

УДК 517.925.51:517.93

Алгебраїчні умови стійкості диференціальних систем другого порядку¹

А.М. Алілуйко

Інститут математики НАН України,
Київ 01601. E-mail: aliluyko@imath.kiev.ua

Анотація. Досліджуються задачі стійкості та побудова стабілізуючих керувань для систем лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Пропонуються нові алгебраїчні методи аналізу стійкості та стабілізації систем, що зводяться до розв'язування матричних нерівностей та оцінки середніх власних значень гіперболічної спектральної задачі. Ефективність методів демонструється на прикладі системи стабілізації оберальної балки.

1. Вступ

В задачах аналізу стійкості і синтезу керування різноманітних фізичних об'єктів значна увага приділяється методам дослідження математичних моделей, які описуються системами лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$C(t)\ddot{x} + B(t)\dot{x} + A(t)x = f(u, t), \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

де $x \in R^n$ — вектор узагальнених координат, $u \in R^r$ — вектор керування, A , B і C — матриці розміру $n \times n$. В моделях механіки матриця C характеризує інерційні властивості системи, $B = D + G$ — матриця дисипативних і гіроскопічних сил, $A = K + S$ — матриця потенціальних та неконсервативних сил, а вектор-функція f описує вплив зовнішніх сил на динаміку системи.

До основних практичних задач стосовно системи (1.1) відносяться розробка критеріїв стійкості положення рівноваги та побудова систем стабілізації у вигляді зворотного зв'язку $u = -L_0(t)x - L_1(t)\dot{x}$ або динамічного регулятора типу $R_0(t)u + R_1(t)\dot{u} = g(x, t)$. При цьому замкнута система зводиться до аналогічного вигляду.

Важливу роль в задачах стійкості та стабілізації диференціальних систем другого порядку виконують коефіцієнтні критерії стійкості, які формулюються в термінах матриць A , B і C у вигляді систем алгебраїчних рівнянь і нерівностей. В таких дослідженнях застосовуються методи функцій Ляпунова та їх матричні інтерпретації, яким присвячена велика кількість робіт (див., наприклад, [1, 2, 3]).

¹Робота виконана при частковій підтримці НДР № 0107U002198

В даній роботі досліджуються задачі стійкості та побудова стабілізуючих керувань для систем лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Пропонуються нові алгебраїчні методи аналізу стійкості та стабілізації систем, що зводяться до розв'язування матричних нерівностей та оцінки середніх власних значень гіперболічної спектральної задачі. Ефективність методів демонструється на прикладі системи стабілізації обертальної балки.

2. Про гіперболічну спектральну задачу

Розглянемо квадратичний пучок матриць (КПМ)

$$F(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C, \quad A = A^*, \quad B = B^*, \quad C = C^* > 0 \quad (2.1)$$

та відповідну квадратичну спектральну задачу (КСЗ)

$$F(\lambda)z = 0, \quad \lambda \in \sigma(F), \quad z \neq 0. \quad (2.2)$$

Означення 1. КСЗ (2.2) називається *гіперболічною*, якщо

$$\delta(z) = (z^* B z)^2 - 4z^* A z z^* C z > 0, \quad \forall z \neq 0, \quad z \in C^n.$$

КСЗ (2.2) називається *майже гіперболічною*, якщо $\delta(z) \geq 0, \forall z \in C^n$.

КПМ (2.1), якому відповідає гіперболічна (майже гіперболічна) КСЗ будемо також називати гіперболічним (майже гіперболічним). При додаткових обмеженнях $B > 0, A \geq 0$ гіперболічний КПМ (2.1) називається *сильно демпфованим*.

Відомо [4], що наступні твердження еквівалентні:

- 1) КСЗ (2.2) є гіперболічною;
- 2) $\exists \alpha \in R^1 : F(\alpha) < 0$;
- 3) КПМ (2.1) має дійсні власні значення $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n < \lambda_{n+1} \leq \dots \leq \lambda_{2n}$ і $F(\alpha) < 0$ при $\lambda_n < \alpha < \lambda_{n+1}$.

По аналогії можна встановити еквівалентність наступних тверджень:

- 1') КСЗ (2.2) є майже гіперболічною;
- 2') $\exists \alpha \in R^1 : F(\alpha) \leq 0$;
- 3') КПМ (2.1) має дійсні власні значення $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \leq \dots \leq \lambda_{2n}$ і $F(\alpha) \leq 0$ при $\lambda_n \leq \alpha \leq \lambda_{n+1}$.

Якщо КПМ (2.1) не є гіперболічним, а лише майже гіперболічним, то в умовах 3') $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \alpha$ — єдина точка, де $F(\alpha) \leq 0$. При цьому [4]

$$\alpha = -\frac{z_0^* B z_0}{2z_0^* C z_0}, \quad \min_{\|z\|=1} \delta(z) = \delta(z_0) = 0.$$

Якщо $F(\lambda)$ — гіперболічний пучок, то $F(\lambda + \alpha)$ є сильно демпфованим для деякого α . Гіперболічний КПМ (2.1) є сильно демпфованим лише тоді, коли $\lambda_{2n} \leq 0$, тобто всі його власні значення знаходяться на півосі $(-\infty, 0]$.

3. Коефіцієнтні умови стійкості

Розглянемо автономну диференціальну систему другого порядку

$$C\ddot{x} + B\dot{x} + Ax = 0, \quad x \in C^n, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

де $A, B, C \in C^{n \times n}$ — сталі матриці.

Теорема 1. *Нехай $C = C^* > 0$ та існують матриці H і $U \in C^{n \times n}$, що задовольняють систему матричних нерівностей*

$$H = H^* > 0, \quad U + U^* > 0, \quad (L^* - H)W(L - H) \leq E, \quad (3.2)$$

де

$$W = (U + U^*)^{-1}, \quad L = A + U^*C^{-1}(B - U), \quad E = A^*C^{-1}(B - U) + (B - U)^*C^{-1}A.$$

Тоді диференціальна система (3.1) стійка за Ляпуновим. Якщо до того ж в (3.2) остання матрична нерівність є строгою, то система (3.1) асимптотично стійка.

Доведення. Подамо систему (3.1) у вигляді

$$\hat{A}y - \hat{B}\dot{y} = 0, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

За теоремою Ляпунова система (3.3) є стійкою тоді і тільки тоді, коли існують матриці $X_1 = X_1^* > 0$, $X_2 = X_2^* > 0$ і V , що задовольняють системі нерівностей

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & V \\ V^* & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad -\hat{A}^*X\hat{B} - \hat{B}^*X\hat{A} = Y \geq 0. \quad (3.4)$$

Тут матриця Y має наступну структуру

$$Y = \begin{bmatrix} A^*V^* + VA & -X_1 + A^*X_2C + VB \\ -X_1 + C^*X_2A + B^*V^* & B^*X_2C + C^*X_2B - VC - C^*V^* \end{bmatrix}.$$

Співвідношення (3.4) у випадку $Y > 0$ є критерієм асимптотичної стійкості системи (3.1).

Покладемо

$$X_1 = VX_2^{-1}V^* + H, \quad X_2 = C^{-1}, \quad V = B^*X_2 - U^*C^{-1} = (B - U)^*C^{-1}.$$

Тоді співвідношення (3.4) мають вигляд

$$X = \begin{bmatrix} (B - U)^*C^{-1}(B - U) + H & (B - U)^*C^{-1} \\ C^{-1}(B - U) & C^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.5)$$

$$Y = \begin{bmatrix} E & L^* - H \\ L - H & W^{-1} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Застосуємо відомі критерії додатної та невід'ємної визначеності блочної матриці у випадку невірродженого діагонального блока X_2 :

$$\begin{bmatrix} X_1 & V \\ V^* & X_2 \end{bmatrix} > 0 (\geq 0) \iff X_2 > 0, \quad X_1 - VX_2^{-1}V^* > 0 (\geq 0).$$

Тоді, як неважко бачити, матричні нерівності (3.5) зводяться до вигляду (3.2).

Отже, виконуються умови (3.4) і система (3.1) стійка. Якщо в (3.5) всі нерівності строгі, то має місце асимптотична стійкість системи. \square

Наслідок 1. При умовах теореми 1 функція Ляпунова для системи (3.1) визначається у вигляді

$$v(x, \dot{x}) = x^*[(B - U)^*C^{-1}(B - U) + H]x + x^*(B - U)^*\dot{x} + \dot{x}^*(B - U)x + \dot{x}^*Cx.$$

Отриманий результат впливає із доведення теореми 1. Функцію Ляпунова для еквівалентної системи (3.3) можна побудувати у вигляді

$$v(y) = y^*\hat{B}^*X\hat{B}y,$$

яка на її нетривіальних розв'язках задовольняє співвідношення

$$v(y) > 0, \quad \dot{v}(y) = -y^*Yy \leq 0.$$

Наслідок 2. Нехай $C = C^* > 0$ і для деякої матриці $H = H^* > 0$ виконується одна із наступних систем співвідношень:

$$B + B^* > 0, \quad A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \geq 0, \quad T_\delta(H) \geq 0, \quad 0 \leq \delta \leq \frac{1}{4}; \quad (3.6)$$

$$B + B^* > 0, \quad A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \leq 0, \quad T_\delta(H) \geq 0, \quad \delta \leq 0; \quad (3.7)$$

$$B + B^* < 0, \quad A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \geq 0, \quad T_\delta(H) \leq 0, \quad \delta < 0; \quad (3.8)$$

де

$$T_\delta(H) = \delta(A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A) - (A^* + \delta B^*C^{-1}B - H)(B + B^*)^{-1}(A + \delta B^*C^{-1}B - H).$$

Тоді система (3.1) стійка.

Доведення. Покладемо в теоремі 1 $U = \theta B$, де $\theta \neq 0$. Тоді умови (3.2) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} & H = H^* > 0, \quad \theta(B + B^*) > 0, \quad (1 - \theta)(A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A) \geq \\ & \geq \frac{1}{\theta}[A^* + \theta(1 - \theta)B^*C^{-1}B - H](B + B^*)^{-1}[A + \theta(1 - \theta)B^*C^{-1}B - H]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Позначимо $\delta = \theta(1 - \theta)$ і розглянемо випадки, при яких система (3.9) сумісна:

1) якщо $B + B^* > 0$, $A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \geq 0$, то необхідно виконання нерівності $0 < \theta \leq 1$, тобто $0 \leq \delta \leq \frac{1}{4}$;

2) якщо $B + B^* > 0$, $A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \leq 0$, то необхідно виконання нерівності $\theta \geq 1$, тобто $\delta \leq 0$;

3) якщо $B + B^* > 0$, $A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \geq 0$, то необхідно виконання нерівності $\theta < 0$, тобто $\delta < 0$.

Якщо $B + B^* < 0$, $A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A \leq 0$, то необхідно виконання нерівностей $\theta < 0$ і $\theta \geq 1$, що не можливо.

Отже, у випадках 1)–3) приходимо до умов (3.6)–(3.8), виконання яких забезпечує стійкість системи (3.1). \square

Зауваження 1. У випадку $\theta = 1$ отримуємо відому систему матричних нерівностей

$$C = C^* > 0, \quad B + B^* > 0, \quad A = A^* > 0,$$

яка забезпечує стійкість системі (3.1).

Теорема 2. *Нехай для деякого $\xi \in R^1$ виконуються умови*

$$\xi(A + A^*) \geq 0, \quad B + B^* > 0, \quad C = C^* > 0, \quad (3.10)$$

$$\Gamma_\xi = \xi^2 P + \xi R + Q \geq 0 \quad (> 0), \quad (3.11)$$

де

$$P = -(A + A^*)(B + B^*)^{-1}(A + A^*),$$

$$R = 2(A + A^*)(B + B^*)^{-1}A + 2A^*(B + B^*)^{-1}(A + A^*),$$

$$Q = A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A - 4A^*(B + B^*)^{-1}A.$$

Тоді диференціальна система (3.1) стійка (асимптотично стійка).

Доведення. В умовах (3.6) покладемо

$$H = \frac{\xi}{2}(A + A^*) + \delta B^*C^{-1}B > 0, \quad \delta = \frac{1}{4}, \quad \xi(A + A^*) \geq 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Gamma_\xi &= 4T_\delta(H) = A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A - \\ &- [2A^* - \xi(A + A^*)](B + B^*)^{-1}[2A - \xi(A + A^*)] = \xi^2 P + \xi R + Q \geq 0. \end{aligned}$$

Отже, згідно наслідку 2, система (3.1) при умовах (3.10) стійка (асимптотично стійка), якщо в (3.11) виконується нерівність $\geq (>)$. \square

Умови стійкості, представлені в теоремі 2, узагальнюють аналогічні результати робіт [3] і [5].

Наслідок 3. При умовах теореми 2 функція Ляпунова для системи (3.1) визначається у вигляді

$$v(x, \dot{x}) = x^*[\xi(A + A^*) + B^*C^{-1}B]x + x^*B^*\dot{x} + \dot{x}^*Bx + 2\dot{x}^*C\dot{x}, \quad (3.12)$$

для якої виконуються умови (3.10) і (3.11).

Вигляд функції Ляпунова (3.12) впливає з теореми 2 при

$$H = \frac{\xi}{2}(A + A^*) + \delta B^*C^{-1}B > 0, \quad U = \theta B, \quad \delta = \frac{1}{4}.$$

Приклад 1. Розглянемо систему (3.1) з матричними коефіцієнтами [6]

$$A = \begin{bmatrix} 8 & s \\ -s & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix},$$

де s – дійсний параметр. Скористаємося теоремою 2 для знаходження значення s , при якому система буде асимптотично стійкою. У випадку $\xi = 1$ значення s знаходиться в інтервалі $[-3.733, 3.688]$. Для порівняння наведемо інтервал стійкості системи, знайдений в [6]: $|s| < 3.078$. Максимальне значення $s = 3.920$, при якому система втрачає стійкість, можна знайти шляхом обчислення спектра відповідного квадратичного пучка матриць $F(\lambda)$.

Наслідок 4. Якщо $C = C^* > 0$, $B + B^* > 0$ і виконується одна із наступних умов:

- 1) $Q \geq 0$ (> 0);
 - 2) $A + A^* \geq 0$, $A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A - (A^* - A)(B + B^*)^{-1}(A - A^*) \geq 0$ (> 0);
 - 3) $A + A^* \geq 0$, $A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A - 4A(B + B^*)^{-1}A^* \geq 0$ (> 0);
 - 4) $A + A^* \leq 0$, $A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A - (3A^* + A)(B + B^*)^{-1}(3A + A^*) \geq 0$ (> 0);
- то диференціальна система (3.1) стійка (асимптотично стійка).

Останнє твердження з умовами 1)–4) впливає з теореми 2 відповідно при $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\xi = 2$ і $\xi = -1$.

Застосуємо результати п. 2. Якщо $A + A^*$ – невироджена матриця, то в умовах теореми 2, що забезпечують стійкість (асимптотичну стійкість) системі (3.1), квадратичний пучок $-\Gamma_\xi$ є майже гіперболічним (гіперболічним). Впорядкуємо власні значення γ_i цього пучка:

$$\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \dots \leq \gamma_{2n}.$$

Наслідок 5. Нехай виконуються умови

$$A + A^* > 0, \quad B + B^* > 0, \quad C = C^* > 0.$$

Тоді система (3.1) стійка (асимптотично стійка), якщо

$$\Gamma_\xi \geq 0, \quad 0 \leq \gamma_n \leq \xi \leq \gamma_{n+1} \quad (\Gamma_\xi > 0, \quad 0 \leq \gamma_n < \xi < \gamma_{n+1}).$$

Наслідок 6. *Нехай виконуються умови*

$$A + A^* < 0, \quad B + B^* > 0, \quad C = C^* > 0.$$

Тоді система (3.1) стійка (асимптотично стійка), якщо

$$\Gamma_\xi \geq 0, \quad \gamma_n \leq \xi \leq \gamma_{n+1} \leq 0 \quad (\Gamma_\xi > 0, \quad \gamma_n < \xi < \gamma_{n+1} \leq 0).$$

Розглянемо рівняння руху механічної системи

$$\ddot{x} + (D + hG)\dot{x} + (K + S)x = 0, \quad (3.13)$$

де $D = D^*$ — матриця демпфування, а $G = -G^*$, $K = K^*$ і $S = -S^*$ — матриці відповідно гіроскопічних, консервативних та циркуляторних сил, h — дійсний параметр.

Наслідок 7. *Якщо виконуються умови*

$$\det G \neq 0, \quad D > 0, \quad G^*K + KG + G^*S + S^*G > 0,$$

то при достатньо великому $h > 0$ система (3.13) асимптотично стійка.

Дійсно, якщо покласти

$$C = I, \quad U = D + hG + h^{-1}C_1^*, \quad H = G^*G - h^{-2}C_1C_1^*, \quad C_1 = (K - S)G^{-1} + G,$$

то при достатньо великому $h > 0$ виконуються умови (3.2) теореми 1.

Наслідок 8. *Якщо $D > 0$, $\det G \neq 0$ і матриці K , $G^*K^{-1}S + S^*K^{-1}G$ одночасно є додатно або від'ємно визначеними, то при достатньо великому $h > 0$ система (3.13) асимптотично стійка.*

Доведення випливає з теореми 1, якщо покласти

$$C = I, \quad U = D + hG + h^{-1}C_2^*,$$

$$H = \pm G^*K^{-1}G - h^{-2}C_2C_2^*, \quad C_2 = (K - S)G^{-1} \pm GK^{-1}.$$

В наслідках 7 і 8 враховується умова $\det G \neq 0$, яка можлива лише для систем з парною кількістю ступенів вільності. Твердження наслідків 7 та 8 у випадку дійсних матричних коефіцієнтів встановлені в роботі [7] іншим способом.

4. Побудова стабілізуючого керування. Приклад роторної системи.

В задачах стабілізації динамічних систем застосовуються методи, що зводяться до розв'язування лінійних матричних нерівностей (див., наприклад, [5, 8, 9, 10]).

Отримані в п. 3 результати можна використати при побудові стабілізуючих керувань для відповідних класів диференціальних систем другого порядку.

Нехай модель керованої системи має вигляд

$$C\ddot{x} + B\dot{x} + Ax = Fu, \quad (4.1)$$

де x — вектор стану системи розміру $2n$, u — k -вектор керування, A, B і C — відомі матриці розмірів $2n \times 2n$, F — матриця повного рангу розмірів $2n \times k$. Задача стабілізації системи полягає в тому, щоб знайти матричні коефіцієнти L_0 і L_1 зворотного зв'язку розмірів $k \times 2n$

$$u = -L_0x - L_1\dot{x}, \quad (4.2)$$

що забезпечує асимптотичну стійкість замкнутій системі

$$C\ddot{x} + (B + FL_1)\dot{x} + (A + FL_0)x = 0.$$

В [5] запропоновано алгоритм побудови шуканих матриць у вигляді

$$L_0 = -L_1V^*P^{-1}, \quad L_1 = \tau\Psi F^*C^{-1*}\Delta^{-1}, \quad (4.3)$$

де $\tau > 0$ — достатньо велике число, а матриці V, P, Q і Ψ задовольняють систему співвідношень

$$\begin{aligned} \Psi + \Psi^* > 0, \quad V + V^* < 0, \quad P = P^* > 0, \quad \Delta = Q - V^*P^{-1}V > 0, \\ F^{\perp*} [BQC^* + CQB^* + AVC^* + CV^*A^* + \\ + (AP - CQ + BV^*)(V + V^*)^{-1}(PA^* - QC^* + VB^*)] F^{\perp} > 0. \end{aligned}$$

Тут матриця ортогонального доповнення F^{\perp} знаходиться з умов

$$F^*F^{\perp} = 0, \quad \det [F, F^{\perp}] \neq 0.$$

В [5] наводиться також оцінка для найменшого можливого значення τ за допомогою максимального власного значення деякого лінійного пучка матриць.

Приклад 2. Розглянемо балку довжини l із закріпленим твердим диском маси m , що разом обертаються зі сталою кутовою швидкістю ω . Вважаємо, що балка є однорідна з погонною масою m_0 та мало гнучкою з модулем пружності E . Балка має моменти інерції J_1 і J_2 відносно відповідних осей x і y . Кріплення балки дозволяють рухи по осі z та забезпечують відновлюючі згинні моменти і кутові відхилення з коефіцієнтами пропорційності k_1 і k_2 відповідно при $z = 0$ та $z = l$ (рис. 1). Внутрішнє та зовнішнє демпфування характеризують параметри p і q .

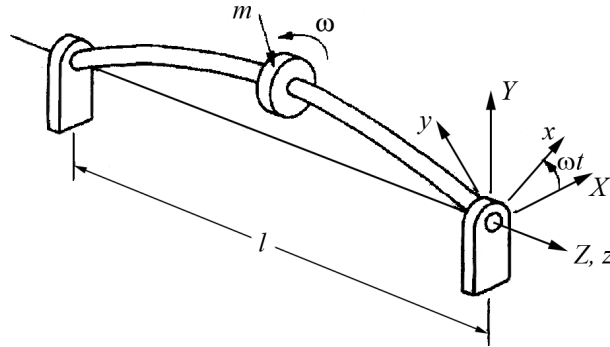


Рис. 1. Схематична модель обертання балки

Диференціальні рівняння, що описують рух балки, отримані на основі принципу Гамільтона та методу Гальоркіна і мають вигляд [11]

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \ddot{w} + \begin{bmatrix} D_1 & G \\ -G & D_2 \end{bmatrix} \dot{w} + \begin{bmatrix} K_1 & S \\ -S & K_2 \end{bmatrix} w = f(t). \quad (4.4)$$

Тут $f(t)$ — вектор зовнішніх сил, а матричні коефіцієнти задаються наступними співвідношеннями:

$$M_1 = M_2 = \|m_{ij}\|_1^n, \quad m_{ij} = m_0 l \delta_{ij} + 2m \sin \frac{i\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2},$$

$$K_1 = \|k_{1ij}\|_1^n, \quad k_{1ij} = EJ_1 \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 l \delta_{ij} - \omega^2 m_{ij} + 2(k_1 + k_2 \cos i\pi \cos j\pi) \frac{i\pi}{l} \frac{j\pi}{l},$$

$$K_2 = \|k_{2ij}\|_1^n, \quad k_{2ij} = EJ_2 \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 l \delta_{ij} - \omega^2 m_{ij} + 2(k_1 + k_2 \cos i\pi \cos j\pi) \frac{i\pi}{l} \frac{j\pi}{l},$$

$$G = -2\omega M_1, \quad D_1 = D_2 = (p + q) l I_n, \quad S = -q \omega l I_n, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

де I_n — одинична матриця порядку n , а δ_{ij} — символ Кронекера. Відхилення балки в точці z по осях x і y рухомої системи координат $Oxyz$ представляються у вигляді

$$x(z, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(z) w_i(t), \quad y(z, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(z) w_{n+i}(t),$$

де w_1, \dots, w_{2n} — компоненти вектора w , $\phi_i(z) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{i\pi}{l} z\right)$, $i = 1, \dots, n$. Всі блоки матричних коефіцієнтів в (4.4) є симетричними, причому M_1 і M_2 додатно визначені, а D_1 і D_2 — невід'ємно визначені матриці.

При наступних значеннях параметрів

$$n = 3, \quad m = 1, \quad m_0 = 1, \quad l = 1, \quad EJ_1 = \frac{9l^3}{5\pi^2}, \quad EJ_2 = \frac{4l^3}{5\pi^2},$$

$$k_1 = k_2 = \frac{l^2}{20}, \quad p = q = \frac{1}{4}, \quad \omega = \sqrt{21.6}\pi$$

система (4.4) має спектр

$$\begin{array}{ll} -0.2780 + 40.4328i & -0.1588 + 8.7985i \\ -0.2780 - 40.4328i & -0.1588 - 8.7985i \\ -0.3509 + 16.8215i & -0.3729 + 29.3242i \\ -0.3509 - 16.8215i & -0.3729 - 29.3242i \\ 0.1878 + 12.3793i & 2.5653 \\ 0.1878 - 12.3793i & -2.8195 \end{array}$$

і є нестійкою.

Стабілізуємо систему (4.4) двома способами за допомогою блоку керування $f = Fu$, де F — задана матриця, а u — вектор керування.

Нехай спочатку $k = 2n = 6$ і $F = 0.1I_k$. Для знаходження матриць L_0 і L_1 застосуємо наслідок 5 до замкнутої системи. Скориставшись математичною системою MATLAB для розв'язання відповідної системи матричних нерівностей, отримуємо коефіцієнти зворотного зв'язку у вигляді

$$\begin{aligned} L_0 &= \begin{bmatrix} 7161.8 & 11.807 & -1985.8 & 123.98 & 32.95 & 173.8 \\ 8.2546 & -32.207 & 11.796 & 156.17 & -49.263 & 11.486 \\ -1818.8 & 2.6459 & 545.42 & 21.052 & 1.3361 & -2.3776 \\ 5.0872 & 6.334 & 3.9653 & 7005.2 & -17.318 & -3510.9 \\ 10.06 & 43.527 & 25.624 & 142.02 & 944.36 & 27.916 \\ 8.8179 & 8.2155 & 176.47 & -3507.5 & 0.90685 & 1759.4 \end{bmatrix}, \\ L_1 &= \begin{bmatrix} 104.87 & 36.831 & 38.941 & -5.2737 & 62.186 & 78.245 \\ -9.8313 & 143.88 & -45.279 & -2.5047 & 132.39 & -16.94 \\ 22.574 & -1.668 & 293.45 & 4.1562 & -0.29465 & 137.3 \\ -36.52 & -1.0003 & 42.167 & 189.9 & 8.1401 & 34.468 \\ 25.649 & -29.341 & -41.769 & 38.766 & 158.77 & -4.2133 \\ -35.06 & -15.407 & 89.468 & -18.9 & -0.097349 & 244.71 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

При цьому замкнута система має спектр

$$\begin{array}{ll} -17.8265 - 36.0686i & -3.2106 - 29.2727i \\ -17.8265 + 36.0686i & -3.2106 + 29.2727i \\ -14.4030 - 21.8319i & -1.2938 - 0.4149i \\ -14.4030 + 21.8319i & -1.2938 + 0.4149i \\ -5.9670 - 8.2660i & -0.0614 - 0.2190i \\ -5.9670 + 8.2660i & -0.0614 + 0.2190i \end{array}$$

і є асимптотично стійкою, а квадратичний пучок Γ_ξ задовольняє наступним умовам гіперболічності:

$$\Gamma_\xi > 0, \quad \xi \in (\gamma_k, \gamma_{k+1}), \quad \gamma_k = 0.9973, \quad \gamma_{k+1} = 1.0217.$$

Побудуємо також керування у вигляді (4.3). Покладемо $k = n = 3$, $F = 100 [0, I_k]$, $\Psi = I_k$ і знайдемо наступні значення невідомих матриць:

$$P = \begin{bmatrix} 1.0579 & 0 & 0.1756 & 0.9024 & 0 & -0.8694 \\ 0 & 3.1145 & 0 & 0 & -1.6408 & 0 \\ 0.1756 & 0 & 0.0963 & 0.0249 & 0 & -0.2817 \\ 0.9024 & 0 & 0.0249 & 21.5773 & 0 & 0.8733 \\ 0 & -1.6408 & 0 & 0 & 27.1955 & 0 \\ -0.8694 & 0 & -0.2817 & 0.8733 & 0 & 25.2229 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 27.1405 & 0 & 14.3194 & 8.1409 & 0 & -13.8400 \\ 0 & 36.5989 & 0 & 0 & -11.8329 & 0 \\ 14.3194 & 0 & 38.2724 & -6.9803 & 0 & -16.4776 \\ 8.1409 & 0 & -6.9803 & 55.2324 & 0 & -12.2951 \\ 0 & -11.8329 & 0 & 0 & 39.5603 & 0 \\ -13.8400 & 0 & -16.4776 & -12.2951 & 0 & 43.4399 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} -2.3975 & 0 & -0.5395 & -4.6608 & 0 & 3.9125 \\ 0 & -4.7253 & 0 & 0 & 7.2649 & 0 \\ -0.4111 & 0 & -0.7321 & 0.2411 & 0 & 0.9470 \\ 3.6124 & 0 & -0.2566 & -7.5542 & 0 & 0.0359 \\ 0 & -5.6234 & 0 & 0 & -7.5276 & 0 \\ -3.0346 & 0 & -0.7717 & -0.6221 & 0 & -8.1398 \end{bmatrix},$$

При $\tau = 2.1509 \cdot 10^3$ коефіцієнти зворотного зв'язку набувають вигляду

$$L_0 = 10^5 \begin{bmatrix} 0.3785 & 0 & -1.0776 & 0.0071 & 0 & 0.0171 \\ 0 & -0.2094 & 0 & 0 & 0.0160 & 0 \\ 0.1433 & 0 & -0.7265 & 0.0092 & 0 & 0.0185 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 1.2011 & 0 & 1.0513 & 6.9626 & 0 & 3.9933 \\ 0 & 0.7097 & 0 & 0 & 9.7976 & 0 \\ 0.8498 & 0 & 1.9481 & 4.6739 & 0 & 5.9416 \end{bmatrix}.$$
(4.6)

При цьому замкнута система асимптотично стійка і має спектр

$$\begin{aligned} & -1078846.8571 \quad -5.9963 + 24.6759i \\ & -979753.3415 \quad -5.9963 - 24.6759i \\ & -42082.1829 \quad -2.0180 + 5.4608i \\ & \quad -0.3991 \quad -2.0180 - 5.4608i \\ & \quad -0.3614 \quad -1.2328 + 3.8221i \\ & \quad -0.3132 \quad -1.2328 - 3.8221i \end{aligned}$$

На рисунку 2 зображено графіки функцій $w_j(t)$ та $\dot{w}_j(t)$ для нестійкої розімкненої системи обертання балки з початковими умовами $w_j(0) = \dot{w}_j(0) = 1$ ($j = 1, 2, 3$), $w_j(0) = \dot{w}_j(0) = -1$ ($j = 4, 5, 6$). На рисунках 3 і 4 зображено графіки для стабілізованої замкнутої системи відповідно з матрицями (4.5) і (4.6) з початковими умовами $w_j(0) = \dot{w}_j = 1$ ($j = 1, 2, 3$), $w_j(0) = \dot{w}_j = -1$ ($j = 4, 5, 6$).

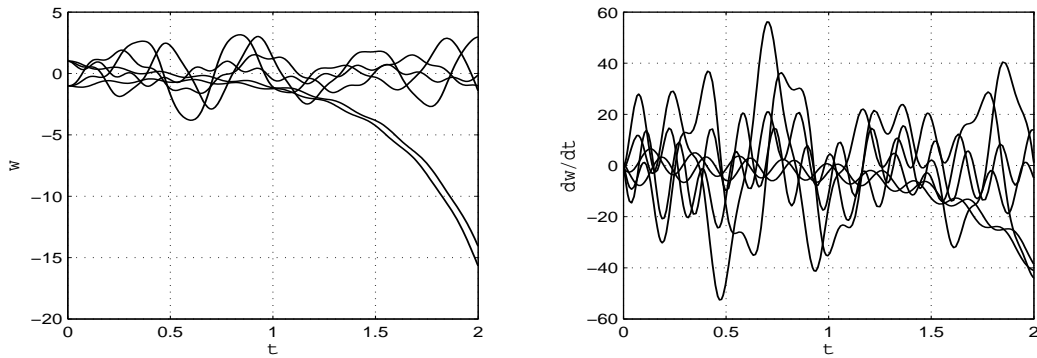


Рис. 2. Перехідні процеси нестійкої розімкнутої системи

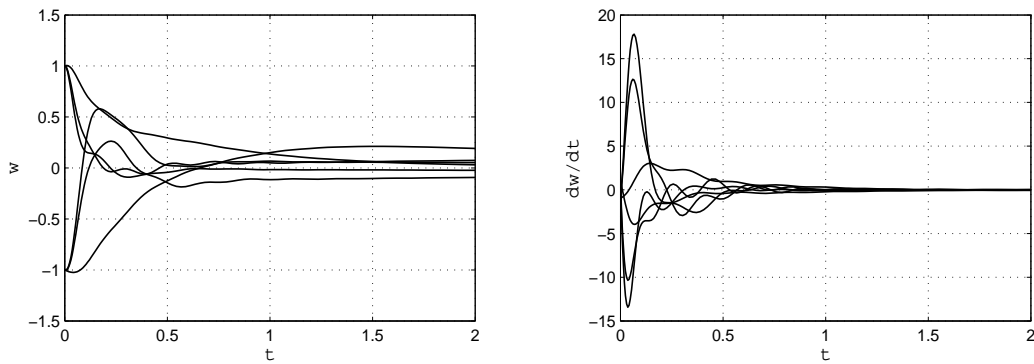


Рис. 3. Перехідні процеси замкнутої системи з матрицями керування (4.5)

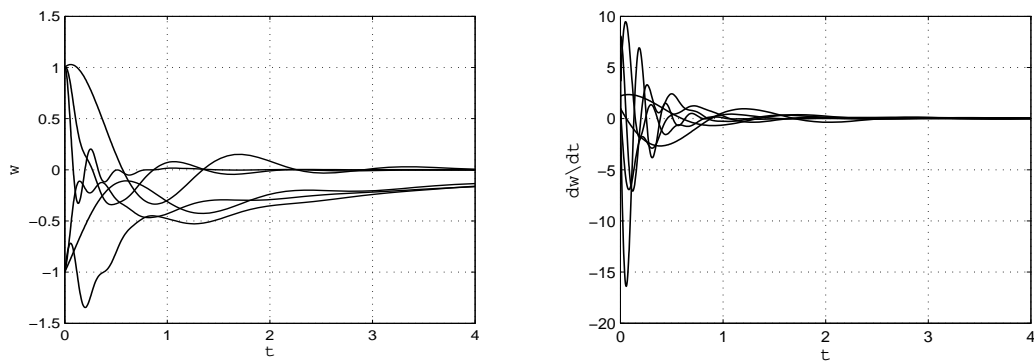


Рис. 4. Перехідні процеси замкнутої системи з матрицями керування (4.6)

Перелік цитованих джерел

1. *Agafonov S.A.* Stability and motion stabilization of nonconservative mechanical systems // J. Mathematical Sciences. — 2002. — Vol. 112, № 5. — P. 4419–4497.
2. *Tisseur F., Meerbergen K.* The Quadratic Eigenvalue Problem // SIAM Review. — 2001. — Vol. 43, № 2. — P. 235–286.
3. *Kliem W., Pommer C., Stoustrup J.* Stability of rotor systems: A complex modelling approach // J. Appl. Math. Phys. — 1998. — Vol. 49. — P. 644–655.
4. *Guo C.-H., Lancaster P.* Algorithms for hyperbolic quadratic eigenvalue problems // Math. Comp. — 2005. — Vol. 74, № 252. — P. 1777–1791.
5. *Аллуйко А.М., Мазко О.Г.* Стійкість та стабілізація диференціальних систем другого порядку // Проблеми аналітичної механіки. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. — С. 7–24. — (Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т. 3, № 1).
6. *Shapiro A.* Stability of second-order asymmetric linear mechanical systems with application to grasping // ASME J. Appl. Mech. — 2005. — Vol. 72, № 6. — P. 966–968.
7. *Li J.* On the stability of dissipative mechanical systems with circulatory forces // J. Appl. Math. Phys. — 1997. — Vol. 48. — P. 161–164.
8. *Мейлакс А.М.* О синтезе устойчивых систем автоматического регулирования при параметрических возмущениях // Автомат. и телемех. — 1978. — № 10. — С. 5–16.
9. *Мазко А.Г.* Управление спектральными и оптимальными свойствами линейных систем // Динамика и устойчивость механических систем. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. — С. 128–133.
10. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
11. *Meirovitch L., Ryland G.* A perturbation technique for gyroscopic systems with small internal and external damping // J. Sound and Vibration. — 1985. — Vol. 100, № 3. — P. 393–408.

Получена 13.04.2007