ПРО ДЕЯКУ ЗАЛЕЖНІСТЬ ПОЛЯ НАПРУЖЕНЬ СЕРЕДОВИЩА ВІД КРИВИЗНИ ГІПОТРОХОЇДАЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ

Неміш Василь Миколайович, канд. ф.-м. наук
Тернопільський національний економічний університет

В статті розглядаються задачі про дослідження напруженого стану пружного однорідного середовища з гіпотрохоїдальним включенням і трансверсально ізотропного середовища з гіпотрохоїдальною порожниною. Числові дані, які представлені таблицями, характеризують вплив кривизни поверхні на концентрацію напружень.

Ключові слова*: напруження, гіпотрохоїда, кривизна, збурення, жорстке включення, порожнина, ізотропне середовище, трансверсально ізотропне середовище, мажорантні напруження.*

В сучасних умовах виникають проблеми дослідження напруженого стану неоднорідних гірських масивів, у складі яких є породи або порожнини з різною формою поверхні, а також знаходяться під дією власної ваги чи під внутрішнім тиском (природні гази). Розв'язуванню ряду конкретних задач для еліпсоїдальних або іншого виду канонічних областей присвячені наукові здобутки багатьох вчених. Із усіх методів найбільш ефективним виявився наближений метод «збурення форми границі». Розробка та застосування такого методу в просторових крайових задачах математичної теорії пружності знайшли відображення у працях О. М. Гузя, О. С. Космодаміанського, С. Г. Лехніцкого, Ю. М. Неміша, Ю. М. Подільчука, Г. М. Савіна та інших науковців. Однак недостатньо уваги було приділено знаходженню поля напружень з концентраторами у вигляді правильних многокутників обертання, а також впливу кривизни поверхні на напружений стан середовища. В результаті цього вирішення зазначених проблем стало основною метою даної статті.

Тому, вважаємо за необхідність розглянути пружне однорідне середовище з гіпотрохоїдальною поверхнею Дана поверхня утворена обертанням гіпотрохоїди навколо своєї діагоналі, як вісі симетрії [2]. Рівняння контура в довільній меридіональній площині zoR має вигляд:

$$z = \cos\gamma + \varepsilon\cos 3\gamma, \quad R = \sin\gamma - \varepsilon\sin 3\gamma \quad \left(0 \le \varepsilon \le \frac{1}{3}\right).$$

Питання впливу радіуса кривизни поверхні на напружений стан середовища виявимо з допомогою двох задач.

1. Жорстке гіпотрохоїдальне включення в пружному середовищі.

Припустимо, що ізотропне середовище з впаяним жорстким гіпотрохоїдальним включенням знаходиться в полі рівномірних всесторонніх зовнішніх сил

$$\sigma_{xx}^{(\infty)} = \sigma_{yy}^{(\infty)} = \sigma_{zz}^{(\infty)} = p, \quad \sigma_{xy}^{(\infty)} = \sigma_{xz}^{(\infty)} = \sigma_{yz}^{(\infty)} = 0, \quad (2)$$

тобто основний напружений стан в криволінійних ортогональних координатах характеризується компонентами

$$\hat{\sigma}_{\rho\rho} = \hat{\sigma}_{\gamma\gamma} = \hat{\sigma}_{\varphi\varphi} = p, \quad \hat{\sigma}_{\rho\gamma} = \hat{\sigma}_{\gamma\varphi} = \hat{\sigma}_{\rho\varphi} = 0. \quad (3)$$

Граничні умови в довільному наближенні на поверхні жорсткого включення в розглянутому осесиметричному випадку мають вигляд:

$$U_r^{(0)}\Big|_{\rho=1} = -\hat{U}_\rho^{(0)}, \qquad U_\theta^{(0)}\Big|_{\rho=1} = -U_\gamma^{(0)}\Big|_{\rho=1},$$

(4)

$$U_r^{(n)}\Big|_{\rho=1} = -\left[\hat{U}_\rho^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1}(L_5^{(n-j)}U_r^{(j)} + L_6^{(n-j)}U_\theta^{(j)})\right]_{\rho=1},$$

(5)

$$U_\theta^{(n)}\Big|_{\rho=1} = -\left[\hat{U}_\gamma^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1}(L_5^{(n-j)}U_\theta^{(j)} - L_6 U_r^{(n-j)}U_r^{(j)})\right]_{\rho=1}.$$

(6)

Тут, а також пізніше, $L_m^{(j)}(j=1,2)$ – диференціальні оператори, які залежать від форми поверхні; $\hat{U}_\rho^{(n)}$, $\hat{U}_\gamma^{(n)}$ відповідають основному напруженому стану.

Концентрація нормальних напружень $\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{p}$ у вершині гіпотрохоїдального влючення ($\rho=1, \gamma=0;\pi$) одержані наближеним методом „збурення форми границі" [1] і визначаються формулою:

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{p} = 1{,}6154 + 3{,}2562\varepsilon + 11{,}1392\varepsilon^2 + 0\left(\varepsilon^3\right).$$

(7)

Відповідні числові значення коефіцієнта концентрації напружень $K_{\rho\rho}^{(2)} = \frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{P}$ і мажорантного напруження $K_{\rho\rho}^{M} = \frac{\sigma_{\rho\rho}^{M}}{P}$ приведені в таблиці 1, де подано і значення радіуса кривизни поверхні ρ^*.

Таблиця 1.

Числові значення $K_{\rho\rho}^{(2)}$ і $K_{\rho\rho}^{M}$ та радіуса кривизни поверхні ρ^*

$\sum$	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$
$K_{\rho\rho}^{(2)}$	1,615	1,831	2,115	2,468	2,889
$K_{\rho\rho}^{M}$	1,615	1,839	2,199	2,878	4,633
ρ^*	1,000	0,463	0,222	0,100	0,037

Постановка і аналітичний розв'язок аналогічної задачі для неканонічних включень із заокругленими кутами проводились наближеним методом „збурення форми границі" і розглянуті у дослідженнях [3;4].

2. **Вільна від напружень гіпотрохоїдальна порожнина.**

Припустимо, що трансверсально ізотропне середовище з вільною від напружень гіпотрохоїдальною порожниною знаходиться на „нескінченності" в полі рівномірного розтягу-стиску силою інтенсивності *p*. Основний напружений стан характеризується компонентами:

$$\hat{\sigma}_{\rho\rho} = \hat{\sigma}_{\gamma\gamma} = \hat{\sigma}_{\varphi\varphi} = p, \quad \hat{\sigma}_{\rho\gamma} = \hat{\sigma}_{\rho\varphi} = \hat{\sigma}_{\gamma\varphi} = 0. \tag{8}$$

Граничні умови в довільному наближенні на поверхні замкнутої порожнини мають вигляд:

$$\sigma_{r\theta}^{(0)}\Big|_{\rho=1} = -p, \qquad \sigma_{r\theta}^{(0)}\Big|_{\rho=1} = 0,$$

$$\sigma_{rr}^{(n)}\Big|_{\rho=1} = -\sum_{j=0}^{n-1} \left[L_1^{(n-j)}\sigma_{rr}^{(j)} + L_2^{(n-j)}\left(\sigma_{\theta\theta}^{(j)} - \sigma_{rr}^{(j)}\right) + L_3^{(n-j)}\sigma_{r\theta}^{(j)} \right]_{\rho=1},$$

(9)

$$\sigma_{r\theta}^{(n)}\Big|_{\rho=1} = -\sum_{j=0}^{n-1} \left[L_4^{(n-j)}\sigma_{r\theta}^{(j)} + \frac{1}{2} L_3^{(n-j)}\left(\sigma_{\theta\theta}^{(j)} - \sigma_{rr}^{(j)}\right) \right]_{\rho=1}, \qquad (n \geq 1).$$

(10)

Аналітичні формули для компонентів напружень мають доволі громіздкий вигляд. Тому у вершині гіпотрохоїдальної порожнини, тобто при $\rho = 1$, $\gamma = 0;\pi$, розподіл напружень $\dfrac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}$ в таблиці 2 для для матеріалів 1, 2, 3 (матеріал 4 відповідає ізотропному випадку) визначаються виразами:

матеріал 1: $\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p} = 1{,}4753 + 7{,}5230\varepsilon + 11{,}1773\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3)$, (11)

матеріал 2: $\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p} = 2{,}3729 + 13{,}5272\varepsilon - 17{,}4595\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3)$, (12)

матеріал 3: $\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p} = 1{,}5134 + 8{,}6279\varepsilon + 10{,}7941\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3)$, (13)

матеріал 4: $\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p} = 1{,}5000 + 7{,}3732\varepsilon + 6{,}9765\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3)$. (14)

Числові значення, подані в табл. 2, характеризують зміну коефіцієнта концентрації $K_{\gamma\gamma}^{(2)} = \frac{\delta_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}$ і мажорантного напруження $K_{\gamma\gamma}^{(2)} = \frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}$ при деяких значеннях малого параметра ε.

Таблиця 2.

Числові значення $K_{\gamma\gamma}^{(2)}$ і $K_{\gamma\gamma}^{M}$

Матеріал	ε / $K_{\gamma\gamma}$	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$
1	$K_{\gamma\gamma}^{(2)}$	1,475	1,928	2,449	3,040	3,699
	$K_{\gamma\gamma}^{M}$	1,475	1,931	2,476	3,142	3,971
2	$K_{\gamma\gamma}^{(2)}$	2,373	3,071	3,660	4,142	4,517
	$K_{\gamma\gamma}^{M}$	2,373	3,075	3,696	4,275	4,864
3	$K_{\gamma\gamma}^{(2)}$	1,513	2,026	2,605	3,251	3,964
	$K_{\gamma\gamma}^{M}$	1,513	2,028	2,627	3,330	4,169
4	$K_{\gamma\gamma}^{(2)}$	1,500	1,931	2,405	2,923	3,483
	$K_{\gamma\gamma}^{M}$	1,500	1,932	2,415	2,959	3,575

Аналогічні задачі для неканонічних порожнин із заокругленими кутами розглянуті у дослідженнях [5;6].

Таким чином, при розтязі-стиску ізотропного середовища з гіпотрохоїдальним включенням і трансверсально ізотропного середовища з гіпотрохоїдальною порожниною, напружений стан істотно залежить від кривизни поверхні: із зростанням малого параметра , тобто при зменшенні радіуса кривизни поверхні, коефіцієнти концентрації напружень збільшуються.

Література:

1. Гузь А. Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. – К.: Вища школа, 1982. – 352 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
3. Немиш В. Н. Пространственная деформация изотропной среды с неканоническими включениями / В. Н. Немиш // Мат. физика. – 1976. – Вып.19. – С. 104-109.
4. Неміш В. М. Напружений стан ізотропного середовища / В. М. Неміш. – Кн. «Шості Боголюбовські читання». Київ, 2003. – С. 159.
5. Неміш В. М. Про деяку залежність напруженного стану деформівного середовища від радіуса кривизни поверхні / В. М. Неміш // Наука і освіта «2004»: VII Міжн. наук.-практ. конф.: зб. матеріалів. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2004. – С. 53-55.
6. Немиш Ю. Н. К решению пространственных задач теории упругости трансверсально изотропной среды для неканонических областей / Ю. Н. Немиш, В. Н. Немиш // Прикл. механика. – 1976. – Т.12. – №12. – С. 73-82.