более 3,5% распространены на аналогичные граничные задачи для многосвязной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь О. М. Про наближений метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках.— Прикл. механіка, 1962, 8, № 6, с. 605—612.
2. Лехницкий С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М., «Наука», 1971. 240 с.
3. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.—Л., Гостехиздат, 1947. 204 с.
4. Немиш Ю. Н. Метод «возмущения формы границы» в пространственных задачах механики деформируемых сред.— Изв. АН СССР. Мех. твердого тела, 1975, № 1, с. 17—26.
5. Немиш Ю. Н., Немиш В. Н. Кручение ортотропных тел вращения с неканоническими полостями и включениями.— Изв. АН СССР. Мех. твердого тела, 1976, № 6, с. 101—111.
6. Соляник-Красса К. В. Кручение валов переменного сечения. Л.—М., Гостехиздат, 1949. 166 с.
7. Чей В. Т. О некоторых задачах для упругих материалов со сферической изотропией.— Труды амер. о-ва инж.-механиков. Прикл. механика, 1966, 33, № 3, с. 71—79.

Тернопольский
финансово-экономический институт

Поступила
29.X 1976 г.