

Хохлова Л.Г., Хома Н.Г.

Диференціальні рівняння

*Навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей
педагогічних вищих навчальних закладів*

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка

Хохлова Л.Г., Хома Н.Г.

Диференціальні рівняння

Рекомендовано вченою радою Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка як навчальний посібник

Тернопіль
Вид-во ТНПУ
2023

УДК 517.9(075.8)

X-86

*Рекомендовано до друку вченою радою Тернопільського національного педагогічного
університету імені Володимира Гнатюка
(протокол №9 від 25.04.2023)*

Рецензенти: **Романишин О.Я.** – доктор педагогічних наук, професор кафедри інформатики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка.

Лесик О.Ф. - кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики Західноукраїнського національного університету.

Романюк Л.А. - кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.

Хохлова Л.Г., Хома Н.Г.

X-86 Практикум з диференціальних рівнянь: Навчальний посібник.-Тернопіль: ТНПУ імені В.Гнатюка, 2023.- 71 с.

Посібник написано відповідно до вимог програми дисципліни “Диференціальні та інтегральні рівняння” для студентів фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів. Викладені матеріали з таких розділів теорії диференціальних рівнянь: “Диференціальні рівняння першого порядку”, “Диференціальні рівняння вищих порядків”, “Системи диференціальних рівнянь”. Планування кожної лекції передбачає стислий виклад теоретичного матеріалу, приклади детального розв’язування типових задач, контрольні запитання, вправи для самостійної роботи студентів.

Для студентів вищих педагогічних навчальних закладів.

УДК 517.9(075.8)

©Л.Г.Хохлова, Н.Г.Хома, 2023

©Вид-во ТНПУ, 2023

ЗМІСТ

ВСТУП	5
Лекція №1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку (загальна теорія).....	6
Лекція №2. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них.....	8
Лекція №3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та звідні до них.....	13
Лекція №4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та звідні до них.....	18
Лекція №5. Рівняння в повних диференціалах	24
Лекція №6-7. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків	27
Лекція №8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків...37	
Лекція №9. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків.....	49
Лекція №10. Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами	61
Лекція №11. Системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	66
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	71

Вступ

Багато фізичних процесів у природі та техніці описуються за допомогою звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем. Теорія звичайних диференціальних рівнянь є важливим інструментарієм, що використовується при моделюванні різних прикладних задач. Даний навчальний посібник призначено для студентів фізичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів, які вивчають курс «Диференціальні рівняння». Мета його – підготувати вчителів фізичних спеціальностей до творчого підходу у професійної діяльності при розв’язання конкретних проблем. Основними завданнями курсу «Диференціальні рівняння» є ознайомлення студентів з основними поняттями, методами, теоремами та формулами теорії диференціальних рівнянь та формування первинних навичок застосування теоретичного матеріалу до практичних задач. «Диференціальні рівняння» містять основні питання теорії диференціальних рівнянь першого порядку, диференціальних рівнянь вищих порядків та систем диференціальних рівнянь. На початку кожної лекції, запропонованої у посібнику, наведений перелік основних питань, розглянутих у лекції, а далі детально викладені стандартні методи розв’язання типових задач. Для закріплення основних положень і навичок розв’язання задач читачеві пропонуються контрольні запитання та завдання для самостійної роботи.

Лекція 1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку (загальна теорія).

1. Основні поняття та означення.
2. Класифікація розв'язків.
3. Задача Коші. Особливий розв'язок.

1. Диференціальним рівнянням називається співвідношення, яке пов'язує незалежну змінну, невідому функцію та її похідні (або її диференціали).

У випадку, коли невідома функція, яка входить у диференціальне рівняння, залежить тільки від однієї незалежної змінної, диференціальне рівняння називається **звичайним**.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної (або диференціала), яка входить у рівняння.

Звичайне диференціальне рівняння n -го порядку у загальному випадку має вигляд

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.1)$$

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$f(x, y, y') = 0, \quad (1.2)$$

а якщо його вдається розв'язати відносно похідної, то воно запишеться так:

$$y' = F(x, y). \quad (1.3)$$

Процес відшукування невідомої функції з диференціального рівняння називається розв'язуванням або **інтегруванням** диференціального рівняння.

2. Розв'язком, або інтегралом рівняння (1.3) називається будь-яка диференційовна функція $y = \varphi(x)$, яка задовольняє дане рівняння, тобто при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність

$$\varphi'(x) \equiv F(x, \varphi(x)).$$

З останнього рівняння можна визначити горизонтальну дальність стрільби, якщо покласти в ньому $y = 0$, і з отриманого рівняння знайти x .

Контрольні запитання.

1. Що називається системою лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?
2. Сформулюйте означення загального розв'язку системи диференціальних рівнянь 2-го порядку?
3. Сформулюйте означення часткового розв'язку системи диференціальних рівнянь 2-го порядку?
4. Яка система диференціальних рівнянь 2-го порядку називається лінійною?
5. Яка система диференціальних рівнянь 2-го порядку називається однорідною (неоднорідною)?
6. У чому суть методу виключення невідомих при розв'язанні лінійних систем диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

Завдання для самостійної роботи:

Знайти загальний розв'язок системи (в другій системі знайти розв'язок, який задовольняє початкові умови):

$$4. \begin{cases} x''(t) + a^2 y = 0 \\ y''(t) - a^2 y = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x''(t) + 6x + 7y = 0 \\ y''(t) + 3x + 2y = 2t \end{cases}$$

$$x(0) = 2; y(0) = 1; x'(0) = 1; y'(0) = 3.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Диференціальні рівняння / П. І. Каленюк, Ю. К. Рудавський, Р. М. Тацій та ін. – Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2014. – 380 с.
2. Диференціальні рівняння: методи та застосування / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, П. П. Настасієв, І. І. Дрінь. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 288 с.
3. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ю. К. Рудавський, І.П. Каленюк, Р. М. Тацій та ін. – Львів : Вид-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 2001. – 244 с.
4. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння / С.А. Кривошея М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К. : Либідь, 2004. – 408 с.

5. Лавренюк С. П. Курс диференціальних рівнянь / С. П. Лавренюк. – Львів : Вид-во наук.-техн. літ., 1997. – 216 с.
6. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М.О. Перестюк, І. О. Парасюк. – К. : Либідь, 2003. – 600 с.
7. Перестюк М. О. Збірник задач з диференціальних рівнянь / М.О.Перестюк, М. Я. Свіщук. – К. : ТВіМС, 2004. – 224 с.
8. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: Підручник. — К.: Либідь, 1994. — 360 с.
9. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння у задачах / А.М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К. : Либідь, 2003. – 504 с.