О. М. Мартинюк, С. Ю. Попіна

Елементи комбінаторики й класичне означення ймовірності

ТЕРНОПІЛЬ — 2003

Рецензенти: *М. П. Маланюк* — професор ТКІ,
Б. І. Попович — доцент ТКІ

Мартинюк О. М., Попіна С. Ю.

Елементи комбінаторики й класичне означення ймовірності. — Тернопіль, 2003. — 40 с.

Посібник містить теоретичний матеріал та приклади розв'язування задач з комбінаторики. Крім того, підібрано ряд задач для самостійного розв'язування.

Посібник буде корисним при вивченні теми «Класичне означення ймовірності» курсу «Теорія ймовірності».

Розрахований для студентів економічних навчальних закладів.

ВСТУП

Перед людиною, що в сучасних умовах ринкової економіки прагне займатися підприємництвом, постійно виникає ряд важливих завдань, до розв'язування яких вона мусить бути зорієнтована. Крім усвідомлених знань з основ економіки та правової політики підприємець повинен володіти комп'ютерною технікою, методами аналізу реальних ситуацій, їх моделюванням та вміннями передбачити розвиток подій. Досвід показує, що такі вміння розвиваються, якщо чітко спланувати шляхи підвищення інтелектуального рівня майбутніх комерсантів. Важлива дань у цьому відведена вивченню математики та виробленню вмінь використовувати її теоретичні положення у практичних питаннях економіки. Значна увага належить теорії імовірностей та математичній статистиці. Багато положень цього розділу математики ґрунтуються на комбінаториці. Нажаль, важливі факти її недостатньо вивчаються у середніх навчальних закладах. Тому студенти економічних вузів зустрічають значні труднощі під час вивчення теорії імовірностей та основ статистичних досліджень. Пов'язано це як із специфікою цих навчальних предметів, так і відсутністю добре засвоєних знань із основ комбінаторики. Щоб полегшити вивчення названих розділів математики та статистики, автори пропонують розглянути найважливіші комбінаторні поняття та поширені типи задач, які з ними пов'язані. На основі цих задач підготовлені ці методичні поради для організації навчального процесу та стимулювання самостійної роботи студентів при вивченні курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика». Наш досвід переконує, що ознайомлення студентів з основними типами комбінаторних понять, хоч би на рівні розв'язування вправ, допомагає виробляти не лише вміння розв'язувати задачі з теорії імовірностей, але і глибше проводити аналіз економічних теорій, які широко використовують поняття цієї науки.

§1. ПРОСТІ ЗАДАЧІ КОМБІНАТОРНОГО ТИПУ

З комбінаторними задачами читачі, як правило, зустрічаються до того, як розпочинають систематично вивчати цей розділ математики. Такі задачі колись були в шкільних підручниках і в посібниках для позакласних занять. Наприклад, у шкільному підручнику з алгебри для 7 класу, виданому у 1987 році, учням пропонувались задачі 977, 978, 984 та інші. Розглянемо деякі найпростіші вправи такого виду.

Вправа 1. (Задача № 977 з підручника алгебри для 7 кл.)

Є 6 замків і 6 ключів до них. Скількома способами можна встановити відповідність між ключами і замками?

Очевидно, що з допомогою п'яти перевірок визначиться ключ до першого замка. Після цього чотири випробування дозволять визначити ключ до другого замка. Потім відповідно 3 і 2 випробування дозволять вказати, які ключі підходять до третього і четвертого замків. Нарешті, досить лише одного випробування, щоб встановити ключ до п'ятого замка. Ключ, який залишився, мусить підходити для останнього замка. Тому потрібно не більше, як $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ перевірок, щоб підібрати ключі для всіх замків.

Вправа 2. (Задача № 984 з підручника алгебри для 7 кл.)

а) Скільки є чотирицифрових чисел, які можна записати тільки непарними цифрами?

В задачі мова йде лише про числа виду 3715, 9171, 3373 та інші. Оскільки непарних цифр є 5, то першу цифру можна вибрати п'ятьма способами. Це саме можна сказати і про інші цифри. Тому шуканих чотирицифрових чисел існує $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$. Подумайте, чому число 5 чотири рази перемножують?

б) Скільки існує чотирицифрових чисел, які можна записати тільки парними цифрами?

Оскільки перша цифра не може бути нулем, то її можна вибрати лише серед чотирьох цифр: 2, 4, 6 і 8. Кожну з інших цифр можна вибрати лише серед чотирицифрових чисел, записаних лише парними цифрами, є $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$.

в) Скільки чотирицифрових чисел містять у своєму записі як парні, так і непарні цифри?

Усіх чотирицифрових чисел є $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$. Якщо ми відкинемо ті з них, які записуються лише непарними або лише парними цифрами, то одержимо чотирицифрові числа, у записі яких містяться і парні, і непарні цифри. Отже, шуканих чисел $9000 – (625 + 500) = 7875$.

Існує чимало задач при розв'язуванні яких необхідно проявити деяку кмітливість при переборах.

Вправа 3. Необхідно підсмажити 3 скибки хліба. На сковороді поміщається лише дві скибки. За який найкоротший час можна їх підсмажити, якщо один бік підсмажують протягом 1 хвилини?

Незначну хитрість потрібно проявити при розв'язуванні цієї задачі. Полягає вона в тому, що обидва боки кожної скибки підсмажують не відразу. Підсмаживши один бік двох скибок, одну з них знімають зі сковорідки і підміняють її третьою скибкою. При таких діях на підсмажування усіх трьох скибок хліба витрачають 3 хвилини.

Вправа 4. Скільки існує цілих додатних чисел, менших від 100, які:

а) діляться на 2;

б) не діляться на 2;

в) діляться на 3;

г) діляться одночасно на 2 і на 3;

д) діляться на 2, але не діляться на 3;

е) діляться на 3, але не діляться на 2;

є) діляться або на 2, або на 3;

ж) не діляться ні на 2, ні на 3.

При відшуканні відповідей на вказані запитання можна було б виписати всі цілі додатні числа (їх ще називають натуральними) від 1 до 99 і порахувати, скільки серед них таких, які нас цікавлять. А можна відшукати закономірності, яким підпорядковані кількості чисел кожного з вказаних видів. Так, на 2 діляться лише парні натуральні числа 2, 4, 6, ..., 98. Це число можна записати як цілу частину дробу $\left[\frac{99}{2}\right]=49$. Оскільки натуральних чисел, менших від 100, є 99, а на 2 ділиться кожне друге натуральне число, то їх є 49.

Відповідь на наступне запитання **б)** встановлюється просто. Чисел, які не діляться на 2 , буде 99 – 49 = 50.

На 3 ділиться кожне третє число вказаної послідовності: 3, 6, 9, ..., 96, 99. Їх буде $\left[\frac{99}{3}\right]=33$.

Щоб відповісти на запитання **г)**, можна було б відшукати, скільки натуральних чисел, менших від 100, ділиться на 6. Це буде $\left[\frac{99}{6}\right]=16$. Відповідь можна знайти, якщо з послідовності чисел 3, 6, 9, 12, ..., 96, 99, кратних 3 вибрати лише парні числа, їх буде 16. Таку ж відповідь одержали б, якби обчислили $\left[\frac{99}{6}\right]=16$. Подумайте і поясніть, чому числа $\left[\frac{33}{2}\right]$ і $\left[\frac{49}{3}\right]$ дають відповідь на це запитання.

Чисел, які діляться на 2, але не діляться на 3, буде 49 – 16 = 33. Чисел, які менші за 100 і діляться на 3, але не діляться на 2, буде 33 – 16 = 17.

Очевидно, що натуральних чисел, які не перевищують 99 і діляться на 2 або на 3, буде 49 + 33 – 16 = 66. Відповідь на запитання **ж)** буде 99 – 66 = 33.

Зрозуміло, що можна було б розглядати й інші аналогічні запитання. Наприклад, скільки існує натуральних чисел, які не перевищують 1000 і не діляться ні на 5, ні на 6, ні на 7. Поясніть, чому відповідь не це запитання була б: $1000-\left[\frac{1000}{5}\right]-\left[\frac{1000}{6}\right]-\left[\frac{1000}{7}\right]+\left[\frac{1000}{30}\right]-\left[\frac{1000}{35}\right]+\left[\frac{1000}{42}\right]-\left[\frac{1000}{210}\right]=572$.

Вправа 5. Скільки існує цілих двоцифрових додатних чисел, менших за 100, цифри яких:

а) ідуть у зростаючому порядку (тобто так, що перша цифра менша за другу);

б) у спадному порядку;

в) у не зростаючому порядку (перша цифра більша або дорівнює другій)?

а) У першому десятку таких чисел немає, у другому їх 8, бо числа 10 і 11 вказаної властивості не мають. І так далі. Усіх двоцифрових натуральних чисел, які не перевищують 100 і у записі яких цифри йдуть у зростаючому порядку, буде 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36.

б) У спадному порядку йдуть цифри чисел 10, 20, 21, 30, 31, 32, і т. д. Якщо міркувати так, як у випадку **а)**, то знайдемо 45 двоцифрових чисел, цифри у яких йдуть у спадному порядку.

в) Є 9 двоцифрових чисел 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 і 99, цифри яких рівні між собою. Про ці числа можна сказати, що їх цифри йдуть у не зростаючому (або якщо потрібно — у не спадному) порядку. Тому чисел, цифри яких йдуть у не зростаючому порядку, було 45 + 9 = 54.

Вправа 6. (Задача № 978 з підручника алгебри для 7 кл.)

Є чотири кульки однакових розмірів, але різної маси. За допомогою скількох зважувань на шалькових терезах без важків можна розмістити ці кульки в порядку спадання маси?

Очевидно, що кожне зважування двох кульок дозволяє визначити, яка з них має більшу, а яка меншу масу.

Два зважування дозволяють виділити в двох парах важчі і легші кульки. Третє зважування визначає серед двох важчих — найважчу, а четверте — серед двох легших кульок — найлегшу. За допомогою п’ятого зважування упорядковуємо маси двох кульок, які залишились.

Вправа 7. Серед присутніх у кімнаті шість студентів знають англійську мову, стільки ж — німецьку і сім студентів знають французьку мову. Один з цих студентів знає всі три згадані мови, чотири студенти знають німецьку і англійську, два — французьку й англійську, три знають німецьку і французьку мови. Скільки присутніх в цій кімнаті, якщо кожен з них знає хоч би одну з названих мов?

Якби з кімнати вийшов той студент, який знає всі три мови, то отримали б ситуацію, яка описується другим рядком таблиці. Якби вийшли ті три студенти, які знають по дві іноземні мови, ситуація відображалася б третім рядком. У кімнаті після цього залишилося б 4 студенти. Оскільки вийшло 7 студентів, то шукана відповідь 11.

При розв’язуванні цієї задачі доцільно скористатись табличним записом.

	а	н	ф	ан	аф	нф	анф
Спочатку	6	6	7	4	2	3	1
Після першого виходу	5	5	6	3	1	2	0
Після другого виходу	1	0	3	0	0	0	0

Вправа 8. (Жартівлива задача Льюїса Керролла). У жорстокому бою 70 із 100 піратів втратили одне око, 75 втратили вухо, 80 поранені в руку, 85 — в ногу. Яка мінімальна кількість тих, хто зазнав одночасно всіх чотирьох поранень, тобто поранений в око, вухо, руку і ногу?

Якщо б всі 30 піратів, які зберегли свої очі, були поранені в вухо, то 45 були б поранені двічі (в око і вухо). Отже, було б лише 55 піратів з одним пораненням в око або в вухо. Коли б усі вони були поранені в руку, то було б лише 25 піратів, які одержали три поранення (в око, вухо і руку), і 75 мали б лише два поранення. Коли б усі ці 75 піратів були поранені в ногу, то лише 10 чоловік одержали б по четвертому пораненню. Це є мінімальна кількість людей, які могли б одержати всі чотири поранення. Зрозуміло, що максимальною кількістю тих, які могли б одержати всі 4 поранення, є 70.

Подібних за змістом задач є чимало у різних наборах вправ на математичну кмітливість. Тим, хто зацікавився ними, не важко відшукати аналогічні вправи самостійно.

§2. ЗАГАЛЬНІ ПРАВИЛА КОМБІНАТОРИКИ

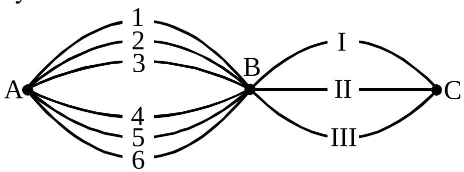
Розглянемо ті узагальнення, які можна зробити з наведених розв'язків вправ. Зокрема, виділимо два правила, з допомогою яких розв'язується більшість комбінаторних задач — правила суми і добутку.

Уявімо собі, що на поличці є n різних книг. Довільним способом з цієї полички вибирають книгу. Зрозуміло, що є n різних можливостей здійснити цей вибір. Нехай ці книги перенесли і розклали на дві полички: на одну виклали k книг, а на другу — m. Очевидно, що $k + m = n$. Якщо ми хотіли б знову забрати одну книгу, то існує k можливостей вибрати з першої полички і m можливостей — з другої. Тому кількість способів вибрати одну книгу з першої або другої полички залишилась без змін, бо $k + m = n$.

Отже, якщо деякий предмет A можна вибрати k способами, а предмет B — m способами, то вибрати, один з предметів A або B можна $k + m$ способами.

Це і є так зване *правило* суми.

До другого правила ми прийдемо, розв'язуючи таку задачу. З міста A до міста B можна доїхати шістьма маршрутами, а з міста B до міста C — трьома. Скільки різних маршрутів можна підібрати, щоб доїхати з міста A до міста C, відвідавши при цьому місто B?



Якщо проаналізувати накреслену схему, то можна бачити, що існує 18 різних маршрутів з A в C. Дійсно, з A до B можна проїхати першим маршрутом і продовжити поїздку одним з трьох маршрутів I, II або III. Маршрут стане іншим, якщо з A до B ми поїдемо другим маршрутом, а потім виберемо або I, або II, або III маршрути, і т.д. Узагальнюючи розв'язання цієї задачі, маємо:

Якщо об'єкт A можна вибрати m способами, а після цього другий об'єкт B можна вибрати k способами (незалежно від того, як вибрали об'єкт A), то пару об'єктів A і B можна вибрати $m \cdot k$ способами.

У цьому полягає друге основне правило комбінаторики, яке називають *правилом множення*.

§3. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ КОМБІНАТОРИКИ

3.1. Перестановки

Існує чимало практичних задач, у яких доводиться встановлювати, скількома способами можна упорядкувати певну сукупність предметів. Предмети вважають упорядкованими, коли відомо, який предмет розміщують першим, який відповідно другим, третім тощо.

Така проблема виникає, наприклад, коли необхідно упорядкувати список учасників змагань, або коли серед документів принесених для підпису, потрібно встановити черговість їх розгляду. Вченого, який розшифровує анаграму із кількох букв, цікавить питання, скільки змістовних слів можна скласти з цих букв. Так, наприклад, з п'яти букв а, к, н, о, р можна скласти такі змістові слова, як ранок, коран, норка. З такими ж задачами зустрічаються і тоді, коли необхідно відімкнути секретний замок сейфа, автоматичної камери чи дверей будинку. Замок відмикається лише тоді, коли набрати певне «таємне слово», яке не обов'язково має бути змістовним.

Будь-які упорядковані послідовності всіх елементів скінченої множини прийнято називати перестановками. Число можливих перестановок з n елементів позначають символом P_n (читається «пе з ен»). Зрозуміло, що один предмет можна упорядкувати лише одним способом, а два предмети — двома способами. Неважко безпосередньо переконатись, що існує лише шість способів, якими можна упорядкувати три букви А, Б, В. Ось вони:

АБВ БАВ ВАБ АВБ БВА ВБА

Тому можна записати, що $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $P_3 = 6$.

Якщо виникає потреба підрахувати, скількома способами можна упорядкувати чотири букви А, Б, В і Г, то цей підрахунок зручно провести таким чином. У кожній із написаних вище шести перестановок вписати нову букву Г відповідно на першому, другому, третьому і четвертому місці. В результаті одержимо:

ГАБВ	АГБВ	АБГВ	АБВГ
ГАВБ	АГВБ	АВГБ	АВБГ
ГБАВ	БГАВ	БАГВ	БАВГ
ГБВА	БГВА	БВГА	БВАГ
ГВАБ	ВГАБ	ВАГБ	ВАБГ
ГВБА	ВГБА	ВБГА	ВБАГ

Усі ці чотириелементні перестановки будуть різними, бо ми у різних триелементних перестановках вписували букву Г на кожне з можливих чотирьох місць. Тому $P_4 = 24$.

Цей простий аналіз підводить нас до наступної так званої *рекурентної* формули (recurrent is — в перекладі з латини «повертаючий назад») $P_n = nP_{n-1}$.

Справді, щоб знайти всі можливі перестановки у множині з n елементів, необхідно у кожну перестановку, складену з перших $n - 1$ елементів, помістити приєднаний n-ий елемент відповідно на перше, друге, третє і т. д. місце. З цієї рекурентної формули, користуючись методом математичної індукції, можна вивести таке твердження.

Теорема 1. *Число P_n всіх перестановок з n елементів дорівнює добутку послідовних натуральних чисел від 1 до n включно.*

Тобто, $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

При $n \geq 1$ символом $n!$ позначають добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ усіх натуральних чисел від 1 до n. Він читається «ен факторіал» — від латинського слова factor, що означає «множник». Для зручності при використанні формул з комбінаторними числами домовились вважати, що $0! = 1$.

Справді, як уже зазначено вище, $P_1 = 1$, а $P_2 = 1 \cdot 2 = 2!$. Припустимо, що $P_{n-1} = (n-1)!$. Тоді, згідно з рекурентною формулою $P_n = nP_{n-1}$ маємо: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Надалі будемо вважати, що порожню множину теж можна упорядкувати одним способом і що, отже, $P_0 = 0! = 1$.

Корисно запам'ятати значення чисел $n!$, які інколи зустрічаються у практичних задачах.

$0! = 1$	$3! = 6$	$6! = 720$	$9! = 362880$
$1! = 1$	$4! = 24$	$7! = 5040$	$10! = 3628800$
$2! = 2$	$5! = 120$	$8! = 40320$	$11! = 39916800$

Теорему 1 можна довести інакше, а саме — скориставшись правилом множення. Нехай ми маємо множину, у якій є n елементів. Перший елемент перестановки можна вибрати n способами, а другий вже лише $(n-1)$ способами. Згідно правила множення очевидно, що перші два елементи можна вибрати $n(n-1)$ способами. Оскільки для вибору третього елемента існує лише $n-2$ можливості, то для вибору перших трьох елементів існує $n(n-1)(n-2)$ способів. Продовжуючи ці міркування, встановимо, що для вибору передостаннього елемента залишається лише два способи, а останній елемент вибирається лише одним способом. Тому $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Задача. Скільки шестицифрових чисел можна записати, користуючись цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо в записі кожну цифру можна використовувати лише один раз?

Шукана кількість шестицифрових чисел дорівнює значенню всіх перестановок з шести елементів, а саме, — числу $P_6 = 6! = 720$.

3.2. Завдання для самостійної роботи

1. Скільки різних триколірних прапорців з трьома горизонтальними смугами можна дістати, якщо взяти смуги червоного, синього і білого кольорів?

2. Доведіть формули:

а) $\dfrac{(m+5)!}{m!}$ = $(m + 1)(m + 2)(m + 3)(m + 4)(m + 5)$;

б) $\dfrac{n!}{(n-m)!}$ = $n(n - 1)\ldots(n - m + 2)(n - m + 1)$ при $n > m$.

3. Знайдіть значення виразу:

а) $8! + 7!$; **б)** $10! - 1!$; **в)** $\dfrac{8!-5!}{120}$.

Відповідь. **а)** $9 \cdot 7!$; **б)** $10! - 1$; **в)** 335.

4. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{k!}{(k-1)!}$; **б)** $\dfrac{(n+2)!}{n!}$; **в)** $\dfrac{3k(3k-1)!}{(3k)!}$; $(k \in n)$.

5. Виконайте дії:

а) $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$; **б)** $\dfrac{1}{(k-1)!}-\dfrac{1}{k!}$;

в) $\dfrac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)!}{(p-2)!}$;

г) $\dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(k-1))!}{m!}$; $(m \geq k)$.

Відповідь. **а)** $\dfrac{n}{(n+1)!}$; **б)** $\dfrac{k-1}{k!}$; **в)** $\dfrac{p!}{(p-2)!} = p(p-1)$; **г)** 1.

6. Скільки елементів має містити множина, щоб число всіх перестановок з них було:

а) не більш як 1000;

б) не менш як 500?

Відповідь. **а)** не більше 6; **б)** не менше 6.

7. Скількома способами можна скласти список з 9 учнів?

8. У пасажирському поїзді 14 вагонів. Скількома способами можна розподілити по цих вагонах 14 провідників, якщо за кожним вагоном закріплювати одного провідника?

9. З цифр 0, 1, 2, 3 складені різні чотирицифрові числа так, що в кожному немає однакових цифр. Скільки вийшло чисел?

Відповідь. 192.

10. З цифр 1, 2, 3, 4, 5, не повторюючи їх, склали всі можливі п’ятицифрові числа. З’ясуйте, скільки серед цих чисел таких, які: **а)** починаються цифрою 5; **б)** не починаються цифрою 5; **в)** починаються з 54; **г)** не починаються з 543.

Відповідь. **а)** 24; **б)** 96; **в)** 6; **г)** 96.

3.3. Розміщення

Вище ми вже вказували, що будь-яка множина із вказаними порядковими номерами її елементів називається упорядкованою.

В деяких задачах ставиться завдання визначити, скільки може існувати упорядкованих підмножин заданої множини. Цікаво, наприклад, підрахувати, скількома способами можна обрати голову кооперативу, його заступника і скарбника, якщо в цьому кооперативі 25 членів. Очевидно, що цих способів буде $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$.

Будь-яку упорядковану підмножину, яка містить m елементів даної n-елементної множини, де $m \leq n$, називають *розміщенням з n елементів по m елементів.*

З цього означення можна зробити висновок, що різні розміщення з n елементів по m відрізняються або складом елементів, які входять до них, або порядком їх розташування. Наприклад, з чотирьох букв А, Б, В, Г можна утворити 12 розміщень, які містять по 2 букви: АБ, АВ, АГ, БА, БВ, БГ, ВГ, ВА, ВБ, ГА, ГБ, ГВ.

Іноді необхідно підрахувати кількість різних розміщень з n елементів, взятих по m елементів. Наприклад, у згаданій вище задачі про вибори правління кооперативу, можна встановити, що головою міг би бути будь-хто з членів цього кооперативу, його можна було б обрати 25 способами. Для вибору його заступника, якщо вже обрали голову, залишається лише 24 можливості. Тому вибір голови і його заступника можна здійснити $25 \cdot 24 = 600$ способами. Скарбником міг би стати хтось з решти 23 членів кооперативу. Тому існує різних вище сказаних $600 \cdot 23 = 13800$ способів розв'язання цієї прозаїчної задачі.

Число розміщень з n елементів по m позначають символом A_n^m, (читається «а із ен по ем»).

Теорема 2. *Число різних розміщень з n елементів по m дорівнює добутку m послідовних натуральних чисел, з яких найбільшим є n. Тобто,*

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Перший елемент упорядкованої m-елементної підмножини можна вибрати n способами, другий — $(n-1)$ способом. Упорядкована пара елементів вибирається $n(n-1)$ способами. Упорядковану трійку елементів можна вибрати з n-елементної множини $n(n-1)(n-2)$ способами. Продовжуючи такі міркування, бачимо, що $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$.

Отриманий вираз можна записати таким чином: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$. Дійсно,

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\ldots(n-m)} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Задача. *Скільки різних трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо жодна з цифр у записі будь-якого з чисел не повторюється? Скільки таких чисел можна записати, використовуючи цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5?*

Зрозуміло, що в першому випадку шукане число дорівнює $A_6^3 = 120$. Для другого випадку відповідь така $A_6^3 - A_5^2 = 100$, оскільки в число розміщень у другому випадку входило б A_5^2, розміщень, у яких цифра 0 записана на першому місці.

Зауважимо, що для підрахунку кількості трицифрових чисел, цифри в яких могли б повторюватись, потрібні інші міркування. Їх ми розглянемо після введення поняття розміщення з повтореннями.

3.4. Комбінації

Зустрічаються задачі, у яких потрібно лише визначити кількість різних підмножин, які містять *k* елементів, взятих з даної *n*-елементної множини. Наприклад, нехай в групі є 25 студентів. Необхідно виділити трьох студентів, які б провідали хворого. При підборі такої трійки членів делегації немає істотного значення, в якому порядку будуть названі імена її членів. Делегація, до складу якої входять Іван, Оля і Наталка та ж сама, що й делегація, до складу якої ввійшли Іван, Наталка і Оля, якщо тільки в групі не існує кількох Іванів, Наталок чи Ольг і при підборі другої делегації ніхто із студентів не замінений.

Нехай маємо множину M, яка містить n різних елементів. Будь-яка підмножина заданої множини M, яка містить k елементів (де $0 \le k \le n$), називається комбінацією з даних n елементів, взятих по k елементів.

З цього означення випливає, що будь-які дві різні *k*-елементні комбінації відрізняються хоча б одним елементом. Відмітимо, що для комбінації, на відміну від інших видів комбінаторики, впорядкованості підмножини не вимагається.

Число різних комбінацій *n* елементів по *k* позначають символом C_n^k (читається «це із ен по ка»).

Кожна множина має дві тривіальні підмножини: одна з них є сама множина, а друга — порожня множина. Тому $C_n^0 = 1$ і $C_n^n = 1$. Очевидно також, що $C_n^1 = n$, бо з *n* елементів можна утворити лише *n* підмножин, кожна з яких містить по одному елементу.

Перед тим, як вивести формулу для обчислення C_n^k, покажемо, що має місце рівність $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$.

Серед розміщень з *n* по *k* елементів можна виділити класи упорядкованих *k*-елементних підмножин, які відрізняються лише порядком розміщення одних і тих же елементів. В кожному класі таких підмножин буде $P_k = k!$, а кількість класів — C_n^k. Отже, $C_n^k \cdot P_k = A_n^k$. Звідки $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k} = \dfrac{n!}{(n-m)!k!}$.

Ми маємо таку теорему.

Теорема 3. *Число всіх комбінацій n елементів, взятих по k, де* $0 \le k \le n$, *обчислюється за формулою* $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Можна дати ще одне доведення цієї теореми з допомогою методу математичної індукції. При $k = 0$ теорема справедлива, оскільки $C_n^0 = \dfrac{n!}{n!0!}$, $C_n^1 = n$, це число можна записати так: $C_n^1 = \dfrac{n!}{(n-1)!1!} = n$.

Для обґрунтування справедливості індуктивного переходу встановимо таку формулу: $C_n^k = \dfrac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1}$. З цією метою спочатку відмітимо, що з кожної $(k-1)$-елементної підмножини шляхом приєднання одного з решти $n - (k-1)$ елементів можна утворити $n - k + 1$ уже k-елементних підмножин. Оскільки, далі, усіх $(k-1)$-елементних підмножин є C_n^{k-1}, а кожна з них породжує $n - k + 1$ k-елементних підмножин, то з усіх $(k-1)$-елементних підмножин таким способом одержимо $(n - k + 1)C_n^{k-1}$ k-елементних підмножин. Однак, слід зважити на те, що при цьому кожна k-елементна підмножина враховуватиметься k різними способами:

1-й раз, якщо до підмножини $a_2 a_3 ... a_{k-1} a_k$ приєднати елемент a_1;

2-й раз, якщо до підмножини $a_1 a_3 ... a_{k-1} a_k$ приєднати елемент a_2;

нарешті, k-й раз, якщо до підмножини $a_1 a_2 a_3 ... a_{k-1}$ приєднати елемент a_k.

Тому $C_n^k = \dfrac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} \cdot C_n^{k-1}$. Для завершення доведення теореми 3 методом математичної індукції, припустимо, що $C_n^{k-1} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$. Спираючись на це припущення і встановлену формулу, маємо: $C_n^k = \dfrac{(n-k+1)n!}{k(k-1)!(n-k+1)!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Тим самим теорему доведено.

Після розглянутого легко дати відповідь до задачі, умова якої наведена на початку цього пункту. Вибір трьох учнів для провідин хворого можна здійснити $C_{25}^3 = \dfrac{25!}{3! \cdot 22!} = \dfrac{23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300$ способами.

3.5. Деякі комбінаторні тотожності

Під час розв’язування комбінаторних задач часто використовують різні комбінаторні тотожності. Наведемо деякі з властивостей числа комбінацій.

11. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

12. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

13. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

14. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

15. $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m$.

Довести ці тотожності можна, спираючись на вираз для числа C_n^k, або на інші міркування. Так, властивість (2) очевидна на основі теореми 3. Дійсно,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\cdot(n-k)!} = C_n^{n-k}$$

А можна міркувати ще й так: кожній *k*-елементній підмножині відповідає ($n-k$)-елементна підмножина, до якої входять ті $n-k$ елементів, які залишились. Тому кількість різних *k*-елементних комбінацій, а їх буде C_n^{n-k}, відповідає стільки ж різних ($n-k$)-елементних комбінацій. Тому $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Доведемо тотожність 14 методом математичної індукції. Її можна прочитати так: «Кількість всіх підмножин *n*-елементної множини дорівнює 2^n».

При $n = 1$ це твердження правильне, оскільки одноелементна множина має лише дві тривіальні підмножини: порожню множину і саму задану множину. Двоелементна множина М = (*a*, *b*) має чотири підмножини: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{a,b\}$ і $\{b\}$. Це узгоджується з тим, що $C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$.

Припустимо, що кожна множина з *k* елементів має 2^k підмножин. Приєднаємо до цієї множини ще один елемент *x* і одержимо (k + 1)-елементну множину. Відберемо всі ті множини, до яких не входить елемент *x*. Їх, згідно з припущенням, буде 2^k. Приєднаємо до кожної з цих підмножин елемент *x*. Одержимо ще 2^k різних підмножин. Тому кількість підмножин (k + 1)-елементної множини дорівнює $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

Тотожність 14 доведена.

Зробіть спробу самостійно довести інші властивості. З ними ми ще зустрінемось пізніше. Так, наприклад, четверту тотожність можна довести, спираючись на властивості бінома Ньютона, який ми розглянемо нижче.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Довести тотожність $A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = k^2 \cdot A_{n+k}^n$.

$$A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=\frac{(n+k)!}{(n+k-n-2)!}+\frac{(n+k)!}{(n+k-n-1)!}=\frac{(n+k)!}{(k-2)!}+\frac{(n+k)!}{(k-1)!}=$$

$$=\frac{(n+k)!\cdot(k-1)k}{k!}+\frac{(n+k)!\cdot k}{k!}=\frac{(n+k)!\cdot k}{k!}\cdot\left(k^2-k+k\right)=k^2\cdot A_{n+k}^{n}.$$

Приклад 2. Спростити: $\dfrac{C_n^1}{C_n^0}+\dfrac{2C_n^2}{C_n^1}+\dfrac{3C_n^3}{C_n^2}+...+\dfrac{n\cdot C_n^n}{C_n^{n-1}}$.

Виразимо доданки цієї суми іншим способом:

$$\frac{C_n^1}{C_n^0}=\frac{n!}{(n-1)!}:\frac{n!}{n!}=n; \qquad \frac{2C_n^2}{C_n^1}=\frac{2\cdot n!}{(n-2)!\cdot 2}:\frac{n!}{(n-1)!}=n-1.$$

$$\frac{3C_n^3}{C_n^2}=\frac{3\cdot n!}{3!\,(n-3)!}:\frac{n!}{2!\,(n-2)!}=\frac{(n-2)!}{(n-3)!}=n-2;$$

$$\frac{kC_n^k}{C_n^{k-1}}=\frac{k\cdot(n)!}{k!\,(n-k)!}:\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}=n-k+1.$$

Тоді шукана сума дорівнює $n+(n-1)+(n-2)+\ldots+n-k+1+n-k+\ldots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння $P_{x+1}:A_{x-1}^{x-4}\cdot 3!=30$.

Спростимо вираз у лівій частині рівняння

$$P_{x+1}:A_{x-1}^{x-4}\cdot 3!=(x+1)!:\frac{(x-1)!}{3!}\cdot 3!=\frac{(x+1)!}{(x-1)!}=x(x+1).$$

Рівняння $x(x+1)=30$ має два корені: $x_1=-6$; $x_2=5$. За змістом задачі число x має бути натуральним, що задовольняє обмеження $x\geq 4$. Тому рівняння має єдиний розв’язок $x=5$.

3.6. Вправи для самостійного розв’язування

16. На площині розміщено 10 точок, жодні 3 із яких не лежать на одній прямій і жодні 4 не лежать на одному колі. Скільки кіл можна провести через ці 10 точок, якщо кожне коло проходить через 3 з цих точок.

17. Скільки різних акордів можна зіграти на 10 вибраних клавішах рояля, якщо в кожному акорді може бути від трьох до десяти звуків.

18. У підрозділі 80 солдат і 6 офіцерів. Скількома способами можна призначити патруль, у складі якого два офіцери і три солдати?

19. Довести, що:

а) $C_6^0+C_6^1+C_6^2=C_6^4+C_6^5+C_6^6$;

б) $C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3=C_7^4+C_7^5+C_7^6+C_7^7$;

в) $C_{10}^{7}+C_{10}^{8}=C_{11}^{8}$;

г) $C_{n}^{m}+C_{n}^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$;

д) $C_{9}^{9}+C_{10}^{9}+C_{11}^{9}+...+C_{20}^{9}=C_{21}^{10}$;

е) $C_{n}^{k}\cdot C_{n-k}^{m-k}=C_{n}^{k}\cdot C_{n}^{m}$.

Звертаємо увагу на вправу г). Її можна розв'язати кількома способами. На основі неї згодом обґрунтуємо доведення формули бінома Ньютона, яка особливо часто використовується при аналізі імовірнісних процесів.

г) $C_{n}^{m}+C_{n}^{m+1}=\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}+\dfrac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!}=\dfrac{n!}{m!\,(n-m-1)!}\times$

$$\times\left(\frac{1}{n-m}+\frac{1}{m+1}\right)=\frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!}=C_{n+1}^{m+1}.$$

Тому $C_{10}^{7}+C_{10}^{8}=C_{11}^{8}$, що є відповіддю на вправу в).

Оскільки $C_{9}^{9}+C_{10}^{9}=C_{11}^{10}$, то $C_{11}^{9}+C_{11}^{10}=C_{12}^{10}$; $C_{12}^{9}+C_{12}^{10}=C_{13}^{10}$; $C_{13}^{9}+C_{13}^{10}=C_{14}^{10}$ тощо, поки не одержимо $C_{19}^{9}+C_{19}^{10}=C_{20}^{10}$, і, нарешті, $C_{20}^{9}+C_{20}^{10}=C_{21}^{10}$.

Рівність $C_{n}^{m}+C_{n}^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$ можна довести ще і так. Нехай маємо $n+1$ елементів. Виділимо серед них деякий один, який умовно позначимо a. Утворимо C_{n}^{m} комбінацій, до жодної з яких не входить елемент a. Приєднаємо елемент a до кожної утвореної комбінації. Їх стане C_{n}^{m+1} і всі вони будуть різні. Тому $C_{n}^{m}+C_{n}^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$.

§4. ФОРМУЛА БІНОМА НЬЮТОНА

При розв'язуванні багатьох задач виникає потреба записати n-й степінь двочлена (бінома) $a+b$ в розгорнутому вигляді. Відомо, що $(a+b)^0=1$, $(a+b)^1=a+b$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Перемноживши $a+b$ на $(a+b)^3$, отримаємо $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

Аналогічно можна обчислити $(a+b)^5$, $(a+b)^6$ і т. д. Якщо коефіцієнти розкладу $(a+b)^n$ при $n=0, 1, 2,\ldots$ виписувати у порядку зростання показника степеня числа b, то ці коефіцієнти утворять нескінченну трикутну таблицю.

$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

Така таблиця в XIII ст. була відома вже арабським математикам. Вперше її властивості детально вивчив французький математик, фізик і філософ Блез Паскаль (1623-1662). На його честь цю таблицю називають *трикутником Паскаля*. Домовимось рядок трикутника Паскаля, який відповідає $n = 0$, називати нульовим, рядок, який відповідає $n = 1$ — першим і т. д.

З наведеного фрагмента трикутника Паскаля можна побачити такі закономірності:

1. «Бічні сторони» трикутника Паскаля утворені одиницями.

2. Рядки симетричні відносно «висоти»: числа, які рівновіддалені від початку і від кінця рядка, однакові.

3. Сума двох сусідніх чисел одного рядка дорівнює числу, яке стоїть під ними в наступному рядку. Наприклад, додавши 1 і 4 з четвертого рядка, дістанемо число 5, яке стоїть під ними в п'ятому рядку.

Інколи трикутник Паскаля записують так:

$n = 0$	C_0^0				
$n = 1$	C_1^0	C_1^1			
$n = 2$	C_2^0	C_2^1	C_2^2		
$n = 3$	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	
$n = 4$	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4

Розглянемо числа із третього рядка трикутника Паскаля:

$$C_3^0 = \frac{3!}{3!\cdot 0!} = 1, \quad C_3^1 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3, \quad C_3^2 = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3, \quad C_3^3 = \frac{3!}{0!\cdot 3!} = 1.$$

Провівши обчислення, можна переконатися, що четвертий його рядок утворюють числа C_4^0, C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4. Виникає припущення, що n-й рядок трикутника Паскаля утворюють числа:

$$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2, ..., C_n^{n-1},\ C_n^n. \qquad (1)$$

Зважимо й на те, що з тотожностей 11 – 13 для числа комбінацій (див. §3.5) випливає, що числа C_n^k задовольняють відзначеним вище властивостям трикутника Паскаля. Істинність вказаного припущення випливає з наступної теореми.

Теорема. *Які б не були вирази a і b і яке б не було натуральне число n, має місце рівність (формула бінома Ньютона):*

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n. \qquad (2)$$

Доведення теореми проведемо методом математичної індукції.

1. При $n = 1$ формула (2) правильна, оскільки $(a + b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^1 b$.

2. Нехай формула (2) правильна при $n = m$, тобто

$$(a + b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1}b + \ldots + C_m^k a^{m-k}b^k + \ldots + C_m^{m-1} ab^{m-1} + C_m^m b^m.$$

Враховуючи це припущення, при $n = m + 1$ матимемо:

$(a + b)^{m+1} = (a + b) \cdot (a + b)^m =$

$= (a + b) \cdot (C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1}b + \ldots + C_m^k a^{m-k}b^k + C_m^{k+1} a^{m-k-1}b^{k+1} + \ldots + C_m^{m-1} ab^{m-1} +$

$+ C_m^m b^m) = C_m^0 a^{m+1} + C_m^1 a^m b + \ldots + C_m^k a^{m-k+1}b^k + C_m^{k+1} a^{m-k}b^{k+1} + \ldots + C_m^{m-1} a^2b^{m-1} +$

$+ C_m^m ab^m + C_m^0 a^m b + C_m^1 a^{m-1}b^2 + \ldots + C_m^k a^{m-k}b^{k+1} + C_m^{k+1} a^{m-k-1}b^{k+2} + \ldots + C_m^{m-1} ab^m +$

$+ C_m^m b^{m+1} = C_m^0 a^{m+1} + (C_m^1 + C_m^0)a^m b + \ldots + (C_m^{k+1} + C_m^k)a^{m-k}b^{k+1} + \ldots + (C_m^m +$

$+ C_m^{m-1})ab^m + C_m^m b^{m+1}.$

Враховуючи, крім того, що $C_m^0 = C_{m+1}^0$, $C_m^m = C_{m+1}^{m+1}$ і $C_m^{k+1} + C_m^k = C_{m+1}^{k+1}$, отримаємо: $(a + b)^{m+1} = C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + \ldots + C_{m+1}^{k+1} a^{m-k}b^{k+1} + \ldots + C_m^m ab^m + C_{m+1}^{k+1} b^{m+1}$.

Отже, на основі принципу математичної індукції формула (2) правильна для будь-якого натурального n.

Многочлен, який стоїть в правій частині формули бінома Ньютона, називається розкладом бінома. Згідно з доведенням, коефіцієнтами цього розкладу є числа (1). Через те числа C_n^0, C_n^1, $C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$, C_n^n називають *біноміальними коефіцієнтами*.

Використовуючи формулу бінома Ньютона, можна заповнити 6-й, 7-й і т. д. рядки наведеного вище фрагмента трикутника Паскаля. Так, в шостому ряду будуть стояти числа:

$C_6^0 = 1, \quad C_6^1 = 6, \quad C_6^2 = 15, \quad C_6^3 = 20, \quad C_6^4 = 15, \quad C_6^5 = 6, \quad C_6^6 = 1,$

(і, отже, $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$). Однак, простіше записати 6-й рядок трикутника Паскаля, використавши 5-й його рядок і властивості 1 – 3 цього трикутника. Подумайте, як це зробити.

З доведеної теореми, як наслідки, випливають такі дві властивості біноміальних коефіцієнтів, першу з яких уже було відзначено в § 4.

1. Сума всіх біноміальних коефіцієнтів для даного бінома дорівнює 2^n.

Покладемо в формулі (2) $a = b = 1$. Матимемо:

$(1 + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$.

Тому $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

2. Сума біноміальних коефіцієнтів, які стоять на парних місцях, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів, які стоять на непарних місцях.

Покладемо у формулі (2) $a = 1$, $b = -1$. Матимемо:

$0 = (1 - 1)^n = C_n^0 + C_n^1(-1)^1 + C_n^2(-1)^2 + \ldots + C_n^{n-1}(-1)^{n-1} + C_n^n(-1)^n$, тобто

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0. \qquad (3)$$

Якщо n — парне, то $C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1}$.

Якщо ж n — непарне, то $C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} = C_n^1 + \ldots + C_n^n$.

Той доданок в розкладі бінома $(a + b)^n$ який містить множник b^k, будемо називати k-тим членом цього розкладу, а позначають його T_k. Наприклад,

$T_0 = C_n^0 a^n$ є нульовим членом, $T_1 = C_n^1 a^{n-1} b$ є першим членом і т. д. Тоді загальний член: $T_k = C_n^k a^{n-k} b^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Приклад 1. Знайти член розкладу $(x^2 + x^{-3})^{25}$, який не містить x.

Запишемо загальний член розкладу: $T_k = C_{25}^k (x^2)^{25-k}(x^{-3})^k = C_{25}^k x^{50-5k}$. За умовою задачі має бути $50 - 5k = 0$. Звідки $k = 10$. Отже, десятий член розкладу не містить x.

Приклад 2. Сума біноміальних коефіцієнтів другого і передостаннього членів розкладу $\left(x\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x^{-5}}\right)^n$ дорівнює 78. Знайти раціональні члени цього розкладу.

За умовою $C_n^2 + C_n^{n-1} = 78$. Розв'яжемо це рівняння (з невідомим n).

$\dfrac{n!}{2!\cdot(n-2)!} + \dfrac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} = 78$; $\quad \dfrac{(n-1)n}{2} + n = 78$; $\quad n^2 + n - 156 = 0$; $\quad n = 12$.

Загальний член розкладу має вигляд:

$$T_k = C_{12}^k \cdot \left(x\sqrt[4]{x}\right)^{12-k} \left(\sqrt[8]{x^{-5}}\right)^k = C_{12}^k \cdot x^p,$$

де $p = \dfrac{5}{4}(12 - k) - \dfrac{5}{8}k = 15 - \dfrac{15}{8}k$. Для того, щоб T_k був раціональним, необхідно і достатньо, щоб число $15 - \dfrac{15}{8}k$ було цілим. Це може бути лише при тих k, які діляться на 8. Оскільки $0 \le k \le 12$, то $k = 0$ або $k = 8$. Отже, раціональними членами розкладу є $T_0 = C_{12}^0 \cdot \left(x\sqrt[4]{x}\right)^{12} = x^{15}$ і $T_8 = C_{12}^8 \cdot \left(x\sqrt[4]{x}\right)^4 \left(\sqrt[8]{x^{-5}}\right)^8 = 495$.

Приклад 3. Довести тотожність $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} n C_n^n = 0$.

$$C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} n C_n^n =$$

$$\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} - 2\cdot\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} + 3\cdot\frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!} - \ldots + (-1)^{n-1} n \cdot \frac{n!}{(n-n)!\cdot n!} =$$

$$= n\cdot\left(\frac{(n-1)!}{(n-1)!\cdot 0!} - \frac{(n-1)!}{(n-2)!\cdot 1!} + \frac{(n-1)!}{(n-3)!\cdot 2!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{0!\cdot(n-1)!}\right) =$$

$$= n\left(C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1}\right).$$

Згідно з рівністю (3), вираз в дужках дорівнює 0. Тотожність доведено.

Згодом студенти переконаються, що властивості бінома Ньютона будуть ефективно використовуватися у «Теорії ймовірностей».

§5. УЗАГАЛЬНЕННЯ ВВЕДЕНИХ КОМБІНАТОРНИХ ПОНЯТЬ

До цього часу розглядалися задачі, у яких переставлялися об'єкти попарно різні. Однак на практиці виникає потреба розглядати перестановки, у яких можуть деякі елементи повторюватися. Зокрема, кожна людина зустрічається з такою потребою при записах деяких чисел у вибраній нумерації, при написанні слів, нумерації автомобільних знаків тощо.

Відомо, що переставляючи букви слова ранок можна утворити 5! = 120 різних буквосполучень. Серед них можуть бути і інші змістовні слова, наприклад, норка, Коран.

Якщо аналогічне запитання поставити до слова математика, що має десять букв, то різних буквосполучень із цих букв буде менше, ніж 10!. Ситуація тут змінилася, бо у цьому слові буква а повторюється 3 рази, по два рази використовуються букви м і т .

Неважко здогадатися, що різних буквосполучень буде $\frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 3!} = \frac{10!}{24} = 15120$

Справді, уявім собі, що всі букви різні. А саме $м_1а_1т_1е_1м_2а_2т_2ика_3$. Тоді усіх «різних» перестановок буде 10!. Однак, $м_1а_1т_1е_1м_2а_2т_2ика_3$ змістовно не відрізняються від записів $м_2а_2т_1е_1м_1а_3т_1а_3$. Кожне буквосполучення буде зустрічатися по 24 рази. Це число одержується як добуток чисел 2! ·2! · 3!. Подумайте, чому так.

5.1. Перестановка з повтореннями

Узагальнюючи розв'язання цієї задачі, можна ввести поняття перестановки з повтореннями. Нехай маємо множину, яка складається з елементів *a*, *b*, *c*, *d*,…, *e*. Перестановки, у яких елемент *a* повторюється α разів, елемент *b* повторюється β разів, елементи *c* і *d* відповідно, γ і δ разів і т.д., а останній елемент *e* повторюється λ разів, називаються перестановками з повторенням. Число усіх можливих таких перестановок позначається символом $\overline{P}_{\alpha,\beta,\ldots,\gamma}$. Наприклад, перестановками з повтореннями, в яких елемент *a* повторюється 2 рази, а елемент *b* — 3 рази, є *aabbb ababb abbab abbba baabb babab babba bbaab bbaba bbbaa*

Таких перестановок є 10. тому $\overline{P}_{2,3} = 10$. Справджується така теорема.

Теорема 4. *Число різних перестановок з повтореннями, у яких, елементи a,b,c,d,…, l повторюються відповідно* α, β, Υ, δ,…, λ *разів, визначається за формулою:* $\overline{P}_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\lambda} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots\lambda!}$

Доведення цієї теореми нескладно провести, узагальнюючи розв'язання попередньої задачі про слово математика. Зробіть це самостійно.

Задача. Скільки шестицифрових чисел можна записати, користуючись цифрами 1, 2, 3, якщо в кожному з чисел цифра 1 повинна повторюватись 2 рази, цифра 2 — 3 рази, цифра 3 — 1 раз?

Кількість таких шестицифрових чисел дорівнює $\overline{P}_{2,3,1} = \dfrac{6!}{2!3!1!} = 60$.

Задача. Доведіть, що існує лише 6 різних перестановок букв у слові мама. Запишіть усі різні буквосполучення, утворені з цього слова. *Відповідь*. Мама, маам, ммаа, амам, амма, аамм. $\overline{P}_{2,2} = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!}$.

5.2 Комбінації з повтореннями

Проаналізуємо розв'язання такої задачі.

В крамниці продаються поштові листівки. До послуг покупців є 15 різних видів листівок. Студентці потрібно привітати своїх рідних і друзів, а для цього їй необхідно придбати 12 листівок. Звичайно, можна закупити всі 12 однакових листівок, можна, також, придбати по декілька однакових листівок, а можна закупити всі різні листівки. Скільки існує способів здійснення такої купівлі?

Позначимо кількість цих способів символом $Г_{15}^{12}$. При розв'язанні цієї задачі скористаємось принципом взаємно-однозначної відповідності, який полягатиме в тому, що кожному вибору закуплених листівок поставимо у відповідність один і тільки один певний символ, а різним символам відповідатимуть різні способи куплених наборів.

Для цього кожній конкретній можливості здійснення покупки поставимо у відповідність 14 вертикальних рисок (умовних перегородок між наборами однакових листівок) 12 знаків «+» за таким правилом: перед першою з рисок запишемо стільки знаків «+», скільки листівок першого виду виявилось у покупці; перед другою рискою — стільки знаків «+», скільки було закуплено листівок другого виду, і так далі. Нарешті, після 14-ї риски відповідною кількістю знаків «+» відзначимо кількість куплених листівок останнього 15-го виду. Якщо яких-небудь листівок не вибрали, то між відповідними рисками не ставимо «+». (Наприклад, покупці з п'яти листівок 2-го виду та з семи листівок 5-го виду відповідатиме символ I+++++III+++++++IIIIIIIII). Очевидно, що і навпаки, будь-якій такій послідовності з 14 рисок і 12 знаків «+» відповідатиме певна можлива схема здійснення купівлі листівок. Для розв'язання задачі, отже, необхідно підрахувати, скількома способами можна утворити описані набори, у яких вертикальні риски повторюються 14 разів, а знаки «+» — 12 разів.

Очевидно, що $Г_{15}^{12} = \overline{P}_{14,12} = \dfrac{(12+14)!}{12!14!}$; $Г_{15}^{12} = \dfrac{26!}{12!14!} = C_{12+15-1}^{12} = C_{26}^{12}$.

Узагальнюючи розв’язання цієї задачі, припустимо, що нам дано набір з n різних елементів. Підрахуємо, скількома способами можна підібрати k елементів, кожен з яких є одним з елементів заданого набору. Такі множини називають комбінаціями з повтореннями з даних n елементів по k елементів, а їх число позначають символом Γ_n^k. (Наприклад, комбінаціями з повтореннями в групах по три елементи з двох букв a і b є: (a; a; a), або (a; a; b), або (a; b; b), або (b; b; b)). Отже, Γ_2^3. Зрозуміло, що при $k \le n$, усі комбінації без повторень входять до числа комбінацій з повтореннями.

Сформулюємо таку теорему.

Теорема 5. *Число різних комбінацій з повтореннями з* n *елементів по* k *визначається за формулою:* $\Gamma_n^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$.

Щоб підрахувати кількість комбінацій з повтореннями з n елементів a_1, a_2,..., a_n, по k в загальному випадку, скористаємось принципом взаємно-однозначної відповідності. Для цього кожній конкретній комбінації з повтореннями з n елементів по k поставимо у відповідність символ з $n - 1$ нуля і k одиниць так, щоб: перед першим нулем стояло стільки одиниць, скільки разів у даній комбінації зустрічається елемент a_1; між першим і другим нулями впишемо стільки одиниць, скільки разів зустрічається елемент a_2; між другим і третім нулями впишемо стільки одиниць, скільки разів зустрічається елемент a_3, і т.д.; після останнього ($n - 1$)-го нуля запишемо стільки одиниць, скільки разів зустрічається елемент a_n (якщо деякий елемент не зустрічається, то на відповідному місці не записуємо нічого).

Кількість таких послідовностей виражається числом $\overline{P}_{n-1},\ k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$, яке рівне кількості перестановок з повтореннями, у яких 1 повторюється k разів, а 0 повторюється $n - 1$ раз. Отже, $\Gamma_n^k = \overline{P}_{n-1k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$.

Задача. Скількома способами можна розділити тридцять зошитів між чотирма учнями?

Нехай при деякому розподілі зошитів першому учневі дісталось n_1, другому — n_2,третьому — n_3, і четвертому — n_4. Цей розподіл можна схематично зобразити так $\underset{n_1}{11...1}\ 0\ \underset{n_2}{11...1}\ \underbrace{011...1}_{n_3}\ \underbrace{011...1}_{n_4}$, де $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 30$. Тепер очевидно, що число можливих розподілів дорівнює числу комбінацій з повтореннями з 4 елементів по 30, тобто $\Gamma_4^{30} = \dfrac{(30+4-1)!}{(4-1)!30!} = \dfrac{33!}{3!30!}$ =5456.

5.3. Розміщення з повтореннями

Розглянемо дев'ятицифрове число 724343733. У його записі цифра 2 зустрічається лише 1 раз, цифра 3 — 4 рази, цифра 4 — 2 рази, стільки ж разів використана цифра 7. У п'ятицифровому числі 66666 всі п'ять цифр однакові. Дані два числа є прикладами розміщень з повтореннями із десяти цифр, задача складна тим, що конкретні числа можуть мати різну кількість цифр. Нижче виписані всі розміщення з повтореннями з двох букв a і b по 4 символи у кожному:

aaaa	*baaa*	*baab*	*babb*
aaab	*aabb*	*baba*	*bbab*
aaba	*abab*	*bbaa*	*bbba*
abaa	*abba*	*abbb*	*bbbb*

Усіх їх буде 16.

Нехай дано n різних елементів $a,b,c,\ldots,l$. Утворимо всі можливі упорядковані множини, кожна з яких містить k елементів. У них деякі елементи можуть повторюватись два, три,..., k разів. Такі упорядковані множини називають розміщеннями з повтореннями з n елементів по k.

Означення. Розміщеннями з повтореннями з даних n елементів по k, називають такі упорядковані множини, які містять по k елементів, кожен з яких є одним з елементів даної n-елементної множини.

Теорема 6. *Число різних розміщень з повтореннями з* n *елементів по* k *дорівнює* n^k.

Для доведення скористаємось правилом множення. Перший елемент розміщення з повтореннями можна підібрати n способами. Стількома ж способами можна підібрати і другий елемент. Тому перші два елементи разом можна підібрати n^2 способами. Аналогічно, третій елемент теж можна підібрати n способами і т.д. Останній k-й елемент так само можна вибрати n способами, адже елементи можуть повторюватись. Отже, за правилом множення, шукане число розміщень дорівнює n^k.

Доведення цієї теореми можна провести і за допомогою методу математичної індукції. Подумайте самостійно, як це можна зробити.

Задача. Скільки різних трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1,2,3,4,5,6, якщо цифри можуть повторюватись? Скільки таких чисел можна записати, використовуючи цифри 0,1,2,3,4,5?

В першому випадку шукане число дорівнює числу розміщень з повтореннями з 6 елементів по 3, тобто $6^3 = 216$. В другому випадку від знайденого числа, слід відкинути записи, у яких на першому місці стоїть цифра 0, наприклад, 012, 003, 000. Кількість таких записів дорівнює числу розміщень з повтореннями з 6 елементів (0,1,2,3,4,5) по 2 , тобто $6^2 = 36$. Отже, в другому випадку шукане число дорівнює $216 - 36 = 180$. Іншим способом це можна одержати як результат таких міркувань: перша цифра може бути будь-якою з п'яти (1,2,3,4,5), друга і третя — довільними з шести. Тому $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$.

§6. ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ

16. Скількома способами з 28 учнів класу можна вибрати групу для роботи в саду, якщо у групі може бути не більше 10 і не менше 4 чоловік?

Групу з чотирьох учнів можна вибрати C_{28}^{4} способами, інші групи — по 5, 6 і т.д., по 10 чоловік — можна вибрати відповідно $C_{28}^{5}, C_{28}^{6}, C_{28}^{7}, C_{28}^{8}, C_{28}^{9}, C_{28}^{10}$ способами. За правилом додавання обчислюємо шукане число (оцініть наближено його величину): $C_{28}^{5} + C_{28}^{6} + C_{28}^{7} + C_{28}^{8} + C_{28}^{9} + C_{28}^{10}$.

17. У хорі 12 хлопчиків і 12 дівчаток. Скількома способами хористів можна розмістити в ряд таким чином, щоб поряд не стояли два хлопчика і дві дівчинки?

Нехай хлопчики стоять на непарних місцях, а дівчатка — на парних. існує $(12!) \cdot (12!) = (12!)^2$ способів такого розміщення. Крім цього, є ще стільки ж способів, при яких хлопчики стоятимуть на парних місцях, а дівчатка — на непарних. Тому шукана відповідь $(12!)^2 + (12!)^2 = 2 \cdot (12!)^2$.

18. Необхідно виділити для охорони підприємства 6 солдат, 3 сержантів і 2 офіцерів. Скількома способами це можна зробити, якщо в роті є 30 солдат, 6 сержантів і 4 офіцери?

Відповідь. $C_{30}^{6} \cdot C_{6}^{3} \cdot C_{4}^{2}$.

19. Скільки дільників у числа 10^{10}?

Ця задача наведена у підручнику з алгебри для 6 класу, виданому у 1985 році (№ 1166). Один з можливих її розв’язків пов’язаний з розглядом добутку $(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{10}) \cdot (1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{10})$, якщо перемножити ці многочлени, то одержимо многочлен з 11^2 членів. Кожний з них є дільником заданого числа і всі вони різні. Тому всіх дільників 121, тобто 11^2.

Набагато природнішим є, однак, розв’язання, що ґрунтується на комбінаторному правилі множення. Дільниками числа $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10}$ є лише числа виду $2^n \cdot 5^m$, де n і m — цілі числа від 0 до 10. Показник n можна вибрати 11 способами. Те ж саме стосується показника m. Тому всіх дільників числа 10^{10} є $11 \cdot 11 = 121$.

20. Для карнавального походу готують різні прапори. Скількома способами з п’яти сувоїв стрічок різного кольору можна виготовити різні прапори, які мають по три горизонтальні смуги, якщо в одному прапорі жоден з кольорів не повинен повторюватись?

Відповідь. $A_{5}^{3} = 20$.

21. Скількома способами можна вибрати одну приголосну і одну голосну букву в слові математика, щоб одержати різні відкриті склади?

Різних приголосних букв у цьому слові 3, стільки ж різних голосних. Тому вказаних складів можна записати $3 \cdot 3 = 9$ способами. Поясніть, чому так.

22. З колоди карт, у якій є 52 різні карти, потрібно витягти 10 карт. Скількома способами це можна зробити?

Такий вибір можна зробити C_{52}^{10} способами.

У скількох випадках серед вибраних карт не буде жодного туза? У скількох випадках — чотири тузи? У скількох — рівно один туз?

Число C_{48}^{10} показує, у скількох випадках в одержаних наборах з десяти карт не буде жодного туза, число $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$ характеризує випадки, коли серед вибраних карт буде хоча б один туз. Чотири тузи буде знаходитись у C_{48}^{6} наборах (до чотирьох тузів додаються 6 карт із 48). Один туз буде в $C_4^1 \cdot C_{48}^9$ наборах. З'ясуйте, чому дано такі відповіді?

23. Номер автомобільного причепа містить дві букви і чотири цифри. Скільки різних номерів можна скласти з 30 букв і 10 цифр?

Перші дві букви можна вибрати 30^2 способами, адже букви можуть повторюватись. Чотири цифри можна вибрати 10^4 способами. Тому всіх різних номерних знаків може бути $30^2 \cdot 10^4 = 9000000$.

24. Ліфт, у якому знаходяться 9 пасажирів, може зупинятись на 10 поверхах. Пасажири виходять групами по двоє, троє і четверо чоловік. Скількома способами це може відбуватись?

Групу з двох чоловік можна утворити C_9^2 способами. Тоді групу з трьох чоловік з решти семи можна утворити C_7^3 способами. Третя група цілком визначиться вибором перших двох, бо $C_4^4 = 1$. Вибір трьох поверхів, на яких може вийти одна з груп, можливий $C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot A_{10}^3$ способами. Тому загальна кількість випадків, про які запитується в задачі, дорівнює або $C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot A_{10}^3$, або $C_9^3 \cdot C_6^4 \cdot C_2^2 \cdot A_{10}^3$, або $C_9^4 \cdot C_5^4 \cdot C_3^3 \cdot A_{10}^3$.

25. Із Києва до Чернігова можна добратися чотирма способами — поїздом, автобусом, літаком та теплоходом, а з Чернігова до Новгород–Сіверська двома — теплоходом і автобусом. Скількома способами можна здійснити подорож від Києва до Новгород–Сіверська із зупинкою у Чернігові?

Відповідь. 8.

26. У першості України з футболу у вищій лізі приймають участь 16 команд. Скількома способами теоретично між ними могли б бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі?

Золоті медалі теоретично може завоювати будь-яка із 16 команд. Якщо визначається можливість завоювати золоту медаль 16 способами, то срібну медаль може здобути будь-яка із 15 команд. Тому існує $16 \cdot 15 = 240$

способів завоювати золоту й срібну медалі. Усі три медалі теоретично можливо завоювати 3360 способами.

27. У групі 25 студентів. Щодня двоє з них чергують. Чи можна так скласти графік чергування на рік, щоб жодна пара тих самих студентів не чергувала два рази протягом року.

Кількість пар чергових у групі з 25 студентів становить $C_{25}^{2}=\frac{25\cdot 25}{2}=325$. У навчальному році менше, ніж 325 днів, тому такий графік чергування можна скласти.

28. Скільки діагоналей можна провести в *n*-кутнику (многокутнику, що має *n* сторін)?

Поясніть, чому різних діагоналей буде $\frac{n \;\; n-3}{2}$.

29. В опуклому *n*-кутнику проведено всі його діагоналі. Відомо, що жодні три діагоналі не мають спільної точки. Обчисліть: **а)** кількість точок перетину діагоналей; **б)** на скільки частин ці діагоналі поділяють многокутник.

а) Відомо, що для будь-якої четвірки вершин опуклого многокутника існує дві діагоналі, які перетинаються. Тому точок перетину буде стільки, скільки існує різних четвірок вершин у заданому многокутнику. Ця кількість — $C_{n}^{4}=\frac{n \;\; n-1 \;\;\; n-2 \;\;\; n-3}{24}$.

б) Подумайте, чому шукана відповідь $1+\frac{n \;\; n-1 \;\;\; n-2 \;\;\; n-3}{24}+\frac{n \;\; n-3}{2}$.

30. Скільки є чотирицифрових чисел, у яких кожна наступна цифра більша за попередню?

Визначимо кількість упорядкованих чотирицифрових чисел, цифри якого розміщені у порядку зростання. Методом перебору неважко встановити, що таких чисел, перша цифра в яких 1, буде 56; чисел, перша цифра в яких 2, буде 35, тих чисел, перша цифра в яких 3, буде 20; чисел, які починаються цифрою 4, буде 10. На цифру 5 починається 4 числа, на цифру 6 — 1. Усіх чисел, які мають таку властивість, буде 126. Цей результат можна одержати і на основі формули $\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{24}=126$. Подумайте, чому так можна обчислити кількість шуканих чисел.

31. Скільки є таких чотирицифрових чисел, у яких кожна наступна цифра менша від попередньої?

Шуканих чисел є $C_{10}^{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{24}=210$. У кожній з них можна єдиним способом упорядкувати їхні записи у вигляді числа, кожна наступна цифра якого менша від попередньої.

32. У буфеті продається 4 види булочок. Скількома способами можна купити 8 булочок?

Особливістю цієї задачі є те, що нам не важлива послідовність, у якій здійснювали купівлю. Могло трапитися, що вибрали 3 булочки одного виду і 5 булочок — іншого, могли купити по 2 булочки кожного виду. Кожну покупку можна зашифрувати за допомогою трьох нулів, які позначатимуть три границі між чотирма ящиками, у кожному з яких достатня кількість булочок одного виду. Перед першим нулем запишемо стільки одиниць, скільки купили булочок першого виду, між першим і другим нулем запишемо стільки одиниць, скільки купили булочок другого виду тощо. Числом 11011101011 позначають покупку 2 булочок першого виду, трьох булочок другого виду, однієї — третього виду та двох четвертого. Число різних покупок дорівнює кількості перестановок з повтореннями, які можна скласти із 8 одиниць і трьох нулів.

$$\Gamma_4^8 = \overline{P}\ \ 8{,}3\ \ = C_{11}^8 = \frac{11!}{8!\cdot 3!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3} = 165\,.$$

33. Скільки є трицифрових чисел, які записуються цифрами 0, 1, 2, 3, 4 і 5 та діляться на 3?

Розглянемо всеможливі двоцифрові числа. Їх буде 5 · 6 = 30. Якщо це число ділиться на 3, то третьою цифрою можна доставити 0 або 3. Якщо вибране двоцифрове число при діленні на 3 дає в остачі 1, то третьою цифрою може бути 2 або 5. Коли двоцифрове число при діленні на 3 дає в остачі 2, то третя цифра — 1 або 4. Тому шуканих трицифрових чисел буде удвічі більше, ніж утворених двоцифрових.

34. Скільки є п’ятицифрових чисел, які однаково читаються як зліва направо, так і справа наліво (наприклад, 63036)?

Першою цифрою може бути будь-яка цифра, крім нуля. Тому можливих двоцифрових чисел може бути 9 · 10 = 90. Стільки ж буде чисел, утворених двома останніми цифрами п’ятицифрового числа. Третьою цифрою може бути будь-яка із 10 цифр. Тому всього таких чисел 900.

35. Скільки існує чотирицифрових чисел, в записах яких усі цифри різні?

36. Скільки існує чотирицифрових чисел, в записах яких цифри можуть повторюватись?

37. Необхідно вибрати делегацію в складі чотирьох учнів одного класу і одного вчителя. Скількома способами це можна здійснити, коли в школі працює 20 вчителів, а у вибраному класі навчаються 36 учнів?

38. Автомобільний номер складається з п’яти цифр і двох літер, які стоять після цифр. Скільки різних номерів можна скласти, використовуючи 30 літер і 10 цифр?

39. У профспілковий комітет обрано 7 працівників. З них необхідно обрати голову, його заступника і секретаря. Скількома способами можна це зробити?

40. Є шість видів конвертів і 5 видів поштових марок. Скількома способами для відправки листа можна вибрати конверт і марку?

41. На площині задано 10 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?

42. На вершину гори прокладено шість стежин. Скількома способами турист може вибратись на вершину гори і опуститись вниз? Як зміниться відповідь, коли для спуску він не може вибрати ту стежину, якою піднімався?

43. Скільки всіх дільників у числа 2^{12}?

44. Скільки всіх дільників у числа 21600?

45. Для виконання певної роботи необхідно виділити не менше двох столярів, не менше трьох мулярів і не менше двох різноробочих. Скількома способами можна це зробити, якщо в бригаді всього є 6 мулярів, 4 столяри, і 10 різноробочих?

46. У купе є два дивани, на кожному з яких може сидіти по п'ять пасажирів. Скількома способами можна розмістити 10 осіб у цьому купе, якщо троє з них бажають сидіти так, щоб дивитись у напрямку руху поїзда, троє — проти руху поїзда, а чотирьом пасажирам байдуже, як сидіти?

47. Скількома способами можна розмістити 28 учнів класу, у якому є два ряди двомісних парт по 8 парт в кожному ряді?

48. У поштовому кіоску продають 12 видів листівок. Скількома способами можна закупити 7 листівок? Скількома способами можна вибрати 8 різних листівок? Скількома способами можна закупити 15 листівок?

Розв'язування. Зрозуміло, що 8 листівок можна вибрати $\Gamma_{12}^{8} = C_{19}^{8}$ способами. Кількість різних 8 листівок дорівнює $C_{12}^{8} = C_{12}^{4} = 495$. П'ятнадцять листівок можна закупити Γ_{12}^{15} способами. Їх кількість дорівнює C_{26}^{15}.

Додаткові задачі

49. Скількома способами можна розмістити на шахівниці дві тури так, щоб вони не загрожували одна одній?

50. Є квадратна таблиця розміром 8х8. Скількома способами в клітинках цієї таблиці можна записати три літери a і дві літери b?

51. Скільки різних чотирицифрових чисел, які діляться на 4 можна записати за допомогою цифр 3, 4, 5, 6, 7, якщо цифри в записі числа можуть повторюватись?

52. План міста має вигляд прямокутника, розділеного вулицями на квадрати. Таких квадратів в напрямі північ-південь є m, а в напрямі схід-захід — n. Скільки різних найкоротших доріг зв'язують одну з вершин прямокутника з протилежною?

53. При повороті аркуша паперу в його площині на 180° записи цифр 0, 1, 8 не змінюються, записи 6 і 9 переходять одне в одне, а записи решти цифр втрачають свій зміст. Скільки існує семизначних чисел, запис яких не змінюється при такому повороті аркуша паперу? Чому дорівнює сума всіх таких чисел? Скільки серед них таких, які діляться на 4?

54. Скільки пар різних підмножин множини M={1; 2; 3; 4;…; 10} можна утворити, якщо в одну підмножину можна включати два, три або чотири різних елементи множини?

55. Номер автобусного квитка складається з шести цифр. Квиток вважається щасливим, якщо сума перших трьох цифр дорівнює сумі трьох останніх. Довести, що сума номерів усіх щасливих квитків ділиться на 1001.

56. Скільки існує квадратів, вершини яких знаходяться у вузлах квадратної сітки розміром 9×10, а сторони паралельні сторонам сітки?

57. На колі взято n точок і проведено усі можливі хорди, що сполучають ці точки. Відомо, що жодні три з проведених хорд не перетинаються в одній точці. На скільки частин розбивається круг цими хордами?

58. В аудиторії 8 світильників. Скільки існує способів освітлення цієї аудиторії?

59. Три хлопчики зірвали 40 яблук. Скількома способами вони можуть розділити ці яблука?

60. Відстань від A до B — 999 км. Уздовж дороги стоять кілометрові стовпи, на яких відстані від A до B написано так:

0	999	;	1	998	;	2	997	...	999	0

Скільки серед цих стовпів таких, на яких є тільки дві різні цифри?

Заключне зауваження

Ми розглянули найважливіші поняття комбінаторики і приклади їх використання для підрахунку кількості можливих груп, утворених за певними правилами з елементів заданої множини. Це, так би мовити, комбінаторика в «чистому вигляді». Ми ще не торкались зв’язків комбінаторики з іншими розділами математики, зокрема з алгеброю, геометрією і математичним аналізом. Однак, автори надіються, що уважна робота з таким посібником зацікавить читача цим розділом математики. Тоді в пригоді йому стануть інші посібники, які він при потребі знайде у бібліотеці. Особливо читачеві необхідно глибоко ознайомитись із закономірностями теорії ймовірностей, яка широко використовується при аналізі економічних явищ. Тому автори дають короткий огляд тих задач, розв’язування яких започаткувало так званий розділ «Теорії ймовірностей», який умовно можна було б назвати класичним означенням поняття ймовірностей.

§7. ВІДОМОСТІ ПРО ЗАРОДЖЕННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Деякі комбінаторні задачі зацікавили вже давньогрецьких вчених. Згодом ними зайнялись математики Паскаль, Лейбніц, Бернулі та інші у зв’язку з розвитком алгебри та теорії ймовірностей.

Багатьом людям доводиться розмірковувати про можливості настання тієї чи іншої події. Теорія ймовірностей намагається встановити числову оцінку таких можливостей для деяких подій. Вона має справу з такими ситуаціями, коли ймовірність настання події можна точно кількісно визначити. Найпростіші ситуації — це ті, яким притаманна певна симетрія. Наприклад, при киданні правильної кубічної кісточки природно вважати випадання одного, двох, трьох, чотирьох, п'яти чи шести очок однаково ймовірними подіями і припускати для кожної з них, що її ймовірність становить $\frac{1}{6}$. Оскільки в трьох з шести випадків число очок парне, то ймовірність випадання парного числа очок дорівнює $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Взагалі, ймовірністю події А називається відношення числа сприятливих для неї рівноможливих випадків m до загального числа рівноможливих випадків, що виключають один одного n, тобто $P\ A = \frac{m}{n}$.

Згодом, кількість задач, для розв'язування яких використовувалося поняття ймовірностей значно розширилось. Довелося узагальнювати раніше введені означення, вводити багато нових понять, з якими студенти ознайомляться, вивчаючи курс «Теорія ймовірностей і математична статистика». Тому ми обмежимось лише розглядом деяких задач розв'язування яких спирається на означення ймовірності яке ми назвали б класичним.

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 1. В урні лежить 10 однакових за формою куль: 3 білих, 2 чорних і 5 червоних. Чому дорівнює ймовірність того, що навмання вийнята куля виявиться: а) червоною; б) не чорною?

Оскільки всі 10 куль однакові за формою, то загальне число рівноможливих випадків дорівнює 10 (ми можемо вийняти будь-яку з 10 куль). У задачі а) сприятливих випадків 5 — за числом червоних куль, тобто ймовірність події дорівнює $P\ A = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. У задачі б) сприятливих випадків 8 — ми можемо вийняти будь-яку з 3 білих чи будь-яку з 5 червоних куль. Тому шукана ймовірність дорівнює $P\ A = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

Приклад 2. Маємо 5 відрізків, довжини яких — 1 см, 3 см, 5 см, 7 см, 9 см. Визначити ймовірність того, що з трьох відрізків, навмання взятих з даних п'яти, можна скласти трикутник.

Маємо C_5^3, тобто 10 можливостей узяти будь-які 3 відрізки з даних 5.

Підрахуємо, коли з дібраних трьох відрізків можна утворити трикутник. Нагадаємо, що це можливо тоді і тільки тоді, коли $c - b < a$, де a, b, c — довжини відрізків, причому $a \le b \le c$.

Якщо довжина a найменшого відрізка дорівнює 1, то трикутник не можна скласти, бо різниця двох непарних чисел c і b (c > b) більша за 1 (таких випадків C_4^2, тобто 6).

Якщо довжина a найменшого відрізка дорівнює 3, то трикутник можна скласти, коли b = 5, c = 7, або b = 7, c = 9.

Якщо довжина найменшого відрізка дорівнює 5, то b = 7 і c = 9, отже, і в цьому випадку — з вибраних відрізків можна скласти трикутник.

Таким чином, з $n = 10$ можливих випадків сприятливих $m = 3$. Тому шукана ймовірність дорівнює $P\ A = \dfrac{3}{10}$.

Приклад 3. Вважаючи 36 можливих результатів кидання двох кісточок рівноймовірними, знайти ймовірність випадання суми 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 і 12 очок.

На кожну з шести можливостей випадання 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок на першій кісточці є стільки ж можливостей випадання від 1 до 6 очок на другій кісточці. Отже, всього маємо $n = 6x6 = 36$ різних наслідків. За умовою задачі ці наслідки рівноймовірні. Визначимо число сприятливих наслідків, наприклад, для суми у 8 очок.

Сума 8 очок може бути при випаданні 6 очок на першій і 2 очок на другій кісточці, 5 на першій і 3 на другій, 4 на першій і 4 на другій, 3 на першій і 5 на другій і , нарешті, 2 на першій і 6 на другій, тобто сприятливих наслідків п’ять.

Таким чином, імовірність випадання суми 8 очок дорівнює $\dfrac{5}{36}$.

Розв’язання для решти випадків наводиться в таблиці:

Число очок	Сприятливі наслідки	Число сприятливих наслідків	Імовірність	Число очок	Сприятливі наслідки	Число сприятливих наслідків	Імовірність
2	1 і 1	1	1/36	7 8	1 і 6; 2 і 5; 3 і 4; 4 і 3; 5 і 2; 6 і 1	6 5	1/6 5/36
3	1 і 2; 2 і 1	2	1/18	9	3 і 6; 4 і 5; 5 і 4; 6 і 3	4	1/9
4	1 і 3; 2 і 2; 3 і 1	3	1/12	10	4 і 6; 5 і 5; 6 і 4	3	1/12
5	1 і 4; 2 і 3; 3 і 2; 4 і 1	4	1/9	11	5 і 6; 6 і 5	2	1/18
6	1 і 5; 2 і 4; 3 і 3; 4 і 2; 5 і 1	5	5/36	12	6 і 6	1	1/36

Зверніть увагу на те, що сума чисел

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{5}{36}+\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=1.$$

Поясніть, чому має місце ця рівність, тобто чому

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{5}{36}+\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=1.$$

Приклад 4. Знайти імовірність того, що навмання вказане чотирицифрове число:

а) складається тільки з непарних цифр;

б) таке, що дві сусідні цифри різні.

Виконуємо пункт а). Нехай подія А означає, що навмання вказане чотирицифрове число містить тільки непарні цифри. Оскільки всього різних чотирицифрових чисел може бути 9000 (§1, вправа 2в), то $n = 9000$. На основі §1, вправа 2а, одержимо, що $m = 625$.

Отже, $P\left(A\right)=\dfrac{625}{9000}=\dfrac{5}{72}$.

Нехай подія В означає, що у випадковим чином названому чотирицифровому числі дві сусідні цифри різні. Обчислимо величину m, яка означає кількість чотирицифрових чисел з різними сусідніми цифрами. Першу цифру можна вибрати 9 способами, тому що число не може починатися з нуля. Кількість варіантів вибору кожної з інших цифр також дорівнює 9, бо сусідні цифри повинні бути різними. Застосовуючи правило множення одержимо, що $m = 9^4 = 6561$. Тоді $P\left(B\right)=\dfrac{6561}{9000}=0{,}729$.

Приклад 5. Визначити ймовірність того, що навмання вказане ціле додатне число, яке менше від 100:

а) ділиться на2;

б) не ділиться на 2;

в) ділиться на 3;

г) ділиться на 2 і 3.

Для даної задачі $n = 99$ тому що можна вибрати будь-яке із цілих чисел від 1 до 99 включно. Враховуючи результати §1 (вправа 3) одержимо, що для пункту а) $m = 49$; б) $m = 50$; в) $m = 33$; г) $m = 16$.

Отже $P\left(A\right)=\dfrac{49}{99}$, $P\left(B\right)=\dfrac{50}{99}$, $P\left(C\right)=\dfrac{33}{99}=\dfrac{1}{3}$, $P\left(D\right)=\dfrac{16}{99}$.

Приклад 6. Знайти ймовірність того, що для випадковим чином вибраного двоцифрового натурального числа, яке менше за 100, перша цифра:

а) менша за другу;

б) більша за другу;

в) не менше за другу.

Тут $n = 90$, тому що можна вказати будь-яке ціле число від 10 до 99 включно. На основі результатів §1 (вправа 4) матимемо:

а) $m = 36$; **б)** $m = 45$; **в)** $m = 54$.

Тоді $P(A) = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$; $P(B) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{54}{90} = \frac{3}{5}$.

Приклад 7. На кожній із 5 карточок написана одна з таких літер «А», «І», «З», «К», «Л». Знайти ймовірність утворення слова «ЗАЛІК».

Оскільки потрібне слово є впорядкованою послідовністю всіх 5 букв, то для обчислення величини n потрібно визначити кількість перестановок з п'яти літер. Отже, $n = 5! = 120$.

Тоді $P(A) = \frac{1}{120}$.

Приклад 8. Знайти ймовірність того, що навмання складене із цифр 1, 2, 3, 4 без повторення чотирицифрове число починається цифрами:

а) 2; **б)** 34.

Для цієї задачі $n = 4! = 24$.

Оскільки в пункті а) перша цифра визначена, то $m = 3! = 6$.

$P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

Враховуючи, що в пункті б) встановлено першу і другу цифри, то $m = 2! = 2$.

$P(B) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

Приклад 9. Визначити ймовірність «відновлення» трицифрового числа, в яке можуть входити цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6 без повторення.

Оскільки шукане число є упорядкованою трьохелементною підмножиною заданої множини із шести елементів, то потрібно визначити кількість розміщень.

Тоді $n = A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{720}{6} = 120$. $P(A) = \frac{1}{120}$.

Приклад 10. Обчислити ймовірність того, що для навмання заданого трицифрового числа із цифри 1, 2, 3, 4 без повторення, сума усіх його цифр:

а) рівна 8;

б) менша 8.

Тут аналогічно до прикладу 9 одержимо, що $n = A_4^3 = 24$. Оскільки сума цифр 1, 3, 4 рівна 8, то для пункту а) $m = 3! = 6$. $P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

Для пункту б) матимемо два варіанти поєднання цифр 1, 2, 3 або 1, 2, 4. Тоді $m = 2 \cdot 3! = 12$. $P(B) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

Приклад 11. Дев'ять різних книг розташовані на книжковій полиці. Визначити ймовірність того, що певні чотири книги будуть знаходитись поруч.

Величину n визначаємо як число перестановок із 9 різних книг. Тоді $n = 9!$. Для обчислення величини m, уявімо собі, що певні чотири книги об'єднані в одну спільну. Тепер маємо шість книг. Їх розташування можливе 6! способами. Також враховуємо, що чотири книги можуть переставлятись 4! способами. За правилом множення одержимо $m = 6! \cdot 4!$.

Отже $P(A) = \frac{6! \cdot 4!}{9!} = \frac{6! \cdot 4!}{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{21}$.

Приклад 12. В податковій адміністрації зареєстровано 6 приватних і 4 державних підприємства. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних трьох підприємств приватними будуть:

а) три;

б) два;

в) не більше одного.

Оскільки, не ставиться умова впорядкованості підмножини із вибраних трьох підприємств, то потрібно використати комбінації.

Тоді $n = C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7!} = 120$. Для пункту а) одержимо $m = C_6^3 = 20$. $P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

Пункт б) відрізняється від попереднього тим, що тут вибрана група із трьох підприємств включає два приватні і одне державне. За правилом множення одержимо $m = C_6^2 \cdot C_4^1 = 15 \cdot 4 = 60$. $P(B) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$.

Для виконання пункту в) розкриємо смисл словосполучення «не більше одного». Воно означає «одне або ні одного».

Тоді $m = C_6^1 \cdot C_4^2 + C_4^3 = 6 \cdot 6 + 4 = 40$. $P(C) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$.

Приклад 13. Серед 60 лотерейних білетів є 8 виграшних. Визначити імовірність хоч би одного виграшу для власника трьох білетів.

Величину n обчислюємо як число комбінацій із 60 по 3, тобто $n = C_{60}^3 = 34220$.

Для визначення числа m потрібно від величини n відняти кількість груп по три невиграшні білети. Отже $m = C_{60}^3 - C_{52}^3 = 12120$.

$$P(A)=\frac{12120}{34220}=\frac{606}{1711}.$$

Приклад 14. Знайти імовірність того, що для навмання записаного шестицифрового числа із цифр 1, 2, 3 причому цифра «1» повторюється два рази, «2» — тричі, «3» — один раз, сума перших двох цифр:

а) рівна 4;

б) менша 4.

Для розв'язання задачі використовуємо перестановки з повтореннями. На основі теореми 4 одержимо:

$$n=\frac{(2+3+1)!}{2!\,3!\,1!}=60.$$

Згідно пункту а) варіанти перших двох цифр такі: 13, 31, 22. До них потрібно приєднати ще чотири цифри. Якщо перші дві цифри 13 або 31, то цифра «1» повторюється один раз, «2» — тричі. Кількість таких варіантів

$$K_1=\frac{(1+3)!}{1!\cdot 3!}=4$$

Якщо число починається з 22, то цифра «1» повторюється два рази, «2» і «3» по одному. Число таких ситуацій $K_2=\frac{(2+1+1)!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}=12$.

Тоді $m = 2K_1 + K_2 = 20$.

$$P(A)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}.$$

В пункті б) варіанти перших двох цифр такі: 12, 21, 11.

Враховуючи варіанти інших чотирьох цифр, одержимо $m = 2 \cdot 12 + 4 = 28$.

$$P(B)=\frac{28}{60}=\frac{7}{15}.$$

Приклад 15. Монету кинуто 7 разів. Визначити ймовірність випадання герба 4 рази.

Загальне число рівноможливих випадків (наслідків випробування) визначаємо на основі теореми 6. Тоді $n = 2^7 = 128$. Кількість рівноможливих сприятливих випадків обчислимо як число комбінацій із 7 елементів по 4, тобто $m = C_7^4 = 35$. $P(A)=\frac{35}{128}$.

Приклад 16. Гральну кісточку (кубик) кидають 8 разів. Знайти імовірність того, що грані 1, 2, 3, 4, 5, 6 випадуть відповідно 2, 1, 1, 1, 2, 1 разів. При одному киданні кісточки можливі 6 випадків, тому що вона шестигранна. Отже, при киданні кісточки 8 разів загальне число випадків становитиме $n = 6^8 = 1679616$.

Кількість сприятливих випадків обчислюємо за теоремою 4.

$$m = \frac{(2+1+1+1+2+1)!}{2!\cdot 1!1!1!2!1!} = 10080.$$

$$P(A) = \frac{10080}{1679616} = \frac{35}{5832}.$$

§8. ПРИКЛАДИ СКЛАДНІШИХ ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Введене поняття ймовірність дозволило пояснювати деякі закономірності появи певних результатів під час азартних ігор. Згодом з'явилися окремі азартні учасники ігор, які почали прогнозувати появу певних результатів і відповідно до цього розробляли певні правила організації деяких видів ігор, щоб з допомогою їх збагатитися. Часто консультантами у них виступали тогочасні видатні математики. Їх прогнози у багатьох випадках стверджувалися, однак траплялися випадки, коли і вони не відразу змогли чітко враховувати усі можливі випадки появи певної події. Покажемо це, розглянувши кілька прикладів розв'язування деяких задач, які теж можна вважати класичними.

Приклад 1. Уже в XVII ст. гравці в кості виявили, що більш як у половині випадків при чотирьох киданнях кісточки принаймні один раз з'являється шістка. Розрахунок за правилами теорії ймовірностей тепер підтверджує це спостереження. При першому киданні кісточки є шість різних можливостей (випадання 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок). Кожна з них у свою чергу розбивається на шість можливостей. При трьох киданнях число різних можливостей $6^2 = 36$. При трьох киданнях число різних можливостей $6^3 = 216$, а при чотирьох — $6^4 = 1296$. Але серед 1296 випадків, які природно можна вважати рівноможливими, буде $5^4 = 625$ таких, коли шістка не з'явиться жодного разу, а в 1296 – 625 = 671 випадку принаймні один раз з чотирьох випадає шістка. Отже, ймовірність випадання хоча б однієї шістки при чотирьох киданнях кісточки дорівнює: $\frac{671}{1296} \approx 0,52 > \frac{1}{2}$.

Коли секрет було розкрито, один з гравців придумав новий варіант гри. Оскільки випадання двох шісток йому вважалося подією, у шість разів менш імовірною, ніж випадання шістки при одному киданні (в цьому він мав рацію), він зробив висновок, що при 4 × 6 = 24 киданнях пари кісточок більш як у половині випадків принаймні один раз з'являтимуться шістки. Проте експериментальна перевірка цього висновку його розчарувала: дві шістки при 24 киданнях пари кісточок з'явилася менш як у половині випадків. Тоді гравець звернувся до Паскаля. Учений легко пояснив позірний парадокс. При одному киданні двох кісточок є 36 можливостей, з яких у 35^{24} випадках при жодному киданні не з'явиться одразу дві шістки, а в $36^{24} - 35^{24}$ випадках принаймні один раз це трапляється. Імовірність випадання хоч би один раз двох шісток дорівнює: $\frac{36^{24}-35^{24}}{36^{24}}=1-\left(\frac{35}{26}\right)^{24}\approx 0,48<\frac{1}{2}$.

Приклад 2. У середині XVIII ст. математиків зацікавила серія задач, найпростішою моделлю якої є таке завдання.

Монету кидають двічі на горизонтальну поверхню стола. Знайти імовірність, що хоча би раз випаде герб.

Всі можливі наслідки кидання двох монет умовно можна записати так: (2;2); (r;2); (2; r); (r; r).

Отже, n = 4; m =3; $P(A)=\frac{3}{4}$.

Відомий французький математик і філософ Д'Аламбер, розв'язуючи цю задачу, вважав, що герб з'явиться або під час першого кидання, або — під час другого, або зовсім не появиться. Тому, він приймав n = 3; m =2; $P(A)=\frac{2}{3}$. Цей приклад цікавий тим, що осмислюючи ідеї нового розділу математичної науки, іноді помилки допускали і визнані математики. Однак з часом подібні непорозуміння усвідомлювалися і математичні теорії набували відповідну чіткість та характерну їм стрункість.

§9. ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. З урни, в якій лежать 5 куль, пронумерованих числами 1, 2, 3, 4, 5, виймають навмання дві кулі. Яка ймовірність того, що номери вийнятих куль послідовно зростатимуть?

2. З урни, в якій знаходиться 5 куль, пронумерованих числами 1, 2, 3, 4, 5, виймають одну за одною 5 куль. Яка імовірність того, що номери вийнятих куль будуть у порядку зростання.

3. З урни, в якій міститься 5 куль, пронумерованих числами 1, 2, 3, 4, 5, виймають відразу 3 кулі. Яка імовірність того, що номери вийнятих куль непарні?

4. Бібліотечка складається з 10 різних книжок, серед яких 5 коштують по 4 грн., 2 — по 3 грн., 3 — 1 грн. Яка імовірність того, що взяті навмання дві книжки коштують 5 грн.?

5. На восьми однакових картках написані числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Навмання беруть дві картки. Визначити імовірність того, що дріб, утворений з двох взятих чисел, скоротний.

6. Знайти імовірність того, що навмання вказане трицифрове число складається тільки з парних цифр.

7. Визначити імовірність того, що навмання вказане ціле додатне число, яке не більше від 60 ділиться на: **а)** 4; **б)** 5; **в)** 4 і 5.

8. Яка імовірність того, що для випадковим чином вибраного двоцифрового натурального числа, яке менше від 70, перша цифра:

а) менша за другу;

б) більша за другу;

в) не більша за другу?

9. Знайти імовірність того, що утворене із цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторення п'ятицифрове число починається парною цифрою.

10. Визначити імовірність «вгадування» двох останніх цифр деякого числа.

11. Обчислити імовірність того, що для випадковим способом заданого двоцифрового числа, в яке можуть входити цифри 1, 2, 3, 4, 5, добуток усіх цифр:

а) дорівнює 6; **б)** більший 6.

12. У ящику знаходиться 12 деталей, серед яких 5 нестандартних. Обчислити імовірність того, що серед навмання вибраних 6 деталей нестандартних буде:

а) 2; **б)** не більше двох.

13. Задумано двоцифрове число. Знайти імовірність того, що воно не матиме цифри 9.

14. Учасники жеребкування тягнуть із ящика жетони із номерами від 1 до 30 включно. Знайти імовірність того, що номери двох випадково вибраних жетонів не матимуть цифр 5, 8.

15. На складі є 14 виробів з яких 10 стандартних. Знайти імовірність того, що серед навмання вибраних п'яти виробів 60% стандартних.

16. Серед 15 студентів є 6 спортсменів. Визначити імовірність того, що серед відібраних навмання 6 студентів є 2 спортсмени.

17. У податкову інспекцію надійшло 12 декларацій, серед них 8 від юридичних, а решта від фізичних осіб. Знайти імовірність того, що серед навмання вибраних 6 декларацій 50% з них буде від юридичних осіб.

18. Фірма має 15 комп'ютерів, з яких 60% імпортних, а решта вітчизняних. Знайти імовірність того, що серед навмання вибраних трьох комп'ютерів буде не більше 1 вітчизняного.

19. Є п'ять карточок на кожній з яких написано по одній із букв «О», «Р», «С», «Т», «П». Знайти імовірність того, що випадковим чином складені карточки утворять слово «СПОРТ».

20. В ящику знаходиться 10 деталей, серед яких 2 нестандартні. Визначити імовірність того, що серед навмання вибраних 4 деталей виявиться не більше однієї нестандартної.

21. Ревізійне управління для перевірки вибирає навмання вісім підприємств із десяти державних і шести приватних. Визначити імовірність того, що серед вибраних підприємств є 25% приватних.

22. На сімох картках написано по одній із букв «М», «С», «Р», «А», «О», «Ф», «У». Знайти імовірність того, що навмання вибрані три картки складуть слово «МУР».

23. У бібліотеці є 9 книг, з них 5 з економіки і 4 з математики. Знайти імовірність того, що серед навмання вибраних 6 книг є 3 з економіки.

24. Серед 10 працівників є 4 з вищою освітою. Визначити імовірність того, що із навмання вибраних 6 працівників буде не менше трьох з вищою освітою.

25. У касі є 5 купюр по 2 грн.; 3 купюри по 1 грн. і 2 купюри по 5 грн. Знайти імовірність того, що навмання взяті 3 купюри сумарно складуть 6 грн.

26. На складі є 9 виробів серед яких 5 з першого цеху, решта з другого. Визначити імовірність того, що із навмання вибраних 4 виробів не менше 3 з першого цеху.

27. На п’ятьох картках написано по одній із цифр 2, 8, 4, 1, 3. Знайти імовірність того, що навмання складені три картки утворять число 138.

28. Студент вивчив 8 питань із 12. Знайти імовірність того, що він дасть відповідь хоч би на два питання із трьох навмання вибраних.

29. Бібліотечна серія складається із 9 книг, причому три книги коштують по 3 грн., чотири — по 6 грн.; решта книг — по 9 грн. Визначити імовірність того, що сумарна вартість двох навмання взятих книг складає 12 грн.

30. У місті працює 10 фірм, із яких 6 торгових і 4 виробничих. Знайти імовірність того, що серед навмання вибраних 5 фірм будуть три торгові.

31. Визначити імовірність виграшу не менше 1300 грн. на два білети лотереї «4 із 20», для якої виграш на один білет складає 20 грн. або 1280 грн., якщо вгадано відповідно три або чотири числа.

§10. ПОТРЕБА УЗАГАЛЬНЕННЯ КЛАСИЧНОГО ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Класичне означення імовірності передбачало такі випробування, які легко здійснювалися згідно умови задачі. Крім того вважалося, що кількість випробувань скінченна. Згодом з’явились потреби аналізувати процеси, у яких кількість елементів достатньо велика або навіть нескінченна. Нарешті інколи випробування вели до знищення вироблених предметів чи продуктів, тому їх кількість намагаються мінімізувати. Тому виникла потреба вводити поняття геометричної імовірності, а згодом аксіоматичної імовірності. Це дозволило значно розширити клас досліджень, що ґрунтується на поняттях «Теорії ймовірностей» із систематичним викладом якої студенти ознайомляться у вузівських аудиторіях.

ЗМІСТ