УДК 539.30

В. В. СКОРОПАД, А. П. ПОМЫЛУЙКО,
В. Н. НЕМИШ

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ И ДИСПЕРСИИ РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЫ СИСТЕМЫ

Композиционные материалы находят все более широкое применение для изготовления конструкционных изделий. Их физико-механические свойства являются вероятностными величинами, поэтому представляет интерес вычисление среднего значения и дисперсии резонансной частоты системы (рис. 1, *а*) стержневого типа. Здесь за колебательные элементы принимаются отдельные волокна материала.

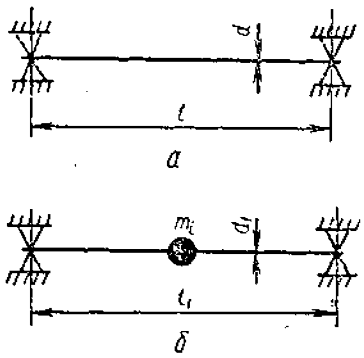

Рис. 1

Для определения собственной частоты колебаний используем уравнение [1, 2]

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \tag{1}$$

где $c = \frac{48EI}{l^3}$ — коэффициент жесткости; $I = \frac{\pi d^4}{64}$ — момент инерции стержня; E — модуль Юнга; l — длина стержня; d — диаметр стержня: $m = \rho\frac{\pi d^2 l}{4}$ — сосредоточенная масса; ρ — удельная плотность материала. Для колебательной системы (рис. 1, *б*) коэффициент приведенной жесткости записывается в виде

$$c = \sum_{i=1}^{n} c_i, \tag{2}$$

а значение приведенной массы

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i. \tag{3}$$

Подставляя выражения (2), (3) в уравнение (1), определяем собственную резонансную частоту системы (см. рис. 1, *б*)

$$\omega_{0n} = \left(\frac{3E \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{d_i^4}{l_i^3}}{\rho \sum\limits_{i=1}^{n} l_i d_i^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Если принять, что величины d_i и l_i распределены по нормальному закону и являются случайными величинами, то математическое ожидание собственной резонансной частоты колебаний ω_0 для модели, показанной на рис. 1, *а*, или для i-го элемента модели на рис. 1, *б* можно записать в виде

$$M[\omega_0] = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \omega_0 \exp\left[-\frac{(z_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(z_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right] dz_1 dz_2, \tag{5}$$

где $z_1 = d$; $z_2 = l$; m_1— математическое ожидание величины d; m_2 — математическое ожидание величины l; σ_1 — среднеквадратическое отклонение для величины d; σ_2 — среднеквадратическое отклонение для величины l; a_1, b_1 — границы распределения величины d; a_2, b_2 — границы распределения величины l.

При случайном числе элементов n резонансная частота ω_0 имеет приближенное значение

$$\omega_0 \approx \sum_{n=1}^{N} \frac{M[\omega_{0n}]}{N}. \qquad (6)$$

Здесь N — максимальное число элементов системы.

Согласно результатам работы [1], с учетом формул (4), (5) можно записать значение математического ожидания собственной резонансной частоты системы (рис. 1,б) для общего случая:

$$M[\omega_{0n}] = \frac{1}{(2\pi)^N \sigma_1^N \sigma_2^N} \underbrace{\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_1}^{b_1}}_{N} \underbrace{\int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_2}^{b_2}}_{N} \omega_{0n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{(z_{1i}-m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(z_{2i}-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]\right\} dz_{11} \ldots dz_{1N} dz_{21} \ldots dz_{2N}, \qquad (7)$$

где $z_{11}, \ldots, z_{1N}, z_{21}, \ldots, z_{2N}$ — переменные интегрирования, соответствующие независимым случайным величинам

$$d_1, \ldots, d_N, l_1, \ldots, l_N.$$

В связи со сложностью аналитических вычислений n-мерных интегралов при большом числе N и трудностями, возникающими при использовании для их решения ЭВМ, значение $M[\omega_{0n}]$ можно вычислить приближенно:

$$M[\omega_{0n}] \approx \left(\xi \frac{M[\varphi_n]}{M[\psi_n]}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (8)$$

В формуле (8) введены следующие обозначения:

$$\xi = \frac{3E}{\rho};$$

$$M[\varphi_n] = M\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{d_i^4}{l^3}\right] = \frac{1}{(2\pi)^N \sigma_1^N \sigma_2^N} \underbrace{\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_1}^{b_1}}_{N} \underbrace{\int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_2}^{b_2}}_{N} \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{(z_{1i})^4}{(z_{2i})^3}\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{(z_{1i}-m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(z_{2i}-m_1)^2}{2\sigma_2^2}\right]\right\} dz_{11} \ldots dz_{1N} dz_{21} \ldots dz_{2N} =$$

$$= M[z_1^4]\, M\left[\frac{1}{z_2^3}\right] n;$$

$$M[\psi_n] = M\left[\sum_{i=1}^{n} l_i d_i^2\right] = \frac{1}{(2\pi)^N \sigma_1^N \sigma_2^N} \underbrace{\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_1}^{b_1}}_{N} \underbrace{\int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_2}^{b_2}}_{N} \left[\sum_{i=1}^{n} z_{2i} z_{1i}^2\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{(z_{1i}-m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(z_{2i}-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]\right\} dz_{11} \ldots dz_{1N} \times dz_{21} \ldots dz_{2N} =$$

$$= M[z_2]\, M[z_1^2]\, n, \qquad (9)$$

где

$$M[z_1^4] = \int_{a_1}^{b_1} z_1^4 f(z_1)\, dz_1; \quad f(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{(z_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right];$$

$$M\{z_1^2\}=\int_{a_1}^{b_1} z_1^2 f(z_1)\,dz_1;\quad M\{z_2\}=\int_{a_2}^{b_2} z_2 f(z_2)\,dz_2;$$

$$f(z_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\frac{(z_2-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right];\quad M\left[\frac{1}{z_2^3}\right]=\int_{a_2}^{b_2}\frac{1}{z_2^3}f(z_2)\,dz_2.$$

После подстановки формул (9) в (8) получим выражение для математического ожидания собственной резонансной частоты:

$$M[\omega_{0n}]\approx\left(\xi\frac{M[z_1^4]\,M\left[\frac{1}{z_2^3}\right]}{M[z_2]\,M[z_1^2]}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Дисперсия частоты для модели рис. 1, *а* имеет вид

$$D=\sigma^2=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\omega_0^2\exp\left[-\frac{(z_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(z_2-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]dz_1dz_2-M^2[\omega_0].$$

Для модели на рис. 1, *б* исправленное среднеквадратическое отклонение при случайной величине N находим по формуле

$$\tilde{\sigma}^2=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N-1}(D_n-\tilde{D})^2. \tag{11}$$

Здесь через $\tilde{D}$ обозначена средняя дисперсия, т. е.

$$\tilde{D}\approx\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}\left(\xi\frac{D\varphi_n}{D\psi_n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Функции $D\varphi_n$ и $D\psi_n$ имеют вид

$$D\varphi_n=M\{\varphi_n^2\}-\{M[\varphi_n]\}^2=\frac{1}{(2\pi)^N\sigma_1^N\sigma_2^N}\underbrace{\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_1}^{b_1}}_{N}\underbrace{\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_2}^{b_2}}_{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{z_{1i}^4}{z_{2i}^3}\right)^2\times$$

$$\times\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{(z_{1i}-m_1)^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(z_{2i}-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]\right\}dz_{11}\ldots dz_{1N}dz_{21}\ldots dz_{2N}-$$

$$-M^2[z_1^4]M^2\left[\frac{1}{z_2^3}\right]n^2=M^2\left[\frac{1}{z_1^3}\right]M^2[z_1^4]c_n^2+M\left[\frac{1}{z_2^6}\right]M[z_1^8]n-$$

$$-M^2[z_1^4]M^2\left[\frac{1}{z_2^3}\right]n^2=-\frac{n+1}{2}nM^2\left[\frac{1}{z_2^3}\right]M^2[z_1^4]+M\left[\frac{1}{z_2^6}\right]M[z_1^8]n,$$

$$D\psi_n=nM[z_2^2]M[z_1^4]+c_n^2M^2[z_2]M^2[z_1^2]-n^2M^2\times$$

$$\times[z_2]M^2[z_1^2]=nM[z_2^2]M[z_1^4]-\frac{n+1}{2}nM^2[z_2]M^2[z_1^2].$$

Учитывая найденные значения $D\varphi_n$ и $D\psi_n$, для определения дисперсии записываем выражение

$$D_n\approx\left(\xi\frac{D\varphi_n}{D\psi_n}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Предложенная выше модель проверена применительно к звукоизоляционным материалам, состоящим из волокнистых наполнителей. Такие наполнители можно рассматривать как множество колебательных систем, каждая из которых состоит из пучка волокон. Длина и количество волокон в пучке зависят от плотности применяемого материала. Значения диаметра волокна d и их количества N_i приведены ниже:

d	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
N_i	10	42	110	199	252	211	118	46	12

Исходя из χ^2-критерия Пирсона с уровнем значимости 0,01 установлено, что диаметр волокон является случайной величиной с нормальным законом распределения при математическом ожидании диаметра волокон 8 мкм и дисперсии 0,616 мкм^2. На основании выражений (10), (12) проведены вычисления и построен график (рис. 2) зависимости математического ожидания резонансной частоты базальтоволокнистого материала при фиксированном значении длины волокна 1000 мкм. По оси ординат рис. 2 указана плотность распределения вероятностей $P(f)$, а по оси абсцисс — значения частот f. Из этого рисунка видно, что математическое ожидание резонансной частоты равно 630 Гц со среднеквадратическим отклонением 72 Гц (кривая *1*) и в достаточной мере совпадает (кривая *2*) с результатами исследований [3, 4].

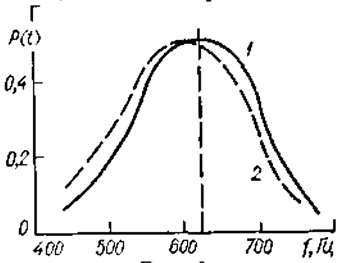

Рис. 2

1. *Крамар Г.* Математические методы статистики.— М. : Мир, 1976.— 345 с.
2. *Пановко Я. Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара.— Л. : Машиностроение, 1976.— 320 с.
3. *Скоропад В. В.* Построение математических моделей звукопоглощающих неоднородных сред.— В кн.: Тез. докл. конф. «Повышение качества изделий, изготовляемых из полимер. материалов». Секция 2. Киев : УкрНИИНТИ, 1977, с. 27.
4. *Davern W. A.* Perforated facings backed with porous materials as sound absorbers.— Appl. Acoust., 1977, 10, N 2, p. 85—112.

Львовский университет

Тернопольский финансово-экономический институт

Поступила в редколлегию 16.01.81