КРУЧЕННЯ ІЗОТРОПНОГО ЦИЛІНДРА З НЕКАНОНІЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

В. М. Неміш

Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна

nemish_vm@ukr.net

Розглядається однорідний ізотропний пружний циліндр радіуса R з впаяним жорстким включенням, поверхня S якого утворена обертанням правильного п'ятикутника з заокругленими кутами навколо осі Oz. Його параметричні рівняння описуються з допомогою конформно відображуючої функції:

$$\omega(\zeta) = r_0(\zeta + \varepsilon\zeta^{-4}) \ (\zeta = \rho e^{i\gamma}, |\varepsilon| = 0{,}1)$$

і в довільній меридіальній площині zOR при $\rho = 1$ мають вигляд:

$$z = r_0^{-1}\,\mathrm{Re}\,\omega(\zeta) = \cos\gamma + \varepsilon\cos 4\gamma$$

$$R = r_0^{-1}\,\mathrm{Im}\,\omega(\zeta) = \sin\gamma - \varepsilon\sin 4\gamma .$$

Тут R — відстань від довільної точки поверхні включення S (відповідає координатній поверхні $\rho = 1$) до осі Oz.

Проведено дослідження напруженого стану однорідного ізотропного циліндра з впаяним жорстким включенням у випадку кручення моментом M відносно осі Oz. При цьому припускається, що бічна і торцеві поверхні знаходяться на достатній відстані від поверхні включення S і не істотно впливають на напружено-деформований стан в її околі. Граничні умови на поверхні S жорсткого включення такі:

$$U_{\alpha}^{(0)}\Big|_{\rho=1} = -\hat{U}_{\phi}^{(0)}\Big|_{\rho=1},$$

$$U_{\alpha}^{(n)}\Big|_{\rho=1} = -\left[\hat{U}_{\phi}^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1}\Lambda_1^{(n-j)}U_{\alpha}^{(j)}\right]_{\rho=1} \quad (n \geq 1).$$

Переміщення $U_{\alpha}^{(n)}$ знаходяться на основі загального розв'язку однорідних рівнянь рівноваги для ізотропного тіла, а $\hat{U}_{\phi}^{(n)}$ — відома компонента основного напруженого стану тіла (без концентратора напружень) і відповідає прикладеній силі.

При дослідженні напружено-деформованого стану середовища використано варіант наближеного методу «збурення форми границі» розробленого і апробованого в наукових роботах Гузь (1970) і Неміш (1974). Основні компоненти в нульовому наближенні відповідають точному розв'язку розглянутої задачі у випадку жорсткого сферичного включення і мають вигляд:

$$U_{\phi}^{(0)} = \frac{2Mr_0^2}{3\pi R^4 G}(\rho^2 - \rho^{-3})\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma},$$

$$\sigma_{\rho\phi}^{(0)} = \frac{2Mr_0}{3\pi R^4}(\rho - 4\rho^{-4})\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma},$$

$$\sigma_{\gamma\phi}^{(0)} = \frac{4Mr_0}{3\pi R^4}(\rho - \rho^{-4})[1 - P_2(\mu)]$$

У зв'язку зі складністю поверхні S, розв'язок поставленої задачі будемо шукати у вигляді рядів, складові яких у довільному наближенні визначаються з рекурентних співвідношень

$$U_\phi^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \Lambda_1^{(n-j)} U_\alpha^{(j)},$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\rho\phi}^{(n)} \\ \sigma_{\gamma\phi}^{(n)} \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^{n} \left[\Lambda_5^{(n-j)} \begin{Bmatrix} \sigma_{r\alpha}^{(j)} \\ \sigma_{\Theta\alpha}^{(j)} \end{Bmatrix} \pm \Lambda_6^{(n-j)} \begin{Bmatrix} \sigma_{\Theta\alpha}^{(j)} \\ \sigma_{r\alpha}^{(j)} \end{Bmatrix} \right],$$

де $\Lambda_1^{(j)}, \Lambda_5^{(j)}, {}_6^{(j)}$ — диференціальні оператори, структура яких залежить від форми самого контура.

На поверхні жорсткого включення $\rho = 1$ найбільшим є напруження $\sigma_{\rho\phi}^{(2)}$:

$$\sigma_{\rho\phi}^{(2)} = \sum_{n=1}^{12} A_n \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}.$$

Тут і раніше A_n,— числові коефіцієнти, G — модуль зсуву, $P_n(\mu)$ — поліноми Лежандра, $dP_n(\mu) / d\gamma$ — їхні похідні ($\mu = \cos\gamma$).

Коефіцієнти концентрацій напружень при $\rho = 1$ мають таку аналітичну структуру:

$$K_{\rho\phi}^{(0)} = \frac{\pi R^4}{2Mr_0}\sigma_{\rho\phi}^{(0)},\ K_{\rho\phi}^{(1)} = \frac{\pi R^4}{2Mr_0}\left(\sigma_{\rho\phi}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{\rho\phi}^{(1)}\right),$$

$$K_{\rho\phi}^{(2)} = \frac{\pi R^4}{2Mr_0}\left(\sigma_{\rho\phi}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{\rho\phi}^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_{\rho\phi}^{(2)}\right).$$

Дослідження показали, що поле напружень в околі жорсткого включення має ярко виражений локальний характер. Так, на відстані двох радіусів від поверхні включення ($\rho = 3$) відхилення коефіцієнтів концентрації напружень (у порівнянні з жорстким сферичним включенням) не перевищує 3,8%. Тобто, якщо зовнішня поверхня циліндра (бічна і торцеві) знаходяться на відстані не менше діаметра від поверхні жорсткого включення, то не суттєво вплине на напружений стан біля включення.

Список літератури

Гузь, О. М. (1970). Про один метод розв'язування тривимірних лінійних задач механіки суцільного середовища для неканонічних областей. *ДАН УРСР, серія А*, *4*, 352—355.

Неміш, Ю. М. (1974). Про граничні задачі теорії пружності для просторових багатозвязних неканонічних областей. *ДАН УРСР, серія А*, *8*, 743—748.