

Ю. Н. НЕМИШ, В. Н. НЕМИШ
НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ,
ОСЛАБЛЕННОЙ ЗАМКНУТОЙ КОНИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Рассмотрим пространственную краевую задачу математической теории упругости для трансверсально-изотропной среды, ослабленной замкнутой конической полостью. Напряженно-деформированное состояние среды с полостью исследуется методом возмущения формы границы [1], эффективность которого апробирована [4] на задаче для эллипсоидальной поверхности, допускающей точное решение [9], а оценка сходимости на границе области дана в работе [2].

Пусть некоторая трансверсально-изотропная среда, ограниченная замкнутой неканонической полостью (близкой к сферической), находится в поле внешних усилий. В произвольной меридиональной плоскости ZOR контур Γ описывается уравнениями

$$z = r_0^{-1} (\rho \cos \gamma + \varepsilon \rho^{-k} \cos k\gamma), \quad R = r_0^{-1} (\rho \sin \gamma - \varepsilon \rho^{-k} \sin k\gamma), \quad (1)$$

где z, R — цилиндрические координаты; ρ, γ, φ — криволинейные координаты; r_0 — характеризует абсолютные размеры, а малый параметр ε ($|\varepsilon| \ll 1$) — форму контура Γ .

Согласно методу возмущения представим компоненты напряженного состояния в виде

$$\sigma_{ml} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \sigma_{ml}^{(j)} \quad (m, l = \rho, \gamma, \varphi), \quad (2)$$

где $\sigma_{ml}^{(j)}$ определяются из рекуррентных соотношений [2]

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\gamma}^{(j)} &= \sum_{m=0}^j \left[\Lambda_4^{j-m} \sigma_{r\theta}^{(m)} + \frac{1}{2} \Lambda_3^{j-m} (\sigma_{\theta\theta}^{(m)} - \sigma_{rr}^{(m)}) \right], \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(j)} = \sum_{m=0}^j \Lambda_1^{j-m} \sigma_{\alpha\alpha}^{(m)}, \\ \begin{pmatrix} \sigma_{\rho\rho}^{(j)} \\ \sigma_{\gamma\gamma}^{(j)} \end{pmatrix} &= \sum_{m=0}^j \left[\Lambda_2^{j-m} \begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(m)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(m)} \end{pmatrix} \pm \Lambda_2^{j-m} (\sigma_{\theta\theta}^{(m)} - \sigma_{rr}^{(m)}) \pm \Lambda_3^{j-m} \sigma_{r\theta}^{(m)} \right], \\ \begin{pmatrix} \sigma_{\rho\varphi}^{(j)} \\ \sigma_{\gamma\varphi}^{(j)} \end{pmatrix} &= \sum_{m=0}^j \left[\Lambda_5^{j-m} \begin{pmatrix} \sigma_{r\alpha}^{(m)} \\ \sigma_{\theta\alpha}^{(m)} \end{pmatrix} \pm \Lambda_6^{j-m} \begin{pmatrix} \sigma_{\theta\alpha}^{(m)} \\ \sigma_{r\alpha}^{(m)} \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Дифференциальные операторы $\Lambda_i^{(j)}$ в первых трех приближениях имеют вид

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{(0)} &= 1, \quad \Lambda_1^{(1)} = \frac{\cos(k+1)\gamma}{\rho^k} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin(k+1)\gamma}{\rho^{k+1}} \frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ \Lambda_1^{(2)} &= \frac{1 + \cos 2(k+1)\gamma}{4\rho^{2k}} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\sin 2(k+1)\gamma}{2\rho^{2k}} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \gamma} \frac{1}{\rho} + \\ &+ \frac{1 - \cos 2(k+1)\gamma}{4\rho^{2k+2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

и т. д.

Подробные рассуждения и выкладки, необходимые для нахождения компонентов напряжений $\sigma_{ml}^{(j)}$, а также построение соответствующих дифференциальных операторов в произвольном приближении изложены в работе [3].

Составляющие напряжений, входящие в правые части соотношений (3), записываются на основании общих решений в сферических координатах формальной замены переменных r, θ, α на ρ, γ, φ . В случае действительных (разных) корней v_n^i алгебраического уравнения [4,8]

$$v_n^4 - 2a_n v_n^2 + b_n = 0 \quad (5)$$

для компонентов $\sigma_{rr}^{(j)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(j)}$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}$, $\sigma_{r\theta}^{(j)}$ имеем выражения

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(j)} &= \frac{1}{r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=2,4} A_n^{(i,j)} \rho^{v_n^{(i)} - \frac{3}{2}} \gamma_n^{(i)} P_n(\mu), \\ \begin{pmatrix} \sigma_{\theta\theta}^{(j)} \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{(j)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=2,4} A_n^{(i,j)} \rho^{v_n^{(i)} - \frac{3}{2}} \left[\begin{pmatrix} \eta_n^{(i)} \\ q_n^{(i)} \end{pmatrix} P_n(\mu) \pm (c_{11} - c_{12}) \mu P_n'(\mu) \right], \\ \sigma_{r\theta}^{(j)} &= \frac{1}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2,4} A_n^{(i,j)} \rho^{v_n^{(i)} - \frac{3}{2}} \delta_n^{(i)} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \left(P_n' = \frac{dP_n}{d\mu}, \mu = \cos \gamma \right).\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\gamma_n^{(i)} &= K_n^{(i)} \left[2c_{13} + c_{33} \left(v_n^{(i)} - \frac{1}{2} \right) \right] - n(n+1)c_{13}, \\ &\delta_n^{(i)} + c_{44} \left(K_n^{(i)} + v_n^{(i)} - \frac{3}{2} \right), \\ \begin{pmatrix} \eta_n^{(i)} \\ q_n^{(i)} \end{pmatrix} &= K_n^{(i)} \left[c_{11} + c_{12} + c_{13} \left(v_n^{(i)} - \frac{1}{2} \right) \right] - n(n+1) \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix} \\ K_n^{(i)} &= \frac{c_{11}n(n+1) - c_{44} \left(v_n^{(i)2} - \frac{1}{4} \right) + c^-}{(c_{13} + c_{44}) \left(v_n^{(i)} - \frac{1}{2} \right) + c^+}.\end{aligned}\quad (7)$$

Решения уравнения (5) удобно представить в виде

$$\begin{pmatrix} v_n^{(1)} \\ v_n^{(2)} \end{pmatrix} = \pm [a_n + (a_n^2 - b_n)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}, \quad \begin{pmatrix} v_n^{(3)} \\ v_n^{(4)} \end{pmatrix} = \pm [a_n - (a_n^2 - b_n)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2c_{33}c_{44}} \left\{ n(n+1) [c_{44}^2 + c_{11}c_{33} - (c_{13} + c_{44})^2] + c_{33}c^- + \right. \\ &\quad \left. + 2c_{44}(c_{11} + c_{12} - c_{13}) + \frac{1}{2}c_{33}c_{44} \right\}; \\ b_n &= \frac{1}{c_{33}c_{44}} \left\{ [c_{44}n(n+1) + 2(c_{11} + c_{12} - c_{13}) + \frac{1}{4}c_{33}] \times \right. \\ &\quad \left. \times [c_{11}n(n+1) + c^- + \frac{1}{4}c_{44}] - n(n+1) \left[c^+ - \frac{1}{2}(c_{13} + c_{44}) \right]^2 \right\} \\ &\quad (c^\pm = \pm c_{11} + c_{12} + 2c_{44}).\end{aligned}\quad (9)$$

Предположим, что трансверсально-изотропная среда с замкнутой конической ($k=2$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$) полостью находится под действием равномерно распределенных усилий $\sigma_{xx}^{(\infty)} = \sigma_{yy}^{(\infty)} = \sigma_{zz}^{(\infty)} = p$. Следовательно,

$$\sigma_{rr}^{(\infty)} = \sigma_{\theta\theta}^{(\infty)} = \sigma_{\alpha\alpha}^{(\infty)} = p, \quad \sigma_{r\theta}^{(\infty)} = \sigma_{r\alpha}^{(\infty)} = \sigma_{\theta\alpha}^{(\infty)} = 0, \quad (10)$$

где p — интенсивность нагрузки ($p > 0$ соответствует растяжению, $p < 0$ — сжатию). Если коническая поверхность $\rho = 1$ свободна от напряжений, то граничные условия имеют вид

$$[\sigma_{\rho\rho}^{(j)} + \hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(j)}]_{\rho=1} = 0, \quad [\sigma_{\rho\gamma}^{(j)} + \hat{\sigma}_{\rho\gamma}^{(j)}]_{\rho=1} = 0. \quad (11)$$

Компоненты основного напряженного состояния, т. е. для среды без полости, будут такими:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(0)} = \hat{\sigma}_{\gamma\gamma}^{(0)} = \hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(0)} = p, \quad \hat{\sigma}_{\rho\gamma}^{(0)} = \hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(0)} = \hat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(0)} = 0, \\ \hat{\sigma}_{m\ell}^{(j)} = 0 \quad (j \geq 1).\end{aligned}\quad (12)$$

Если обозначить

$$\sigma_{ml}^{*(j)} = \sigma_{ml}^{(j)} + \tilde{\sigma}_{ml}^{(j)}, \quad \sigma_{ml}^{*(j)} = \sigma_{ml}^{*(j-1)} + \varepsilon^j \sigma_{ml}^{(j)} \quad (j \geq 1), \quad (13)$$

то для напряжений $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}$ имеют место формулы

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)} = & p + \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + \varepsilon \left[\sigma_{\theta\theta}^{(1)} + \frac{1}{r_0^2} A_0^{(2,0)} \left(v_0^{(2)} - \frac{3}{2} \right) \eta_0^{(2)} \rho^{v_0^{(2)} - k - \frac{5}{2}} \cos(k+1)\gamma \right] + \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} + \frac{1}{4r_0^2} A_0^{(2,0)} \rho^{v_0^{(2)} - 2k - \frac{7}{2}} \left[\eta_0^{(2)} \left(v_0^{(2)} - \frac{3}{2} \right)^2 - 2(\eta_0^{(2)} - \gamma_0^{(2)})(k+1)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\eta_0^{(2)} \left(v_0^{(2)} - \frac{3}{2} \right) \left(v_0^{(2)} - \frac{7}{2} \right) + 2(\eta_0^{(2)} - \gamma_0^{(2)})(k+1)^2 \right) \cos 2(k+1)\gamma \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r_0^2} \sum_{n=1,3} \sum_{l=2,4} A_n^{(l,1)} \rho^{v_n^{(l)} - k - \frac{5}{2}} \left[\left(v_n^{(l)} - \frac{3}{2} \right) \left(\eta_n^{(l)} P_n(\mu) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - (c_{11} - c_{12}) \operatorname{ctg} \gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \right) \cos(k+1)\gamma - \left(\eta_n^{(l)} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} - (c_{11} - c_{12}) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\operatorname{ctg} \gamma \frac{d^2 P_n(\mu)}{d\gamma^2} - \frac{1}{\sin^2 \gamma} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} + 2(k+1) \delta_n^{(l)} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \right) \right) \sin(k+1)\gamma \right] \right\}, \quad (14) \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)} = & p + \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} + \varepsilon \left[\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{1}{r_0^2} A_0^{(2,0)} \left(v_0^{(2)} - \frac{3}{2} \right) q_0^{(2)} \rho^{v_0^{(2)} - k - \frac{5}{2}} \cos(k+1)\gamma \right] + \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} + \frac{1}{4r_0^2} A_0^{(2,0)} \left(v_0^{(2)} - \frac{3}{2} \right) q_0^{(2)} \rho^{v_0^{(2)} - 2k - \frac{7}{2}} \left[v_0^{(2)} - \frac{3}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(v_0^{(2)} - \frac{7}{2} \right) \cos 2(k+1)\gamma \right] + \frac{1}{r_0^2} \sum_{n=1,3} \sum_{l=2,4} A_n^{(l,1)} \rho^{v_n^{(l)} - k - \frac{5}{2}} \times \right. \\ & \left. \times \left[\left(v_n^{(l)} - \frac{3}{2} \right) \left[q_n^{(l)} P_n(\mu) + (c_{11} - c_{12}) \operatorname{ctg} \gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \right] \cos(k+1)\gamma - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left[q_n^{(l)} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} + (c_{11} - c_{12}) \left(\operatorname{ctg} \gamma \frac{d^2 P_n(\mu)}{d\gamma^2} - \frac{1}{\sin^2 \gamma} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \right) \right] \sin(k+1)\gamma \right] \right\}. \end{aligned}$$

Неизвестные коэффициенты $A_n^{(i,j)}$ находятся из соотношений (3) и краевых условий (11), т. е. из системы уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=2,4} A_n^{(l,j)} \gamma_n^{(l)} P_n(\mu) \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(j)} P_n(\mu), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{l=2,4} A_n^{(l,j)} \delta_n^{(l)} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(j)} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}. \end{aligned} \quad (15)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых полиномах Лежандра и их производных, получаем

$$\begin{aligned} A_0^{(2,j)} &= \frac{c_0^{(j)}}{\gamma_0^{(2)}}, \quad A_n^{(2,j)} = - \frac{c_n^{(j)} \delta_n^{(4)} - d_n^{(j)} \gamma_n^{(4)}}{\delta_n^{(2)} \gamma_n^{(4)} - \delta_n^{(4)} \gamma_n^{(2)}}, \quad A_n^{(4,j)} = \frac{c_n^{(j)} \delta_n^{(2)} - d_n^{(j)} \gamma_n^{(2)}}{\delta_n^{(2)} \gamma_n^{(4)} - \delta_n^{(4)} \gamma_n^{(2)}} \quad (16) \\ & (j = 0 \sim n = 0, j = 1 \sim n = 1, 3, j = 2 \sim n = 2, 4, 6), \end{aligned}$$

где $c_n^{(j)}$, $d_n^{(j)}$ — известные выражения.

В случае изотропного материала полученные формулы (14) согласуются с результатами работы [6].

Возьмем, к примеру, трансверсально-изотропные материалы, упругие постоянные которых приведены в таблице и подобны упругим константам

некоторых гексагональных кристаллов [7]. Относительные напряжения на поверхности ($\rho = 1$) замкнутой конической полости для указанных числовых значений имеют единую аналитическую структуру и отличаются только числовыми коэффициентами соответствующих полиномов Лежандра; в частности, для материала 2 имеем

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{\rho} = 1,4319P_0 - 0,7543P_1 - 0,3542P_2 + 1,5946P_3 - 0,9979P_4 + 1,2432P_6, \quad (17)$$

$$\frac{\sigma_{\Phi\Phi}^{*(2)}}{\rho} = 1,4777P_0 + 0,7462P_1 - 0,0112P_2 + 0,0940P_3 - 0,0193P_4 - 0,1241P_6.$$

На рис. 1 приведены графики, характеризующие распределение напряжений вдоль половины произвольного меридионального сечения рассматриваемой грани поверхности.

Изменение напряжений $\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{\rho}$ и $\frac{\sigma_{\Phi\Phi}^{*(2)}}{\rho}$

по сечению $\gamma = 0$ и $\gamma = \frac{2}{3}\pi$ (штриховые линии)

представлено на рис. 2 и 3 (кривые для материалов 1 и 4 практически совпадают). Эти кривые построены по формулам (14), аналити-

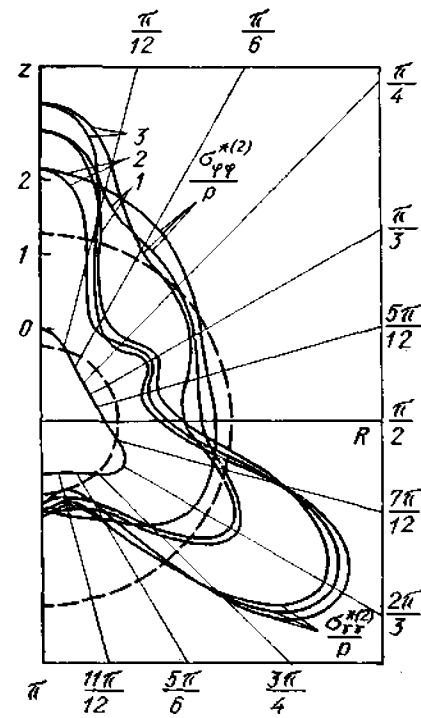


Рис. 1

Материал	ν_1	ν_{12}	$\frac{E_1}{G}$	$\frac{E_2}{G}$	$\frac{E_3}{E_1}$
1	0,300	0,300	2,600	2,600	1,000
2	0,065	0,246	2,951	2,614	1,129
3	0,357	0,253	2,771	3,094	0,896
4	0,365	0,288	2,244	2,712	0,828

ческий вид которых зависит от типа рассматриваемого материала. Например, при $\gamma = 0$ имеем материал 2:

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{\rho} = \frac{\sigma_{\Phi\Phi}^{*(2)}}{\rho} = 1 + \frac{0,5288}{\rho^3} - \frac{0,4611}{\rho^4} - \frac{0,1953}{\rho^6} + \frac{0,8908}{\rho^6} + \frac{0,4538}{\rho^7} - \frac{1,1600}{\rho^8} - \frac{2,4692}{\rho^9} + \frac{3,5755}{\rho^{10}}, \quad (18)$$

материал 4:

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{\rho} = \frac{\sigma_{\Phi\Phi}^{*(2)}}{\rho} = 1 + \frac{0,5008}{\rho^3} - \frac{0,5742}{\rho^4} + \frac{0,0405}{\rho^6} + \frac{1,6845}{\rho^6} - \frac{3,3716}{\rho^7} + \frac{3,5382}{\rho^9}. \quad (19)$$

Отметим, что при незначительном отдалении от поверхности конической полости напряжения резко уменьшаются и приближаются к величине основного напряженного состояния. Максимальное относительное отклонение при $\rho = 2$ составляет 7,7%, а при $\rho = 3$ — 2,1%.

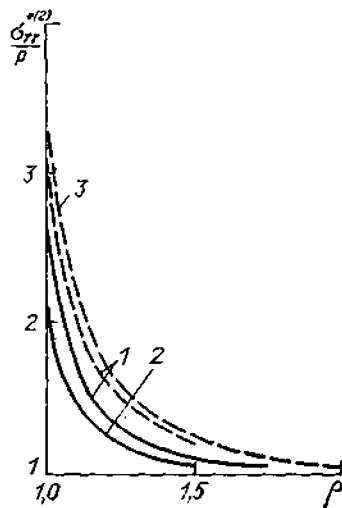


Рис. 2

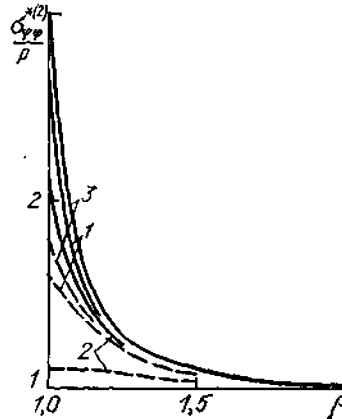


Рис. 3

Решение аналогичных задач для замкнутых цилиндрических и биконических полостей приведено в работе [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гузь О. М. Про приближений метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках.— Прикл. механіка, 1962, 8, № 6, с. 605—612.
2. Немши Ю. Н. К обоснованию метода возмущения в трехмерных задачах механики деформируемых сред.— Прикл. механика, 1977, 13, № 12, с. 25—33.
3. Немши Ю. Н. Метод «возмущения формы границы» в пространственных задачах механики деформируемых сред.— Изв. АН СССР Мех. твердого тела, 1975, № 1, с. 17—26.
4. Немши Ю. Н. О приближенном решении пространственных задач теории упругости для трансверсально изотропной среды.— Прикл. механика, 1969, 5, № 8, с. 26—34.
5. Немши Ю. Н., Немши В. Н. К решению пространственных задач теории упругости трансверсально изотропной среды для неканонических областей.— Прикл. механика, 1976, 12, № 12, с. 73—82.
6. Немши Ю. Н., Немши В. Н., Ярема П. Ф. Распределение напряжений около неканонических поверхностей.— Прикл. механика, 1971, 7, № 12, с. 41—50.
7. Хантингтон Г. Упругие постоянные кристаллов.— Успехи физ. наук, 1961, 74, № 3, с. 462—520.
8. Чен В. Т. О некоторых задачах для упругих материалов со сферической изотропией — Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Прикл. механика, 1966, 33, № 3, с. 72—79.
9. Шапиро Г. С. Осесимметричная деформация эллипсоида вращения.— Докл. АН СССР, 1947, 58, № 7, с. 1309—1313.

Институт механики АН УССР,
Тернопольский финансово-экономический институт

Поступила в редколлегию
22.06.78