

І.Я. СПІВАК

**МАТЕМАТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПРОГРАМНИХ
СИСТЕМ**

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Тернопіль

THEY
2012

І.Я. Співак. Математичне забезпечення систем. / Опорний конспект лекцій для студентів напрямку “Програмна інженерія”. – Тернопіль, 2012. – 95 с.

Укладач: **Співак Ірина Ярославівна**, к.т.н., доцент кафедри комп’ютерних наук ТНЕУ

Відповідальний за випуск: **Дивак Микола Петрович**, д.т.н., професор, завідувач кафедри комп’ютерних наук ТНЕУ

Рецензенти: доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної та загальної електроніки Національного університету «Львівська політехніка» **Стахів П.Г.**

доктор фізико-математичних наук, професор кафедри економічної кібернетики Тернопільського національного економічного університету **Боднар Д.І.**

Затверджено на засіданні кафедри комп’ютерних наук ТНЕУ.
Протокол № 14 від «17» травня 2012 р.

Співак І.Я.,
ТНЕУ, 2012

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
Розділ 1 Точність чисельних експериментів.....	
6	
1.1 Абсолютна та відносна похибки.....	6
1.2 Пряма задача теорії похибок.....	7
1.3 Обернена задача теорії похибок.....	9
Розділ 2 Інтерполяція та апроксимація функцій.....	
11	
2.1 Способи задання функцій.....	11
2.2 Математична постановка задачі інтерполювання.....	13
2.3 Інтерполяційний багаточлен Лагранжа.....	14
2.4 Перша інтерполяційна формула Ньютона.....	16
2.5 Апроксимація табличних функцій.....	19
Розділ 3 Чисельне диференціювання та інтегрування.....	
27	
3.1 Чисельне диференціювання.....	27
3.2 Таблиця основних інтегралів.....	30
3.3 Основні методи інтегрування.....	33
Розділ 4 Власні значення та власні вектори	

	матриці.....	39
4.1	Знаходження власних векторів та власних значень матриць.....	39
4.2	Метод розгортання А.М. Данилевського.....	42
4.3	Обчислення власних векторів по методу Данилевського.....	50
4.4	Метод розгортання А.Н. Крилова.....	51
4.5	Обчислення власних векторів по методу Крилова.....	55
	Розділ 5 Розв’язання систем алгебраїчних рівнянь.....	57
5.1	Основні поняття і визначення.....	57
5.2	Класифікація методів розв’язання СЛАР.....	58
5.3	Особливості методів Гауса.....	59
5.4	Наближені методи розв’язання СЛАР.....	65
	Розділ 6 Одновимірні методи нелінійної оптимізації.....	72
6.1	Метод рівномірного пошуку.....	72
6.2	Метод половинного поділу.....	73
6.3	Метод дихотомії.....	74
6.4	Метод «золотого січення».....	75
	Розділ 7 Наближені методи розв’язання звичайних диференціальних рівнянь.....	77

7.1 Основні визначення та поняття.....	77
7.2 Класифікація методів розв’язання задачі Коші.....	82
7.3 Одноточкові методи розв’язання задачі Коші.....	83
7.4 Методи прогнозу та корекції (багаточкові методи).....	92
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	95

ВСТУП

Одним з головних напрямків науково – технічного прогресу на протязі вже кількох десятиріч є розвиток методів та засобів інформатики та обчислювальної техніки. Використання методів математичного забезпечення програмних систем і комп'ютерного розв'язання інженерних та наукових задач дозволяє значно підвищити ефективність процесів проектування та управління. Впровадження персональних комп'ютерів, комп'ютерних інформаційних мереж, побудова та розвиток INTERNET, широке та різноманітне використання методів математичного забезпечення призвели до розширення як практичної, так і теоретичної бази комп'ютерної математики. Математичне комп'ютерне забезпечення стало головним засобом дослідження складних процесів і систем, на якому базуються сучасні підходи до проектування, оптимізації та управління в різних галузях науки і техніки. Обчислювальна математика стала основою для реалізації та комп'ютерного розрахунку методів математичного моделювання.

Опорний конспект лекцій призначений для студентів напрямків «Інженерія програмного забезпечення» та «Програмне забезпечення систем», але також може бути використаний для інших спеціальностей при вивченні дисциплін, пов'язаних з чисельними методами, методами обробки даних, оптимізацією та плануванням експерименту.

Розділ 1 Точність чисельних експериментів

Чисельні методи – це могутній математичний засіб розв’язування задач. Проте застосовувати їх при розв’язуванні прикладних задач на базі ЕОМ необхідно обережно, оскільки точність знайденого розв’язку залежить від багатьох факторів. При цьому слід оцінювати похибку обчисленого розв’язку.

Під **похибкою** розуміють величину, що характеризує точність результату. Похибки, що виникають при розв’язуванні задачі, можна поділити на три групи:

- неусувна похибка;
- похибка методу;
- похибка обчислень.

Неусувна похибка є наслідком:

а) неточності вхідних даних, що входять до математичного опису задачі;

б) невідповідності математичної моделі реальній задачі (інколи цю похибку називають похибкою математичної моделі).

Похибка методу пояснюється тим, що для розв’язування математичної задачі доводиться використовувати наближені методи, оскільки отримання точного розв’язку здійснюється за необмеженої або неприйнятно великої кількості арифметичних операцій, а в багатьох випадках і просто неможливо.

Похибка обчислень виникає при вводиті-виводі даних до ЕОМ та при виконанні математичних операцій.

Основна задача теорії похибок – знаходження області невизначеності результату.

Розглянемо процес заокруглення чисел. Якщо число $x=4,167493$ і його потрібно заокруглити до п’яти десяткових знаків після коми, то будемо мати $x^*=4,16749$. Тобто, якщо старший розряд, що відкидається менше 5, то попередня цифра не змінюється. Якщо $x=4,167493$ потрібно заокруглити до чотирьох знаків після коми, то $x^*=4,1675$. Тобто, якщо старший розряд, що відкидається дорівнює, або більше 5, то попередня цифра в числі збільшується на 1.

Визначимо, що при заокругленні цілого числа відкинуті знаки не можна замінити нулями, а потрібно застосовувати множення на відповідний степінь 10.

1.1 Абсолютна та відносна похибки

Нехай x – точне значення деякої величини, а x^* – її відоме наближене значення.

Абсолютною похибкою числа x^* називається деяка величина Δx^* , що задовольняє умові

$$|x^* - x| \leq \Delta(x^*) \quad (1.1)$$

Відносною похибкою числа x^* називається деяка величина δx^* , що задовольняє умові

$$\left| \frac{x^* - x}{x^*} \right| \leq \delta(x^*) \quad (1.2)$$

Відзначимо, що точність результату краще характеризує відносна похибка. Інформацію про абсолютну та відносну похибки можна використати для наступного представлення числа x :

$$\begin{aligned} x &= x^* \pm \Delta(x^*), \\ x &= x^* (1 \pm \delta(x^*)). \end{aligned}$$

Значущими цифрами числа називаються всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва.

Наприклад:

$x=4,570345$ – всі цифри в запису цього числа значущі;

$x=0,007614$ – значущі цифри тільки 7,6,1,4;

$x=0,03105600$ – значущі цифри 3,1,0,5,6,0,0 (два останні нулі в запису числа є значущими).

Значуща цифра називається вірною, якщо абсолютна похибка числа не перевищує $\frac{1}{2}$ одиниці розряду, що відповідає цій цифрі.

1.2 Пряма задача теорії похибок

В деякій області G n -вимірного простору розглядається неперервно-диференційована функція $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Припустимо, що потрібно обчислити значення цієї функції в точці $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$, а відомі тільки наближені значення x_1, x_2, \dots, x_n такі, що точка (x_1, x_2, \dots, x_n) належить області G , та їх похибки.

Обчислимо наближене значення функції $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та оцінимо його абсолютну похибку.

Використовуючи формулу Лагранжа, маємо:

$$\Delta(y^*) = \left| f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \leq \sum_{j=1}^n B_j \Delta(x_j^*), \quad (1.3)$$

де

$$B_j = \sup_G \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right|.$$

При практичних розрахунках окрім оцінки (1.3) використовують оцінку

$$\Delta(y^*) \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_j} \right| \Delta(x_j^*), \quad (1.4)$$

яку називають **лінійною оцінкою похибки**.

Виходячи з оцінки (1.4), знаходять відносну похибку:

$$\delta(y^*) \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_j}}{f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)} \right|. \quad (1.5)$$

Використовуючи формули (1.4) - (1.5), визначають похибки результатів математичних операцій.

Похибка суми.

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad x_1, x_2 > 0.$$

Оскільки , то з (1.4) отримують

$$, \quad (1.6)$$

а з (1.5) відповідно

$$\delta(y^*) = \left| \frac{x_1^*}{x_1^* + x_2^*} \right| \delta(x_1^*) + \left| \frac{x_2^*}{x_1^* + x_2^*} \right| \delta(x_2^*) \quad (1.7)$$

Аналогічно знаходять похибки для інших математичних операцій.

Похибка різниці.

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2, \quad x_1 > x_2 > 0$$

$$\Delta(y^*) = \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*), \quad (1.8)$$

$$\delta(y^*) = \frac{x_1^* \delta(x_1^*) + x_2^* \delta(x_2^*)}{x_1^* - x_2^*} \quad (1.9)$$

Похибка множення.

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2, \quad x_1, x_2 > 0$$

$$\Delta(y^*) = |x_2^*| \Delta(x_1^*) + |x_1^*| \Delta(x_2^*), \quad (1.10)$$

$$\delta(y^*) = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*) \quad (1.11)$$

Похибка ділення.

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 / x_2, \quad x_1, x_2 > 0$$

$$\Delta(y^*) = \frac{|x_2^*| \Delta(x_1^*) + |x_1^*| \Delta(x_2^*)}{(x_2^*)^2}, \quad (1.12)$$

$$(1.13)$$

Відзначимо, що для суми та різниці абсолютні похибки додаються, а для операцій множення та ділення складаються відносні похибки. З формули (1.9) видно, що якщо віднімаються два близьких числа, то відносна похибка результату може значно зрости. А при діленні на досить мале число може значно зрости абсолютна похибка.

1.3 Обернена задача теорії похибок

Обернена задача теорії похибок полягає в наступному: з якою точністю потрібно задати значення аргументів $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, щоб похибка значення функції $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ не перевищувала заданої величини ε .

Для функції однієї змінної $y = f(x)$ абсолютну похибку можна наближено обчислити за формулою

$$\Delta(x^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|f'(x^*)|}, \quad f'(x^*) \neq 0 \quad (1.14)$$

Для функції декількох змінних $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задача розв'язується за допомогою наступних кроків:

Крок а) принцип рівних впливів, тобто вважається, що всі доданки $c_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta(x_i^*)$, $i = \overline{1, n}$ рівні між собою. Тоді абсолютні похибки всіх аргументів визначаються формулою

$$\Delta(x_i^*) = \frac{\Delta(y^*)}{n \left| \frac{\partial f^*}{\partial x_i} \right|}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.15)$$

Крок б) всі похибки вважаються рівними, причому максимально можливими, тобто

$$\Delta(x_1^*) = \Delta(x_2^*) = \dots = \Delta(x_n^*) = \delta,$$

де

Розділ 2 Інтерполяція та апроксимація функцій

2.1 Способи задання функцій

Інженери в практичній діяльності постійно зіштовхуються з необхідністю виявлення видів зв'язку в процесах та явищах і необхідністю їх математичного опису. Якщо деяка величина y , що характеризує процес, залежить від сукупності незв'язаних між собою величин (x_1, x_2, \dots, x_n) таким чином, що кожному набору (x_1, x_2, \dots, x_n) відповідає значення величини y .

Така однозначна відповідність величини y сукупності незалежних змінних x_1, x_2, \dots, x_n називається **функціональною залежністю**, а сама змінна величина y – **функцією змінних величин** x_1, x_2, \dots, x_n , що формально записується у вигляді $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Відомі три способи задання функціональних залежностей:

- аналітичний;
- графічний;
- табличний.

Так, наприклад, в результаті математичної обробки можна отримати наступну аналітичну залежність: зв'язок шляху з часом в рівноприскореному русі виражається як

$$s = vt + \frac{at^2}{2}$$

Позитивною властивістю аналітичного способу задання функцій є можливість одержувати значення y для будь-якого фіксованого аргументу x з будь-якою точністю. До недоліків цього способу слід віднести те, що необхідно повторювати всю послідовність обчислень, крім того, аналітичний спосіб не володіє наочністю. Вказані недоліки усуваються у випадку графічного задання функції $y = f(x)$.

Табличний спосіб задання функцій розповсюджений у техніці, фізиці, економіці, природознавстві та найчастіше всього використовується для запису результатів експерименту.

Нехай, наприклад, в результаті дослідження отримана залежність опору R мідного стержня від температури t у вигляді таблиці 2.1:

Таблиця 2.1

Результати експериментальних досліджень

R	77.80	79.75	80.80	82.35	83.90	85.10
t^0	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	50.0

В цьому експерименті значення опору змінюється при коливанні температури і є залежною змінною.

Перевагою табличного способу задання експериментальної функції є те, що для кожного значення незалежної змінної, поміщеної в таблицю, можна відразу ж, без усяких вимірів і обчислень, знайти відповідне значення функції. Недолік табличного способу полягає в тому, що не можна задати всю функцію скрізь, тобто завжди знайдуться такі значення незалежної змінної, яких немає в таблиці. Тому, для аналізу результатів інженерних експериментів дуже зручно використовувати як табличний, так і аналітичний способи представлення залежностей, що досліджуються.

Так, якщо в результаті інженерного або наукового експерименту отримана система точок $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$, то дуже часто виникає задача пошуку аналітичної залежності, яка б зв'язувала експериментальні дані у вигляді аналітичної функції $q(x)$. Для розв'язування цієї задачі за допомогою чисельних методів на ЕОМ використовують два підходи:

1. **Інтерполяція** – підхід, за допомогою якого отримують аналітичні залежності табличних функцій за умови, що аналітична функція $q(x)$ повинна проходити через всі задані експериментальні точки.

2. **Апроксимація** – підхід, за допомогою якого знаходиться аналітична функція $q(x)$, що “найкращим чином” наближається до заданої табличної функції. Звичайно “найкращим чином” – це критерій, в якості якого використовується критерій середньо квадратичного відхилення (СКВ), заснований на тому, що сума квадратів відхилень аналітичної функції $q(x_i)$ від експериментальної y_i (при $i = 0, 1, \dots, k$) повинна бути мінімальною:

На рисунку 2.1 представлена класифікація відомих методів наближення табличних функцій, призначених для пошуку аналітичної залежності, яка б зв'язувала експериментальні дані, отримані в результаті інженерного або

наукового експерименту.



Рис. 2.1 - Класифікація чисельних методів наближення табличних функцій

2.2 Математична постановка задачі інтерполювання

В економіці і техніці постійно приходиться зіштовхуватися з необхідністю обчислення значень функції $y = f(x)$ в точках x_i , відмінних від значень аргументу, фіксованих в таблиці експериментальних досліджень. Крім того, в деяких випадках, незважаючи на те, що аналітичний вираз функції $y = f(x)$ відомий, він є занадто складним і незручним для подальших математичних перетворень. Подібні задачі формалізуються як задачі інтерполювання.

Нехай на відрізку $[a, b]$ функція $y = f(x)$ задана системою точок $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, де значення x_1, x_2, \dots, x_n називаються **вузлами інтерполяції**. Необхідно знайти аналітичну залежність $q(x)$, співпадаючої у вузлах інтерполяції зі значеннями заданої функції, тобто $y_0 = q(x_0) = f(x_0), y_1 = q(x_1) = f(x_1), \dots, y_n = q(x_n) = f(x_n)$.

Процес обчислення значень функції $q(x)$ в точках x_i , відмінних від вузлів інтерполяції, називають **інтерполюванням функції** $f(x)$.

Якщо аргумент x знаходиться за межами відрізка інтерполювання $[x_0, x_n]$, то задача визначення значення функції $q(x)$ в точці x називається **екстраполюванням**.

Слід відмітити, що задача інтерполювання стає однозначною, якщо в якості функції вибрати багаточлен степені не вище n , такий, що . Багаточлен , що задовольняє цим умовам, називають **інтерполяційним багаточленом**, а відповідні формули – **інтерполяційними формулами**.

У випадку, коли береться з класу степеневих функцій, інтерполяція називається **параболічною**. Цей спосіб наближення

ґрунтується на тому, що на невеликих відрізках експериментальна функція $f(x)$ може бути достатньо добре апроксимована параболою певного порядку.

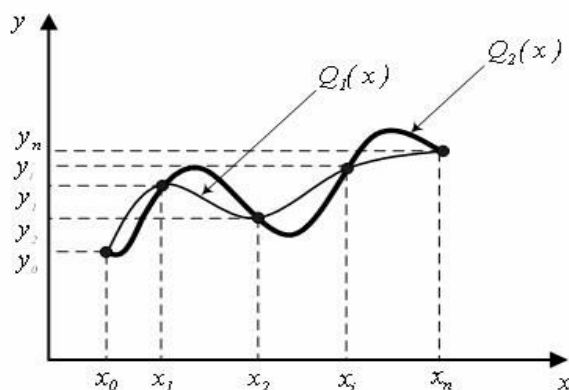


Рис. 2.2 – Геометрична інтерпретація інтерполяції табличної функції

Якщо в якості інтерполяційної функції використовувати багаточлен виду $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, то така інтерполяція називається **степеневою**.

При інтерполюванні виникає ряд задач:

1. вибір найбільш зручного способу побудови інтерполяційної функції для кожного конкретного випадку;
2. оцінка похибки при заміні $f(x)$ інтерполяційною функцією $q(x)$ на відрізку $[a, b]$, оскільки функції $f(x)$ та $q(x)$ співпадають тільки у вузлах інтерполяції x_0, x_1, \dots, x_n ;
3. оптимальний вибір вузлів інтерполяції для отримання мінімальної похибки.

Для задачі інтерполювання важливим є визначення того, як повинна вести себе інтерполяційна функція між заданими точками, так як ці точки можуть бути інтерпольовані множиною різноманітних функцій, і необхідно мати певний критерій вибору. Звичайно критерій формується в термінах гладкості та простоти. Більшість інтерполяційних функцій генеруються лінійними комбінаціями найпростіших функцій. Лінійні комбінації одночленів формують **степеневі поліноми**, лінійні комбінації тригонометричних функцій формують **тригонометричні поліноми**.

Найбільш важливим класом інтерполяційних функцій є множина алгебраїчних поліномів. Поліноми мають переваги з точки зору алгоритмізації, тому що їх значення легко обчислювати, додавати,

перемножувати, інтегрувати чи диференціювати. Важливою властивістю поліномів є те що якщо c – константа, а $p(x)$ – поліном, то поліномами будуть і $p(cx)$, і $p(x+c)$.

2.3 Інтерполяційний багаточлен Лагранжа

Найбільш загальною формулою параболічного інтерполювання є **інтерполяційна формула Лагранжа**. Задача параболічного інтерполювання в цьому випадку формулюється наступним чином: на відрізку $[a, b]$ у вузлах інтерполяції x_0, x_1, \dots, x_n задається функція $f(x)$ своїми $(n+1)$ значеннями $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$.

Необхідно побудувати багаточлен $L(x)$ так, щоб у вузлах інтерполяції x_0, x_1, \dots, x_n його значення співпадали зі значеннями заданої функції, тобто $L(x_0) = y_0, L(x_1) = y_1, \dots, L(x_n) = y_n$. Слід відзначити, що в такій постановці задачі вузли інтерполяції x_0, x_1, \dots, x_n можуть бути **довільно розташовані** один від одного на відрізку $[a, b]$, іншими словами, вузли інтерполяції не рівновіддалені, тобто $h = x_{i+1} - x_i \neq \text{const} (i = 0, 1, \dots, n-1)$.

Величина h називається **кроком інтерполяції**.

Задача інтерполювання має розв'язок, якщо степінь m багаточлена $L_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$, яким замінюється функція $f(x)$, не вище порядку $n (m \leq n)$. Тоді задача інтерполювання зводиться до пошуку невідомих постійних коефіцієнтів багаточлена $a_i (i = 0, 1, \dots, m)$ з системи рівнянь, яка будується наступним чином.

З початкових умов відомо, що функція $L_n(x)$ у вузлах x_0, x_1, \dots, x_n приймає значення $L_n(x_0) = y_0, L_n(x_1) = y_1, \dots, L_n(x_n) = y_n$. Тоді у вузлі x_0 інтерполяційний багаточлен $L_n(x)$ має вигляд $L_n(x) = y_0 \cdot \prod_{j=1}^n \frac{x - x_j}{x_0 - x_j}$, а у вузлі інтерполяції x_1 - $L_n(x) = y_1 \cdot \prod_{j=0, j \neq 1}^n \frac{x - x_j}{x_1 - x_j}$ і так далі. Нарешті, в вузлі x_n інтерполяційний багаточлен $L_n(x)$ буде виглядати $L_n(x) = y_n \cdot \prod_{j=0, j \neq n}^n \frac{x - x_j}{x_n - x_j}$.

Запишемо це у вигляді системи рівнянь з невідомими a_i :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_m x_0^m = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_m x_1^m = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_m x_2^m = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_m x_n^m = y_n \end{cases}, \quad (2.1)$$

де x_i і y_i ($i=0,1,\dots,n$) - табличні значення аргументу і функції, що досліджується. Невідомі коефіцієнти a_0, a_1, \dots, a_m знаходяться по формулам Крамера:

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, \quad a_m = \frac{\Delta_m}{\Delta}, \quad (2.2)$$

де Δ - визначник системи (2.1).

Якщо $\Delta \neq 0$ (тобто коли x_0, x_1, \dots, x_n різні), то система (2.1) має єдиний розв'язок. Якщо знайти коефіцієнти a_0, a_1, \dots, a_m , можна уявити інтерполяційний багаточлен у вигляді

$$L_m(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta} + \frac{\Delta_1}{\Delta} x + \frac{\Delta_2}{\Delta} x^2 + \dots + \frac{\Delta_m}{\Delta} x^m.$$

Перепишемо багаточлен в іншій формі:

$$L_n(x) = y_0 q_0(x) + y_1 q_1(x) + \dots + y_n q_n(x) \quad (2.3)$$

Легко перевірити, що функція $q_i(x)$ повинна задовольняти умовам

$$(2.4)$$

В точках функція обертається в 0, а в

точці x_i дорівнює 1.

Остаточно отримаємо наступний вираз

$$L_m(x) = y_0 \frac{(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} \quad (2.5)$$

Цей багаточлен називається **інтерполяційним багаточленом Лагранжа**. В спрощеному вигляді його можна записати так:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{j-1})(x_i-x_{j+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (2.6)$$

Даний метод легко алгоритмізується і може використовуватися для розробки програм інтерполяції.

Використовуючи інтерполяційний багаточлен можливо отримати значення функції y за межами спостережень. Така задача називається **екстраполяція** (прогнозування функції).

Для **оцінки похибки** інтерполяційного багаточлена Лагранжа використовують формулу:

$$R_n(x) = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

причому $M_{n+1} = \max |f^{(k+1)}(x)|$, при $x \in [a, b]$.

2.4 Перша інтерполяційна формула Ньютона

Якщо функція, що досліджується, задана значеннями у **рівновіддалених вузлах** інтерполяції,

тобто , то для побудови її аналітичної залежності зручно використовувати **першу інтерполяційну формулу Ньютона**.

Для виводу інтерполяційних формул для рівновіддалених вузлів інтерполяції вводиться поняття **кінцевої різниці**.

Поставимо наступну задачу: для функції , яка задана

таблицею значень $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$, причому x змінюється з однаковим кроком h , тобто $x_i = x_{i-1} + h$, побудувати кінцеві різниці.

Кінцевою різницею першого порядку Δy_i називається різниця між значеннями функції в сусідніх вузлах інтерполяції:

$$\begin{aligned}\Delta y_0 &= y_1 - y_0 \\ \Delta y_1 &= y_2 - y_1 \\ \Delta y_2 &= y_3 - y_2 \\ &\vdots \\ \Delta y_{n-1} &= y_n - y_{n-1}.\end{aligned}$$

В загальному вигляді кінцеву різницю першого порядку Δy_i можна записати як $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Кінцева різниця другого порядку $\Delta^2 y_i$ складається з кінцевих різниць першого порядку:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 \\ \Delta^2 y_2 &= \Delta y_3 - \Delta y_2 \\ &\vdots \\ \Delta^2 y_{n-1} &= \Delta y_n - \Delta y_{n-1}.\end{aligned}$$

Кінцева різниця n -го порядку $\Delta^n y_i$ складається з кінцевих різниць $(n-1)$ -го порядку:

$$\begin{aligned}\Delta^n y_0 &= \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0 \\ \Delta^n y_1 &= \Delta^{n-1} y_2 - \Delta^{n-1} y_1 \\ \Delta^n y_2 &= \Delta^{n-1} y_3 - \Delta^{n-1} y_2 \\ &\vdots \\ \Delta^n y_{n-1} &= \Delta^{n-1} y_n - \Delta^{n-1} y_{n-1}.\end{aligned}$$

Нехай необхідно побудувати інтерполяційний багаточлен

степеню m такий, що $P_m(x_0) = y_0, P_m(x_1) = y_1, \dots, P_m(x_n) = y_n$.

Тоді шукається багаточлен виду

$$P_m(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_m(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \quad (2.7)$$

В цьому виразі невідомі коефіцієнти a_0, a_1, \dots, a_m . Для того, щоб знайти a_0 , покладемо $x = x_0$. Тоді при підстановці $x = x_0$ у вираз (2.7) всі складові, окрім першої, обернуться в нуль, тобто $P_m(x_0) = a_0$, а значення функції в точці x_0 відомі з умови задачі - $P_m(x_0) = y_0$. Отже $a_0 = y_0$.

Щоб знайти коефіцієнт a_1 складається перша кінцева різниця для багаточлена $P_m(x)$ в точці x :

$$\Delta P_m(x) = P_m(x+h) - P_m(x)$$

Зробивши всі підстановки у багаточлени виду (2.7), отримують:

$$\Delta P_m(x) = ha_1 + 2ha_2(x - x_0) + 3ha_3(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + nha_m(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-2})$$

Обчислюється перша кінцева різниця багаточлена в точці x_0 . Тут також всі члени, окрім першого, обернуться в нуль, і, отже, $\Delta P_m(x_0) = a_1 h$, але

$$\Delta P_m(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = y_1 - y_0 = \Delta y_0,$$

звідки $a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}$.

Щоб визначити коефіцієнт a_2 складається кінцева різниця другого порядку:

Після перетворень отримують

$$\Delta^2 P_m(x) = 2!h^2 a_2 + 2 \cdot 3 \cdot h^2 a_3 (x - x_0) + \dots + (n-1)nh^2 a_m (x - x_0) \dots (x - x_{n-3})$$

Приймається, що $x = x_0$, тоді всі члени, окрім першого, знов обернуться в нуль і $\Delta^2 P_m(x_0) = \Delta^2 y_0 = 2!h^2 a_2$. Звідси

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

Обчислюючи кінцеві різниці більш високих порядків і вважаючи $x = x_0$, приходять до загальної формули для отримання коефіцієнтів:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}, \quad (k = 0, 1, \dots, m) \quad (2.8)$$

де $0! = 1$ та $\Delta^0 y = y$.

Підставивши знайденні значення коефіцієнтів a_k у вираз (2.7), отримують *першу інтерполяційну формулу Ньютона*:

$$P_m(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^m y_0}{m!h^m}(x - x_0) \dots (x - x_{m-1}) \quad (2.9)$$

2.5 Апроксимація табличних функцій

Інженеру звичайно приходиться працювати з великими масивами даних, тому методи обробки числових даних мають для нього особливе значення. Часто шляхом до правильного розуміння багатьох задач служить продумане уявлення початкових даних. До речі, неправильне уявлення експериментальних даних буває причиною помилок в розв'язанні складних задач.

Для того, щоб отримати аналітичні залежності, що описують великі масиви даних, використовують *методи апроксимації*, які ґрунтуються на тому, що масив даних замінюють простою функцією (лінійною, квадратичною, кубічною або іншою), яка не обов'язково проходить через

всі експериментальні точки, але описує тенденції зміни цих даних та забезпечує мінімум суми квадратів відхилень експериментальних даних від даних цієї функції.

Постановка задачі. Припустимо, що в результаті інженерного або наукового експерименту отримана система точок $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$. Необхідно знайти аналітичну таку залежність $Q(x)$, яка найкращим чином описує задану систему точок. Поняття "найкращим чином" означає розв'язання задачі по заданому критерію. Найбільш відомим критерієм для задач апроксимації є критерій **середньоквадратичних відхилень (СКВ)**, який являє собою мінімізацію суми квадратів відхилень експериментальних даних від аналітичної функції $Q(x)$ і визначається на заданій множині точок як

$$\sum_{i=0}^n (Q(x_i) - y_i)^2 \Rightarrow \min$$

Однак при такій постановці задача апроксимації експериментальних даних має багато розв'язків. Для отримання єдиного розв'язку цієї задачі потрібно задавати значення $Q(x)$ певного вигляду, наприклад:

степеневим поліномом

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (2.10)$$

тригонометричним поліномом

$$Q(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2.11)$$

ортогональним поліномом

$$Q(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x) \quad (2.12)$$

сплайн-функцією та інш.

Апроксимація табличних функцій степеневими поліномами

Розглянемо загальні математичні моделі, які можна отримати при апроксимації табличних функцій степеневим поліномом.

Постановка задачі. В результаті експерименту отримана система точок . Необхідно знайти такий степеневий

поліном виду (2.10), щоб сума квадратів відхилень полінома $Q(x)$ від заданої системи експериментальних точок була б мінімальною. Така задача зводиться до визначення коефіцієнтів поліному $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$. Метод, що дозволяє розв'язати дану задачу називається **методом найменших квадратів (МНК)**. Критерій середньо квадратичного відхилення (СКВ) в даному випадку має вигляд:

$$\sum_{i=0}^n (Q(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m - y_i)^2 \Rightarrow \min \quad (2.13)$$

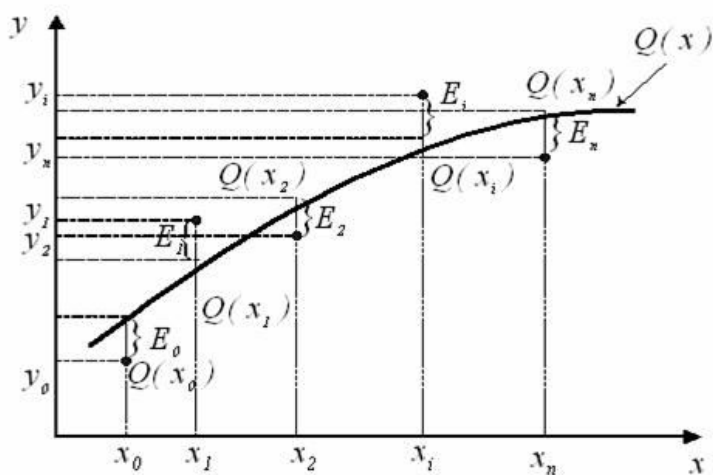


Рис.2.3 - Геометрична інтерпретація апроксимації табличної функції

З рисунку 2.3 видно, що

$$E_0(x) = Q(x_0) - y_0, E_1(x) = Q(x_1) - y_1, \dots, E_n(x) = Q(x_n) - y_n.$$

Тому вираз (2.13) можна представити у вигляді:

$$\sum_i (Q(x_i) - y_i)^2 = \sum_i E_i^2 \Rightarrow \min$$

Очевидно, що функція E - це багатопараметрична функція на множині . Мінімум такої функції знаходиться при виконанні умови виду:

$$(2.14)$$

Тепер, підставивши в (2.14) замість функції $E(x)$ вираз $(Q(x_i) - y_i)$ та замість $Q(x)$ з (2.10) – поліном, визначаємо частинні похідні у виразі (2.14) по кожному коефіцієнту a_i . В результаті отримуємо систему рівнянь виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial a_m} = 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i^m = 0 \end{cases}$$

В даній системі розкривши дужки та спростивши кожне рівняння окремо отримаємо наступну систему виду:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^m = \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} = \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \vdots \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{2m} = \sum_{i=0}^n x_i^m y_i \end{cases} \quad (2.15)$$

Система рівнянь (2.15) представляє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів поліному $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$, які необхідно знайти, щоб визначити аналітичну залежність, яка описує експериментальний масив даних. Дану систему можна записати у матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^m \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=0}^n x_i^m & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{2m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \\ \dots \\ \sum_{i=0}^n x_i^m y_i \end{bmatrix}$$

Розв'язати таку систему можна будь-яким з відомих методів розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, наприклад методом Гауса.

Для розв'язання такої системи на ЕОМ необхідно розробити спеціальний алгоритм та підпрограму для формування її матриці коефіцієнтів та вектора вільних членів з використанням експериментальних даних, які задані таблицею.

Апроксимація узагальненими поліномами

Постановка задачі. В результаті експерименту отримана система точок $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$. Необхідно знайти таку аналітичну функцію виду (2.12), щоб середнє квадратичне відхилення цієї функції від заданої системи точок буде мінімальним:

$$\sum_i (Q(x_i) - y_i)^2 \Rightarrow \min \tag{2.16}$$

Розв'язання цієї задачі зводиться до знаходження коефіцієнтів аналітичної функції $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$.

Визначимо відхилення аналітичної функції $Q(x)$ від експериментальних даних в кожній i -ій точці (x_i, y_i) :

$$\tag{2.17}$$

З виразу (2.17) видно, що $Q(x)$ залежить від коефіцієнтів a_0, a_1, \dots, a_m , тобто є функцією багатьох параметрів. Відомо, що умовою оптимуму багатопараметричної функції є умова виду:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0, \dots, \frac{\partial E}{\partial a_m} = 0 \quad (2.18)$$

Підставивши у вираз (2.18) замість E_i вираз (2.17) для всіх $i = 0, 1, \dots, n$, визначаємо частинні похідні у виразі (2.18) по кожному коефіцієнту a_i . В результаті отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_0} &= 2 \sum_i (a_0 \varphi_0(x_i) + a_1 \varphi_1(x_i) + \dots + a_m \varphi_m(x_i) - y_i) \varphi_0 = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial a_1} &= 2 \sum_i (a_0 \varphi_0(x_i) + a_1 \varphi_1(x_i) + \dots + a_m \varphi_m(x_i) - y_i) \varphi_1 = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial E}{\partial a_m} &= 2 \sum_i (a_0 \varphi_0(x_i) + a_1 \varphi_1(x_i) + \dots + a_m \varphi_m(x_i) - y_i) \varphi_m = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Після спрощення та рокування дужек в кожному рівнянні система (2.19) буде мати вигляд:

$$\begin{cases} a_0 \sum_i \varphi_0^2(x_i) + a_1 \sum_i \varphi_0(x_i) \varphi_1(x_i) + \dots + a_m \sum_i \varphi_0(x_i) \varphi_m(x_i) = \sum_i \varphi_0(x_i) y_i \\ a_0 \sum_i \varphi_0(x_i) \varphi_1(x_i) + a_1 \sum_i \varphi_1^2(x_i) + \dots + a_m \sum_i \varphi_1(x_i) \varphi_m(x_i) = \sum_i \varphi_1(x_i) y_i \\ \vdots \\ a_0 \sum_i \varphi_0(x_i) \varphi_m(x_i) + a_1 \sum_i \varphi_1(x_i) \varphi_m(x_i) + \dots + a_m \sum_i \varphi_m^2(x_i) = \sum_i \varphi_m(x_i) y_i \end{cases} \quad (2.20)$$

В матричній формі система (2.20) має вигляд:

$$\begin{bmatrix} \sum_i \varphi_0^2(x_i) & \sum_i \varphi_0(x_i) \varphi_1(x_i) & \dots & \sum_i \varphi_0(x_i) \varphi_m(x_i) \\ \sum_i \varphi_0(x_i) \varphi_1(x_i) & \sum_i \varphi_1^2(x_i) & \dots & \sum_i \varphi_1(x_i) \varphi_m(x_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i \varphi_0(x_i) \varphi_m(x_i) & \sum_i \varphi_1(x_i) \varphi_m(x_i) & \dots & \sum_i \varphi_m^2(x_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i y_i \varphi_0(x_i) \\ \sum_i y_i \varphi_1(x_i) \\ \dots \\ \sum_i y_i \varphi_m(x_i) \end{bmatrix}$$

Вибір системи функцій здійснюється з врахуванням наявності в експериментальних даних деяких тенденцій, наприклад, періодичність

експериментальних даних, або експоненціальний або логарифмічний характер їх зміни, властивості симетрії або наявність асимптотики.

Апроксимація ортогональними поліномами

Розглянемо спочатку поняття ортогональності та ортогональних функцій або системи функцій.

Функції $\varphi(x)$ та $f(x)$ називаються **ортогональними** на заданій множині точок $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$, якщо сума попарних добутків цих функцій дорівнює 0.

$$\sum_{i=0}^m \varphi(x_i) \cdot f(x_i) = 0 \quad (2.21)$$

Система функцій $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)\}$ називається **ортогональною** на заданій множині точок $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$, якщо сума попарних добутків цих функцій дорівнює нулю, виключаючи добуток функції самої на себе:

$$\sum_{i=0, m \neq k}^n \varphi_k(x_i) \varphi_m(x_i) = 0 \quad (2.22)$$

Величина $\|\varphi\|_k = \sqrt{\sum_i \varphi_k^2(x_i)} > 0$ називається **нормою** системи функцій $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)\}$.

Якщо для заданої системи функцій $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)\}$ на заданій множині точок $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ норма дорівнює одиниці, то така система функцій називається **ортонормованою**.

Якщо система функцій $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)\}$ на заданій множині точок ортогональна і норма системи функції більше 0, то така система функції називається **лінійно незалежною**.

Розглянемо математичні моделі апроксимації табличних функцій ортогональним поліномом.

Постановка задачі. В результаті експерименту отримана система точок . Необхідно знайти таку аналітичну функцію виду (2.12), яка найкращим чином описує задану систему точок і забезпечує мінімум суми квадратів відхилень аналітичної функції

від експериментальної на заданій множині $x = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$. Тут $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)\}$ - задана система функцій, $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ - коефіцієнти поліному.

Для розв'язування цієї задачі використовують метод найменших квадратів (МНК), який дозволяє звести задачу до двох:

- пошук коефіцієнтів апроксимуючої функції $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$;
- пошук оптимальної кількості ортогональних функцій $\varphi_i(x)$.

Для пошуку коефіцієнтів апроксимації використовують критерій СКВ:

$$\sum_i (a_0 \varphi_0(x_i) + a_1 \varphi_1(x_i) + \dots + a_m \varphi_m(x_i) - y_i) \Rightarrow \min$$

за допомогою якого будують систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ виду:

$$\begin{cases} a_0 \sum_i \varphi_0^2(x_i) + a_1 \sum_i \varphi_0(x_i) \varphi_1(x_i) + \dots + a_m \sum_i \varphi_0(x_i) \varphi_m(x_i) = \sum_i \varphi_0(x_i) y_i \\ a_0 \sum_i \varphi_0(x_i) \varphi_1(x_i) + a_1 \sum_i \varphi_1^2(x_i) + \dots + a_m \sum_i \varphi_1(x_i) \varphi_m(x_i) = \sum_i \varphi_1(x_i) y_i \\ \vdots \\ a_0 \sum_i \varphi_0(x_i) \varphi_m(x_i) + a_1 \sum_i \varphi_1(x_i) \varphi_m(x_i) + \dots + a_m \sum_i \varphi_m^2(x_i) = \sum_i \varphi_m(x_i) y_i \end{cases}$$

Якщо в якості системи функцій $\varphi_k(x)$ вибрати ортогональну систему функцій, то матриця коефіцієнтів перетворюється в діагональну матрицю, тобто в матрицю, в якій всі елементи дорівнюють 0, відповідно умові ортогональності (2.22), крім діагональних елементів (для яких виконується умова $k = m$). В цьому випадку в системі лінійних алгебраїчних рівнянь кожне рівняння системи має тільки один невідомий коефіцієнт, тому для знаходження коефіцієнтів апроксимуючого поліному не треба розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь, а достатньо знайти їх за формулою:

(2.23)

Якщо умова ортогональності задовольняє умовам експерименту, то

потрібно вибрати апроксимуючий ортогональний поліном або з таблиці 2.1 або з довідників спеціальних функцій.

Пошук *оптимальної* кількості m функцій $\varphi_k(x)$ не потребує повторного обчислення коефіцієнтів поліному, тобто кожний новий коефіцієнт залежить тільки від заново вибраної функції $\varphi_k(x)$. Ця властивість є перевагою метода апроксимації табличної функції ортогональними поліномами, тому що в методі апроксимації табличної функції степеневими поліномами при пошуку оптимального степеня поліному потрібно обчислення всіх коефіцієнтів a_k заново при кожному новому значенні m .

В порівнянні з апроксимацією табличних функцій степеневими функціями - ортогональні поліноми спрощують задачу апроксимації, зменшують кількість обчислювальних операцій і дозволяють визначити коефіцієнти апроксимуючої функції без розв'язування СЛАР методом Гауса.

Рекурентні формули для обчислення найбільш поширених в обчислювальних методах ортогональних поліномів представлені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Рекурентні формули для обчислення ортогональних поліномів

Поліном	Формула
Чебишева $T_0(x) = 1$	$T_1(x) = x, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 1, 2, \dots$
Ерміта $H_0(x) = 1$	$H_1(x) = 2x, H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - nH_{n-1}(x), n = 1, 2, \dots$
Лежандра $P_0(x) = 1$	$P_1(x) = x$ $P_{n+1}(x) = \frac{[(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)]}{(n+1)}, n = 1, 2, \dots$
Ляггера $L_0(x) = 1$	$L_1(x) = 1 - x$ $L_{n+1}(x) = \frac{[(2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)]}{(n+1)}, n = 1, 2, \dots$

Розділ 3 Чисельне диференціювання та інтегрування

3.1 Чисельне диференціювання

Нехай є функція $f(x)$ яку необхідно продиференціювати кілька разів і знайти цю похідну в деякій точці.

Якщо заданий явний вид функції, то вираз для похідної часто виявляється достатньо складним і бажано його замінити простішим. Якщо ж функція задана тільки в деяких точках (табличний), то отримати явний вид її похідних взагалі неможливо. У цих ситуаціях виникає необхідність наближеного (чисельного) диференціювання.

Ідея чисельного диференціювання полягає в тому, що функція замінюється інтерполяційним поліномом (Лагранжа, Ньютона) і похідна функції наближено замінюється відповідною похідною інтерполяційного многочлена.

$$f^{(m)}(x) \approx L_n^{(m)}(x),$$
$$f^{(m)}(x) \approx l_n^{(m)}(x), 0 \leq m \leq n.$$

Розглянемо прості формули чисельного диференціювання. Припустимо, що функція задана у рівновіддалених вузлах

$$x_i = x_0 + ih, h > 0, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Її значення і значення похідних у вузлах позначимо:

$$f(x_i) = f_i, \quad f'(x_i) = f'_i, \quad f''(x_i) = f''_i.$$

Нехай функція задана у двох точках x_0 і $x_1 = x_0 + h$, та її значення f_0, f_1 . Побудуємо інтерполяційний многочлен першого степеня

Похідна дорівнює

Похідну функції $f(x)$ у точці наближено замінюємо похідною інтерполяційного многочлена

$$f'_0(x) \approx \frac{f_1 - f_0}{h}. \quad (3.1)$$

Величина $\frac{f_1 - f_0}{h}$ називається *першою різницевою похідною*. Нехай $f(x)$ задана у трьох точках $x_0, x_1 = x_0 + h, x_{-1} = x_0 - h$. Інтерполяційний многочлен Ньютона другого степеня має вигляд:

$$l_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_{-1}).$$

Беремо похідну

$$l'_2(x) = f(x_0; x_1) + (2x - x_0 - x_1)f(x_0; x_1; x_{-1}).$$

у точці x_0 , яка дорівнює

$$l'_2(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + (x_0 - x_1) \times \left[\frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_{-1})} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_{-1})} + \frac{f_{-1}}{(x_{-1} - x_0)(x_{-1} - x_1)} \right] = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}.$$

Отримуємо наближену формулу

$$f'_0 \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}. \quad (3.2)$$

Величина $\frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$ називається *центральною різницевою похідною*. Нарешті, якщо розглянути другу похідну

отримаємо наближену формулу:

$$f_0'' \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}. \quad (3.3)$$

Величина $\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$ називається *другою різницевою похідною*.

Формули (3.1 - 3.3) називаються *формулами чисельного диференціювання*.

Припускаючи функцію f такою, що безперервно диференціюється достатнє число разів, отримаємо похибки наближених формул (3.1 - 3.3).

Сформулюємо наступну лему.

Лема 1. Нехай $f \in C[a, b]$, $\xi_i \in [a, b]$ - довільні точки, $i = \overline{1, n}$. Тоді

існує така точка $\xi \in [a, b]$, що
$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n} = f(\xi).$$

Похибки формул чисельного диференціювання дає наступна лема.

Лема 2. Припустимо, що $f \in C_2[x_0, x_1]$. Тоді існує така точка ξ , що

$$f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad x_0 < \xi < x_1. \quad (3.4)$$

Якщо $f \in C_3[x_{-1}, x_1]$, то існує така точка ξ , що

$$f' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad x_{-1} < \xi < x_1. \quad (3.5)$$

Коли $f \in C_4[x_{-1}, x_1]$, то існує ξ така, що

$$f_0'' = \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad x_{-1} < \xi < x_1. \quad (3.6)$$

Формули (3.4 - 3.6) називають *формулами чисельного диференціювання із залишковими членами*.

Похибки формул (3.1 - 3.3) оцінюються за допомогою наступних нерівностей, які витікають із співвідношень (3.4 - 3.6):

$$\begin{aligned}
\left| f'_0 - \frac{f_1 - f_0}{h} \right| &\leq \frac{h}{2} \max_{[x_0, x_1]} |f''(x)|, \\
\left| f'_0 - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \right| &\leq \frac{h^2}{6} \max_{[x_{-1}, x_1]} |f'''(x)|, \\
\left| f''_0 - \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} \right| &\leq \frac{h^2}{12} \max_{[x_{-1}, x_1]} |f^{(4)}(x)|.
\end{aligned}
\tag{3.7}$$

Говорять, що похибка формули (3.1) має *перший порядок відносно h* , а похибка формул (3.2) і (3.3) має *другий порядок відносно h* . Також говорять, що формула чисельного диференціювання (3.1) *першого порядку точності* (відносно h), а формули (3.2) і (3.3) мають *другий порядок точності*.

Вказаним способом можна отримувати формули чисельного диференціювання для більш старших похідних і для більшої кількості вузлів інтерполяції.

Вибір оптимального кроку. Допустимо, що межа абсолютної похибки при обчисленні функції f в кожній точці задовольняє нерівності

$$\Delta f_i \leq \bar{\Delta}.
\tag{3.8}$$

Нехай в окрузі точки x_0 похідні, через які подаються кінцеві члени в формулах (3.5) - (3.6), неперервні і задовольняють нерівностям:

$$|f'''(x)| \leq \bar{M}_3, \quad |f^{(4)}(x)| \leq \bar{M}_4,
\tag{3.9}$$

де \bar{M}_3, \bar{M}_4 - деякі числа. Тоді повна похибка формул (3.2) - (3.3) (без урахування похибки заокруглень) відповідно до (3.5), (3.6), (3.8), (3.9) не перевищує відповідно величин:

$$\tag{3.10}$$

Мінімізація по h цих величин приводить до наступних значень h

$$h_1 = \left(\frac{3\Delta}{M_3}\right)^{1/3}, h_2 = 2\left(\frac{3\Delta}{M_4}\right)^{1/4}. \quad (3.11)$$

При цьому

$$\varepsilon_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{\overline{M_3}\Delta^{-2}}{3}\right)^{1/3}, \quad \varepsilon_2 = 2\left(\frac{\overline{M_4}\Delta}{3}\right)^{1/2}. \quad (3.12)$$

Якщо при вибраному значенні h з формул (3.2) - (3.3) відрізок $[x_{-1}, x_1]$ не виходить за межі околиці точки x_0 , в якій виконується відповідна нерівність (3.9), то знайдене h є **оптимальним** і повна похибка чисельного диференціювання оцінюється відповідною величиною (3.12).

3.2 Таблиця основних інтегралів

Щоб успішно застосовувати інтегральне числення під час розв'язування задач, необхідно, насамперед, оволодіти технікою знаходження невизначених інтегралів від елементарних функцій. Одним з основних моментів успішного оволодіння технікою інтегрування елементарних функцій є досконале знання таблиці основних інтегралів. Ця таблиця складена за таблицею похідних з використанням властивості інваріантності формули інтегрування. Справедливість формул таблиці можна перевірити диференціюванням.

Нехай $u = u(x)$ – довільна функція, що на проміжку X має неперервну похідну $u'(x)$. Тоді на цьому проміжку справедливі такі формули:

Таблиця 3.1

Основні інтеграли	
	$\int 0 \cdot du = C$
	або
	при

$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C, \text{ де } \cos u \neq 0$
$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + C, \text{ де } \sin u \neq 0$
$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctgu} + C, \text{ або } \int \frac{du}{1+u^2} = -\operatorname{arctgu} + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsin} u + C, \text{ або } \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\operatorname{arccos} u + C$
$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, \text{ або } \int \frac{du}{u^2+a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0)$
$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C, \text{ або } \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\operatorname{arccos} \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0)$ інтервалі $u \in (-a, a)$
$\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C, \text{ де } \cos u \neq 0$
$\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C, \text{ де } \sin u \neq 0$
$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln u + \sqrt{u^2 + a^2} + C, \text{ якщо під коренем знаходиться } u^2 - a^2, \text{ то } u > a .$

Продовження таблиці 3.1

$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C \quad (a \neq 0, u \neq \pm a)$
$\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$

Ця таблиця має такий вигляд і у випадку, якщо $u=x$, тобто u є незалежною змінною інтегрування.

Зупинимося детальніше на деяких формулах.

За формулою маємо

. Функція

визначена і

неперервна $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Якщо $x > 0$, то однією з первісних є $F(x) = \ln x$, оскільки $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Отже, для $x > 0$ $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$.

Якщо $x < 0$, то однією з первісних для $f(x) = \frac{1}{x}$ є $F(x) = \ln(-x)$, оскільки $[(\ln(-x))]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Отже, для $x < 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$.

Об'єднуючи ці два випадки, одержуємо формулу

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + C & \text{при } x > 0, \\ \ln(-x) + C & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

або

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

За формулою з п.13 маємо $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$. Щоб переконатися у справедливості цієї формули, знайдемо похідну від правої частини

$$\left(\arcsin \frac{x}{a} + C \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} + 0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

За формулою з п.17 маємо

$$\int \frac{du}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0), \quad (x \neq \pm a)$$

Доведемо її справедливість. Для цього перетворимо підінтегральну функцію

Оскільки

$$dx = d(x-a) = d(x+a),$$

маємо

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right) dx = \frac{1}{2a} \left[\int \frac{d(x - a)}{x - a} - \int \frac{d(x + a)}{x + a} \right] =$$
$$= \frac{1}{2a} (\ln|x - a| - \ln|x + a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C.$$

*Інтеграл*и називаються *табличними*, за їх допомогою можна знаходити й інші інтеграли, і мета існуючих методів інтегрування полягає в тому, щоб звести шуканий інтеграл до табличного.

3.3 Основні методи інтегрування

Інтегрувати функції значно складніше, ніж диференціювати. При диференціюванні функції безпосередньо застосовуються основні формули диференціювання. При інтегруванні функцій безпосередньо застосувати основні формули можливо лише в окремих випадках.

Як правило, підінтегральну функцію доводиться перетворювати для зведення інтеграла до табличного.

Розглянемо зараз основні методи інтегрування, які спрощують зведення підінтегральної функції до такого вигляду, що дає змогу застосувати безпосереднє інтегрування, тобто обчислювати інтеграл за допомогою таблиці інтегралів і основних властивостей невизначених інтегралів.

Метод розкладання на суму

Цей метод ґрунтується на розкладанні підінтегральної функції в лінійну комбінацію більш простих функцій і застосування властивості лінійності інтеграла:

$$\int \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int f_i(x) dx \quad \left(\sum_{i=1}^n |a_i| > 0 \right)$$

Приклад 1. Знайти інтеграл

Застосовуючи властивість лінійності невизначеного інтеграла, маємо

Використовуючи формули основних інтегралів, знаходимо

$$3 \int \sin x dx = 3(-\cos x + C_1) = -3 \cos x + 3C_1 ;$$

$$-5 \int dx = -5(x + C_2) = -5x - 5C_2 ;$$

$$4 \int x^3 dx = 4 \left(\frac{x^{3+1}}{3+1} + C_3 \right) = x^4 + 4C_3 ;$$

$$- \int \frac{dx}{x} = -(\ln|x| + C_4) ;$$

$$6 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 6(\arcsin x + C_5) = 6 \arcsin x + 6C_5$$

Таким чином,

$$I = -3 \cos x - 5x + x^4 - \ln|x| + 6 \arcsin x + (3C_1 - 5C_2 + 4C_3 - C_4 + 6C_5)$$

Всі довільні сталі підсумовуємо, результат позначаємо однією літерою, тому $C = 3C_1 - 5C_2 + 4C_3 - C_4 + 6C_5$ і остаточно отримуємо

$$\int \left(3 \sin x - 5 + 4x^3 - \frac{1}{x} + \frac{6}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = -3 \cos x - 5x + x^4 - \ln|x| + C$$

У правильності отриманого результату легко переконатись диференціюванням.

Метод підстановки або заміни змінної інтегрування

У багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дозволяє звести знаходження шуканого інтеграла до табличного, тобто перейти до безпосереднього інтегрування. Такий метод називається методом підстановки, або заміни змінної.

Теорема (про інтегрування за допомогою підстановки). Нехай $F(x)$ первісна функції $f(x)$ на проміжку X , тобто

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \forall x \in X,$$

а функція $x=\varphi(t)$ визначена і диференційована на проміжку T , множиною значень якої є проміжок X . Тоді справджується рівність

Нехай інтеграл не є табличним. Тоді для його знаходження теорема застосовується одним з таких двох способів.

1. Припустимо, що від підінтегральної функції $f(x)$ можна

відокремити функцію $\varphi(x) = t$ таку, що підінтегральний вираз запишеться у вигляді

$$f(x)dx = (g(x))\varphi'(x)dx = g(t)dt$$

Тоді за теоремою маємо

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt$$

Якщо інтеграл у правій частині зводиться до табличного, то для нього можна записати первісну $G(t)$ або $G(\varphi(x))$ і тоді

$$\int f(x)dx = G(\varphi(x)) + C$$

При цьому може бути зручним формалізований запис:

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left. \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{array} \right| = \int g(t)dt = G(t) + C = G(\varphi(x)) + C$$

Або запис у формі введення функції під знак диференціала

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(\varphi(x))d\varphi(x) = G(\varphi(x)) + C$$

Тут диференційована функція $\varphi(x)$ є змінною інтегрування.

2. При знаходженні невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ користуються підстановкою $x=\psi(t)$, де функція $\psi(t)$ є диференційованою $\forall t \in T$, $\psi'(t) \neq 0$ $\forall t \in T$ і має обернену функцію $t=\psi^{-1}(x)$.

Таким чином, приходимо до попередньої підстановки.

При цьому формалізований запис буде таким:

Отже, при інтегруванні заміною змінної виконуються підстановки

двох видів: $t=\varphi(x)$ і $x=\psi(t)$. Підстановки треба підбирати так, щоб одержані після перетворень нові інтеграли зі змінною інтегрування t були табличними. І після їх знаходження від введеної змінної інтегрування t потрібно перейти до заданої змінної інтегрування x .

Приклад.

Знайти $I = \int e^{x^2} x dx$.

По-перше, можна застосувати підстановку $t = x^2$, звідки $dt = 2x dx$, $x dx = \frac{1}{2} dt$.

Підставимо в інтеграл і матимемо

$$I = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C.$$

Повернемося до попередньої змінної x

$$I = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

По-друге, можна ввести функцію під знак диференціала, тобто записати

$$x dx = \frac{1}{2} dx^2.$$

Тоді на підставі властивості інваріантності маємо

$$I = \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Метод інтегрування частинами

Цей метод базується на використанні формули диференціювання добутку двох функцій.

Теорема (про формулу інтегрування частинами). Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ такі, що $\forall x \in X$ існують $u'(x)$ і $v'(x)$. Крім того, функція $u'(x)v(x)$ має первісну на X , тобто існує $\int v(x)u'(x)dx$. Тоді функція $u(x)v'(x)$ також має первісну на X і справджується формула

$$\forall x \in X.$$

Первісною функції $u(x)v'(x)$ на проміжку X є функція $u(x)v(x)$. Функція $u'(x)v(x)$ має первісну за умовою теореми. Отже, і функція $u(x)v'(x)$ як різниця інтегрованих функцій має первісну. Інтегруючи

Обидві частини цієї тотожності, дістаємо потрібну формулу. Оскільки $v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$, то її можна переписати у вигляді

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Ця формула і називається формулою інтегрування частинами невизначеного інтеграла.

Назва інтегрування частинами пояснюється тим, що формула не дає остаточного результату, а лише зводить задачу відшукування інтеграла $\int u dv$ до задачі відшукування іншого інтеграла $\int v du$, яка при вдалому виборі u і dv має виявитись простішою.

Якщо u і dv вибрані невдало, то замість спрощення задача ускладнюється. Для знаходження функції v за диференціалом dv можна брати будь-яку довільну сталу, оскільки в остаточний результат вона не входить. Справді

$$\begin{aligned} \int u dv &= u(v+c) - \int (v+c) du = uv + cu - \int v du - c \int du = \\ &= uv - \int v du + cu - cu = uv - \int v du. \end{aligned}$$

Щоб не проводити зайвих обчислень, можна завжди покласти $c=0$.

У деяких випадках формула інтегрування частинами є тільки допоміжною при відшуванні інтеграла, вона приводить до алгебраїчного рівняння відносно шуканого інтеграла.

Формулу інтегрування частинами інколи доводиться застосовувати декілька разів.

Приклад.

$$I = \int (x+1) \sin x dx$$

Введемо позначення $u = x+1$, $dv = \sin x dx$. Тоді $I = uv - \int v du$. Знайдемо u і v , які містяться в правій частині. З рівності $dv = \sin x dx$

знаходимо: $v = -\cos x$, а $du = dx$.

Отже,

Нехай тепер $u = \sin x$, $du = x dx$. Звідси

Отже,

$$I = \frac{1}{2} x^2 \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x dx$$

У правій частині дістали невизначений інтеграл, який є складнішим, ніж заданий.

Можна вказати на деякі типи інтегралів, які зручно інтегрувати частинами.

1. Інтеграли виду $\int P(x)e^{ax} dx$, $\int P(x)\sin bxdx$, $\int P(x)\cos bxdx$, де $P(x)$ – многочлен n -го степеня від x , $a \neq 0$, $b \neq 0$ – дійсні числа. У цих інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$. Після застосування n разів формули інтегрування частинами ці інтеграли зводяться відповідно до інтегралів $\int e^{ax} dx$, $\int \sin bxdx$, $\int \cos bxdx$ як у прикладі.

2. Інтеграли виду $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$, $\int P(x)\text{arctg} x dx$, де $P(x)$ – многочлен n -го степеня від x . Тут за u слід брати множники $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\text{arctg} x$.

3. Інтеграли виду $\int e^{ax} \sin bxdx$, $\int e^{ax} \cos bxdx$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ – дійсні числа.

Розділ 4 Власні значення та власні вектори матриці

4.1 Знаходження власних векторів і власних значень матриць

Якщо A — квадратна матриця n -го порядку і $Ax = \lambda x$ при $x \neq 0$, то число λ називається **власним значенням** матриці, а ненульовий вектор x — відповідним йому **власним вектором**. Перепишемо задачу в такому вигляді

$$(A - \lambda E)x = 0, \quad x \neq 0. \quad (4.1)$$

Для існування нетривіального розв'язку задачі (4.1) має виконуватися умова

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (4.2)$$

Цей визначник являє собою многочлен n -ї степені від λ . Його називають **характеристичним многочленом**. Існує n власних значень - коренів цього многочлена, серед яких можуть бути однакові (кратні).

Якщо знайдено деяке власне значення, то, при підстановці його в однорідну систему (4.1), можна визначити відповідний власний вектор. Будемо нормувати власні вектори. Нормуванням (на одиницю) вектора x називають множення його на $\|x\|^{-1}$. Нормований вектор має одиничну довжину. Тоді кожному простому (не кратному) власному значенню відповідає один (з точністю до напрямку) власний вектор, а сукупність всіх власних векторів, що відповідають сукупності простих власних значень - лінійно-незалежна. Таким чином, якщо всі власні значення матриці прості, то вона має n лінійно-незалежних власних векторів, які утворюють **базис простору**.

Кратному власному значенню кратності P може відповідати від 1 до P лінійно-незалежних власних векторів. Наприклад, розглянемо такі матриці четвертого порядку:

$$(4.3)$$

В кожній з них характеристичне рівняння приймає вигляд $\det(A - \lambda E) = (a - \lambda)^4 = 0$, а отже, власне значення $\lambda = a$ і має кратність $p=4$. Проте в першій матриці є чотири лінійно-незалежних власних вектора

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (4.4)$$

У другій матриці є тільки один власний вектор e_1 . Другу матрицю називають **простою жордановою** (або класичною) **підматрицею**.

Третя матриця має так звану **канонічну жорданову форму** (по діагоналі стоять або числа, або жорданові підматриці, а інші елементи дорівнюють нулю).

Таким чином, якщо серед власних значень матриці є кратні, то її власні вектори не завжди утворюють базис. Однак і в цьому випадку власні вектори, що відповідають різним власним значенням, являються лінійно-незалежними.

При розв'язуванні теоретичних і практичних задач часто виникає потреба визначити власні значення даної матриці A , тобто обчислити корені її характеристичного рівняння (4.2), а також знайти відповідні власні вектори матриці A . Друга задача є простішою, оскільки якщо корені характеристичного рівняння відомі, то знаходження власних векторів зводиться до відшукування ненульових розв'язків деяких однорідних лінійних систем. Тому, в першу чергу, будемо займатися першою задачею - відшукуванням коренів характеристичного рівняння (4.2).

Тут в основному використовують два прийоми:

1) розгортання характеристичного визначника в поліном n -го степеня

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

з подальшим розв'язком рівняння $D(\lambda) = 0$ одним з відомих наближених способів.

Розгортання характеристичного визначника.

Як відомо, характеристичним визначником матриці називається визначник вигляду

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Прирівнюючи цей визначник до нуля, одержуємо характеристичне рівняння

$$D(\lambda) = 0.$$

Якщо потрібно знайти всі корені характеристичного рівняння, то доцільно заздалегідь обчислити визначник.

Розгортаючи визначник, одержуємо поліном n -го степеня

$$D(\lambda) = (-1)^n [\lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n], \quad (4.5)$$

де $\sigma_1 = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha\alpha}$ - є сума усіх діагональних мінорів першого порядку матриці A ;

$\sigma_2 = \sum_{\alpha < \beta} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix}$ - є сума всього діагонального мінору другого порядку матриці A ;

$\sigma_3 = \sum_{\alpha < \beta < \gamma} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} & a_{\alpha\gamma} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} & a_{\beta\gamma} \\ a_{\gamma\alpha} & a_{\gamma\beta} & a_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}$ - сума всіх діагональних мінорів третього порядку матриці A і т.д. Нарешті

Легко переконатися, що число діагональних мінорів n -го порядку матриці A дорівнює

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad k=1,2,\dots,n$$

Звідси одержуємо, що безпосереднє обчислення коефіцієнтів характеристичного полінома еквівалентно обчисленню

$$C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n - 1$$

визначників різних порядків. Остання задача технічно важко здійснена для великих значень n . Тому створені спеціальні методи розгортання характеристичних визначників (методи А. Н. Крилова, А. М. Данилевського, Левер'є, метод невизначених коефіцієнтів, метод інтерполяції та ін.).

4.2 Метод розгортання А. М. Данилевського

Суть методу А. М. Данилевського полягає в приведенні характеристичного визначника до так званого нормального виду Фробеніуса

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & p_3 & \dots & p_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

Якщо нам вдалося записати визначника у формі (4.6), то, розкладаючи його по елементах першого рядка, матимемо:

або

$$(4.7)$$

Таким чином, розгортання характеристичного визначника, записаного в нормальній формі (4.6), не являє труднощів. Позначимо через

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad - \quad \text{вихідну матрицю, а через}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad - \quad \text{подібну їй матрицю Фробеніуса, тобто}$$

$$P = S^{-1}AS,$$

де S - особлива матриця.

Оскільки подібні матриці володіють однаковими характеристичними поліномами, то маємо:

$$\det(A - \lambda E) = \det(P - \lambda E) \quad (4.8)$$

Тому, для обґрунтування методу, досить показати яким чином, виходячи з матриці A , будується матриця P . Згідно методу Данилевського, перехід від матриці A до подібної їй матриці P здійснюється за допомогою $(n - 1)$ перетворення подібності, що послідовно перетворюють рядки матриці A , починаючи з останньої, у відповідні рядки матриці P .

Покажемо початок процесу. Нам необхідно рядок

$$a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ a_{n,n-1} \ a_{nn}$$

перевести в рядок $0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0$. Припускаючи, що $a_{n,n-1} \neq 0$, розділимо всі елементи $(n - 1)$ -го стовпця матриці A на $a_{n,n-1}$. Тоді її n -й рядок прийме вигляд

$$a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ 1 \ a_{nn}.$$

Потім віднімемо n -й стовпець перетвореної матриці, помножений відповідно на числа $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$, зі всієї решти її стовпців.

В результаті одержимо матрицю, останній рядок якої має бажаний вигляд $0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0$. Вказані операції є елементарними перетвореннями, що

здійснюються над стовпцями матриці A . Виконавши ці ж перетворення над одиничною матрицею, одержимо матрицю

$$M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

де

$$m_{n-1,i} = -\frac{a_{ni}}{a_{n,n-1}}, \quad i \neq n-1 \quad (4.9)$$

і

$$m_{n-1,n-1} = \frac{1}{a_{n,n-1}}. \quad (4.10)$$

Звідси робимо висновок, що проведені операції рівносильні множенню справа матриці M_{n-1} на матрицю A , тобто після вказаних перетворень одержимо матрицю

$$AM_{n-1} = B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи правило множення матриць, знаходимо, що елементи матриці B обчислюються за наступними формулами:

Проте побудована матриця не буде подібна матриці A . Для того, щоб мати перетворення подібності, потрібно обернути матрицю

$(M_{n-1})^{-1}$ зліва помножити на матрицю B :

$$(M_{n-1})^{-1}AM_{n-1} = (M_{n-1})^{-1}B$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що обернена матриця $(M_{n-1})^{-1}$ має вигляд

$$(M_{n-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Нехай

$$(M_{n-1})^{-1}AM_{n-1} = C$$

Отже

$$C = (M_{n-1})^{-1}B$$

Оскільки множення зліва матриці $(M_{n-1})^{-1}$ на матрицю B не змінює перетвореного рядка останньої, то матриця C має вигляд

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \dots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Таким чином, множення на матрицю B змінює лише $(n-1)$ -й рядок матриці B . Одержана матриця C подібна матриці A і має один зведений рядок. Цим закінчується перший етап процесу.

Далі, якщо $c_{n-1,n-2} \neq 0$, то над матрицею C можна повторити аналогічні операції, узявши за основу $(n-2)$ -й її рядок. В результаті одержимо матрицю

$$D = (M_{n-2})^{-1} C M_{n-2}$$

з двома зведеними рядками. Над останньою матрицею проробляємо ті ж операції. Продовжуючи цей процес одержимо матрицю Фробеніуса

$$P = (M_1)^{-1} \dots (M_{n-2})^{-1} (M_{n-1})^{-1} A M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1$$

якщо всі $n-1$ проміжних перетворень можливі. Весь процес може бути оформлений в зручну обчислювальну схему, складання якої покажемо на наступному прикладі.

Приклад. Привести до вигляду Фробеніуса матрицю

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Розв'язання.

Обчислення розташовуємо в таблицю.

Номер рядка	M^{-1}	Рядки матриці				Σ	Σ'
		1	2	3	4		
1		1	2	3	4	10	
2		2	1	2	3	8	
3		3	2	1	2	8	
4		4	3	2	1	10	
I	$M_3^{-1} M_3$	-2	-1,5	0,5-1	-0,5	-5	
5	4	-5	-2,5	1,5	2,5	-3,5	-5
6	3	2	-2	1	2	-1	-2
7	2	1	0,5	0,5	1,5	3,5	3
8	1	0	0	1	0	1	0
7'		-24	-15	11	19	-9	
II		-1,600	-0,067	0,733	1,267	-0,6	
			-1			00	
9	-24	-1	0,167	-0,333	-0,667	-1,8	-2
						33	
10	-15	1,2	0,133	-0,467	-0,533	0,33	0,2
						3	
11	11	0	1	0	0	1	0
12	19	0	0	1	0	1	1
10'		6	5	34	24	69	

III	$M_1^{-1} M_1$	0,167-1	-0,833	-5,667	-4,000	-11,500	
13	6	-0,167	1	5,333	3,333	9,50	9,66
14	5	1	0	0	0	0	7
15	34	0	1	0	0	1	0
16	24	0	0	1	0	1	1
13'		4	40	56	20	1	1
						120	

У рядках 1-4 таблиці розміщуємо елементи $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$ даної

$$a_{i5} = \sum_{j=1}^4 a_{ij} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (\Sigma).$$

матриці і контрольні суми

Відзначаємо

елемент $a_{43} = 2$, що належить третьому стовпцю (відмічений стовпець). У

рядку 1 записуємо елементи третього рядка матриці $M_{n-1} = M_3$:

$$m_{31} = -\frac{a_{41}}{a_{42}} = -\frac{4}{2} = -2;$$

$$m_{32} = -\frac{a_{42}}{a_{43}} = -\frac{3}{2} = -1,5;$$

$$m_{33} = \frac{1}{a_{43}} = \frac{1}{2} = 0,5;$$

$$m_{34} = -\frac{a_{44}}{a_{43}} = -\frac{1}{2} = -0,5.$$

Сюди ж (рядок 1 таблиці) поміщаємо елемент

$$m_{35} = -\frac{a_{45}}{a_{43}} = -\frac{10}{2} = -5,$$

що одержується аналогічним прийомом з контрольного стовпця Σ . Число -5 повинно співпасти з сумою елементів рядка I, що не входять в контрольний стовпець (після заміни елемента m_{33} на -1). Для зручності число -1 записуємо поряд з елементом m_{33} , відокремлюючи від останнього межею.

У рядках 5-8 в графі M^{-1} виписуємо третій рядок матриці M^{-1} , яка співпадає з четвертим рядком початкової матриці A. У рядках 5-8 у відповідних стовпцях виписуємо елементи матриці

$$B = AM_3,$$

що обчислюються за двочленними формулами для невідмічених стовпців і по одночленній формулі для відміченого стовпця. Наприклад, для першого стовпця маємо:

$$b_{11} = 1 + 3(-2) = -5;$$

$$b_{21} = 2 + 2(-2) = -2;$$

$$b_{31} = 3 + 1(-2) = 1;$$

$$b_{41} = 4 + 2(-2) = 0$$

і т.д.

Перетворені елементи третього (відміченого) стовпця отримуються за допомогою множення початкових елементів на $m_{33} = 0,5$. Наприклад,

$$b_{13} = 3 \cdot 0,5 = 1,5;$$

$$b_{23} = 2 \cdot 0,5 = 1;$$

$$b_{33} = 1 \cdot 0,5 = 0,5;$$

$$b_{43} = 2 \cdot 0,5 = 1;$$

Відмітимо, що останній рядок матриці В повинен мати вигляд
0 0 1 0.

Для контролю поповнюємо матрицю В перетвореними по аналогічних двочленних формулах з $m_{35} = -5$ відповідними елементами стовпця Σ . Наприклад,

$$b_{16} = 10 + 3 \cdot (-5) = -5;$$

$$b_{26} = 8 + 2 \cdot (-5) = -2;$$

$$b_{36} = 8 + 1 \cdot (-5) = 3;$$

$$b_{46} = 10 + 2 \cdot (-5) = 0.$$

Отримані результати записуємо в стовпці Σ' у відповідних рядках. Додавши до них елементи третього стовпця, одержимо контрольні суми

$$b_{i5} = \sum_{j=1}^4 b_{ij} \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

для рядків 5-8 (стовпець Σ).

Перетворення M_3^{-1} , що проведене над матрицею і, що дає матрицю $C = M_3^{-1}B$, змінює лише третій рядок матриці В, тобто сьомий рядок таблиці. Елементи цього перетвореного рядка 7' є сумами парних добутоків елементів стовпця , що знаходяться в рядках 5-8, на відповідні елементи кожного із стовпців матриці В. Наприклад

і т. д.

Такі ж перетворення проводимо над стовпцем Σ :

В результаті одержуємо матрицю С, що складається з рядків 5, 6, 7',

8 з контрольними сумами Σ , причому матриця C подібна матриці A і має один зведений рядок 8. Цим закінчується побудова першого подібного перетворення $C = M_3^{-1}AM_3$.

Далі, прийнявши матрицю C за вихідну і виділивши елемент $c_{32} = -15$ (другий стовпець), продовжуємо процес аналогічним чином. В результаті одержуємо матрицю $D = M_2^{-1}CM_2$, елементи якої розташовані в рядках 9, 10', 11, 12, що містить два зведені рядки. Нарешті, відправляючись від елементу $d_{21} = 6$ (перший стовпець) і перетворюючи матрицю D в подібну їй, одержуємо шукану матрицю Фробеніуса P , елементи якої записані в рядках 13', 14, 15, 16. На кожному етапі процесу контроль здійснюється за допомогою стовпців Σ і Σ' .

Таким чином, матриця Фробеніуса буде мати вигляд:

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 40 & 56 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Звідси характеристичний визначник, приведений до нормального виду Фробеніуса, запишеться так:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 40 & 56 & 20 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

або

$$D(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20.$$

Процес Данилевського відбувається без жодних ускладнень, якщо всі елементи, що виділяються, відмінні від нуля.

Припустимо, що при перетворенні матриці A в матрицю Фробеніуса P після декількох кроків пришли до матриці вигляду

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} & \dots & d_{1,n-1} & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} & \dots & d_{2,n-1} & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kk} & \dots & d_{k,n-1} & d_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

причому виявилось, що $d_{k,k-1} = 0$.

Тоді продовжувати перетворення по методу Данилевського не можна. Тут можливі два випадки.

1. Нехай якийсь елемент матриці D , що стоїть ліворуч нульового елемента $d_{k,k-1}$, відмінний від нуля, тобто $d_{k,l} \neq 0$, де $l > k-1$. Тоді цей елемент висуваємо на місце нульового елемента $d_{k,k-1}$, тобто переставляємо $(k-1)$ -й і k -й стовпці матриці D і одночасно переставляємо її $(k-1)$ -й і l -й рядки. Можна довести, що одержана нова матриця D' буде подібна колишній. До нової матриці застосовуємо метод Данилевського.

2. Нехай $d_{k,l} = 0$ ($l = 1, 2, \dots, k-1$), тоді D має вигляд

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ c_{k-1,1} & c_{k-1,2} & \dots & c_{k-1,k-1} & c_{k-1,k} & \dots & c_{k-1,n-1} & c_{k-1,n} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & c_{kk} & \dots & c_{k,n-1} & c_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & & & & & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} D_1 & L \\ \hline 0 & D_2 \end{array} \right].$$

У такому разі визначник $\det D$ розпадається на два визначники $\det D_1 \cdot \det D_2$.

При цьому матриця D_2 вже приведена до канонічної форми

Фробеніуса і тому $\det(D_2 - \lambda E)$ обчислюється відразу. Залишається застосувати метод Данилевського до матриці D_1 .

4.3 Обчислення власних векторів по методу Данилевського

Метод Данилевського дає можливість визначати власні вектори даної матриці A , якщо відомі її власні значення. Нехай λ — власне значення матриці A , а отже, і власне значення подібної їй матриці Фробеніуса P .

Знайдемо власний вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ матриці P , відповідний даному значенню λ : $Py = \lambda y$. Звідси $(P - \lambda E)y = 0$ або

$$\begin{bmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & p_3 & \dots & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = 0.$$

Перемножуючи матриці, одержимо систему для визначення координат y_1, y_2, \dots, y_n власного вектора y :

$$\left. \begin{aligned} (p_1 - \lambda)y_1 + p_2y_2 + \dots + p_ny_n &= 0, \\ y_1 - \lambda y_2 &= 0, \\ y_2 - \lambda y_3 &= 0, \\ \dots & \\ y_{n-1} - \lambda y_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Система (4.11) - однорідна. З точністю до коефіцієнта пропорційності розв'язки її можуть бути знайдені таким чином. Покладемо $y_n=1$. Тоді послідовно одержимо:

$$\left. \begin{aligned} y_{n-1} &= \lambda, \\ y_{n-2} &= \lambda^2, \\ \dots\dots\dots \\ y_1 &= \lambda^{n-1}. \end{aligned} \right\}$$

Таким чином, шуканий власний вектор є

$$y = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Позначимо тепер через x власний вектор матриці A , що відповідає значенню λ . Тоді маємо:

$$x = M_{n-1}M_{n-2} \dots M_2M_1y.$$

Перетворення M_1 , здійснене над y , дає:

$$M_1y = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n m_{1k}y_k \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n m_{1k}y_k \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, перетворення M_1 змінює лише першу координату вектора. Аналогічно перетворення M_2 змінить лише другу координату вектора M_1y і т.д. Повторивши цей процес $n-1$ разів, одержимо шуканий власний вектор x матриці A .

4.4 Метод розгортання А. Н. Крилова

Приведемо метод розгортання характеристичного визначника, що належить А. Н. Крилову і заснований на істотно іншій ідеї, ніж метод А. М. Данилевського.

Нехай

$$D(\lambda) \equiv \det(\lambda E - A) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n$$

- характеристичний поліном (з точністю до знаку) матриці A . Згідно тотожності Гамільтона-Келі, матриця A обертає в нуль свій характеристичний поліном; тому

$$A^n + p_1 A^{n-1} + \dots + p_n E = 0 \quad (4.12)$$

Візьмемо тепер довільний ненульовий вектор

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ \vdots \\ y_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Перемноживши обидві частини рівності (4.12) справа на $y^{(0)}$, одержимо:

$$A^n y^{(0)} + p_1 A^{n-1} y^{(0)} + \dots + p_n y^{(0)} = 0 \quad (4.13)$$

Покладемо:

$$A^k y^{(0)} = y^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.14)$$

Тоді рівність (4.13) набуває вигляду

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y^{(0)} = 0 \quad (4.15)$$

або

$$\begin{bmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \vdots & y_1^{(0)} \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \vdots & y_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \vdots & y_n^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \vdots \\ y_n^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

де

$$y^{(k)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ \vdots \\ y_n^{(k)} \end{bmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Отже, векторна рівність (4.15) еквівалентна системі рівнянь

$$p_1 y_j^{(n-1)} + p_2 y_j^{(n-2)} + \dots + p_n y_j^{(0)} = -y_j^{(n)} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (4.17)$$

з якої, можна визначити невідомі коефіцієнти p_1, p_2, \dots, p_n .

Оскільки на підставі формули (4.14)

$$y^{(k)} = Ay^{(k-1)} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

то координати $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}$ вектора $y^{(k)}$ послідовно обчислюються за формулами

$$\left. \begin{aligned}
 y_i^{(1)} &= \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i^{(0)}, \\
 y_i^{(2)} &= \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i^{(1)}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 y_i^{(n)} &= \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i^{(n-1)} \quad (i=1, 2, \dots, n).
 \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Таким чином, визначення коефіцієнтів p_j характеристичного полінома методом Крилова зводиться до розв'язання лінійної системи рівнянь (4.17), коефіцієнти якої обчислюються за формулами (4.18), причому координати початкового вектора

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_{1n}^{(0)} \end{bmatrix}$$

довільні. Якщо система (4.17) має єдиний розв'язок, то її корені p_1, p_2, \dots, p_n є коефіцієнтами характеристичного полінома. Цей розв'язок може бути знайдено, наприклад, методом Гауса. Якщо система (4.17) не має єдиного розв'язку, то завдання ускладнюється. В цьому випадку рекомендується змінити початковий вектор.

Приклад. Методом А. Н. Крилова знайти характеристичний поліном матриці

Розв'язання. Виберемо початковий вектор

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Користуючись формулами визначимо координати векторів

$$y^{(k)} = A^k y^{(0)} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Маємо:

$$y^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix};$$

$$y^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 22 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix};$$

$$y^{(3)} = Ay^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 22 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208 \\ 178 \\ 192 \\ 242 \end{bmatrix};$$

$$y^{(4)} = Ay^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 208 \\ 178 \\ 192 \\ 242 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2108 \\ 1704 \\ 1656 \\ 1992 \end{bmatrix}.$$

Складемо систему:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(3)} & y_1^{(2)} & y_1^{(1)} & y_1^{(0)} \\ y_2^{(3)} & y_2^{(2)} & y_2^{(1)} & y_2^{(0)} \\ y_3^{(3)} & y_3^{(2)} & y_3^{(1)} & y_3^{(0)} \\ y_4^{(3)} & y_4^{(2)} & y_4^{(1)} & y_4^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(4)} \\ y_2^{(4)} \\ y_3^{(4)} \\ y_4^{(4)} \end{bmatrix},$$

яка в нашому випадку має

ВИГЛЯД

$$\begin{bmatrix} 208 & 30 & 1 & 1 \\ 178 & 22 & 2 & 0 \\ 192 & 18 & 3 & 0 \\ 242 & 20 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2108 \\ 1704 \\ 1656 \\ 1992 \end{bmatrix}.$$

Звідси

$$\left. \begin{aligned} 208p_1 + 30p_2 + p_3 + p_4 &= -2108, \\ 178p_1 + 22p_2 + 2p_3 &= -1704, \\ 192p_1 + 18p_2 + 3p_3 &= -1656, \\ 242p_1 + 20p_2 + 4p_3 &= -1991. \end{aligned} \right\}$$

Розв'язавши цю систему, одержимо:

$$p_1 = -4; p_2 = -40; p_3 = -56; p_4 = -20.$$

Отже

$\det(\lambda E - A) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20$, що співпадає з результатом, знайденим по методу Данилевського.

4.5 Обчислення власних векторів по методу Крилова

Метод А. Н. Крилова дає можливість просто знайти відповідні власні вектори.

Для простоти обмежимося випадком, коли характеристичний поліном

$$D(\lambda) \equiv \det(\lambda E - A) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n$$

має різні корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Припустимо, що коефіцієнти полінома і його корені визначені. Потрібно знайти власні вектори $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$, що відповідають відповідно власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Нехай $y^{(0)}, y^{(1)} = Ay^{(0)}, \dots, y^{(n-1)} = A^{n-1}y^{(0)}$ - вектори, використані в методі Крилова для знаходження коефіцієнтів.

Розкладаючи вектор $y^{(0)}$ по власних векторах, матимемо:

де a_1, a_2, \dots, a_n - деякі числові коефіцієнти. Звідси, враховуючи, що

$$\begin{aligned}
 Ax^{(i)} &= \lambda_i x^{(i)}, \\
 A^2 x^{(i)} &= \lambda_i^2 x^{(i)}, \\
 &\dots\dots\dots (i=1, 2, \dots, n),
 \end{aligned}$$

тоді одержимо:

$$\begin{aligned}
 y^{(1)} &= c_1 \lambda_1 x^{(1)} + c_2 \lambda_2 x^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n x^{(n)}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 y^{(n-1)} &= c_1 \lambda_1^{n-1} x^{(1)} + c_2 \lambda_2^{n-1} x^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n^{n-1} x^{(n)}.
 \end{aligned}$$

Нехай

$$\varphi_i(\lambda) = \lambda^{n-1} + q_{1i} \lambda^{n-2} + \dots + q_{n-1,i},$$

$(i=1, 2, \dots, n)$ - довільна система поліномів. Складаючи лінійну комбінацію векторів $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y^{(0)}$ з коефіцієнтами $1, q_{1-i}, \dots, q_{n-1,i}$ знаходимо:

$$y^{(n-1)} + q_{1i} y^{(n-2)} + \dots + q_{n-1,i} y^{(0)} = c_1 \varphi_i(\lambda_1) x^{(1)} + c_2 \varphi_i(\lambda_2) x^{(2)} + \dots + c_n \varphi_i(\lambda_n) x^{(n)}$$

Якщо покласти

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

то очевидно, що

$$\varphi_i(\lambda_j) = 0 \quad \text{при}$$

i

Тоді отримаємо, що

Таким чином, якщо $c_i \neq 0$, то одержана лінійна комбінація векторів $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y^{(0)}$ дає власний вектор $x^{(i)}$ з точністю до числового множника.

Коефіцієнти $q_{j,i} (j=1,2,\dots,n-1)$ можуть бути легко визначені за схемою Горнера

$$\left. \begin{array}{l} q_{0i} = 1, \\ q_{ji} = \lambda_i q_{j-1,i} + p_j. \end{array} \right\}$$

Розділ 5 Розв'язання систем алгебраїчних рівнянь

Інженеру часто доводиться вирішувати алгебраїчні рівняння і системи рівнянь, що можуть являти собою самостійну задачу або частину більш складних задач. В обох випадках практична цінність чисельного методу в значній мірі визначається швидкістю і ефективністю отримання розв'язку. Розглянемо найбільш відомі чисельні методи і ефективні алгоритми розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

5.1 Основні поняття та визначення

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) називають систему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}, \quad (5.1)$$

де $x_i, (i = \overline{1, m})$ – невідомі; $b_i, (i = \overline{1, n})$ – вільні члени системи; $a_{ij}, (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m})$ – коефіцієнти системи.

В матричному вигляді рівняння (5.1) приймає наступний вигляд:

$$A \times \vec{X} = \vec{B},$$

де $\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ – вектор невідомих; $\vec{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ – вектор вільних

членів; $A = \begin{Bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{Bmatrix}$ – матриця коефіцієнтів СЛАР.

Розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь (5.1) називають вектор \vec{x} , координати якого x_i при підстановці у систему, що розв'язують, перетворюють кожне рівняння системи в тотожність.

Кількість невідомих m в системі називають *порядком* СЛАР.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають *сумісною*, якщо вона має хоча б один ненульовий розв'язок. В протилежному випадку СЛАР називають *несумісною*.

СЛАР називається *визначеною*, якщо вона має тільки один розв'язок (випадок, коли $m=n$). Систему називають *невизначеною*, якщо вона має

безліч розв'язків ($m \neq n$).

Система називається *виродженою*, якщо головний визначник системи дорівнює нулю. Система називається *невиродженою*, якщо головний визначник системи не дорівнює нулю.

Дві системи називаються *еквівалентними*, якщо ці системи сумісні, визначені і мають однаковий розв'язок.

СЛАР можна розв'язати на ЕОМ чисельними методами, якщо вона сумісна, визначена, не вироджена.

5.2 Класифікація методів розв'язання СЛАР

Для розв'язання СЛАР на ЕОМ традиційно використовують дві групи чисельних методів, що представлені на рисунку 5.1:

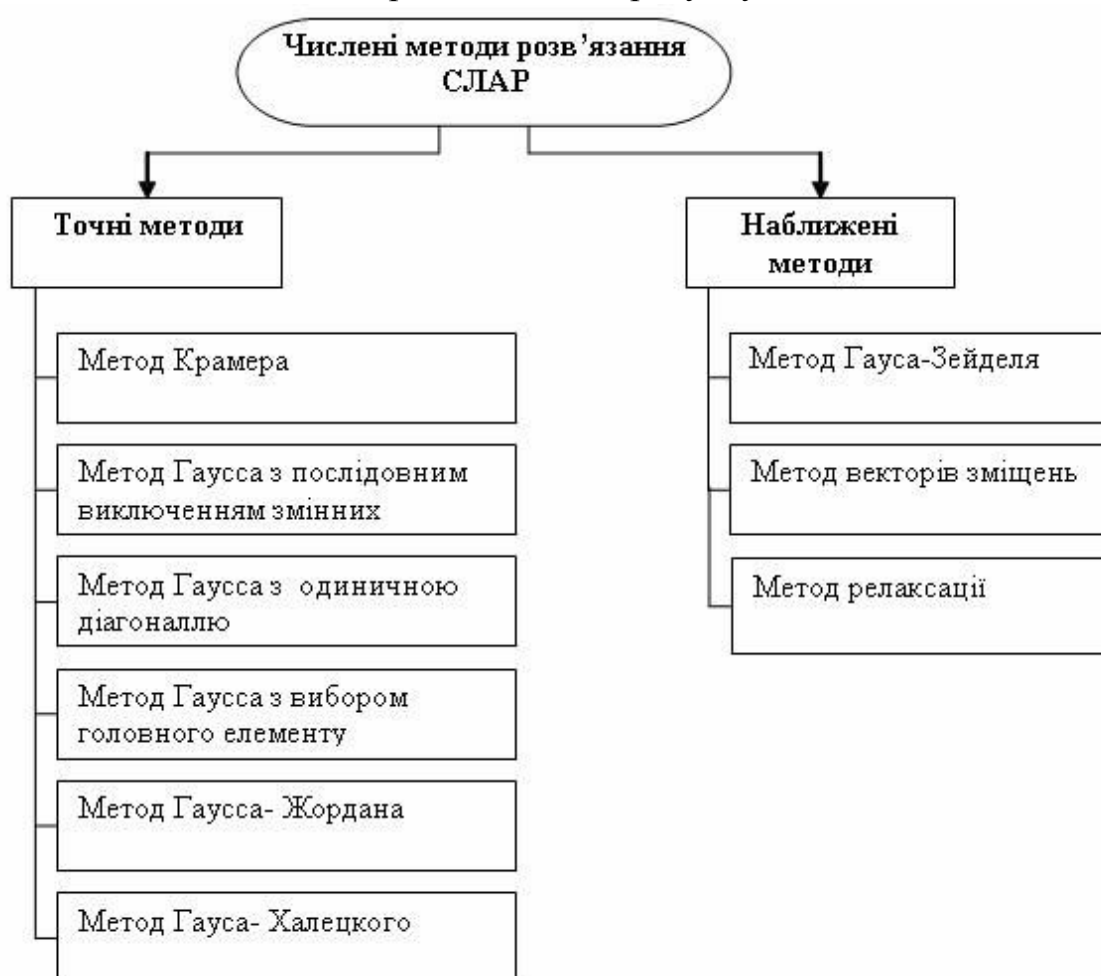


Рис. 5.1. – Класифікація чисельних методів

До точних методів відносять методи, які дозволяють отримати точний розв'язок системи (5.1) за відповідну кількість операцій перетворення без урахування похибок заокруглення.

До наближених методів відносять методи, які дозволяють отримати розв'язок системи (5.1) у вигляді границі послідовності векторів $\lim_{k \rightarrow \infty} \{\bar{X}^0, \bar{X}^1, \bar{X}^2, \dots, \bar{X}^n\}$, яка збігається до точного розв'язку системи, де:

$$\bar{X}^0 = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}, \quad \bar{X}^1 = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix}, \dots, \bar{X}^n = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

5.3 Особливості методів Гауса

Найбільш відомим з точних методів розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (5.1) є методи Гауса, суть яких полягає в тому, що система рівнянь, яка розв'язується, зводиться до еквівалентної системи з верхньою трикутною матрицею. Невідомі знаходяться послідовними підстановками, починаючи з останнього рівняння перетвореної системи. Алгоритми Гауса складаються із виконання однотипних операцій, які легко формалізуються. Однак, точність результату й витрачений на його отримання час у більшості випадків залежить від алгоритму формування трикутної матриці системи. У загальному випадку алгоритми Гауса складаються з двох етапів:

Прямий хід, в результаті якого СЛАР (5.1), що розв'язується, перетворюється в еквівалентну систему з верхньою трикутною матрицею коефіцієнтів виду:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ 0 \cdot x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (5.2)$$

Зворотний хід дозволяє визначити вектор розв'язку починаючи з останнього рівняння системи (5.2) шляхом підстановки координат вектора невідомих, отриманих на попередньому кроці.

Відомо декілька різних алгоритмів отримання еквівалентної системи з верхньою трикутною матрицею. Розглянемо найбільш відомі з них.

Метод Гауса з послідовним виключенням невідомих

Метод Гауса з послідовним виключенням невідомих (базовий метод)

засновано на алгоритмі, в основі якого лежить послідовне виключення невідомих вектора \bar{X} з усіх рівнянь, починаючи з $(i+1)$ -го, шляхом елементарних перетворень: перемноження обох частин рівняння на будь-яке число, крім нуля; додавання (віднімання) до обох частин одного рівняння відповідних частин другого рівняння, помножених на будь-яке число, крім нуля.

Суть алгоритму розглянемо на прикладі системи, яка складається з трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (5.3)$$

1) Перевіряємо, щоб принаймні один із коефіцієнтів a_{11}, a_{21}, a_{31} не дорівнював нулю. Якщо, наприклад, $a_{11} = 0$, тоді необхідно переставити рівняння так, щоб коефіцієнт при x_1 у першому рівнянні не дорівнював нулю.

2) Обчислюємо множник:

$$M_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}} \quad (5.4)$$

3) Перше рівняння системи (5.3) множиться на M_2 і віднімається від другого рівняння системи, отриманої після перестановки рівнянь, якщо вона була необхідною. Результат обчислення має вигляд:

$$(a_{21} - M_2 a_{11})x_1 + (a_{22} - M_2 a_{12})x_2 + (a_{23} - M_2 a_{13})x_3 = b_2 - M_2 b_1, \quad (5.5)$$

але

$$(5.6)$$

Тоді виключається із другого рівняння. Позначимо нові коефіцієнти:

$$\begin{aligned}
 a'_{22} &= a_{22} - M_2 a_{12} \\
 a'_{23} &= a_{23} - M_2 a_{13} \\
 b'_2 &= b_2 - M_2 b_1
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

Тоді друге рівняння системи (5.3) набуває вигляду:

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b_2 \tag{5.8}$$

Далі необхідно звільнитися від коефіцієнта a_{31} при x_1 в третьому рівнянні системи (5.3) за аналогічним алгоритмом.

4) Обчислюється множник для третього рівняння:

$$M_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}} \tag{5.9}$$

5) Перше рівняння системи (5.3) множиться на M_3 і віднімається від третього рівняння. Коефіцієнт при x_1 стає нулем, і третє рівняння набуває вигляду:

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b_3 \tag{5.10}$$

де

$$a'_{32} = a_{32} - M_3 a_{12} \tag{5.11}$$

$$a'_{33} = a_{33} - M_3 a_{13} \tag{5.12}$$

$$b'_3 = b_3 - M_3 b_1 \tag{5.13}$$

Перетворена таким чином система рівнянь (5.3) набуває вигляду:

$$\tag{5.14}$$

Ця система рівнянь еквівалентна початковій і має певні переваги, оскільки входить тільки до першого рівняння.

Тепер виключаємо з останнього рівняння. Якщо , а ,

тоді друге й третє рівняння переставляється так, щоб $a_{22} \neq 0$. Інакше система вироджена і має безліч розв'язків.

$$M_3'' = \frac{a_{32}}{a_{22}}.$$

7) Обчислюємо множник

8) Друге рівняння системи множиться на M_3'' і віднімається від 3-го рівняння. При цьому коефіцієнт біля x_2 стає рівним нулю. Тоді отримуємо:

$$a_{33}'' x_3 = b_3'' \quad (5.15)$$

Замінивши в системі (5.14) третє рівняння на (5.15), отримаємо систему рівнянь виду:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ 0 \cdot x_1 + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a''_{33}x_3 &= b''_3 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Таку систему називають **системою з трикутною матрицею коефіцієнтів**, що еквівалентна СЛАР (5.3). Процес знаходження такої системи називається **прямим ходом Гауса**. Знайти розв'язок такої системи просто: із 3-го рівняння знайти x_3 , підставити результат у друге і знайти x_2 , підставити x_2 і x_3 в 1-е рівняння системи (5.16) і знайти x_1 :

$$x_3 = \frac{b_3''}{a_{33}''}, \quad x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}x_3}{a'_{22}}, \quad x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}.$$

Процес знаходження вектора розв'язку системи (5.3) називають **зворотнім ходом метода Гауса**.

Метод Гауса за схемою Халецького

Алгоритм метода включає також прямий і зворотній хід. Кінцевою метою прямого ходу є отримання СЛАР, яка еквівалентна заданій, з верхньою трикутною матрицею коефіцієнтів. Для цього матрицю коефіцієнтів початкової системи рівнянь A розбивають на дві трикутні:

$$(5.17)$$

де матриця C – нижня трикутна матриця; D – верхня трикутна матриця з одиничною головною діагоналлю:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & d_{3n} \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Алгоритм визначення коефіцієнтів матриць C і D .

1) Обчислюється перший стовпець матриці C , перший рядок матриці D і y_1 за формулами:

$$\begin{aligned} c_{i1} &= a_{i1}, \quad i = \overline{1, n} \\ d_{11} &= 1, \quad d_{1i} = \frac{a_{1i}}{a_{11}}, \quad i = \overline{2, n} \\ y_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

2) Обчислюються елементи другого стовпця матриці C , елементи другого рядка матриці D та елемент y_2 :

$$\begin{aligned} c_{i2} &= a_{i2} - a_{i1}d_{12}, \quad i = \overline{2, n} \\ d_{21} &= \frac{a_{21} - c_{21}d_{11}}{a_{22}} \\ y_2 &= \frac{b_2 - c_{21}y_1}{a_{22}} \end{aligned} \quad (5.19)$$

3) Обчислюють елементи третього стовпця матриці C , елементи третього рядка матриці D та елемент :

$$\begin{aligned}
c_{i3} &= a_{i3} - (c_{i1}d_{31} - c_{i2}d_{23}), \quad \overline{i=2, n} \\
d_{31} &= \frac{a_{31} - (c_{31}d_{1i} + c_{32}d_{2i})}{c_{33}} \\
y_3 &= \frac{b_3 - (c_{31}y_1 + c_{32}y_2)}{c_{33}}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Загальний вигляд формул для обчислення c_{ki}, d_{ki}, y_i елементів матриць C, D і Y :

$$\begin{aligned}
d_{ii} &= 1, \quad d_{li} = \frac{a_{li}}{a_{11}}, \quad c_{il} = a_{il}, \quad y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad \overline{i=1, n} \\
c_{ki} &= a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} c_{kj}d_{ji}, \quad k = \overline{i, n}, \quad \overline{i=2, n} \\
d_{ik} &= \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}d_{jk}}{c_{ii}}, \quad k = \overline{i+1, n} \\
y_i &= \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}y_{ij}}{c_{ii}}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Метод Гауса з вибором головного елемента

Ідея цього методу виникла у зв'язку з тим, що коефіцієнти СЛАР є параметрами реальних інженерних систем та в більшості є наближеними значеннями тому, що отримані звичайно в результаті вимірювання або як статистичні дані. Для таких систем рівнянь при обчисленні масштабного

множника $M = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ можлива ситуація при визначені a_{kk} , що ділення наближеного числа a_{ik} на достатньо мале число a_{kk} веде до різкого збільшення похибки методу. Тому для того, щоб не збільшувати похибку результату, необхідно виконувати такі дії:

- 1) в системі (5.1) необхідно знайти з k -го стовпця найбільший за абсолютним значенням коефіцієнт a_{ik} ;
- 2) переставити k -те рівняння з рівнянням, у якому знаходиться цей максимальний коефіцієнт;
- 3) масштабний множник буде обчислюватись за формулою, де $M = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$

максимальний коефіцієнт, а тому похибка розв'язання СЛАР у результаті арифметичних операцій не збільшується.

Метод Гауса з одиничними коефіцієнтами

В цьому методі зроблена спроба зменшити недоліки перших двох методів пов'язаних з багаторазовим діленням одного наближеного числа на інше. Для цього перед введенням масштабного множника k -те рівняння системи ділиться один раз на діагональний елемент a_{kk} так, щоб коефіцієнт при $x_k = 1$, а масштабний множник M_i буде дорівнювати a_{kj} . Результатом прямого ходу є система, еквівалентна СЛАР (5.1), з одиничними коефіцієнтами на головній діагоналі виду:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

Дана система схожа на систему (5.2), яка отримується в результаті прямого ходу базового методу Гауса з послідовним вилученням невідомих і відрізняється від неї тільки діагональними коефіцієнтами. Для отримання такої системи необхідно використовувати алгоритм, який включає в себе наступні етапи:

1. Організація циклу по всім рівнянням від 1 до $(n-1)$ - $(k = 1, 2, \dots, n-1)$.
2. В кожному k -му стовпці визначається номер l -го рівняння з головним елементом (тобто номер l -го рівняння, в якому знаходиться коефіцієнт при x_n зі всіх рівнянь починаючи з k -го до n -го).
3. Якщо номер цього рівняння l не дорівнює k , тоді необхідно переставити місцями l -е рівняння з k -м.
4. Нормування k -го рівняння, тобто ділення всіх коефіцієнтів k -го рівняння на (головний елемент при x_k), включаючи b_k .
5. Перетворення всіх i -х рівнянь, починаючи з $k+1$ до n у відповідності з базовим алгоритмом Гауса з метою отримати еквівалентну систему з верхньою трикутною матрицею коефіцієнтів.
6. Кінець циклу по k .

Метод Гауса-Жордана

Особливістю метода Гауса-Жордана є перетворення системи (5.1) (прямий хід) до еквівалентної з одиничною матрицею коефіцієнтів виду:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_n = b_n \end{cases}, \quad (5.22)$$

тобто системи, яка містить тільки одиничну діагональ.

Для отримання такої системи в прямий хід алгоритму базового методу Гауса (з послідовним виключенням невідомих) додатково вводяться такі дії:

1. Організація циклу по k по всім рівнянням від 1 до $(n-1)$ - ($k=1,2,\dots,n-1$).
2. Процедура вибору головного елемента в кожному k -му стовпці при x_k ;
3. Процедура нормування k -го рівняння системи, тобто в k -му рівнянні кожен коефіцієнт a_{kj} розділити на a_{kk} , включаючи b_k , так, щоб коефіцієнт $a_{kk} = 1$.
4. Перетворення всіх рівнянь системи, починаючи з 1-го до n у відповідності з базовим алгоритмом Гауса з метою отримати еквівалентну систему з одиничною діагоналлю. В даному випадку для розрахунку коефіцієнтів a_{ij} використовуються ті самі формули, що і в базовому алгоритмі Гауса:

$$M = a_{ik}, \quad a_{ij} = a_{ij} - M \cdot a_{kj}, \quad b_i = b_i - M \cdot b_k,$$

але використовуються вони для всіх рівнянь з 1-го до n крім k -го, в якому остається коефіцієнт рівний одиниці.

5. Кінець циклу по k .

5.4. Наближені методи розв'язання СЛАР

До наближених методів відносяться методи, які дозволяють розв'язок системи отримати як границю послідовних k розв'язків системи (5.1) при виду:

$$\bar{x} = \lim \{ \bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^k \},$$

де \bar{x}^0 - вектор розв'язку 0-го наближення, \bar{x}^1 - вектор розв'язку 1-го наближення і т.д.

Для розв'язання СЛАР наближеними методами найбільшу цікавість представляють такі методи:

- метод послідовних наближень;
- метод Гауса-Зейделя;
- метод верхньої релаксації.

Розглянемо особливості загального підходу до розв'язання СЛАР наближеними методами.

Дано систему лінійних алгебраїчних рівнянь виду (5.2), розв'язання якої методами послідовних наближень необхідно виконати наступні кроки:

1) Кожне рівняння системи розділити на діагональний елемент a_{kk} , де $k=1,2,\dots,n$ (n - кількість рівнянь в системі), і перетворити кожне рівняння системи відносно координат вектора, індекс якого співпадає з номером рівняння:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right) \\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \left(\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n \right) \\ x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} - \left(\frac{a_{31}}{a_{33}} x_1 + \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2 + \dots + \frac{a_{3n}}{a_{33}} x_n \right) \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \left(\frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 + \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 + \dots + \frac{a_{n(n-1)}}{a_{nn}} x_{n-1} \right) \end{cases} \quad (5.23)$$

2) Нехай $\bar{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$, а $\bar{x}^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_n^{k+1})$, де $x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \left(\frac{a_{i1}}{a_{ii}} x_1^k + \frac{a_{i2}}{a_{ii}} x_2^k + \dots + \frac{a_{in}}{a_{ii}} x_n^k \right)$. Тоді система (5.23) матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \dots + \alpha_{3n}x_n \\ \vdots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n \end{cases} \quad (5.24)$$

Така система називається зведеною до нормального вигляду.

3) Представимо систему (5.24) в матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

або векторному

$$\vec{x} = \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{x} \quad (5.26)$$

Якщо деяким чином визначити, так званій, вектор початкових значень $\vec{x}^{(0)}$, який знаходиться в правій частині (5.26), то можна отримати певні значення вектора \vec{x} .

В якості вектора початкових наближень $\vec{x}^{(0)}$ вибирають:

- вектор, в якого всі координати x_i дорівнюють 0;
- вектор, в якого всі координати x_i дорівнюють 1;
- вектор, координати x_i якого дорівнюють координатам вектора вільних членів β_i ;

• координати вектору вибирають в результаті аналізу особливостей об'єкту дослідження та задачі, яка розв'язується.

4) Якщо вектор початкових наближень підставити в праву частину системи (5.25) або (5.26), то вона прийме вигляд:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

або

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{x}^{(0)}$$

Отримана система легко розв'язується, тому що в правій частині містить всі визначені елементи, і дозволяє отримати розв'язок системи, який називається **вектором першого наближення** $\vec{x}^{(1)}$.

5) Перевіряється виконання умови закінчення ітераційного процесу пошуку розв'язку системи (5.2) виду:

$$|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}| \leq \varepsilon, \quad (5.27)$$

де ε - задана похибка результатів розв'язання задачі.

Якщо умова (5.27) не виконується, то $x^{(1)}$ підставляється в праву частину (5.25) або (5.26) і знаходиться $x^{(2)}$ з системи виду:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ \dots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

або

б) Знову перевіряється виконання умови закінчення ітераційного процесу пошуку розв'язку системи (5.2).

Якщо умова не виконується, то $x^{(1)}$ підставляється в праву частину (5.25) і знаходиться $x^{(2)}$ і т.д.

7) Етапи 4 та 5 повторюються доти, доки не виконується умова закінчення ітераційного процесу пошуку розв'язку системи (5.2).

Таким чином, процес пошуку розв'язку системи (5.2) наближеними методами з заданою похибкою $\varepsilon \in \text{ітераційним}$, а умовою виходу з цього процесу є умова (5.27).

Описаний вище алгоритм дозволяє отримати розв'язок системи (5.2) близький до точного (з заданою похибкою ε) тільки в тому випадку, коли ітераційний процес пошуку розв'язку СЛАР збігається.

Теорема про збіжність. Ітераційний процес пошуку розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду (5.25) наближеними методами збігається, якщо будь-яка канонічна норма матриці $\|\alpha\| < 1$.

Канонічною нормою матриці називається будь-яке дійсне додатне число, яке визначається за такими умовами:

перша канонічна норма – це максимальна з сум модулів елементів матриці коефіцієнтів α по стрічкам:

$$\|\alpha\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|, \quad (5.28)$$

друга канонічна норма – це максимальна з сум модулів елементів матриці коефіцієнтів α по стовбцям:

$$\|\alpha\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}|, \quad (5.29)$$

третья канонічна норма – це корінь квадратний з сум квадратів модулів всіх елементів матриці коефіцієнтів α :

$$\|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_i \sum_j |\alpha_{ij}|^2}.$$

Наслідок 1: Ітераційний процес розв'язання системи (5.24) збігається, якщо сума модулів елементів стрічок матриці коефіцієнтів або сума модулів елементів її стовбців менш одиниці, тобто виконуються умови

або

Наслідок 2: Ітераційний процес розв'язання системи (5.24) збігається, якщо елементи головної діагоналі більше суми модулів елементів відповідної стрічки крім діагонального елемента цієї стрічки, тобто виконуються умови:

$$|\alpha_{ii}| > \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \quad \text{або} \quad |\alpha_{jj}| > \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}|$$

Розглянемо особливості алгоритмів наближених методів.

Метод послідовних наближень (метод Якобі)

Нехай задана система лінійних алгебраїчних рівнянь виду (5.2). Метод послідовних наближень (метод Якобі) відноситься до ітераційних методів, тому потребує перетворити дану систему до нормального вигляду (5.25) та знайти канонічні норми матриці $\bar{\alpha}$ для того, щоб визначити умови збіжності ітераційного процесу пошуку розв'язку системи із заданою похибкою ε відповідно теоремі про збіжність. Якщо жодна з умов не виконується, то дану систему необхідно перетворити по певним правилам, та знову перевірити умови збіжності ітераційного процесу. Якщо жодна з умов знову не виконується, то метод послідовних наближень не має сенсу використовувати. Якщо хоча б одна з умов виконалась, то ітераційний процес пошуку розв'язку системи із заданою похибкою ε збігається і метод послідовних наближень можна використовувати.

Оцінка похибки метода Якобі

Якщо задана допустима похибка обчислень ε і X - вектор точного розв'язку системи лінійних рівнянь, а $X_j^{(k)}$ k -те наближення до вектору точного розв'язку, то для оцінки похибки метода Якобі послідовних наближень використовується формула:

$$\|X_j - X_j^k\| \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \|\beta\|, \quad (5.30)$$

де $\|\cdot\|$ - одна з трьох норм матриці ; $\|\cdot\|$ - аналогічна норма вектора ;
 k - кількість ітерацій, необхідна для досягнення потрібної точності .

Метод Гауса-Зейделя

Метод Зейделя являє собою модифікацію метода послідовних наближень, при чому у методі Зейделя при обчисленні i -ої координати

вектора розв'язку $(k+1)$ -го наближення використовуються значення всіх $(i-1)$ координат вектора $(k+1)$ -го наближення, обчисленого раніше. Розглянемо метод більш детально.

Нехай початкова система лінійних алгебраїчних рівнянь приведена до нормального вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n \end{cases} \quad (5.31)$$

Вибрати значення координат вектора початкових наближень $\bar{x} = \{x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\}$.

Визначити значення першої координати $x_1^{(1)}$ вектора першого наближення з першого рівняння системи:

$$x_1^{(1)} = \beta_1 + \alpha_{11}x_1^{(0)} + \alpha_{12}x_2^{(0)} + \dots + \alpha_{1n}x_n^{(0)}$$

Підставити в друге рівняння системи значення першої координати $x_1^{(1)}$, яке обчислене на попередньому кроці

$$x_2^{(1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(1)} + \alpha_{22}x_2^{(0)} + \dots + \alpha_{2n}x_n^{(0)}$$

Отримані значення координат першого наближення $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ підставити у третє рівняння системи

$$x_3^{(1)} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(1)} + \alpha_{32}x_2^{(1)} + \alpha_{33}x_3^{(0)} + \dots + \alpha_{3n}x_n^{(0)}$$

для знаходження третьої координати і т.д.

Для знаходження останньої координати вектора першого наближення в останнє рівняння системи треба підставити значення всіх $(n-1)$ координат, які отримані на попередніх кроках та значення координати

$$x_n^{(1)} = \beta_n + \alpha_{n1} x_1^{(1)} + \alpha_{n2} x_2^{(1)} + \dots + \alpha_{nn-1} x_{n-1}^{(1)} + \alpha_{nn} x_n^{(0)}$$

Аналогічно будують друге, третє та інші наближення.

Умови збіжності ітераційного процесу Зейделя

Даний процес розв'язання СЛАР - ітераційний, тому важливим є аналіз умов збіжності ітераційного процесу. Процес Зейделя для системи лінійних рівнянь $\bar{x} = \bar{\beta} + \alpha \bar{x}$ збігається до точного розв'язку із заданою похибкою при будь-якому виборі вектора початкових наближень, якщо будь яка норма матриці α менша 1.

Відомо, що процес Зейделя сходиться до точного розв'язку СЛАР швидше, ніж метод послідовних наближень.

Оцінка похибки методу Гауса-Зейделя

Якщо \bar{x} - точне значення вектора розв'язку системи лінійних рівнянь; а $\bar{x}^{(k)}$ - k-е наближення, обчислене за методом Гауса-Зейделя, то для оцінки похибки цього метода використовується формула:

$$\|\bar{x} - \bar{x}^k\|_1 \leq \frac{\|\alpha\|_1^k}{1 - \|\alpha\|_1} \|\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)}\|_1$$

Метод верхньої релаксації

В основі метода верхньої релаксації використовується алгоритм та обчислювальна схема методу Гауса-Зейделя, але на відміну від нього нові значення координат вектора k-го наближення визначаються за формулами:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega (\bar{x}_i^{k+1} - x_i^k),$$

де \bar{x}_i^{k+1} - уточнене значення змінної по методу Гауса-Зейделя, ω - параметр релаксації, значення якого визначається з інтервалу $1 \leq \omega \leq 2$. При $\omega = 1$ метод тотожний методу Гауса-Зейделя. Швидкість збіжності ітераційного процесу залежить від значення ω .

Розділ 6 Одновимірні методи нелінійної оптимізації

6.1 Метод рівномірного пошуку

Постановка задачі. Необхідно знайти абсолютний мінімум функції $f(x)$ однієї змінної, тобто таку точку $x^* \in \mathbb{R}$, що $f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

Стратегія пошуку. Метод відноситься до пасивних стратегій. Задається початковий інтервал невизначеності $L_0 = [a_0, b_0]$ і кількість обрахунків функції N . Обрахунки проводяться в N рівнорозміщених одна від одної точках (при цьому інтервал L_0 ділиться на $N+1$ рівних інтервалів). Шляхом порівняння величин $f(x_i), i = 1, \dots, N$ знаходиться точка x_k , в котрій значення функції найменше. Шукана точка мінімуму x^* вважається заключною в інтервалі $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ (рис. 6.1)

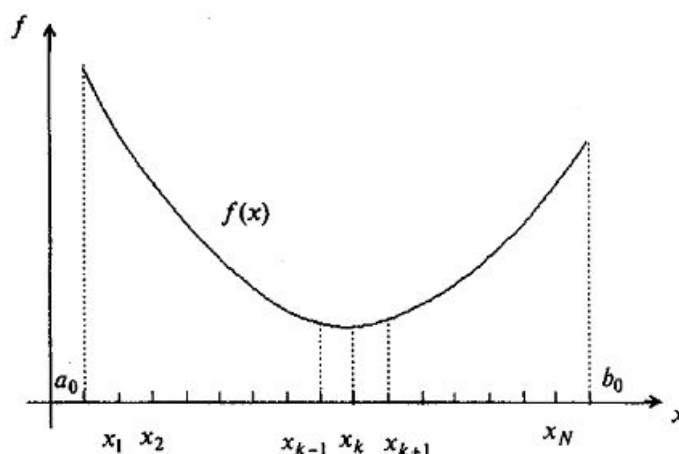


Рис. 6.1 – Ілюстрація методу рівномірного пошуку

Алгоритм

Крок 1. Задати початковий інтервал невизначеності $L_0 = [a_0, b_0]$, N – кількість обрахованих функцій.

Крок 2. Обрахувати точки $x_i = a_0 + i \cdot \frac{(b_0 - a_0)}{N + 1}, i = 1, \dots, N$, рівнорозміщені одна від одної.

Крок 3. Обрахувати значення функції в N знайдених точках:

Крок 4. Серед точок x_1, x_2, \dots, x_N , знайти таку, в котрій функція приймає найменше значення:

Крок 5. Точка мінімуму x^* належить інтервалу: $[x_{k-1}, x_{k+1}]$,

на котрому в якості наближеного розв'язку може бути обрана точка $x^* = x_k$.

6.2 Метод половинного поділу

Постановка задачі. Необхідно знайти абсолютний мінімум функції $f(x)$ однієї змінної, тобто таку точку $x^* \in \mathbb{R}$, що $f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

Стратегія пошуку. Метод відноситься до послідовних стратегій і дозволяє виключити з подальшого розгляду на кожній ітерації в точності половину поточного інтервалу невизначеності. Задається початковий інтервал невизначеності, а алгоритм зменшення інтервалу, котрий являється в загальному випадку, «гарантуючим», оснований на аналізі величин функції в трьох точках, рівномірно розміщених на поточному інтервалі (ділять його на чотири рівні частини). Умови закінчення процесу пошуку стандартні: пошук закінчується, коли довжина поточного інтервалу невизначеності стає меншим встановленої величини.

Алгоритм:

Крок 1. Задати початковий інтервал невизначеності $L_0 = [a_0, b_0]$ та $l > 0$ - необхідну точність.

Крок 2. Допустимо, що $k = 0$.

Крок 3. Вирахувати середню точку $x_k^c = \frac{a_k + b_k}{2}$, $|L_{2k}| = b_k - a_k$, $f(x_k^c)$

Крок 4. Вирахувати точки: $y_k = a_k + \frac{|L_{2k}|}{4}$, $z_k = b_k - \frac{|L_{2k}|}{4}$; $f(y_k)$, $f(z_k)$

. Треба відмітити, що точки y_k, x_k^c, z_k ділять інтервал $[a_k, b_k]$ на чотири рівні частини.

Крок 5. Порівняти вирази $f(y_k)$ і $f(x_k^c)$:

а) якщо $f(y_k) < f(x_k^c)$, виключити інтервал $[x_k^c, b_k]$, присвоївши

$a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = x_k^c$. Середньою точкою нового інтервалу стає точка

(рис. 6.2, а). Перейти до кроку 7;

б) якщо $f(x_k^c) < f(y_k)$, перейти до кроку 6.

Крок 6. Порівняти $f(x_k^c)$ з $f(z_k)$:

а) якщо $f(z_k) < f(x_k^c)$, виключити інтервал $[a_k, x_k^c)$, присвоївши $a_{k+1} = x_k^c, b_{k+1} = b_k$. Середньою точкою нового інтервалу стає точка $z_k : x_{k+1}^c = z_k$ (рис. 6.2, б). Перейти до кроку 7;

б) якщо $f(z_k) \geq f(x_k^c)$, виключити інтервали $[a_k, y_k), (z_k, b_k]$, присвоївши $a_{k+1} = y_k, b_{k+1} = z_k$. Середньою точкою нового інтервалу залишається $x_k^c : x_{k+1}^c = x_k^c$ (рис. 6.2, в)

Крок 7. Обрахувати $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ і перевірити умову закінчення:

а) якщо $|L_{2(k+1)}| \leq 1$, процес пошуку закінчується і $x^* \in L_{2(k+1)} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$. В якості наближеного рішення можна взяти середину останнього інтервалу: $x^* = x_{k+1}^c$;

б) якщо $|L_{2(k+1)}| > 1$, то присвоїти $k=k+1$ і перейти до кроку 4.

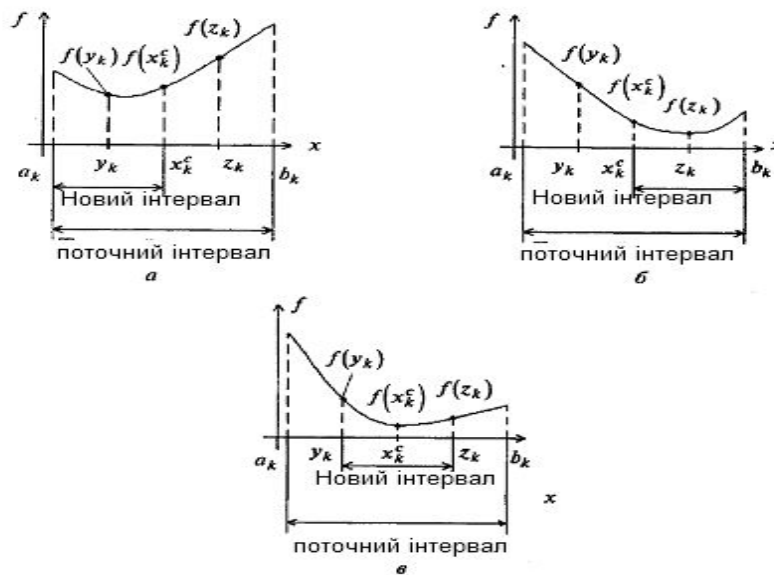


Рис.6.2 – Ілюстрація методу ділення інтервалу навпіл

6.3 Метод дихотомії

Постановка задачі. Потрібно знайти абсолютний мінімум функції

однієї змінної, тобто таку точку , що

Стратегія пошуку. Метод відноситься до послідовних стратегій. Задається початковий інтервал невизначеності і потрібна точність. Алгоритм опирається на аналіз значень функції в двох точках. Для їх знаходження поточний інтервал невизначеності ділиться навпіл і в обидві

сторони від середини відкладається по $\frac{\varepsilon}{2}$, де ε - мале позитичне число. Умови закінчення процесу пошуку стандартні: пошук закінчується тоді, коли довжина поточного інтервала невизначеності стає менше встановленої величини.

Алгоритм:

Крок 1. Задати початковий інтервал невизначеності $L_0 = [a_0, b_0]$, $\varepsilon > 0$ - мале число, $l > 0$ - точність.

Крок 2. Допустимо, що $k=0$.

Крок 3. Обрахувати $y_k = \frac{a_k + b_k - \varepsilon}{2}, f(y_k), z_k = \frac{a_k + b_k + \varepsilon}{2}, f(z_k)$.

Крок 4. Порівняти $f(y_k)$ з $f(z_k)$:

а) якщо $f(y_k) \leq f(z_k)$, присвоїти $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = z_k$ (рис. 6.3,а) і перейти до кроку 5;

б) якщо $f(y_k) > f(z_k)$, присвоїти $a_{k+1} = y_k, b_{k+1} = b_k$ (рис. 6.3,б).

Крок 5. Обрахувати $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ і перевірити умови закінчення:

а) якщо $|L_{2(k+1)}| \leq l$, процес пошуку закінчується і $x^* \in L_{2(k+1)} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$. В якості наближеного рішення можна взяти

$$x^* = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2};$$

середину останнього інтервалу:

б) якщо $|L_{2(k+1)}| > l$, присвоїти $k=k+1$ і перейти до кроку 3.

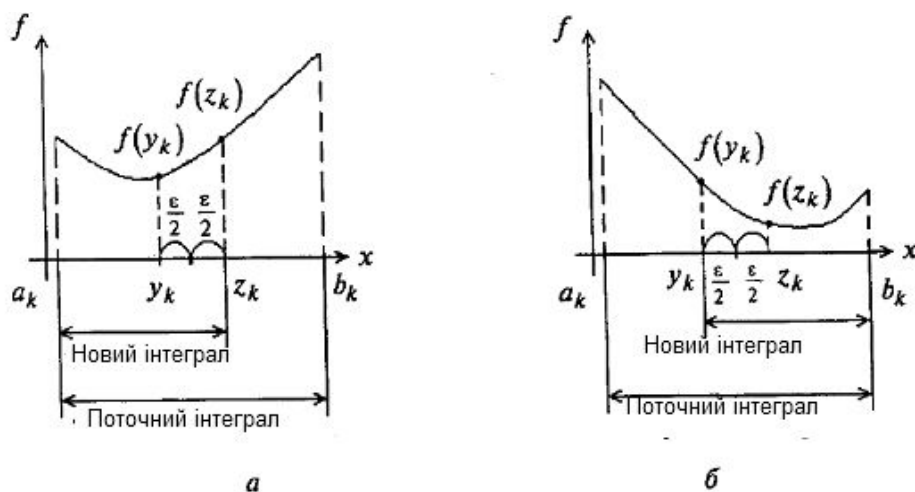


Рис. 6.3 – Ілюстрація методу дихотомії

6.4 Метод золотого січення

Постановка задачі. Потрібно знайти абсолютний мінімум функції $f(x)$ однієї змінної, тобто таку точку $x^* \in \mathbb{R}$, що $f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

Для побудови конкретного методу одномірної мінімізації, який працює по принципу послідовного зменшення інтервалу невизначеності, потрібно задати правило вибору на кожному кроці дві внутрішні точки. Звісно, бажано, щоб одна з них завжди використовувалась в якості внутрішньої і для наступного інтервалу. Тоді число обрахунків функції зменшиться вдвоє і одна ітерація потребує розрахунку лише одного нового значення функції. В методу золотого січення в якості двох внутрішніх точок вибираються точки золотого січення.

Визначення. Точка робить «золоте січення» відрізка, якщо відношення довжини всього відрізка до більшої частини рівне відношенню більшої частини до меншої.

На відрізку $[a_0, b_0]$ є дві симетричні відносно його кінців точки y_0 та z_0 :

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - y_0} = \frac{b_0 - y_0}{y_0 - a_0} = \frac{b_0 - a_0}{z_0 - a_0} = \frac{z_0 - a_0}{b_0 - z_0} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,618$$

Крім того, точка y_0 робить золоте січення відрізка $[a_0, z_0]$, а точка z_0 - відрізка $[y_0, b_0]$ (рис .6.4).

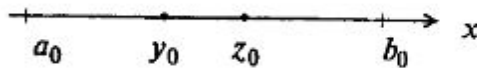


Рис. 6.4 – Ілюстрація «золотого січення»

Стратегія пошуку. Метод відноситься до послідовних стратегій. Задається початковий інтервал невизначеності і шукана точність. Алгоритм зменшення інтервалу спирається на аналіз значень функції в двох точках. В якості точок обрахунку функції вибираються точки золотого січення. Тоді з врахуванням властивостей золотого січення на кожній ітерації, крім першої, потрібний лише один новий розрахунок функції. Умови закінчення процесу пошуку стандартні: пошук закінчується, коли довжина поточного інтервалу невизначеності стає меншим встановленої величини.

Алгоритм:

Крок 1. Задати початковий інтервал невизначеності ,

точність $l > 0$.

Крок 2. Присвоїти $k = 0$.

Крок 3. Обрахувати:

$$y_0 = a_0 + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0); \quad z_0 = a_0 + b_0 - y_0, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,38196$$

Крок 4. Обрахувати $f(y_k), f(z_k)$.

Крок 5. Порівняти $f(y_k)$ з $f(z_k)$:

а) якщо $f(y_k) \leq f(z_k)$, то присвоїти $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = z_k, y_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - y_k, z_{k+1} = y_k$. Перейти до кроку 6;

б) якщо $f(y_k) > f(z_k)$, то присвоїти $a_{k+1} = y_k, b_{k+1} = b_k, y_{k+1} = z_k, z_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} - z_k$.

Крок 6. Обрахувати $\Delta = |a_{k+1} - b_{k+1}|$ та перевірити умову закінчення:

а) якщо $\Delta \leq l$, процес пошуку завершується і $x^* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$. В якості наближеного рішення можна взяти середину останнього інтервалу:

$$x^* = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2};$$

б) якщо $\Delta > l$, присвоїти $k = k + 1$ та перейти до кроку 4.

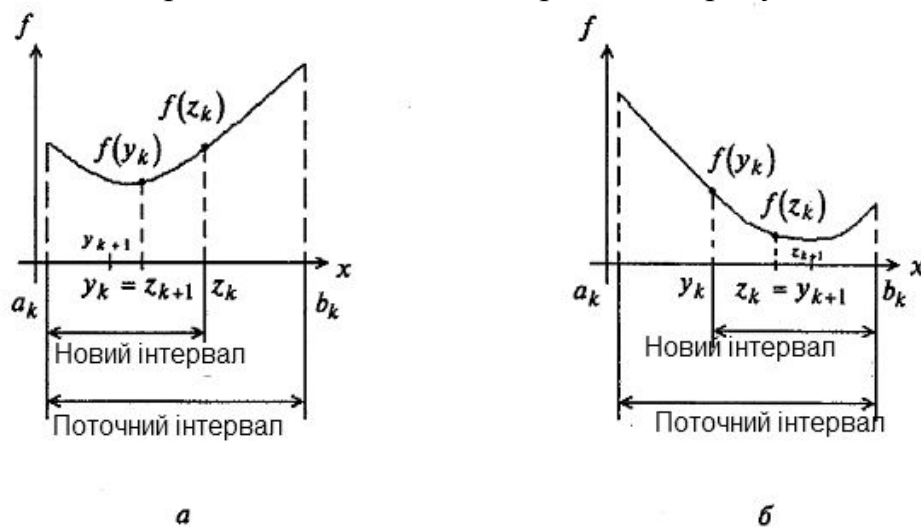


Рис.6.5 – Ілюстрація методу «золотого січення»

Розділ 7 Наближені методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Часто доводиться зіштовхуватись з диференціальними рівняннями і системами диференціальних рівнянь при розробці нових виробів чи технологічних процесів, так як більша частина законів фізики формалізується саме у вигляді диференціальних рівнянь. Будь-яка задача проектування в кінцевому рахунку зводиться до розв'язку диференціальних рівнянь. Нажаль, лише дуже малу частину з них можливо вирішити без допомоги обчислювальних машин. Тому чисельні методи розв'язку диференціальних рівнянь відіграють важливу роль у практиці інженерних розрахунків.

7.1 Основні визначення та поняття

Рівняння, в якому невідома функція входить під знаком похідної чи диференціала, називається *диференціальним рівнянням*. Наприклад,

$$\frac{dy}{dx} = 2(y - 3); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = t + 1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$
$$y' = x^2; \quad xdy = y^3 dx$$

Якщо невідома функція, що входить у диференціальне рівняння, залежить тільки від однієї незалежної змінної, то диференціальне рівняння називається *звичайним диференціальним рівнянням*. Наприклад, диференціальні рівняння

$$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 2; \quad 2sdt = tds$$

відносяться до звичайних.

Якщо ж невідома функція, що входить у диференціальне рівняння, є функцією двох чи більшого числа незалежних змінних, то таке рівняння називається *диференціальним рівнянням у частинних похідних*. Наприклад, диференціальне рівняння

відноситься до рівняння в частинних похідних.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий

порядок похідної (чи диференціала), що входить у рівняння.

Розглянемо звичайні диференціальні рівняння.

Звичайне диференціальне рівняння n -го порядку в загальному випадку містить незалежну змінну, невідому функцію і її похідні чи диференціали до n -го порядку включно і має вид

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (7.1)$$

У цьому рівнянні x - незалежна змінна, y - невідома функція, $(y', y'', \dots, y^{(n)})$ - похідні цієї функції.

Розв'язком (чи **інтегралом**) рівняння (7.1) називається будь-яка диференціюєма функція $y = \varphi(x)$, що задовольняє цьому рівнянню, тобто така, після підстановки, якої у рівняння (7.1) воно перетворюється в тотожність.

Графік розв'язку звичайного диференціального рівняння називається **інтегральною кривою** цього **рівняння**.

Розв'язок диференціального рівняння, що містить стільки незалежних довільних (постійних) параметрів, який його порядок, називається **загальним розв'язком** (чи **загальним інтегралом**) цього **рівняння**.

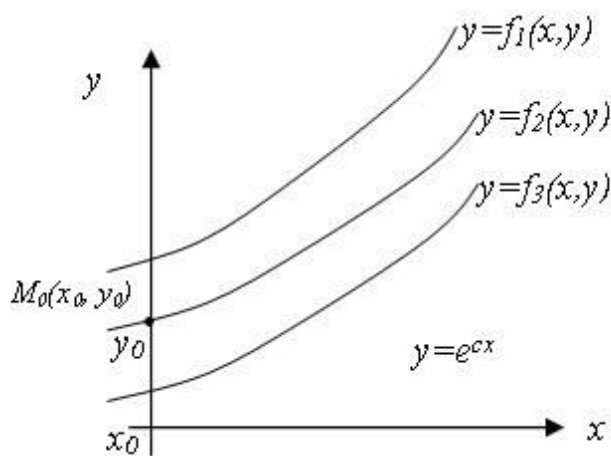


Рис. 7.1. - Сімейство інтегральних кривих диференціального рівняння

Геометрично, загальний розв'язок диференціального рівняння являє собою сімейство інтегральних кривих рівняння (7.1) (рис. 7.1).

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається будь-який розв'язок, що може бути отриманий з загального при визначених числових значеннях довільних постійних (рис. 7.1). Довільні постійні, що входять в загальний розв'язок, визначаються з початкових або

крайових умов.

Задача з початковими умовами ставиться так: знайти розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, що задовольняє додатковим умовам, які складаються з того, що розв'язок $y = \varphi(x)$, повинний приймати разом зі своїми похідними до $(n-1)$ -го порядку задані числові значення $Y_0, Y_0', Y_0'', \dots, Y_0^{(n-1)}$ при заданому числовому значенні $x = x_0$ незалежної змінної x .

Такі умови називаються **початковими умовами**, а задача відшукування розв'язку $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння (7.1), що задовольняє заданим початковим умовам - **задачею з початковими умовами**, або **задачею Коші**.

Задача з крайовими умовами ставиться так: знайти розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, що задовольняє додатковим умовам, які складаються з того, що розв'язок $y = \varphi(x)$, повинний приймати разом зі своїми похідними до $(n-1)$ -го порядку задані числові значення $Y_0, Y_0', Y_0'', \dots, Y_0^{(n-1)}$ при заданому числовому значенні $x = x_0$ та $Y_n, Y_n', Y_n'', \dots, Y_n^{(n-1)}$ при заданому числовому значенні $x = x_n$ незалежної змінної x .

Такі умови називаються **крайовими умовами**, а задача відшукування розв'язку $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння (7.1), що задовольняє заданим крайовим умовам – **крайовою задачею**.

У випадку рівняння першого порядку, тобто при $n=1$, одержуємо задачу Коші для рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $x = x_0, y = y_0$.

Геометрично задача Коші для рівняння першого порядку полягає в тому, що з усіх інтегральних кривих, що представляють собою загальний розв'язок, потрібно знайти ту інтегральну криву, що проходить через точку з координатами (рис.7.1).

Часто в задачі Коші у ролі незалежної змінної виступає час t . Прикладом може бути задача про вільні коливання тіла, яке підвішене на пружині. Рухи такого тіла описуються диференціальним рівнянням, в якому незалежною змінною є час t . Якщо додаткові умови задані у вигляді значень переміщень чи швидкості при $t=0$, то це також задача Коші.

Задача Коші має єдиний розв'язок, що задовольняє умові в , якщо функція неперервна в деякій області

$R_{[a,b]} = \{ |x - x_0| < a, |y - y_0| < b \}$ і задовольняє в цій області умові Ліпшица:

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \leq N |\bar{y} - y|,$$

де N - постійна Ліпшица, що залежить від a і b (a і b - межі області).

Методи точного інтегрування диференціальних рівнянь придатні лише для порівняно невеликої частини рівнянь, що зустрічаються на практиці.

Тому в задачах моделювання та дослідження складних технічних систем, наприклад, систем автоматичного управління, великого значення набувають методи наближеного розв'язання диференціальних рівнянь, що в залежності від форми представлення розв'язку можна розділити на дві групи:

- 1) *аналітичні методи*, що дають наближений розв'язок диференціального рівняння у вигляді аналітичного виразу;
- 2) *чисельні методи*, що дають наближений розв'язок у вигляді таблиці.

Похибки

Перед тим, як перейти до розглядання методів чисельного розв'язання диференціальних рівнянь, зупинимось на джерелах похибок, пов'язаних з чисельною апроксимацією. Таких джерел три:

1. *Похибка заокруглення* зумовлена обмеженнями на представлення чисел в ЕОМ, тому що число значущих цифр, що запам'ятовується і використовується в обчисленнях, обмежене.

2. *Похибка відсічення* пов'язана з тим, що для апроксимації функції замість

$$y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0 \quad (7.2)$$

нескінчених рядів часто використовується лише декілька перших їх членів.

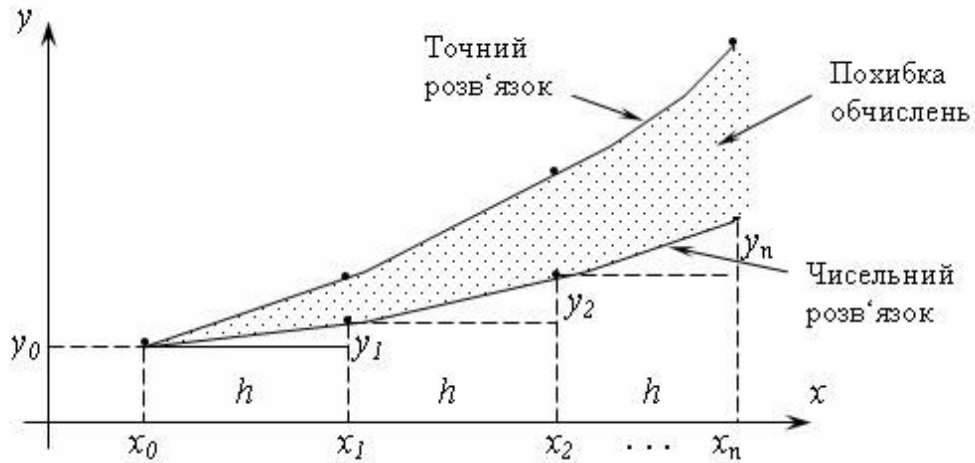


Рис. 7.2 - Геометричне представлення накопичування похибки в процесі обчислень

3. **Похибка поширення** являється результатом накопичення похибок, що з'явилися у попередніх результатах розрахунку. Так як ні один з наближених методів не може дати зовсім точних результатів, то будь-яка похибка, яка виникла в процесі обчислень, зберігається і на наступних стадіях розрахунку (рис. 7.2).

Вказані три джерела похибок є причиною помилок двох типів:

Локальна помилка – сума похибок, що вносяться у розрахунковий процес на кожному етапі обчислення.

Глобальна помилка – різниця між розрахованим та точним значеннями величини на кожному етапі реалізації чисельного алгоритму, що визначає сумарну похибку, що накопичується з моменту початку розрахунку.

7.2. Класифікація методів розв'язання задачі Коші

На протязі багатьох років чисельний розв'язок задачі Коші був об'єктом пильної уваги науковців, оскільки він широко застосовується в різних галузях науки і техніки. Тому і кількість розроблених для нього методів дуже велика.

Чисельні методи розв'язання задачі Коші розділяються на 3 групи:

- одноточкові;
- багатоточкові (методи прогнозу та корекції);
- методи з автоматичним вибором кроку інтегрування.

На рис. 7.3 представлена класифікація найбільш відомих чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь (ДР) на ЕОМ.



Рис. 7.3 – Класифікація чисельних методів розв'язання задачі Коші

До одноточкових методів відносять методи, які мають певні загальні риси, такі як:

1. В основі усіх одноточкових методів лежить розклад функції в ряд Тейлора, в якому зберігаються члени, що мають h в степені до k включно. Ціле число k називається **порядком метода**. Похибка на кроці має порядок $k+1$.

2. Всі одноточкові методи не потребують дійсного обчислення похідних, тому що обчислюється лише сама функція, однак можуть потребуватися її значення в деяких проміжних точках. Це тягне за собою, звичайно, додаткові затрати часу і зусиль.

3. Для отримання інформації у новій точці, потрібно мати дані лише в попередній точці. Цю властивість можна назвати „самостартуванням”. Властивість „самостартування” дозволяє легко змінювати величину кроку h .

В порівнянні з одноточковими методами методи прогнозу і корекції мають ряд особливостей:

1. Для реалізації методів прогнозу і корекції необхідно мати інформацію про декілька попередніх точок (вони не відносяться до „самостартуючих” методів), тому для отримання додаткової інформації доводиться застосовувати одноточковий метод.

2. Одноточкові методи і методи прогнозу і корекції забезпечують приблизно однакову точність результатів. Однак другі на відміну від

перших дозволяють лише оцінити похибку на кроці. З цієї причини, користуючись одноточковими методами, величину кроку h звичайно обирають трохи менше, ніж це необхідно, тому методи прогнозу і корекції виявляються найбільш ефективними.

Використовуючи метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності, на кожному кроці доводиться обчислювати чотири значення функції, але для збіжності методу прогнозу і корекції того ж порядку точності часто достатньо двох значень функції. Тому методи прогнозу і корекції вимагають майже вдвічі менше машинного часу, ніж методи Рунге-Кутта порівнюваної точності.

7.3 Одноточкові методи розв'язання задачі Коші

Розв'язати диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ чисельним методом - це значить для заданої послідовності аргументів x_0, x_1, \dots, x_n і y_0 знайти такі значення y_0, y_1, \dots, y_n , що $y_i = F(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ та $F(x_0) = y_0$. Таким чином, чисельні методи дозволяють замість функції $y = F(x)$ одержати таблицю значень цієї функції для заданої послідовності аргументів. Величина $h = x_k - x_{k-1}$ називається *кроком інтегрування*.

Графічно чисельний розв'язок являє собою послідовність коротких прямолінійних відрізків, якими апроксимується аналітичний розв'язок $y = F(x)$ рівняння (кусково-лінійна апроксимація).

Розглянемо алгоритми найбільш відомих чисельних методів.

Метод Ейлера

Метод Ейлера є порівняно грубим і застосовується в основному для орієнтованих розрахунків. Однак ідеї, покладені в основу методу Ейлера, є базовими для інших методів.

Нехай дано диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \tag{7.3}$$

з початковими умовами

$$\dots \tag{7.4}$$

Необхідно знайти розв'язок рівняння на відрізку

Розіб'ємо відрізок на n рівних частин і одержимо

послідовність $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, де $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), а $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ -
 крок інтегрування.

Виберемо k -й відрізок $[x_k, x_{k+1}]$ і проінтегруємо рівняння (7.3):

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx = y(x) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k$$

або (7.5)

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx$$

Якщо в останньому інтегралі підінтегральну функцію на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ прийняти постійною і рівною початковому значенню в точці $x = x_k$, то одержимо

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k, y_k) dx = f(x_k, y_k) \cdot x \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) = y'_k h$$

Тоді формула (7.5) прийме вигляд

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h \quad (7.6)$$

Позначивши $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, отримаємо:

$$y'_k h = \Delta y_k \quad (7.7)$$

Продовжуючи цей процес, і щоразу приймаючи, що на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ інтегральна крива $y = F(x)$ приблизно заміняється прямолінійним відрізком, що виходить із точки (x_k, y_k) кутовим коефіцієнтом y'_k . Тому в якості наближення шуканої інтегральної кривої одержуємо ламану лінію з вершинами в точках (x_k, y_k) (рис. 7.4).

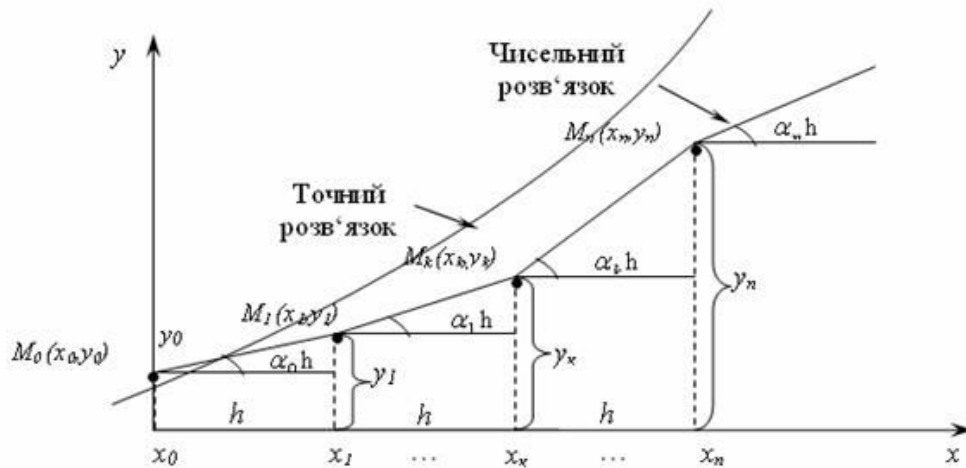


Рис. 7.4 – Геометрична інтерпретація методу Ейлера

Якщо функція $f(x, y)$ у деякій прямокутній області $R \{ |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \}$ задовольняє умові:

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \leq N|\bar{y} - y|, \quad (7.8)$$

і, крім того,

$$\left| \frac{df}{dx} \right| = \left| \frac{df}{dx} + f \frac{df}{dy} \right| < M, \quad M = \text{const}, \quad (7.9)$$

то має місце наступна оцінка похибки:

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{hM}{2N} [(1 + hN)^n - 1], \quad (7.10)$$

де $y(x_n)$ - значення точного розв'язку рівняння при $x = x_n$, а y_n - наближене значення, отримане на n-у кроці.

Формула (7.10) має в основному теоретичне застосування. На практиці, як правило, застосовують "подвійний прорахунок". Спочатку чисельне розв'язання рівняння ведеться з кроком h , потім крок дроблять і повторний розрахунок ведеться з кроком $h/2$. Похибка більш точного значення оцінюється формулою

$$(7.11)$$

Метод Ейлера може бути застосований до розв'язку систем диференціальних рівнянь вищих порядків. Однак в останньому випадку диференціальні рівняння повинні бути приведені до системи диференціальних рівнянь першого порядку.

Нехай задана система двох рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases}, \quad (7.12)$$

з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0. \quad (7.13)$$

Наближені значення $y(x_i) = y_i$ та $z(x_i) = z_i$ знаходяться по формулах:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \\ z_{i+1} = z_i + \Delta z_i \end{cases}, \quad \Delta y_i = hf_1(x_i, y_i, z_i), \quad \Delta z_i = hf_2(x_i, y_i, z_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.14)$$

Модифікації методу Ейлера

З метою підвищення точності методу Ейлера використовують різні його модифікації.

Суть **удосконаленого методу Ейлера** полягає в використанні ітераційної формули виду:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}), \quad (7.15)$$

де $x_{i+\frac{1}{2}}$ - значення аргументу x в точці $x_{i+\frac{1}{2}}$, а $f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$ - значення функції в

точці $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$.

Розглянемо диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Необхідно знайти розв'язок рівняння на відрізку $[x_0, x_1]$.

Розіб'ємо відрізок $[x_0, x_1]$ на n рівних частин точками

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad \text{де} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Алгоритм методу складається з:

1. визначення похідної y'_0 в точці (x_0, y_0) : $y'_0 = f(x_0, y_0)$;

$$x_{0+\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{h}{2};$$

2. змінна незалежної змінної x за формулою:

3. визначення значення $y_{0+\frac{1}{2}}$ при $x_{0+\frac{1}{2}}$: $y_{0+\frac{1}{2}} = y_0 + \frac{h}{2} y'_0$;

4. визначення похідної в точці $(x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0+\frac{1}{2}})$: $y'_{0+\frac{1}{2}} = f(x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0+\frac{1}{2}})$;

5. використовуємо отримане значення $y'_{0+\frac{1}{2}}$ для визначення y_1 за

$$y_1 = y_0 + h y'_{0+\frac{1}{2}} = y_0 + h f(x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0+\frac{1}{2}});$$

формулою:

$$x_1 = x_{0+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2};$$

6. змінюємо

7. повторюємо всі кроки алгоритму, починаючи з першого.

Графічна інтерпретація методу представлена на рисунку 7.5.

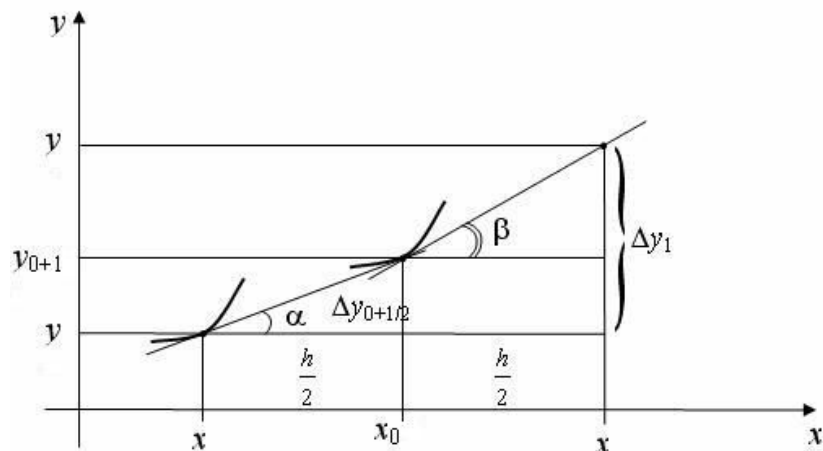


Рис. 7.5 – Графічна інтерпретація удосконаленого методу Ейлера

Зауваження. Оцінка похибки в точці x може бути отримана за допомогою "подвійного прорахунку": розрахунок повторюють із кроком $h/2$. Похибку більш точного значення (при кроці $h/2$) оцінюють в такий спосіб:

$$|y_i^* - y(x_i)| \approx \frac{1}{3} |y_i^* - y_i|$$

де $y(x_i)$ - точний розв'язок диференціального рівняння. Удосконалений метод Ейлера є більш точним у порівнянні з методом Ейлера та відноситься до методів 3-го порядку точності.

Модифікований метод Ейлера заснований на використанні ітераційної формули виду:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \quad (7.16)$$

Геометрична інтерпретація представлена на рисунку 7.6.

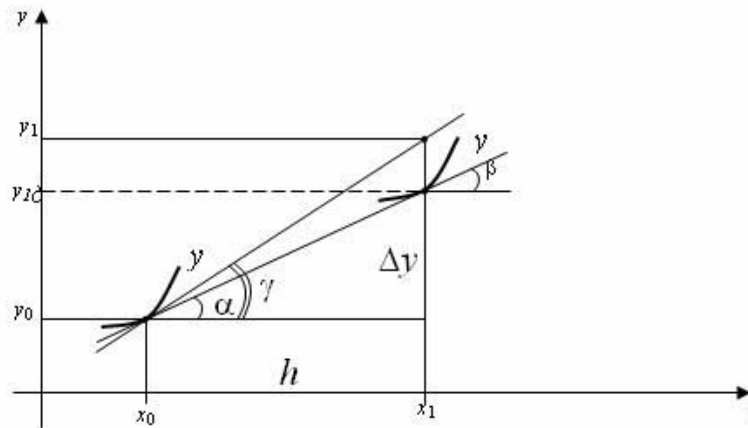


Рис.7.6 – Графічна інтерпретація модифікованого методу Ейлера

Алгоритм методу включає наступні кроки:

1. визначення похідної y'_0 в точці (x_0, y_0) : $y'_0 = f(x_0, y_0)$;

2. зміна незалежної змінної x за формулою: $x_1 = x_0 + h$;

3. визначення допоміжного значення y_{1d} за формулою методу

Ейлера: $y_{1d} = y_0 + h \cdot y'_0$;

4. визначення допоміжної похідної в точці (x_1, y_{1d}) : $y'_{1d} = f(x_1, y_{1d})$;

5. визначення середньо арифметичного значення двох похідних: $y'_{avg} = \frac{y'_0 + y'_{1d}}{2}$;

;

6. визначення y_{i+1} за формулою: $y_{i+1} = y_i + h \cdot y'_{avg}$.

7. ітераційний процес повторюється, починаючи з першого кроку.

Метод Рунге–Кутта

Метод Рунге-Кутта є одним з методів підвищеної точності, але має багато загального з методом Ейлера.

Нехай на відрізку $[a, b]$ необхідно знайти чисельний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$.

В методі Рунге-Кутта, аналогічно методу Ейлера, послідовні значення y_i шуканої функції визначаються за формулою

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$$

Якщо розкласти функцію у ряд Тейлора й обмежитися членами до h^4 включно, то збільшення функції (Δy) можна представити у вигляді:

$$\Delta y = y(x + h) - y(x) = hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(x), \quad (7.17)$$

де похідні $y''(x), y'''(x), y^{(4)}(x)$ визначаються послідовним диференціюванням.

Замість безпосередніх обчислень по формулі (7.17) у методі Рунге-Кутта визначаються чотири числа:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x, y), \\ k_2 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x + h, y + k_3). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Можна довести, що якщо числам k_1, k_2, k_3, k_4 додати відповідно вагу $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}$, то середньозважене цих чисел, тобто $\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{1}{4}k_4$, з точністю до четвертих ступенів дорівнює значенню y' , обчисленому по формулі (7.17):

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (7.19)$$

Таким чином, для кожної пари поточних значень x_i та y_i по формулах (7.18) визначаються значення:

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \\ k_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \\ k_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}). \end{aligned} \quad (7.20)$$

і потім

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

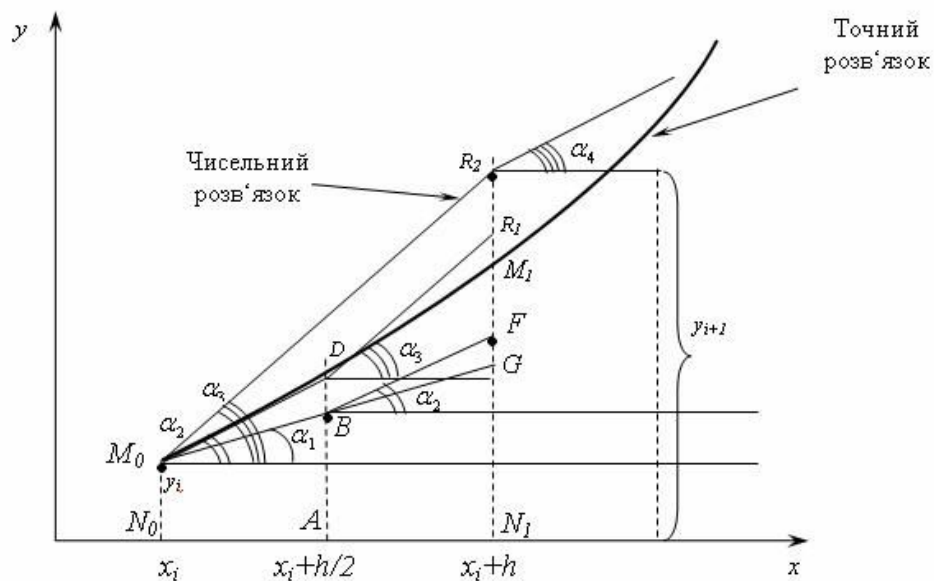


Рис.7.7 – Геометрична інтерпретація метода Рунге-Кутта

Обчислення по методу Рунге-Кутта зручно розташовувати за алгоритмом:

1. значення та підставляють у праву частину диференціального рівняння, визначають ;

2. отримане значення $f(x, y)$ множать на крок інтегрування h , обчислюють $k_1 = hf(x, y)$;

3. змінюють значення x_0 : $x_{0+\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{h}{2}$;

4. визначають допоміжне значення y_{0d} : $y_{0d} = y_0 + \frac{k_1}{2}$;

5. визначення похідної в точці $(x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0d})$: $y'_{0d} = f(x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0d})$;

6. визначають значення k_2 : $k_2 = hf(x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0d})$;

7. визначають нове допоміжне значення \dot{y}_{0d} : $\dot{y}_{0d} = y_0 + \frac{k_2}{2}$;

8. визначення похідної в точці $(x_{0+\frac{1}{2}}, \dot{y}_{0d})$: $\dot{y}'_{0d} = f(x_{0+\frac{1}{2}}, \dot{y}_{0d})$;

9. визначають значення k_3 : $k_3 = hf(x_{0+\frac{1}{2}}, \dot{y}_{0d})$;

10. визначають нове значення допоміжного y_{1d} : $y_{1d} = y_0 + k_3$;

11. змінюють значення $x_{0+\frac{1}{2}}$: $x_1 = x_{0+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}$;

12. визначають допоміжну похідну в точці (x_1, y_{1d}) : $y'_{1d} = f(x_1, y_{1d})$;

13. визначають значення k_4 : $k_4 = h \cdot y'_{1d} = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3)$

14. визначають нове значення y_1 за формулою:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Для визначення y_2, y_3, \dots, y_n повторюють ітераційний процес, починаючи з першого кроку, поки не буде пройдений весь відрізок $[a, b]$.

Метод Рунге - Кутта має порядок точності на усьому відрізку. Оцінка точності цього методу дуже складна. Грубу оцінку погрішності можна одержати за допомогою "подвійного прорахунку" по формулі:

де $y(x_i)$ - значення точного розв'язку рівняння у точці x_i , а y_i^* та y_i - наближені значення, отримані з кроком $h/2$ і h .

Нехай задана система диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$$

У цьому випадку паралельно визначаються числа Δy_i та Δz_i :

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \quad \Delta z_i = \frac{1}{6}(l_1^{(i)} + 2l_2^{(i)} + 2l_3^{(i)} + l_4^{(i)}),$$

$$k_i^{(i)} = hf(x_i, y_i, z_i),$$

$$l_i^{(i)} = hg(x_i, y_i, z_i);$$

$$k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$l_2^{(i)} = hg\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right);$$

$$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$l_3^{(i)} = hg\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right);$$

$$k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)}),$$

$$l_4^{(i)} = hg(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)}).$$

7.4 Методи прогнозу і корекції (багатоточкові методи)

В методах прогнозу і корекції для обчислення значення нової точки розв'язку ДР використовується інформація про декілька раніше отриманих точок відрізка дослідження. Для цього використовуються дві формули, що називаються відповідно формулами прогнозу і корекції. Розглянемо особливості алгоритмів методів прогнозу і корекції.

Так як в методах, що розглядаються використовується інформація про декілька раніше отриманих точок, то на відміну від однокрокових методів вони не володіють властивістю „самостартування”. Тому, перед тим як застосувати метод прогнозу і корекції, необхідно обчислювати

вихідні дані за допомогою будь-якого однокрокового методу. Часто для цього використовують метод Рунге-Кутта. Обчислення проводять наступним чином. Спочатку по формулі прогнозу і початковим значенням змінних знаходять значення $y_{n+1}^{(0)}$. Верхній індекс означає, що прогнозоване значення є одним з послідовності значень y_{n+1} , що розташовані в порядку зростання точності. По прогнозованому значенню $y_{n+1}^{(0)}$ за допомогою приведеного вище диференціального рівняння знаходять похідну $y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})$, яка потім підставляється у формулу корекції для обчислення уточненого значення $y_{n+1}^{(j+1)}$.

В свою чергу $y_{n+1}^{(j+1)}$ використовується для отримання більш точного значення похідної за допомогою диференціального рівняння

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(j+1)})$$

Якщо це значення похідної недостатньо близьке до попереднього, то воно вводиться у формулу корекції й ітераційний процес продовжується. Якщо ж похідна змінюється в допустимих границях, то значення $y_{n+1}^{(j+1)}$ використовується для обчислення остаточного значення y_{n+1} . Після цього процес повторюється – здійснюється наступний крок, на якому обчислюється y_{n+2} .

Звичайно при вводі формул прогнозу і корекції розв'язок рівняння розглядають як процес наближеного інтегрування, а самі формули отримують за допомогою кінцево-різницевого методів.

Якщо диференціальне рівняння $y'(x) = f(x, y)$ проінтегровано в інтервалі $[x_n, x_{n+k}]$, то результат прийме вигляд:

$$y(x_{n+k}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+k}} f(x, y) dx$$

Цей інтеграл не можна обчислити безпосередньо, так як залежність невідома. Наближене значення інтегралу можна знайти за допомогою одного з кінцево-різницевого методів. Вибір методу і буде визначати метод розв'язку диференціальних рівнянь. На етапі прогнозу можна використовувати будь-яку формулу чисельного інтегрування, якщо до неї не входить попереднє значення

Метод Мілна

В цьому методі на етапі прогнозу використовується формула Мілна

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4}{3}h(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}) + \frac{28}{90}h^5 y^{(5)}$$

а на етапі корекції - формула Сімпсона

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{1}{3}h(y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1}) - \frac{1}{90}h^5 y^{(5)}$$

Останні члени в обох формулах в дійсності в ітераційному процесі не використовуються і слугують лише для оцінки помилки відсічення. Метод Мілна відносять до методів четвертого порядку точності, так як в ньому відкидаються члени, які містять h в п'ятій степені і більш високих степенях. Похибка відсічення при корекції в 28 разів менше і тому представляє великий інтерес. Незважаючи на те що формула Мілна містить менший числовий коефіцієнт ($1/90$) перед членом, що відкидається, її використовують рідше, ніж інші (з більшими відкидуваними членами), так як їй притаманна нестійкість. Це означає, що похибка поширення може рости експоненціально, при чому цей висновок справедливий для всіх формул корекції, основаних на правилі Сімпсона.

Метод Адамса - Башфорта

Цей метод також має четвертий порядок точності. Формула, що використовується в ньому отримана інтегруванням оберненої інтерполяційної формули Ньютона і має вид:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24}h(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}) + \frac{251}{720}h^5 y^{(5)}$$

а на етапі корекції використовується формула:

Розрахунки по методу Адамса - Башфорта виконуються так, як і по методу Мілна, але на відміну від останнього похибка, внесена на якому-небудь кроці, не має тенденції до експоненціального росту.

Метод Хемінга

В методі Хемінга використовуються наступні формули уточнення прогнозу:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_{n-3} + \frac{4}{3}h(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2})$$

$$\bar{y}_{n+1}^{(0)} = y_{n+1}^{(0)} + \frac{112}{121}(y_n - y_n^{(0)}),$$

$$[\bar{y}_{n+1}^{(0)}] = f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}^{(0)})$$

та корекції

$$y_{n+1}^{(j+1)} = \frac{1}{8}(9y_n - y_{n-2}) + \frac{3}{8}h([\bar{y}_{n+1}^{j+1}]' + 2y'_n - y'_{n-1})$$

Це стійкий метод четвертого порядку точності, в основі якого лежать наступні формули прогнозу:

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4}{3}h(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}) + \frac{28}{90}h^5 y^{(5)}$$

і корекції

$$y_{n+1} = \frac{1}{8}[9y_n - y_{n-2} + 3h(y'_{n+1} + 2y'_n - y'_{n-1})] - \frac{1}{40}h^5 y^{(5)}$$

Особливістю методу Хемінга є те, що він дозволяє оцінювати похибки, що вносяться на стадіях прогнозу і корекції і усувати їх. Завдяки простоті та стійкості цей метод є одним з найбільш поширених методів прогнозу і корекції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНІХ ДЖЕРЕЛ

1. Бахвалов Н. С. Численные методы . Т. II. Анализ, алгебра, обычные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 631 с.
2. Волков Е. А. Численные методы. – М.: Наука, 1988.
3. Иванов В. В. Методы вычислений на ЕВМ. – Киев: Наук. 1986. – 584 с.
4. И.В. Кузьмин, М.М. Биков, С.М. Москвина, А.И. Кузьмин. Методы оптимизации сложных систем. – Винница: ВДГУ, 2003. – 165с.
5. Кветний Р.Н. Методи комп'ютерних обчислень: Навчальний посібник. /МО І науки України. – Вінниця: ВДГУ, 2001. – 148 с.
6. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи: Підручник. Либідь. 1996. – 288 с.
7. Полак Е. Численные методы оптимизации. – М. : Мир, 1974.
8. Пшеничний Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. – М. : Наука, 1975.
9. Фельдман Л.П., Петренко А.І. Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці: Підручник/ За ред. М.З. Згуровського. – К.: Вид. група ВНУ, 2006. – 480 с.
10. Численные методы / Н. И. Данилина, Н. С. Дубровская, О. П. Кваша и др. – М.: Высшая шк., 1976. – 368 с.

Навчальне видання

Співак Ірина Ярославівна

«МАТЕМАТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПРОГРАМНИХ СИСТЕМ»

Опорний конспект лекцій

Підписано до друку 17.05.2012 р.
Формат 84x108\32. Папір офсетний. Друк на різнографі.
Умов.-друк. Арк. 5. Зам. №2433.
Тираж 100 прим.

Віддруковано ФО-П Шпак В.Б.
Свідоцтво про державну реєстрацію №073743
СПП №465644
Тел. 8 097 299 38 99, 8 063 300 86 72
E-mail: tooums@ukr.net