УДК 004.832.23

ОСНОВНІ АСПЕКТИ ПРИКЛАДНОГО ЗАСТОСУВАННЯ ЗАДАЧІ 2-SAT

Фейло В.В.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, студент

I. Вступ

Останнім часом досить широкий спектр задач прикладного характеру знаходить інтерпретацію в теорії бульових формул. Зокрема, часто доводиться визначити, чи належить заданий об'єкт до деякого наперед визначеного класу чи навіть кожного з множини класів. Або ж для деякого набору спостережень (наслідків) встановлюється множина прихованих причин. Також є висловлювання, що пов'язують причини та наслідки. Спираючись на ці висловлювання, за представленим набором наслідків необхідно визначити можливі причини, що їх породили. Наприклад, у медичній практиці виникає потреба, маючи набір спостережуваних у пацієнта симптомів, встановити, які хвороби могли їх спричинити. Хіміки досліджують результати реакцій (зміна кольору, запаху, виділення теплоти) та намагаються визначити кількісний і якісний склад реагентів. Криміналісти, використовуючи речові докази, виявляють злочинців. Іншими словами, можна побачити, що багато задач практичного значення інтерпретуються як деяка множина бульових змінних, над якими встановлений певний вираз. І потрібно надати цим змінним значення «істина» або «хиба» таким чином, щоб весь вираз приймав значення «істина». Це є задача здійснимості бульових змінних (або SAT). На мій погляд, найбільш цікавою її варіацією як у теоретичному, так і в практичному плані є задача 2-виконання (надалі – задача 2-SAT). Слід також зазначити, що задача SAT є фундаментальною при розв'язанні багатьох проблем інформатики: штучного інтелекту, проектування комп'ютерних систем, роботобудування, криптографії, аналізу початкового коду. На мою думку, однією з причин доброго розвитку проблеми зведення прикладних задач до задачі SAT є можливість розв'язувати задачі, що виникають у різноманітних галузях, користуючись єдиним алгоритмом.

II. Мета дослідження

Метою даного дослідження є розгляд задачі 2-SAT, її практичного використання та теоретичних аспектів розв'язності й звідності. Була поставлена задача навести деякі яскраві приклади застосування задачі 2-SAT у реальному житті та довести можливість зведення до неї.

III. Аспекти прикладного застосування задачі 2-SAT

Почнемо зі стислого опису теоретичної складової задачі 2-SAT. Нехай дана деяка кон'юнктивна нормальна форма на зразок цієї:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \tag{1}$$

Потрібно усім змінним x_i надати значення true або false так, щоб формула Φ приймала істинне значення. Взагалі кажучи, існує досить багато алгоритмів, що розв'язують цю задачу за лінійним час, але ми розглянемо лише той, що використовує сильно зв'язані компоненти графа.

Орієнтований граф називається сильно зв'язаним, якщо з будь-якої вершини досяжна будь-яка інша (по орієнтованим дугам). Сильно зв'язаною компонентою орієнтованого графа $G(V, E)$ називається така максимальна множина вершин $C \subset V$, що для кожної пари вершин u і v з C вершини u і v досяжні одна з одної.

Повернемося до алгоритму розв'язання задачі. Будуємо граф, вершини якого відповідають змінним x_i та їх запереченням. Кожному з диз'юнктів $x \vee y$ будуть відповідати ребра графа $\neg x \Rightarrow y$ та $\neg y \Rightarrow x$. Задача 2-виконання не матиме розв'язків, якщо у графі існують хоча б для однієї вершини x шляхи від x до $\neg x$ та від $\neg x$ до x. Іншими словами, розв'язку не існує, якщо для деякої змінної x вершини x та $\neg x$ лежать в одній компоненті зв'язності. Якщо ж розв'язок існує, то потрібно пронумерувати компоненти сильної зв'язності в порядку топологічного сортування (позначимо для кожної вершини v через $color[v]$ номер компоненти, до якої вона належить). Якщо $color[x] > color[\neg x]$, то x набуває значення true, інакше false [1].

Тепер перейдемо безпосередньо до практичного застосування.

Широке коло точних та наближених алгоритмів розв'язання задачі автоматичного розташування міток (automatic label placement) базується на 2-SAT. Вищеозначена задача розглядає розташування текстових міток біля об'єктів діаграми чи карти. Зазвичай варіанти розташування цих міток сильно обмежені не тільки самою картою (мітки повинні знаходитися поряд з відповідними об'єктами та не закривати інші об'єкти), але й один одним (мітки не можуть взаємно перекриватися). Взагалі, ця задача є NP-повною, але якщо у кожної мітки є лише 2 варіанти розташування (скажімо, зліва чи справа від об'єкта), то її можна розв'язати за поліноміальний час. Тоді це буде прикладом задачі 2-виконання з окремою змінною для кожної мітки та диз'юнктами, що гарантують неможливість перекривання міток одна одною. Легко показати, що число цих диз'юнктів буде лінійним відносно кількості міток [2].

Також до задачі 2-SAT зводиться цілий ряд інших задач геометричного розташування. Наприклад, у візуалізації графів, якщо вершини фіксовані, а ребра являють собою дуги з одним або двома можливими розташуваннями (наприклад, arc diagram), то задача пошуку необхідної дуги для кожного ребра є задачею 2-SAT зі змінною для кожного ребра та диз'юнктами, що виключають можливість перетину ребер [3].

Іншим важливим аспектом прикладного застосування задачі 2-SAT є складання розкладів. Візьмемо для прикладу задачу складання розкладу спортивних змагань за круговою системою. Припустимо, що для кожної команди-учасниці бажано чергувати домашні та гостьові зустрічі, по можливості уникаючи ситуацій, коли вона грає двічі поспіль вдома чи на виїзді (назвемо їх «серіями»). Зрозуміло, що тільки дві команди можуть зовсім уникнути таких ситуацій, адже якщо припустити, що це виконується ще для якоїсь третьої команди, то остання не зможе грати із суперником, що має такий самий графік (не можуть в одному матчі приймати участь дві гостьові команди, простіше кажучи). Вибравши дві команди без «серій», можна побудувати задачу 2-SAT, де змінні – це призначення статусу господаря чи гостя зустрічі для кожної команди в кожному матчі, а диз'юнкти гарантують, що кожна команда має сумісний графік матчів, має не більше однієї «серії» до та не більше однієї «серії» після зустрічі з однією з двох команд, що не мають жодної «серії», а також що ніяка команда не має двох «серій» [4].

Вагомим плацдармом для застосування задачі 2-виконання є томографія (пошук фігури за її поперечним розрізом), а точніше спрощена версія цієї задачі – дискретна томографія (тут шукана фігура являє собою поліміно, з'єднання декількох одноклітинкових квадратів за їх сторонами). Очевидним прикладом з реального життя є задача розв'язання японських кросвордів. Її можна звести до задачі 2-SAT, ввівши два типи змінних: одні позначають, чи є дана клітинка зафарбованою, а інші – чи починається в даній клітинці блок зафарбованих клітинок.

Висновки

Отже, в даному дослідженні розглянута задача 2-SAT, її постановка та способи вірішення, а також наведені приклади практичного використання цієї задачі та обґрунтована можливість зведення до неї.

Список використаних джерел

1. Aspvall, Bengt; Plass, Michael F.; Tarjan, Robert E. (1979), "A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas": 121 – 123.
2. Poon, Chung Keung; Zhu, Binhai; Chin, Francis(1998), "A polynomial time solution for labeling a rectilinear map", Information Processing Letters 65 (4): 201–207.
3. Efrat, Alon; Erten, Cesim; Kobourov, Stephen G. (2007), "Fixed-location circular arc drawing of planar graphs", Journal of Graph Algorithms and Applications 11 (1): 145–164.
4. Miyashiro, Ryuhei; Matsui, Tomomi (2005), "A polynomial-time algorithm to find an equitable home–away assignment", Operations Research Letters 33 (3): 235–241.