Міністерство освіти та науки України

Тернопільський національний економічний університет

Факультет комп'ютерних інформаційних технологій

ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«Дискретні струкутри»

Тернопіль - 2014

ЗМІСТ

1.Основні об’єкти дискретних структур
1.1. Множини та операції над ними
1.2. Функції на множинах (відображення)
1.3. Бінарні відношення
2. **Основи комбінаторики**
2.1. Предмет комбінаторики
2.2. Основні формули комбінаторики
2.3. Біном Ньютона, трикутник Паскаля та зв’язок між ними
3. **Основи логіки висловлювань**
3.1. Висловлювання та операції над ними
3.2. Основні закони алгебри Буля
3.3. Логіка предикатів і кванторів
4. **Основи теорії чисел**
4.1. Властивості простих чисел
4.2. Числові послідовності
4.3. Системи числення
5. **Основи теорії графів**
5.1. Основні поняття та визначення
5.3. Прості алгоритми на графах
6. **Основи теорії доведень**
6.1. Теоретичні основи теорії доведень

ОСНОВНІ ОБ'ЄКТИ ДИСКРЕТНИХ СТРУКТУР

1.1. Множини та операції над ними

Під **множиною** зазвичай розуміють об'єднання в одне ціле об'єктів, що добре розрізняються нашою думкою або інтуїцією.

Об'єкти, що утворюють множину, називаються **елементами** множини. Елементи звичайно позначаються малими літерами латинського алфавіту, а множини великими. Якщо *m* є елемент, який **належить** множині *M*, то використовується запис $m \in M$, у протилежному випадку - $m \notin M$. Читається так: *m* належить *M*.

<u>Означення</u>. Множина, яка містить скінченне число елементів, називається **скінченною**, а множина, що містить нескінченне число елементів, - **нескінченною.**

Множина може задаватися різними способами: **перерахуванням** елементів для скінченної множини або зазначенням їх **властивостей.** У разі перерахування використовують фігурні дужки $\{\}$. Наприклад, множину *M* цифр десяткового алфавіту можна задати у вигляді $M=\{0, 1, \ldots, 9\}$.

Цю ж саму множину можна задати й інакше, як $M=\{i|i$ – ціле, $0 \le i \le 9\}$, де справа від вертикальної риски зазначається **властивість** елементів цієї множини.

Якщо ж множина *M* є множиною, наприклад, парних чисел, то вона записується як $M=\{m|m$ – парне число$\}$.

Іноді нескінченні множини задаються простим перерахуванням кількох перших елементів, і тоді характеристична властивість є заданою в неявному вигляді. Наприклад, множину парних чисел можна задати у вигляді $A=\{2,4,6,8,\ldots\}$.

Для того, щоб позначити множину всіх предметів, що є елементами множини *A* і мають властивість *P*, замість $\{x|x \in A$ і $P(x)\}$ часто пишуть $\{x \in A|P(x)\}$.

Наприклад, $\{x \in R \mid 0 \le x \le 1\}$ означає множину всіх дійсних чисел від 0 та 1 включно, а $\{x \in Q^{+} \mid x^{2} < 2\}$ - множину всіх додатних раціональних чисел, квадрати яких менші за число 2.

Множина *M'* називається **підмножиною** множини *M* тоді й лише тоді, коли будь-який елемент множини *M'* і *M* можуть збігатись, тобто *M'* може дорівнювати *M*, то тоді пишуть, що $M' \subseteq M$, де $\subseteq$ - знак **включення** підмножини. **Невключення** підмножини *M'* до множини *M* позначається як $M' \not\subset M$.

Множина *A*, що **строго включається** до *B*, позначається як $A \subset B$. Це означає, що *B* містить і інші елементи, крім елементів *A*, і це особливо підкреслюється.

Дві множини **рівні** тільки тоді, коли вони складаються з одних і тих самих елементів. Тому будь-яка множина *X*=*X*.

Рівність двох множин *X* і *Y* позначається через *X*=*Y*, а нерівність множин *X* і *Y* – через $X \neq Y$. Для будь-яких рівних множин *X, Y* і *X, Y, Z* виконуються умови:

1. Якщо *X*=*Y*, то *Y*=*X*;
2. Якщо *X*=*Y* та *Y*=*Z*, то *X*=*Z*.

Порядок елементів у множині не є суттєвим. Множини {3,4,5,6} і {4,5,6,3} являють собою одну й ту саму множину.

Множини не містять однакових елементів. Так, множина простих дільників числа 60 дорівнює {2,3,5}, а не {2,2,3,5}.

Слід розрізняти об'єкт і множину, єдиним елементом якої є цей об'єкт. Так множина {1,2} становить об'єкт, який є елементом множини {{1,2}}. Множини {{1,2}} і {1,2} не рівні, оскільки перша – одноелементна множина, що має єдиний елемент {1,2} , а друга має два елементи 1 і 2.

Якщо множина не містить жодного елемента, то вона називається **порожньою** і позначається $\varnothing$. Інколи її називають ще **пустою** множиною. Наприклад, множина трикутників з двома прямими кутами є порожньою. Також множина простих чисел, які діляться на число чотири, є порожньою. Але множина $\{\varnothing\}$ не є порожньою, тобто $\varnothing$={$\varnothing$}; ця множина є одноелементною. Її єдиним елементом є порожня множина.

Кожний елемент *а* множини *А* визначає деяку її підмножину. Це означає, що якщо $a \in A$ то і $\{a\} \subseteq A$. Поєднання двох будь-яких випадково взятих елементів множини *А* також створює її підмножину. Таких підмножин може бути декілька, і їх кількість визначається числом різних поєднань чи комбінацій з двох елементів, узятих із множини *А*. Тобто, якщо число елементів множини *А* дорівнює трьом, хай це будуть елементи 1,2,3, то можливі такі поєднання двох елементів із трьох: 1,2 ; 1,3 ; 2,3.

Також будь-які три елементи множини *А* створюють її підмножину. Кількість таких трьохелементних підмножин визначається числом різних комбінацій трьох елементів з числа елементів *n* множини *А*. Далі, якщо *n* більше від трьох, можна визначити число комбінацій чотирьох, п’яти і більшого числа елементів множини *А* з *n*. У загальному випадку число комбінацій і елементів з *n* позначається символом $C_n^i, i = 0,1,..., n$. Ці комбінації називаються ще **сполученнями**. Тобто **сполучення** – це будь-яка *і*-елементна підмножина з *n*-елементної множини.

Усі підмножини множини *А*, які складаються з *n* елементів, створюють множину, що називається **множиною-степенем**, або булеаном множини *А* і позначається *P(A)* або *B(A)*. Якщо, наприклад, *A*={1,2,3}, то множина-степінь

$$P(A)=\{(1,2,3,),\{1,2,\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{2\},\{3\},\{\varnothing\}\}. \qquad (1.1)$$

Теорема. Множина-степінь P(A) множини $A = \{a_1, a_2,..., a_n\}$ **має** 2^n **різних підмножин**

Приклад 1. Чи є множини $\{2,4,6\}$, $\{2,6,4\}$ рівними?

Оскільки множини $\{2,4,6\}$ і $\{2,6,4\}$ складаються з одних і тих самих елементів, то вони будуть рівними.

Приклад 2. Чи є множини $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$, $\{1,2,3\}$ і $\{1,2,\{3\}\}$ рівними?

Ні, не будуть, оскільки елементами першої множини будуть елементи $\{1,2\}$ і $\{2,3\}$, другої – 1,2,3 і третьої – 1, 2, $\{3\}$.

Приклад 3. Чи є множини $\{\{1,2\}\}$ і $\{1,2\}$ рівними?

Ні, не є рівними, оскільки перша – одноелементна множина, що має своїм єдиним елементом $\{1,2\}$, а друга має своїми елементами 1 і 2.

Приклад 4. Чи правильно, що $\{1,2\} \in \{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\}$?

Ні, не правильно, оскільки в правій множині відсутній елемент $\{1,2\}$.

Операції над множинами

Об'єднання і перетин множин

Розглянуті нижче операції над множинами необхідні для подальшого викладу матеріалу і маюсь велике значення для розв'язання багатьох задач дискретної математики, особливо тих, що пов'язанні із синтезом дискретних автоматів.

Означення. **Об'єднанням** множин *A* і *B* називається множина, що складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать хоча б одній з множин *A* або *B*. Позначається $A \bigcup B = \{x | x \in A$ або $x \in B\}$ (називається **сумою** або **об'єднанням**).

Таким чином, за наведеним означенням $x \in A \bigcup B$ тоді і лише тоді, коли *x* є елементом хоча б однієї з множин *A* або *B*. Наприклад, $\{1,2,3\} \cup \{1,3,4\} = \{1,2,3,4\}$.

Об'єднання множини *A* з порожньою множиною буде давати ту ж саму множину *A*: $A \bigcup \varnothing = A$.

Аналогічно визначається об’єднання довільної (у тому числі й нескінченної) системи множин. Якщо система містить невелику кількість множин, то їх об’єднання описується явно, наприклад: $A \bigcup B \bigcup C \bigcup D$.

У випадку, якщо всі множини пронумеровані індексами й належать до системи множин $S = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$, то їх відображають у вигляді $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$, або $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, де *S* – нескінченна система, і її множини пронумеровані підряд натуральними числами.

Для об’єднання множин справедливі **комутативний** і **асоціативний** закони:

1. Комутативний закон

$$A \bigcup B = B \bigcup A. \qquad (1.2)$$

2. Асоціативний закон

$$(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C). \qquad (1.3)$$

Справедливість цих законів випливає з того, що ліва і права частини наведених рівностей складаються з одних і тих самих елементів ,а порядок їх об’єднання для множин не має значення.

Розглянуті вище закони справедливі також і для об’єднання множин з порожньою множиною. Це випливає з того, що порожня множина, хоча вона і не містить у своєму складі елементів, але є взагалі такою самою, як і всі інші.

Означення. **Перетином (добутком, перерізом**) множин *A* і *B* називається множина, що складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать як до множини *A*, так і до множини *B*. Позначається $A \bigcap B$. До цієї множини належать лише спільні елементи множин *A* і *B*.

Формальне означення:

$$A \bigcap B = \{x | x \in A \text{ і } x \in B\}. \quad (1.4)$$

Наприклад, $\{1,2,3\} \cap \{1,3,4\} = \{1,3\}$.

Для перетину і об’єднання множин властиві такі **включення**:

$$\varnothing \subseteq A \bigcap B \subseteq A \subseteq A \bigcup B, \quad (1.5)$$

$$\varnothing \subseteq A \bigcap B \subseteq B \subseteq A \bigcup B. \quad (1.6)$$

Вважається, що дві множини *A* і *B* не перетинаються, якщо $A \bigcap B = \varnothing$, і перетинаються, якщо $A \bigcap B \neq \varnothing$.

Перетин множин має комутативну

$$A \bigcap B = B \bigcap A \quad (1.7)$$

і асоціативну властивість

$$(X \bigcap Y) \bigcap Z = X \bigcap (Y \bigcap Z) = X \bigcap Y \bigcap Z. \quad (1.8)$$

Для порожньої множини має місце також співвідношення $X \bigcap \varnothing = \varnothing$, яке твердить, що перетин будь-якої множини з порожньою множиною дає ту саму порожню множину.

Декартів добуток

Означення. **Декартів добуток** (*прямий добуток*) двох множин *A* і *B*— це множина усіх можливих впорядкованих пар, у яких перша компонента належить множині *A*, а друга — множині *A*.

Декартів добуток двох множин *A* і *B* позначається як $A \times B$:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}. \quad (1.9)$$

Наприклад, якщо множина *A* складається з 13 елементів { *A, K, Q, J,* 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 }, а множина *B* — з 4 елементів {червоний, чорний, блакитний, зелений}, то декартів добуток цих множин є 52-елементною множиною (оскільки 13×4=52) {(*A*, червоний), (*K*, червоний), ... , (2, червоний), (*A*, чорний), ... , (3, зелений), (2, зелений)}.

Різниця множин

Означення. **Різницею** множин *A* і *B* або **відносним доповненням** множини *B* до *A* називається множина, що складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать *A* і не належать до *B*. Визначається лише для двох множин.

Наприклад, різниця між натуральними і парними числами являє собою множину всіх непарних натуральних чисел.

Різниця множин *A* і *B* позначається як *A\B*, або *A-B*, що відповідає умові $\{x|x \in A$ і $x \notin B\}$, яка визначає ті елементи множини *A*, що не є елементами множини *B*. Саму операцію знаходження різниці двох множин називають **відніманням** множин.

Нехай *A*={1,3,4,5}, а *B*={1,2,3}. Тоді отримана при відніманні множини *B* від *A* різниця A–B={4,5}.

Множина $A + B = (A - B) \bigcup (B - A)$ називається **симетричною** різницею.

Якщо *A*={1,3,4,5}, а *B*={1,2,3}, то симетрична різниця A+B={2,4,5}.

Теорема. $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$.

Універсальна множина

Означення. Множина *I* (позначається також *U*), для якої решта всіх інших множин є підмножинами, називається **універсальною** множиною, а також **повною**, або **одиничною**. Іноді вона ще називається **універсамом.**

Універсальна множина є поняттям відносним. Наприклад, в арифметиці універсальною множиною вважається множина раціональних чисел, а її підмножиною буде множина цілих чисел. У той же самий час множина натуральних чисел є підмножиною цілих чисел.

Для універсальної множини виконуються рівності

$$\begin{aligned} A \cap I = A, \\ A \cup I = I. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Абсолютне доповнення множин

Означення. Множина $\overline{A}$, що визначається за співвідношенням $\overline{A} = I \setminus A$, називається **абсолютним доповненням**, або просто **доповненням** множини *A* до універсальної множини *I*.

Із приведеної рівності видно, що не тільки $\overline{A}$ є доповненням до *I*, але й *A* є доповненням до *I*, тобто завжди $A \cup \overline{A} = I$. Далі $\overline{\overline{A}} = I \setminus \overline{A} = I - \overline{A} = I - (I - A) = A$. Із цього випливає, що $A = \overline{\overline{A}}$. Також очевидно, що *A* і $\overline{A}$ не мають спільних елементів. Тому $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Розбиття множин

Будь-яка сукупність *n* множин: $A_1, A_2, ..., A_n$, що розділяється, називається **системою** множин.

Система множин *S* називається **розбиттям** множин *M*, якщо вона задовольняє таким умовам:

1. Будь-яка множина *A* системи *S* є підмножиною множини *M* :

$$A \subseteq M.$$

2. Будь-які дві множини *A* і *B* з *S* не перетинаються:

$$A \cap B = \varnothing.$$

3. Об’єднання всіх без винятку множин системи *S* утворює множину *M*:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = M, A_i \in S.$$

Розбиття множин широко використовується як у математичних теоріях, так і на практиці, особливо в задачах з кодування інформації. Тому спеціаліст у галузі інформатики й цифрової схемотехніки досить часто буде зустрічатися з такими задачами.

Діаграми Ейлера-Венна

Для наочного зображення операцій над множинами досить часто використовують діаграми (круги) Ейлера-Венна. Універсальна множина *U* зображається у вигляді точок деякого прямокутника, а її підмножина – як круг усередині прямокутника (див.рис.1.1). Доповнення $\overline{A}$ множини *A* до *U* зображається тією частиною прямокутника, яка лежить поза кругом, що зображає *A*. Якщо на діаграмі Ейлера зобразити кругами множини *A* і *B* , що є підмножинами *U*, то множини $A \cap B$ і $A \cup B$ будуть зображені заштрихованими областями на рис. 1.2 і 1.3 відповідно.

Множини для різниць *A*-*B* і *B*-*A*, а також симетричної різниці *A*+*B* показані заштрихованими ділянками на рис. 1.4, 1.5, 1.6 відповідно.

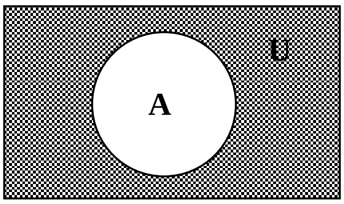


Рис. 1.1. Діаграма Ейлера-Венна для множини *A*

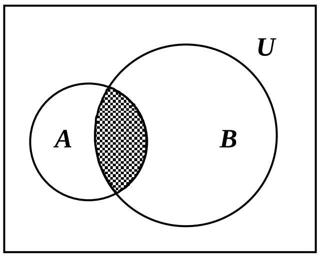


Рис. 1.2. Діаграма Ейлера-Венна для перетину двох множин *A* і *B*

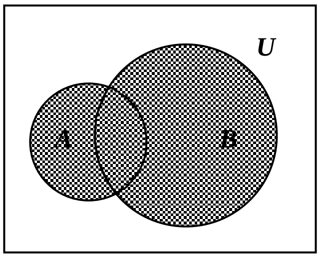


Рис.1.3. Діаграма Ейлера-Венна для об'єднання двох множин *A* і *B*

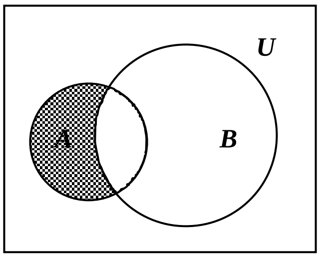


Рис.1.4. Діаграма Ейлера-Венна для різниці двох множин *A*-*B*

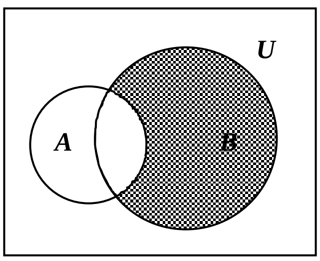


Рис.1.5. Діаграма Ейлера-Венна для різниці двох множин *B*-*A*

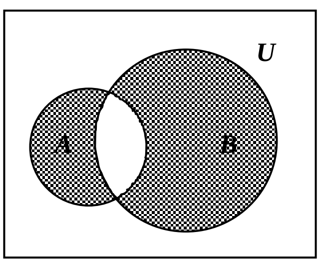


Рис. 1.6. Діаграма Ейлера-Венна для симетричної різниці двох множин *A*+*B*

Алгебра множин

Алгебра множин створюється з допомогою операцій між підмножинами універсальної множини як сукупність рівностей – тотожностей.

Наприклад, для будь-яких підмножин (множин) *A, B* та *A, B, C* універсальної множини *U* дійсними є рівності:

1. $A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$;
2. $A\bigcup B=B\bigcup A$;
3. $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$;
4. $A\bigcup\varnothing=A$;
5. $A\bigcup\overline{A}=U;\ (\overline{A}=U-A)$.

$1'$. $A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$;

$2'$. $A\bigcap B=B\bigcap A$;

$3'$. $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$;

$4'$. $A\bigcap U=A$;

$5'$. $A\bigcap\overline{A}=\varnothing$.

Кожну з наведених рівностей можна довести, показавши, що будь-який елемент множини, що стоїть з одного боку від знака рівності, належить до множини, яка стоїть з іншого боку від цього знака рівності.

Доведення рівності 3. Доведення складається з двох частин:

1. Нехай $x\in A\bigcup(B\bigcap C)$. Тоді $x\in A$ або $x\in B\bigcap C$. Якщо $x\in A$, то $x\in A\bigcup B$ і $x\in A\bigcup C$, і таким чином, *x* є елементом перетину цих множин: $(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$.

Якщо $x\in B\bigcap C$, $x\in B$ і $x\in C$. Отже, $x\in A\bigcup B$ і $x\in A\bigcup C$. У цьому випадку *x* також є елементом перетину $(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$.

2. Розглянемо вираз

$$(A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C) \subseteq A \bigcup (B \bigcap C).$$

Нехай $x \in (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$. Тоді $x \in A \bigcup B$ і $x \in A \bigcup C$. Отже, або $x \in A$, або $x \in B$ і $x \in C$. З цього випливає, що $x \in A \bigcup (B \bigcap C)$.

Тобто *x* належить як до першої частини рівності 3, так і до другої, що й доводить її.

Рівності 1 та $1'$ називаються **асоціативними** законами для об'єднання і перетину, а рівності 2 та $2'$ - **комутативними** законами для цих операцій. Рівності 3 та $3'$ - це **дистрибутивні** закони для цих операцій.

Для довільних підмножин *A* і *B* універсальної множини *U*, крім вищезазначених рівностей, справедливі також рівності:

1. Якщо $A \bigcup B = A$, то $B = \varnothing$.

2. $\overline{\varnothing} = U$.

3. $A \bigcup A = A$.

4. $A \bigcup U = U$.

5. $A \bigcup (A \bigcap B) = A$.

6. $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$.

7. Якщо $A \bigcup B = U$ і $A \bigcap B = \varnothing$, то $B = \overline{A}$.

$1'$. Якщо $A \bigcap B = A$, то $B = U$.

$2'$. $\overline{U} = \varnothing$.

$3'$. $A \bigcap A = A$.

$4'$. $A \bigcap \varnothing = \varnothing$.

$5'$. $A \bigcap (A \bigcup B) = A$.

$6'$. $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$.

$7'$. Якщо $A \bigcap B = \varnothing$ і $A \bigcup B = U$, то $B = \overline{A}$.

Деякі з рівностей відомі під спеціальними назвами. Так 3 і $3'$ - це закони **ідемпотентості**; 5 та $5'$ - закони **поглинання**; 6 та $6'$ - закони **де Моргана**.

Приклад 1. $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup B \cup B = \overline{A} \cup B$.

Приклад 2.

$$(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C} = [(A \cup \overline{A}) \cap B \cap C] \cup \overline{B} \cup \overline{C} =$$
$$= (U \cap B \cap C) \cup \overline{B \cap C} = (B \cap C) \cup (\overline{B \cap C}) = U$$

Приклад 3. Довести, що $A \cup A = A$:

$$A \cup A = (A \cup A) \cap U = (A \cup A) \cap (A \cup \overline{A}) = A \cup (A \cap \overline{A}) = A \cup \varnothing = A.$$

Узагальнення операцій над множинами

1. Об'єднання n множин

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j, \text{ також } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ при } n = \infty.$$

2. Перетин n множин

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{j=1}^{n} A_j, \text{ також } \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \text{ при } n = \infty.$$

3. Формула де Моргана

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{n} A_j} = \bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j}; \quad \overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}.$$

Властивості множин

Означення. **Потужність множини** — це узагальнення поняття кількості елементів множини. Потужність множини *A* позначається як |*A*| або #*A* та позначається кардинальним числом.

Потужності множин можна порівнювати. Тобто можливі три випадки:

1. |A|=|B| або A та B рівнопотужні;

2. |A|>|B|або A **потужніша** від B, тобто A містить власну підмножину, рівнопотужну B, але A и B не рівнопотужні;

3. |A|<|B| або B потужніша від A, в цьому випадку B містить власну підмножину, рівнопотужну A, але A та B не рівнопотужні.

Ситуація, в якій *A* та *B* не рівнопотужні, і в жодному з них немає частини, рівнопотужній іншій множині, в теорії множин неможлива.

Означення**. Зліченність множини** - це така нескінчена множина, елементи якої можна занумерувати натуральним числом. Множина, яка не є зліченною, називається незліченною. Таким чином, будь-яка множина є або скінченою, або зліченною, або незліченною.

Тобто, зліченна множина - це множина, рівнопотужна множині натуральних чисел.

Зліченна множина є найменшою нескінченною множиною в тому розумінні, що в будь-якій нескінченній множини знайдеться зліченна підмножина.

Властивості зліченної множини:

1. Будь-яка підмножина зліченної множини або зліченна, або скінчена.

2. Об’єднання скінченної або зліченної кількості зліченних множин є зліченним.

3. Декартів добуток скінченної кількості зліченних множин є зліченним.

4. Множина всіх скінченних підмножин зліченної множини є зліченною.

Означення**. Скінченність множини** — множина, кількість елементів якої скінченна, тобто існує натуральне число, що є числом елементів цієї множини. В інакшому випадку множина є нескінченною.

1.2. Функції на множинах (відображення)

Математичне поняття функції виражає інтуїтивне уявлення про те, як одна величина повністю визначає значення іншої величини. Так, значення змінної *x* однозначно визначає значення виразу x^2, а значення місяця однозначно визначає значення наступного за ним місяця. Аналогічно, деякий задуманий наперед алгоритм за варійованими вхідними даними видає певні вихідні значення.

Зазвичай розглядають числові функції, які ставлять одні числа у відповідність іншим. Такі функції володіють низкою відмінностей і зручно представляються на рисунках у вигляді графіків.

Існують два визначення функцій.

1) інтуїтивне - поняття функції перекладається звичайною мовою, при цьому використовуючи слова «закон», «правило» або «відповідність».

<u>Означення</u>**. Функція f** (**відображення**, **операція**, **оператор**) -це закон або правило, згідно якому кожному елементу x з множини X ставиться у відповідність єдиний елемент y з множини Y.

При цьому говорять, що функція f задана на множині X, або що f відображує X в Y.

Якщо елементу $x \in X$ відповідає елемент $y \in Y$, то говорять, що елемент y знаходиться у ***функціональній залежності*** f від елементу x. При цьому змінна *x* називається ***аргументом*** функції *f* або ***незалежною змінною.***

Множина *X* називається ***областю задання*** або ***областю визначення*** функції, а елемент *y*, відповідний конкретному елементу *x*, - ***приватним значенням*** функції *f* в точці *x*.

Множина *Y* всіх можливих приватних значень функції *f* називається її ***областю значень*** або ***областю зміни***.

2) теоретико-множинне - визначення на основі поняття бінарного відношення, яке є більш суворішим.

У теоретично-множинному визначенні функцію *f* зручно подати як бінарне відношення (тобто множина впорядкованих пар $(x, y) \in X \times Y$), яке задовольняє наступній умові: для будь-якого $x \in X$ існує єдиний елемент $y \in Y$ такий, що $(x, y) \in f$.

Розглянемо дві множини X та Y.

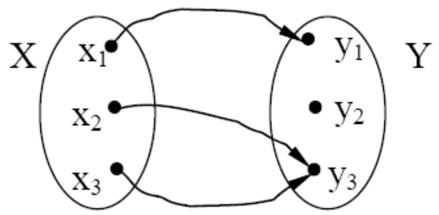


Рис.1.7. Відображення множини X у множину Y

<u>Означення</u>**.** Якщо кожному елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$, то така відповідність називається **відображенням множини X у множину Y**.

Позначення: f: X→Y, f – символ самого відображення.

<u>Означення.</u> Якщо при відображенні f кожний елемент множини Y є образом хоча б одного елементу з множини X, то f називають **сюр'єнктивною функцією** або **сюр'єнцією**.

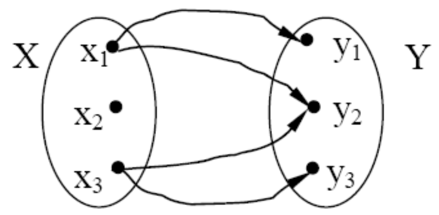


Рис.1.8. Ілюстрація відображення сюр'єнції

<u>Приклад</u>. Нехай X – множина студентів, Y – множина книг. Відображення «студенту x належить книга y» задає сюр'єнцію, оскільки будь-яка книга може належати одному або декільком студентам, а деякі студенти книг взагалі не мають.

Означення. Якщо при відображенні f всі різні елементи множини X переходять в різні елементи множини Y, то відображення f називають **ін’єнктивною функцією** або **ін’єнцією**.

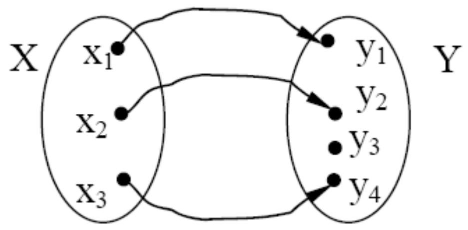


Рис.1.9. Ілюстрація відображення ін’єнції

Приклад. Нехай X – множина студентів, Y – множина стільців в аудиторії. Відображення «студент x сидить на стільці y» задає ін’єнцію, оскільки кожний студент сидить на стільці, але в аудиторії є ще й вільні стільці.

Означення. Якщо при відображенні f кожному елементу $x \in X$ відповідає один елемент $y \in Y$, при чому кожному елементу $y \in Y$ відповідає єдиний елемент $x \in X$, то відображення f називається **взаємно однозначною функцією**.

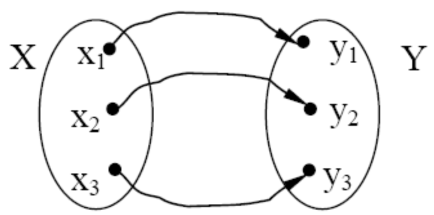


Рис.1.10. Ілюстрація взаємно однозначного відображення

Приклад. Нехай X – множина студентів, Y – множина залікових книжок. Відображення «студенту x належить залікова книжка y» є взаємно однозначним, оскільки певному студенту належить відповідно одна його залікова книжка і навпаки.

1.3. Бінарні відношення

Відношення реалізують в математичних термінах на абстрактних множинах реальні зв'язки між реальними об'єктами.

<u>Означення</u>. **Декартовим добутком** множин $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ називається множина усіх можливих впорядкованих наборів $(x_1, x_2, ... x_n)$ з n елементів, в яких перший елемент належить множині X_1, другий – множині X_2, n-ий - множині X_n.

<u>Означення</u>. Декартовий добуток $X \times X \times ... \times X$, в якому одна і та ж множина перемножується n раз сама на себе, називається **декартовим ступенем** множини і позначається X^n. При цьому $X^1 = X$, множина X^2 називається декартовим квадратом множини X, множина X^3 – декартовим кубом.

<u>Приклад</u>. Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$.

Тоді $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_1)\}$. Порядок слідування пар може бути довільним, але розміщення елементів у кожній парі визначається порядком слідування перемножених множин, тобто $A \times B \neq B \times A$, якщо $A \neq B$.

<u>Означення</u>. **n-арне відношення R** на множинах $X_1, X_2, ..., X_n$ – це підмножина декартового добутка цих n множин, тобто $R \subseteq X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

Якщо набір елементів $(x_1, x_2, ... x_n)$ належить відношенню R, то кажуть, що елементи $x_1, x_2, ... x_n$ знаходяться у відношенні R.

<u>Означення</u>. Якщо n=1, то відношення називається **унарним**, якщо n=2 – **бінарним**. Будь-яке n-арне відношення можна уявити у вигляді ланцюжка послідовно конструйованих бінарних відносин.

Нехай задано бінарне відношення R на множині $R \subseteq A^2$.

<u>Означення</u>. Відношення називається **повним**, якщо $A^2 = R$.

<u>Означення</u>. Відношення називається **порожнім**, якщо $R = \varnothing$.

Означення. Якщо відношення містить всі можливі пари виду (c, c) і не містить інших пар елементів, то таке відношення називається **тотожнім**.

Способи задання бінарних відношень

Якщо R – бінарне відношення на множинах X, Y, то факт $(x, y) \in R$ часто записують у вигляді xRy, і кажуть, що елемент x перебуває у відношенні R з елементом $y \in Y$.

Будь-яке бінарне відношення може бути задано у вигляді списку, елементами якого є пари, з яких складається відношення.

Бінарне відношення R на множинах X і Y може бути задано за допомогою матриці (W=W(R)), рядки якої відповідають елементам множини X, стовпці – елементам множини Y. Якщо $n = |X|, m = |Y|$ – кількість елементів множин X і Y відповідно, то матриця W має розмірність $n \times m$. Елемент w_{ij} матриці W відповідає парі $(x_i, y_j) \in R$, при цьому $w_{ij} = 1$, якщо $(x_i, y_j) \in R$ і $w_{ij} = 0$, якщо $(x_i, y_j) \notin R$.

Бінарне відношення R на множинах X, Y може бути задано графічно. На площині точками x_i та y_j зображаються елементи множин X і Y. Якщо пара (x_i, y_j) належить відношенню R, точки x_i та y_j з'єднуються стрілкою (дугою), спрямованою від першого елемента пари до другого. Позначивши таким чином всі пари, що належать відношенню R, отримується фігура, яка називається **графом відношення**. Стрілки, що з'єднують пари точок, називаються дугами, а точки, що зображують елементи множин, - вершинами графа.

Операції над відношеннями

Оскільки за визначенням будь-яке бінарне відношення R є підмножиною пар (x_i, y_j) з множин X і Y, то для відношення можна визначити всі ті ж операції, які визначені для підмножин фіксованої множини.

Включення відношень. Відношення R_1 включено у відношення R_2 (позначається $R_1 \subseteq R_2$), якщо множина пар, для яких виконано відношення R_1, міститься в множині пар, для яких виконується відношення R_2.. Виділимо строге включення R_1 в R_2, позначивши його $R_1 \subset R_2$:

$$R_1 \subset R_2, \text{ якщо } R_1 \subseteq R_2 \text{ і } R_1 \neq R_2.$$

Неважко переконатися, що для будь-якого *R* виконується включення:

$$\varnothing \subseteq R \subseteq U.$$

Безпосередньо із означення випливає співвідношення:

$$R_1 \subseteq R_2 \Leftrightarrow (\forall x, y \in X, Y \quad [xR_1y \Rightarrow xR_2y]).$$

Якщо виконується включення $R_1 \subseteq R_2$, то:

1. $a_{ij}(R_1) = a_{ij}(R_2)$;
2. граф $G(R_1)$ є підграфом $G(R_2)$;
3. $\begin{matrix} R_1^+(x) \subseteq R_2^+(x) \;\; \forall x \in X, \\ R_1^-(x) \subseteq R_2^-(x) \;\; \forall x \in X \end{matrix}$.

Операція доповнення. Відношення $\overline{R}$ називається доповненням відношення *R*, якщо воно виконується для тих лише пар, для яких не виконується відношення *R*:

$$\overline{R} = X^2 \setminus R.$$

Легко побачити, що

1. $a_{ij}(\overline{R}) = 1 - a_{ij}(R) \ \forall\, i, j$;

2. у графа $G(\overline{R})$ присутні лише ті дуги, яких немає в графі $G(R)$;

3. $\begin{array}{l} \overline{R}^{+}(x) = X \setminus R^{+}(x) \ \ \forall x \in X, \\ \overline{R}^{-}(x) = X \setminus R^{-}(x) \ \ \forall x \in X \end{array}$.

Очевидні співвідношення:

$$\overline{\varnothing} = U, (\overline{\overline{R}}) = R$$

<u>Операція перетину</u>. Перетином відношень R_1 та R_2 (позначається $R_1 \cap R_2$) називається відношення, яке виконується тільки для тих пар, для яких виконується R_1 та R_2 одночасно:

$$xR_1 \cap R_2 y \Leftrightarrow xR_1 y \wedge xR_2 y .$$

Неважко переконатися в справедливості наступних співвідношень:

1. $a_{ij}(R_1 \cap R_2) = a_{ij}(R_1) \wedge a_{ij}(R_2) \ \ \forall i, j$;

2. $(R_1 \cap R_2)^{+}(x) = R_1^{+}(x) \cap R_2^{+}(x) \ \ \forall\, x \in X$.

<u>Операція об’єднання</u>. Об'єднанням відношень R_1 та R_2 (позначається $R_1 \cup R_2$) називається відношення, яке виконується тільки для тих пар, для яких виконується хоча б одне з відношень R_1 або R_2:

$$xR_1 \cup R_2 y \Leftrightarrow xR_1 y \vee xR_2 y .$$

Тоді справедливо наступне :

1. $a_{ij}(R_1 \bigcup R_2) = a_{ij}(R_1) \vee a_{ij}(R_2) \;\; \forall i, j$;

2. $(R_1 \bigcup R_2)^-(x) = R_1^-(x) \bigcap R_2^-(x) \;\; \forall x \in X$.

<u>Операція повернення</u>. Зворотнім до відношення *R* називається відношення R^{-1}, яке задовольняє умові :

$$xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx.$$

Справедливі наступні співвідношення:

1. $a_{ij}(R^{-1}) = a_{ij}(R) \;\; \forall i, j$;

2. граф $G(R^{-1})$ отримується з графа $G(R)$ шляхом зміни напряму дуг на протилежний;

3. $\begin{matrix} (R^{-1})^+(x) = R^-(x) \;\; \forall x \in X, \\ (R^{-1})^-(x) = R^+(x) \;\; \forall x \in X \end{matrix}$;

4. $(R^{-1})^{-1} = R$;

5. $(\overline{R^{-1}}) = (\overline{R})^{-1}$.

<u>Операція множення (композиції)</u>. означається R_1R_2 або $R_1 \circ R_2$. Добутком відношень R_1 та R_2 називається відношення, яке визначається наступною умовою :

$$xR_1R_2y \Leftrightarrow \exists z \in Z \,|\, xR_1z \wedge zR_2y.$$

Справедливі наступні співвідношення:

1. $R \circ 0 = 0 \circ R = 0 \ \forall R$;

2. $R \circ E = E \circ R = R \ \forall R$;

3. $a_{ik}(R_1R_2) = \bigvee_{j=1}^{n} a_{ij}(R_1) \wedge a_{ik}(R_2) \ \forall i, j$;

4. у графа $G(R_1R_2)$ присутні тільки ті дуги, якими можна замкнути шлях завдовжки 2, в якому перша дуга належить $G(R_1)$, а друга - $G(R_2)$.

Окремим випадком добутку відношень є квадрат R^2 відношення *R*:

$$xR^2y \Leftrightarrow \exists\, z \in Z \mid xRz \wedge zRy.$$

Властивості бінарних відношень

Кожне бінарне відношення може володіти одним або кількома з існуючих властивостей. Ці властивості визначають вид матриці та графа відношення.

Рефлексивність. Відношення R на множині X називається рефлексивним, якщо для будь-якого $x \in X$ має місце xRx, тобто кожен елемент $x \in X$ знаходиться у відношенні R до самого себе.

Властивість рефлексивності при заданні відношення матрицею характеризується тим, що всі діагональні елементи матриці дорівнюють 1, а при заданні відношення графом кожен елемент має петлю-дугу (x, x).

Антирефлексивність. Відношення R на множині X називається антирефлексивним, якщо з x_1Rx_2 випливає, що $x_1 \neq x_2$.

Властивість антирефлексивності при заданні відношення матрицею характеризується тим, що всі діагональні елементи є нульовими. При заданні такого відношення графом жодна вершина не має петлі, тобто немає дуг виду (x, x).

Симетричність. Відношення R на множині X називається симетричним, якщо для пари $(x_1, x_2) \in X^2$ з x_1Rx_2 слідує x_2Rx_1 (інакше кажучи, для будь-якої пари відношення R виконується або в обидві сторони, або не виконується взагалі).

Матриця симетричного відношення є симетричною відносно головної діагоналі, а в заданому графі для кожної дуги з x_i в x_k існує протилежний напрямок дуги з x_k в x_i.

<u>Асиметричність</u>. Відношення R називається асиметричним, якщо для пари $(x_1, x_2) \in X^2$ з x_1Rx_2 випливає, що не виконується x_2Rx_1 (інакше кажучи, що для будь-якої пари відношення R виконується або в один бік, або не виконується взагалі).

<u>Антисиметричність</u>. Відношення R називається антисиметричним, якщо з x_1Rx_2 та x_2Rx_1, випливає, що $x_1 = x_2$.

Приклад антисиметричного відношення – відношення «$\le$» на множині дійсних чисел: якщо $a \le b$ та $b \le a$, то $a = b$.

<u>Транзитивність</u>. Відношення R називається транзитивним, якщо з x_1Rx_2 та x_2Rx_3, випливає x_1Rx_3.

У графа, що задає транзитивне відношення R, для кожної пари дуг, таких, що кінець першої співпадає з початком другої, існує третя дуга, що має загальний початок з першою і загальний кінець з другою.

Приклад. Відношення «$\le$» і «$<$» на множині дійсних чисел транзитивне: якщо $a \le b$ і $b \le c$, то $a \le c$.

<u>Антитранзитивність</u>. Відношення R називається антитранзитивним, якщо з x_1Rx_2 і x_2Rx_3 випливає, що не виконується x_1Rx_3.

Матриця бінарного відношення

<u>Приклад</u>. Матриця бінарного відношення $R \subseteq A^2$, $A = \{1,2,3\}$, задається графом, нступного виду

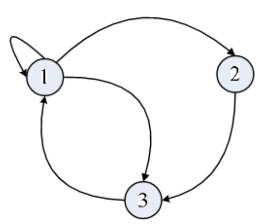


Рис.1.11. Граф бінарного відношення

Матриця цього відношення має вид $W[R]=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Основні властивості матриці бінарних відношень

1) Якщо $P,Q\subseteq A\times B, [P]=(P_{ij}), [Q]=(Q_{ij})$, то $[P\bigcup Q]=(P_{ij}+Q_{ij})$ і $[P\bigcap Q]=(P_{ij}\cdot Q_{ij})$, де додавання здійснюється за правилами $0+0=0, 1+1=1, 1+0=0, 0+1=1$, а множення звичайним чином.

<u>Приклад</u>. Нехай $[P]=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $[Q]=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ – матриці бінарних відношень P і Q. Тоді

$$[P\bigcup Q]=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$
$$[P\bigcap Q]=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

2) Якщо $P\subseteq A\times B, Q\subseteq B\times C$, то $[P\circ Q]=[P]\circ[Q]$, де множення матриць [P] і [Q] проводиться по звичайному правилу множення матриць, але добуток і сума елементів як визначено у попередньому пункті.

<u>Приклад</u>. Якщо $[P]=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $[Q]=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}$, то

$$[P\circ Q]=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

3) Матриця оберненого відношення P^{-1} дорівнює транспонованій матриці відношень P, тобто $[P^{-1}]=[P]^{T}$.

4) Якщо $P \subseteq Q, [P] = (P_{ij}), [Q] = (Q_{ij})$, то $P_{ij} \le Q_{ij}$.

5) Матриця тотожного відношення одинична.

6) Матриця симетричного відношення $[P]^{T} = [P]$.

ОСНОВИ КОМБІНАТОРИКИ

2.1. Предмет комбінаторики

Означення. **Множина** – сукупність об’єктів довільної природи, які володіють спільною для всіх них характеристичною властивістю.

Приклад. Множина всіх дійсних чисел; множина цілих чисел – *нескінченна* множина; множина цілих чисел від 1 до 100 – *скінченна* множина.

A, B, C,… – множини; *a, b, c* – їх елементи. Нагадаємо, що $A \bigcup B, A \bigcap B, A \setminus B, \varnothing$ – відповідно об’єднання, перетин, різниця множин і порожня множина. Позначимо: $N(A)$ – кількість елементів множини A. Якщо $N(A)=n$, то говорять, що A – n-множина.

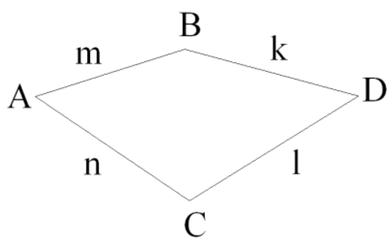
В основі комбінаторики лежать два елементарні правила – суми і добутку.

Правило суми – якщо є можливість вибрати елемент з деякої множини елементів A m способами, а елемент з множини B, яка не має спільних елементів з множиною А, - k способами, то вибрати елемент множини А або множини В можна $m+k$ способами.

Іншими словами, якщо необхідно виконати якусь дію $n1$,$n2$, або nk способами, то кількість можливих способів реалізації цієї дії буде дорівнювати $N=n1+n2+…+n$k.

Правило добутку (основне правило комбінаторики) - якщо першу дію можна здійснити n_1 способами, другу, яка не залежить від першої, – n_2 способами, ..., k-ту, яка не залежить від усіх попередніх, – n_k способами, то першу, другу, ..., k-ту дії послідовно можна здійснити $n_1n_2...n_k$ способами.

Приклад. Скількома способами можна потрапити з п.A до п.D, якщо з A до B веде m доріг, з B до D – k доріг, з A до C – n доріг і з C до D – l доріг?



За правилом добутку рух шляхом *ABD* можна здійснити *mk* способами, а шляхом *ACD* – *nl* способами. Згідно з правилом суми з *A* до *D* можна потрапити *mk* + *nl* способами.

Основними і типовими операціями і пов'язаними з ними задачами комбінаторики є наступні:

1) утворення впорядкованих множин, що полягає у встановленні певного порядку слідування елементів множини один за одним, - складання перестановок;

2) утворення підмножин, що полягає у виділенні з даної множини деякої частини її елементів, - складання комбінацій;

3) утворення впорядкованих підмножин - складання розміщень.

Типи комбінаторних задач

1. *Магічний квадрат* - квадратна таблиця (nxn) цілих чисел від 1 до n, суми чисел вздовж будь-якого стовпця, будь-якого рядка і двох діагоналей таблиці дорівнюють одному і тому ж числу $s = n(n+1)/2$. Число n називають порядком магічного квадрата.

2. *Латинський квадрат* - квадратна матриця порядку n, кожен рядок і кожен стовпець якої є перестановками елементів кінцевої множини S, що складається з n елементів.

3. *Задача розміщення* - одна з класичних комбінаторних задач, в якій необхідно визначити число способів розміщення m різних предметів в n різних комірках із заданим числом r порожніх комірок.

4. *Задача комівояжера*, задача про бродячого продавця – комбінаторна задача теорії графів. У простому випадку формулюється таким чином: дано n місць і відома відстань між кожними двома місцями; комівояжер, що виходить з будь-якого місця, повинен відвідати n-1 інших місць і повернутися в початкове. Необхідно визначити порядок відвідування місць (тільки один раз кожне), щоб загальна відстань проходження всього шляху була мінімальною?

Методи рішення задачі комівояжера, по суті, зводяться до організації повного перебору варіантів.

Методи рішення комбінаторних задач

1. *Метод рекурентних співвідношень*.

Даний метод полягає в тому, що рішення комбінаторної задачі з n предметами виражається через рішення аналогічної задачі з меншим числом предметів за допомогою деякого співвідношення, яке називається рекурентним. Користуючись цим співвідношенням, шукану величину можна обчислити, виходячи з того, що для невеликої кількості предметів рішення задачі знаходиться легко.

2. *Метод включення/виключення*.

Кількість елементів об'єднання двох множин, що не перетинаються, є сумою їх кількостей. Але якщо множини перетинаються, то елементи перетину при цьому додаванні кількостей враховуються двічі. Тому їх кількість треба один раз відняти:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \qquad (2.1)$$

При обчисленні $|A \cup B \cup C|$ додавання $|A| + |B| + |C|$ веде до того, що елементи кожного з перетинів $|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|$ враховуються двічі, тому їх треба по одному разу відняти. Якщо перетин $|A \cap B \cap C|$ порожній, то в результаті кожний елемент об'єднання враховано по одному разу. Якщо ні, то в результаті елементи цього перетину тричі додаються і тричі віднімаються, а саме

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B - C| + |A \cap B \cap C|. \qquad (2.2)$$

Формули (2.1) та (2.2) в загальному випадку об'єднання n множин A_1, A_2, …, A_n складають формулу, відому як **правило включень і виключень**, що дозволяє обчислити потужність об'єднання множин, якщо відомі їх потужності та потужності всіх їх перетинів:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i\le j<j\le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Як видно, кількості елементів усіх можливих перетинів непарної кількості множин додаються, а парної – віднімаються.

<u>Приклад</u>. Є група студентів, серед яких каву п'ють 12 (це множина A), чай – 10 (множина B), йогурт – 8 (C), каву і чай – 5 ($A \cap B$), каву і йогурт – 4 ($A \cap C$), чай і йогурт – 3 ($B \cap C$), усі три напої – 1 ($A \cap B \cap C$). Тоді всього студентів у групі 12+10+8-5-4-3+1=19.

3. *Метод траєкторій*.

Для багатьох комбінаторних задач можна вказати таку геометричну інтерпретацію, яка зводить рішення задачі до підрахунку числа шляхів (траєкторій), що володіють певною властивістю.

2.2. Основні формули комбінаторики

<u>Означення.</u> Множина M називається **впорядкованою**, якщо в ній встановлено відношення порядку <, що має такі властивості:

1) $\forall a, b \in M$ або $a < b$, або $b < a$;

2) якщо $a < b, b < c$, то $a < c$.

Для впорядкування n-множини досить кожному з її елементів приписати один з номерів 1,2,...,n, або просто записати її елементи в певному порядку.

Одну і ту ж множину можна впорядкувати по-різному.

Приклад. Для множини M={1, 2, 3} можливі такі впорядкування:

(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).

Нехай M – n-множина; $m \le n, m \in N$.

Означення. **Розміщенням** з n елементів по m називають будь-яку впорядковану m-підмножину множини M.

Кількість розміщень з n елементів по m обчислюють за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{2.3}$$

Приклад 1. M={1, 2, 3}; n=3, m=2; $A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6$. Можливі такі 6 варіантів розміщення: (1;2), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1), (3;2).

Приклад 2. Скільки різних музичних фраз можна скласти з 6 нот, якщо в кожній фразі не допускається повторення звуків?

Складені музичні фрази відрізняються одна від одної або нотами, або їх порядком. Таким чином, необхідно знайти число розміщень по 6 з 88 елементів (піаніно має 88 клавіш):

$$A_{88}^6 = \frac{88!}{(88-6)!} = 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 = 390190489920.$$

Означення. **Перестановкою** з n елементів називається розміщення з n елементів по n, тобто будь-яке впорядкування n-множини, яка складається з різних елементів.

Кількість перестановок з n елементів обчислюють за формулою:

$$P_n = n! \quad \left(P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n! \right). \tag{2.4}$$

Приклад 1. M={1, 2, 3}; n=3, $P_n = 3! = 6$. Можливі такі 6 варіантів перестановок: (1;2;3), (1;3;2), (2;1;3), (2;3;1), (3;1;2), (3;2;1).

Приклад 2. Скількома способами можна розмістити 12 чоловік за столом, біля якого стоїть 12 стільців?

Число способів рівно: $P_{12} = 12! = 1 \cdot \ldots \cdot 12 = 479001600$.

Означення. **Комбінацією** з n елементів по m називають будь-яку m-підмножину множини M.

Кількість комбінацій з n елементів по m обчислюють за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{2.5}$$

Приклад 1. M={1, 2, 3}; n=3, m=2; $C_3^2 = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$. Можливі такі 3 комбінації: {1;2}, {1;3}, {2;3}.

Приклад 2. Скількома різними способами можна вибрати з 15 чоловік делегацію в складі 3 чоловік?

Різними вважаються ті делегації, які різняться хоча б одним членом. Таким чином кількість способів наступна:

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{(15-3)!3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455.$$

Числа C_n^m називаються **біноміальними коефіцієнтами**, оскільки вони фігурують у відомій формулі біному Ньютона $(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}$. Поклавши у ній $a = b = 1$, одержимо: $2^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m$ - кількість підмножин n-множини.

Основні властивості біноміальних коефіцієнтів

1. Формула симетрії

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

2. Формула додавання

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}.$$

3. Формула суми всіх біноміальних коефіцієнтів

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n.$$

4. Формула винесення за дужки

$$C_n^m = \frac{n}{m} \cdot C_{n-1}^{m-1}.$$

Означення. **Розміщенням з повтореннями** з *n* елементів по *m* називають будь-яку впорядковану множину вигляду $(a_1, a_2, ..., a_k)$, де $a_i, i = \overline{1, m}$ - елементи множини *M*, не обов'язково різні.

Кількість розміщень з повтореннями з *n* елементів по *m* обчислюють за формулою:

$$\overline{A_n^m} = n^m. \tag{2.6}$$

Приклад. *M*={1, 2, 3}; *n*=3, *m*=2; $\overline{A_3^2} = 3^2 = 9$. Можливі такі 9 розміщень з повтояннями: (1;2), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1), (3;2), (1;1), (2;2), (3;3).

Означення. **Перестановкою з повтореннями** з *n* елементів називається будь-яке впорядкування *n*-множини, серед елементів якої є однакові.

Кількість перестановок з повтореннями з *n* елементів обчислюють за формулою:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_m!}. \tag{2.7}$$

Дана формула задає також кількість способів розбиття *n*-множини на *m* підмножин, що містять відповідно $n_1, n_2, ..., n_m$ елементів.

Приклад. $M=\{1,\ 2,\ 2\}$; $n=3$, $n_1=1$, $n_2=2$, $m=2$; $P_3(1,2)=\frac{3!}{1!2!}=3$. Можливі такі 3 перестановки з повтореннями: (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1).

Приклад розбиття n-множини. $M=\{1,\ 2,\ 3\}$; $n=3$, $n_1=1$, $n_2=2$, $m=2$; $P_3(1,2)=\frac{3!}{1!2!}=3$. Можливі такі 3 розбиття: $\{1\},\{2,3\}$; $\{2\},\{1,3\}$; $\{3\},\{1,2\}$.

Означення. **Комбінацією з повтореннями** з n елементів по m називають будь-яку m-множину вигляду $(a_1,a_2,...,a_m)$, де $a_i, i=\overline{1,m}$ - елементи множини M, не обов'язково різні.

Кількість комбінацій з повтореннями з n елементів по m обчислюють за формулою:

$$\overline{C_n^m}=C_{n+m-1}^m=\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}. \tag{2.8}$$

Приклад. $M=\{1,\ 2,\ 3\}$; $n=3$, $m=2$; $\overline{C_3^2}=C_4^2=\frac{4!}{2!2!}=6$. Можливі такі 6 комбінацій з повтореннями: {1;2}, {1;3}, {2;3}, {1;1}, {2;2}, {3;3}.

2.3. Біном Ньютона, трикутник Паскаля та зв'язок між ними

Розглянемо формули, які дозволяють досить легко і швидко розв'язувати великий клас задач. Наприклад, якщо необхідно знайти коефіцієнт, який стоїть перед x^9 многочлена $(2x+1{,}5)^{11}$. Для рішення достатньо розкрити всі дужки, перемножити, привести подібні і отримати відповідь. Як видно, це доволі часомісткі обчислення. Тому в даному випадку доцільно використати формули, за якими відразу отримується результат, це так званий **біном Ньютона**.

З шкільної програми по математиці добре відомі наступні формули розкладу бінома Ньютона в многочлен відносно a і b із степенями n=2 та 3:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Постає питання: чи можна ці формули узагальнити на довільну натуральну степінь n многочлена відносно a і b, а саме:

$$(a + b)^n = A_0 b^n + A_1 ab^{n-1} + \ldots + A_{n-1} a^{n-1} b + A_n a^n. \tag{2.9}$$

Дану рівність можна отримати, розкривши всі дужки і звівши подібні члени. Тут коефіцієнти $A_i, i = 0,1,2,\ldots,n$ є невідомими і потребують визначення. Постає питання: яким чином? Відповідь міститься у біномі Ньютона:

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}, \tag{2.10}$$

де

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \ n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 \ (0! = 1).$$

Цю рівність можна довести методом математичної індукції.

Розглянемо ще один спосіб отримання коефіцієнтів $A_i, i = 0,1,2,\ldots,n$ у розкладі $(a + b)^n$ - це **трикутник Паскаля**.

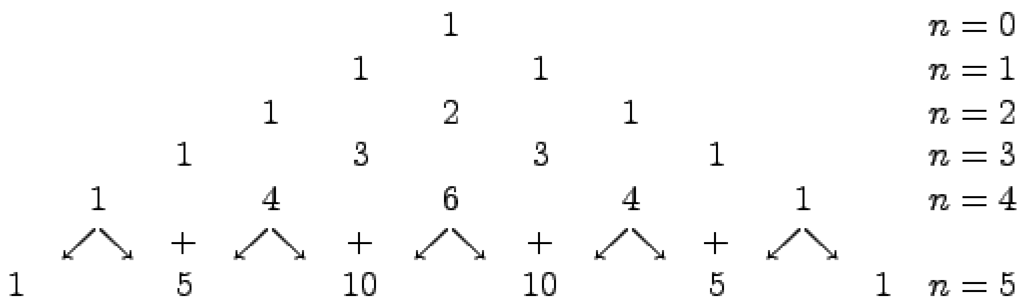


Рис. 2.1. Трикутник Паскаля

Алгоритм побудови трикутника Паскаля полягає в наступному. Кожна стрічка трикутника відповідає конкретній степені n многочлена, значення в стрічках відповідають коефіцієнтам в розкладі. Трикутник будується згори до низу, тобто від многочлена нульової степені, збільшуючи кожний раз степінь на одиницю. Стрілками показано які операції виконуються, а саме, зносяться кожні числа і додаються сусідні. Наступний крок – запис многочлена степені n і розстановка за порядком значень з n-ої стрічки трикутника.

Приклад 1. Знайти розклад $(x+2)^4$.

В даному прикладі $a = x, b = 2, n = 4$, тобто необхідно взяти четверту стрічку трикутника Паскаля.

Виписуємо розклад з невизначенним коефіцієнтами:

$$(a+b)^4 = A_0b^4 + A_1ab^3 + A_2a^2b^2 + A_3a^3b + A_4a^4,$$

підставляємо замість $a = x$ та $b = 2$, отримуємо:

$$\begin{aligned}&(x+2)^4 = A_0 2^4 + A_1x2^3 + A_2x^2 2^2 + A_3x^3 2 + A_4x^4 = \\ &= 16A_0 + 8A_1x + 4A_2x^2 + 2A_3x^3 + A_4x^4\end{aligned}.$$

Тепер беремо значення четвертої стрічки трикутника Паскаля, підставляємо їх почерзі замість коефіцієнтів і отримуємо:

$$\begin{aligned}&(x+2)^4 = 16\cdot 1 + 8\cdot 4x + 4\cdot 6x^2 + 2\cdot 4x^3 + 1x^4 = \\ &= 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4\end{aligned}.$$

Тут відслідковується рекурентний зв’язок між коефіцієнтами, а саме, якщо відомі коефіцієнти многочлена (n-1)-ої степені, тоді для многочлена n-ої степені вони знаходяться шляхом додавання.

Звідси випливає, що елемент, який належить n-й стрічці $(n = 0,1,2,...)$ і m-у стовпцю $(m = 0,1,2,...,n)$ визначається за формулою

$$a_{nm} = C_n^m. \tag{2.11}$$

Саме це і є зв’язок трикутника Паскаля з біноміальними коефіцієнтами.

Приклад 2. Знайти коефіцієнт, який стоїть перед x^9 многочлена $(2x+1{,}5)^{11}$.

Використовуючи біном Ньютона, отримуємо:

$$(2x+1{,}5)^{11} = \sum_{m=0}^{11} C_{11}^{m}(2x)^{m}(1{,}5)^{11-m} = \sum_{m=0}^{11} C_{11}^{m}2^{m}x^{m}(1{,}5)^{11-m}.$$

Степінь при *x* буде дорівнювати 9 коли m=9, тоді коефіцієнт при x^9:

$$C_{11}^{9}2^{9}1{,}5^{2} = \frac{11!}{9!2!}\cdot\frac{512\cdot 9}{4} = \frac{10\cdot 11}{2}\cdot 128\cdot 9 = 55\cdot 9\cdot 128 = 63360.$$

Властивості трикутника Паскаля

1. Друге число кожної стрічки відповідає її номеру.

2. Третє число кожної стрічки дорівнює сумі номерів стрічок, які їй передують.

3. Третє число кожної стрічки є трикутним, тобто таким числом кіл, які можуть бути розставлені у вигляді рівносторонього трикутника.

4. Сума чисел n-ї стрічки трикутника Паскаля дорівнює 2^n.

ОСНОВИ ЛОГІКИ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

3.1. Висловлювання та операції над ними

Математична логіка займає одне з найважливіших місць у сучасній математичній науці. Вона знайшла широке застосування в найрізноманітніших галузях наукових досліджень і дає можливість глибше вникнути в суть поняття доведення, зясувати зміст поняття логічного слідування, встановити звязки між різного роду теоремами тощо.

Історично математична логіка будувалась як алгебраїчна теорія, у якій звязки між різними поняттями логіки виражалися за допомогою операцій. Така побудова математичної логіки згодом дістала назву алгебри висловлень і алгебри предикатів.

Основними елементами математичної логіки є висловлювання.

Означення. **Висловлюванням** називається розповідне речення, про яке можна сказати, що воно або істинне, або хибне, але не одне й інше разом.

Приклад. 1) висловлювання x: «Число 9 ділиться націло на число 3» – істинне висловлювання; 2) висловлювання y: «Земля – друга від Сонця планета Сонячної системи» – хибне висловлювання.

Значення "істинне" або "хибне", які надані деякому висловлюванню, називають значенням істинності цього висловлювання. Значення "істинне" позначають літерою T (від англійського true), а "хибне" - літерою F (від false). Для позначення висловлювань використовують малі латинські букви як з індексами, так і без них. Символи, що використовують для позначення висловлювань, називають **атомарними формулами**, або **атомами**.

Символи a, b, …, x, y, z - атомарні формули.

Крім висловлювань, до основних об’єктів математичної логіки відносяться дві константи: логічний нуль – 0, та логічна одиниця – 1. Логічний нуль позначають також латинською літерою F (false), а логічну одиницю – літерою T (true).

В цих позначеннях можна записати: x=1, y=0.

Зрозуміло, що істинні та хибні висловлювання утворюють відповідні множини. За допомогою простих висловлювань можна складати більш складні, з'єднуючи прості висловлювання союзами “і”, “або”.

Операції з висловлюваннями можна описати за допомогою деякого математичного апарата.

1. Логічна операція *константа нуль* створює завжди хибне висловлювання. $x=0$.

2. Логічна операція *константа одиниця* створює завжди істинне висловлювання. $x=1$.

3. Логічна операція *змінна А* створює висловлювання $x=A$, яке дорівнює 0 тоді, коли А дорівнює 0 і навпаки. Читається: “Висловлювання залежить лише від А”.

4. Логічна операція *інверсія (логічне заперечення)* позначається $\overline{x}$ або $\neg x$ і читається «не x». Це висловлювання істинне, якщо x хибне, і хибне, якщо x істинне.

Таблиця істинності	
x	$\overline{x}$
0	1
1	0

5. Логічна операція *кон’юнкція* (*логічне множення*) висловлювань x та y позначається $x \wedge y$ і читається «x і y». Це складне висловлювання істинне тоді, і лише тоді, коли істинні обидва висловлювання x та y.

Таблиця істинності		
x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6. Логічна операція *диз'юнкція* (*логічне додавання*) висловлювань x та y позначається $x \vee y$ і читається «*x або y»*. Це складне висловлювання хибне тоді, і лише тоді, коли хибні обидва висловлювання x та y.

Таблиця істинності		
x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

7. Логічна операція *імплікація* висловлювань x та y позначається $x \to y$ і читається «з x слідує y» або «якщо x, то y». Це висловлювання хибне тоді, коли x істинне, а y — хибне.

$$x \to y \equiv \overline{x} \vee y. \tag{3.1}$$

Таблиця істинності		
x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

8. Логічна операція *еквівалентність* висловлювань x та y позначається $x \sim y\,(x \leftrightarrow y)$ і читається «x тоді і тільки тоді, коли y» або «для того щоб x необхідно і достатньо, щоб y». Це висловлювання істинне тоді, коли x та y одночасно істинні або одночасно хибні.

$$x \leftrightarrow y \equiv (\overline{x} \bigcup y) \bigcap (x \bigcup \overline{y}). \tag{3.2}$$

Таблиця істинності		
x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0

1	0	0
1	1	1

9. Логічна операція *альтернативна диз'юнкція* (додавання по модулю два) висловлювань x та y позначається $x \oplus y$ і читається «тільки одне з двох, x або y».

$$x \oplus y \equiv (x \cap \overline{y}) \cup (\overline{x} \cap y). \tag{3.3}$$

10. Логічна операція *штрих Шеффера* висловлювань x та y позначається $x|y$.

$$x|y \equiv \overline{x \cap y}. \tag{3.4}$$

Таблиця істинності		
x	y	$x\|y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

11. Логічна операція *стрілка Пірса* висловлювань x та y позначається $x \downarrow y$.

$$x \downarrow y \equiv \overline{x \cup y}. \tag{3.5}$$

Таблиця істинності		
x	y	$x \downarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Основні закони алгебри логіки

Головною ознакою законів логіки є їх об’єктивність – закони існують незалежно від знання чи незнання їх людьми.

1. *Закон тотожності*

Закон тотожності: будь-яка думка про предмет у процесі даного міркування тотожна сама собі, скільки б разів вона не повторювалась.

Думка тотожна сама собі тоді, коли стосується одного предмета і її зміст залишається одним. Якщо зміст думки змінюється або вона відноситься до іншого, то вона не може вважатись тією ж самою, це буде вже інша думка.

Цей закон спрямований безпосередньо проти нечітких, неясних, розпливчастих думок, а опосередковано – проти їх багатозначності.

Закон тотожності у вигляді формули записується так: х є х, або х=х.

2. *Закон суперечності*.

Закон суперечності: два судження, в одному з яких щось стверджується, а в другому те саме, в той же час і тому ж відношенні заперечується, не можуть бути одночасно істинними.

Закон суперечності не розв’язує, яке з двох суджень є хибним. Це встановлює конкретна наука і практика. Він говорить лише те, що із двох суджень, з яких одне заперечує те, що стверджує в другому, одне неодмінно хибне. Істинним чи хибним є друге твердження, закон суперечності теж не розв’язує.

Цей закон можна сформулювати і так: два протилежні судження, як і два суперечні, не можуть бути одночасно істинними. Істинність одного із протилежних суджень зобов’язує нас визнати друге судження хибним. Але встановлення одного з протилежних суджень не в усіх випадках призводить до визнання істинним другого. Це пояснюється різним характером суперечних суджень.

Поширюється закон суперечності на всі протилежні судження.

Об’єктивною основою закону суперечності є те, що один і той самий предмет не може одночасно мати і не мати одну й ту ж властивість.

Як і будь–який формально–логічний закон, закон суперечності застосований тільки до таких суджень, у яких ідеться про один і той же предмет, в один і той же час і в тому ж самому відношенні. Цей закон не застосовується до несуперечних суджень, в яких ідеться про різні предмети або різні ознаки одного предмета. Закон суперечності не діє, якщо в судженні ідеться про один предмет, але в різний час. Також закон не застосовується у випадках, коли в судженнях предмет думки береться у різних відношеннях.

Закон суперечності, як і закон тотожноті, відображає якісну визначеність предметів, коли предмет володіє якоюсь ознакою, то не може в той же час не володіти нею.

Формула закону суперечності: х не є не-х $(\overline{x\overline{x}} = 1)$, що означає, що не можуть бути одночасно істинннними судження х і його заперечення не-х.

З допомогою символів математичної логіки закон суперечності виражається так: $\overline{x\overline{x}} = 1$, де х означає всяке судженння, а $\overline{x}$ - судження, що заперечує судження х.

3. *Закон виключеного третього*.

Закон виключеного третього формується так: із двох суперечливих суджень про один і той же предмет, в один і той же час і в одному і тому ж відношенні одне неодмінно істинне, друге хибне, третього бути не може.

Якщо закон суперечності діє і між суперечними, і між протилежними судженнями, то закон виключеного третього - лише між суперечливими. Цей закон не може діяти між протилежними значеннями, бо вони можуть бути одночасно хибними.

З допомогою символів математичної логіки закон виключення третього виражається так: $x + \overline{x} = 1$, де х означає всяке судженння, а $\overline{x}$ - судження, що заперечує судження х. Необхідно прийняти одне і тільки одне рішення.

Зміст закону полягає в забороні визнавати одночасно хибним або одночасно істинним два суперечливі судження. Із цього випливає вимога закону: у процесі міркування не можна вважати одночасно хибними два суперечливі судження і визнавати істинним якесь третє судження.

З хибності одного судження випливає істинність другого, а саме тому істинним не може бути якесь третє судження. Істинним може бути одне із суджень: х або не-х, третього судження не може бути.

Закон виключеного третього дуже схожий з законом суперечності, заперечує несуперечливість і послідовність мислення. Але якщо закон суперечності свідчить про те, що два суперечливі судження не можуть бути істинними одночасно, то закон виключеного третього говорить про те, що два суперечливі судження не можуть бути хибними одночасно.

Основні закони алгебри логіки

1. Комутативність: $a + b \equiv b + a$

$ab \equiv ba$

2. Асоціативність: $a + (b + c) \equiv (a + b) + c$

$a(bc) \equiv (ab)c$

3. Дистрибутивність: $a + (bc) \equiv (a + b) \cdot (a + c)$

$a(b + c) \equiv (ab) + (ac)$

4. Комплементність: $a + \bar{a} = 1$

$a\bar{a} = 0$

5. Закони де Моргана: $\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b}$

$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$

6. Закони поглинання: $a + (ab) = a$

$a(a + b) = a$

7. Ідемпотентності: $a + a = a$

$aa = a$

$a + 0 = a$

8. Властивості констант: $a + 1 = 1$

$\bar{0} = 1$

$$a \cdot 0 = 0$$
$$a \cdot 1 = a$$
$$\overline{1} = 0$$

9. Склеювання: $(a + b) \cdot (\overline{a} + b) = b$

$$(ab) + (\overline{a}b) = b$$

3.2. Основні закони алгебри Буля

Булевою алгеброю називається непуста множина з двома бінарними операціями $\wedge$ (аналог кон'юнції) та $\vee$ (аналог диз'юнції), унарною операцією $\neg$ (аналог заперечення), а також двома елементами: 0 (або «хибне») та 1 (або «істинне»).

Буль вперше показав, що закони людського мислення можуть бути формалізовані так, що над ними можуть проводитись ті ж операції, що і над цілими числами. Формальні операції над судженнями можна описати наступними формулами:

1) формули для кон'юнції

$$1. 0 \wedge 0 = 0$$
$$2. 1 \wedge 0 = 0$$
$$3. 1 \wedge 1 = 0$$
$$4. 0 \wedge x = 0$$
$$5. 1 \wedge x = x$$
$$6. x \wedge x = x$$
$$7. x \wedge \overline{x} = 0$$

2) формули для диз'юнції

$$1. 0 \vee 0 = 0$$
$$2. 1 \vee 0 = 1$$
$$3. 1 \vee 1 = 0$$
$$4. 0 \vee x = x$$
$$5. 1 \vee x = 1$$
$$6. x \vee x = x$$
$$7. x \vee \overline{x} = 1$$

3) формули для інверсії

$$\overline{0} = 1$$
$$\overline{1} = 0 \cdot$$
$$\overline{\overline{x}} = x$$

4) спеціальні формули

$$\left.\begin{aligned} x \wedge y = y \wedge x \\ x \vee y = y \vee x \end{aligned}\right\} \text{закони комутативності}$$

$$\left.\begin{aligned} x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \end{aligned}\right\} \text{закони асоціативності}$$

$$\left.\begin{aligned} x \wedge (y \vee x) = x \\ x \vee (x \wedge y) = x \end{aligned}\right\} \text{закони поглинання}$$

$$\left.\begin{aligned} (x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) = x \\ (x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) = x \end{aligned}\right\} \text{закони склеювання}$$

$$\left.\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{aligned}\right\} \text{закони декомпозиції}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y} \\ \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \end{aligned}\right\} \text{закони де Моргана}$$

Означення. **Булевою функцією** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається довільна *n* – місцева функція, аргументи і значення якої належать множині $\{0, 1\}$.

Взагалі, говорячи про логічні висловлення та булеві функції, можна помітити явну аналогію між ними. Якщо логічні функції можуть приймати значення «істинне» чи «хибне», то для булевой функції аналогами цих значень будуть значення 1 чи 0.

Для булевих функцій також можна скласти таблиці істинності, що відповідають основним логічним операціям.

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Основні класи булевих функцій

Функція f називається такою, що *зберігає нуль*, якщо на наборі з нулів вона набуває значення 0. Наприклад, функції $\wedge$, $\vee$, 0 зберігають нуль, а - $\bar{\ }$, $\downarrow$, $\to$, $|$, 1 — не зберігають.

Функція f називається такою, що *зберігає одиницю*, якщо на наборі з одиниць вона набуває значення 1. Наприклад, функції $\wedge$, $\vee$, 1 зберігають одиницю, а - $\bar{\ }$, $\downarrow$, $\to$, $|$, 0 — не зберігають.

Функція f називається *самодвоїстою*, якщо $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Наприклад, функція $\bar{\ }$ самодвоїста, а несамодвоїсті — $\wedge$, $\vee$, $\downarrow$, $\to$, $|$, 0, 1.

Функція називається *монотонною*, якщо для будь-якої пари наборів $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ та $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, таких що $x_i \le y_i$, $i=1,\ldots,n$, $f(x) \le f(y)$. Монотонними є функції — $\wedge$, $\vee$, 0, 1, а немонотонними — $\bar{\ }$, $\downarrow$, $\to$, $|$.

3.3. Логіка предикатів і кванторів

<u>Означення</u>. **Предикатом** $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається функція, змінні якої приймають значення з деякої множини M, а сама функція приймає два значення: T (істина) і F (хибне), тобто

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) : M^n \to \{T,\ F\}. \tag{3.6}$$

Предикат від n аргументів називається n–місцевим предикатом. Висловлення вважаються нуль–місцевими предикатами.

Над предикатами можна робити звичайні логічні операції, у результаті яких виходять нові предикати.

Крім звичайних логічних операцій до предикатів застосовуються також спеціальні операції, названі **кванторами.**

Квантори бувають двох видів:

1**) Квантор спільності.** Позначається $(\forall x)P(x)$. Квантором спільності називається висловлювання істинне, коли $P(x)$ істинно для кожного елемента x з множини М, і хибне – у протилежному випадку.

2) **Квантор існування**. Позначається $(\exists x)P(x)$. Квантором існування називається висловлювання, істинне, коли існує елемент з множини М, для якого $P(x)$ істинно, і хибне в протилежному випадку.

Для формул логіки предикатів зберігається справедливість усіх правил рівносильних перетворень логіки висловлень. Крім того, справедливі наступні властивості:

1) Перенос квантора через заперечення.

$$\neg(\forall x)A(x)\equiv(\exists x)\neg A(x);$$

$$\neg(\exists x)A(x)\equiv(\forall x)\neg A(x);$$

2) Винесення квантора за дужки.

$$(\exists x)(A(x)\&\mathrm{B})\equiv(\exists x)A(x)\&\mathrm{B};$$

$$(\forall x)(A(x)\&\mathrm{B})\equiv(\forall x)A(x)\&\mathrm{B};$$

$$(\exists x)(A(x)\vee\mathrm{B})\equiv(\exists x)A(x)\vee\mathrm{B};$$

$$(\forall x)(A(x)\vee\mathrm{B})\equiv(\forall x)A(x)\vee\mathrm{B};$$

3) Перестановка однойменних кванторів.

$$(\forall y)(\forall x)A(x,y)\equiv(\forall x)(\forall y)A(x,y);$$

$$(\exists y)(\exists x)A(x,y) \equiv (\exists x)(\exists y)A(x,y);$$

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ

4.1 Властивості простих чисел

Означення. Натуральне число називається **простим**, якщо воно ділиться тільк само на себе і на 1.

Означення. Натуральне число називається **складеним**, якщо воно має дільника, відмінного від самого себе і 1;

Число 1 не вважається ні простим, ні складеним. Це пов'язано з тим, що 1 є так званим *оборотним елементом* множини цілих чисел, тобто будь-яке число можна поділити на 1, а прості числа цією властивістю не володіють.

Будь-яке натуральне число, відмінне від 1, можна подати як добуток простих співмножників*, причому* єдиним чином (з точністю до перестановки співмножників) - цей факт називається **основною теоремою арифметики**.

Разом з цими фактами слід пам'ятати і наступні.

Складені числа мають в своєму розкладі на прості множники хоча б два (не обов'язково різних) множники, а прості - рівно один множник; одиниця – не має множників взагалі.

Для будь-якого простого числа p і будь-якого натурального числа a існує цілий невід'ємний **степінь входження** p в розклад a, і він визначений однозначно. Якщо в розкладі a немає множника p, то степінь дорівнює 0. Якщо множник присутній - степінь входження дорівнює кількості простих множників, рівних p в розкладанні a. Позначається цей степінь входження через $v_p(a)$.

Два натуральних числа a і b рівні тоді і тільки тоді, коли $v_p(a) = v_p(b)$ для будь-якого простого p. Іншими словами: два числа рівні тільки тоді, коли степені входження в них всіх простих множників однакові.

Якщо натуральне число $n = a \cdot b$, то для будь-якого простого p: $v_p(n) = v_p(a) + v_p(b)$. Іншими словами: степінь входження будь-якого простого множника в число n дорівнює сумі його степенів входження в a і b. Дане твердження випливає з того, що розклад добутку чисел на прості множники є об’єднанням їх розкладів.

Число a ділиться на число b тільки тоді, коли будь-який простий множник входить в a в не меншій степені, ніж в b, тобто $v_p(a) \geq v_p(b)$ для будь-якого простого p. В інакшому випадку, якщо для якогось множника p ця умова не виконується, то при діленні утворюється дріб з множником p у знаменнику, який не знищується. Дана умова перевіряється тільки для простих множників, які входять в розклад b. Для тих, що не входять степінь входження буде рівний нулю $v_p(b) = 0$, що у будь-якому випадку не більше $v_p(a)$.

Означення. Число **a ділиться на b** (або b ділиться на a), якщо існує таке число c, що $a = b \cdot c$. При цьому число c називається **часткою від ділення** a на b.

Позначається: $a \vdots b$ (a ділиться на b) або $b | a$ (b ділить a).

Якщо a ділиться на b, і частку від ділення позначити за c, то $v_p(c) = v_p(a) - v_p(b)$ для будь-якого простого p. Іншими словами: степінь входження будь-якого простого множника в число c дорівнює різниці його степенів входження в a і b.

Прості властивості ділимості

1. Якщо $a \vdots b$ і c – частка від ділення, то c – єдинне.
2. $a \vdots a$.
3. Якщо $a \vdots b$ і $b \vdots c$, то $a \vdots c$.
4. Якщо $a \vdots b$ і $b \vdots a$, то або $a = b$, або $a = -b$.
5. Якщо $a \vdots b$ і $|b| > |a|$, то $a = 0$.
6. Якщо $a \vdots b$ і $a \neq 0$, то $|a| \geq |b|$.
7. Для того, щоб $a \vdots b$ необхідно і достатньо, щоб $|a| \vdots |b|$.
8. Якщо $a_1 \vdots b$, $a_2 \vdots b, \ldots, a_n \vdots b$, то $(a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n) \vdots b$.

Існують прості ознаки, які дозволяють визначити, чи ділиться число, наприклад, на 3, на 5, на 9 і.т.д.

1. Число ділиться на 3, якщо сума його цифр ділиться на 3.

2. Число ділиться на 5, якщо його остання цифра 5 або 0.

3. Число ділиться на 2, якщо на 2 ділиться його остання цифра.

4. Число ділиться на 9, якщо сума його цифр ділиться на 9.

5. Число ділиться на 8, якщо дві його останні цифри діляться на 8.

6. Число ділиться 11, якщо сума його цифр ділиться на 11.

Теорема. Множима простих чисел є нескінченною.

Доведення даної теореми проводиться від супротивного. Нехай множина простих чисел є скінченною, і число p – найбільше просте число. Розглянемо натурадьне число n, яке є добутком всіх простих чисел, тобто

$$n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p$$

і додамо до цього числа 1: $n + 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p + 1$. Очевидно, що отримане число не ділиться на жодне число від 1 до p, звідси отримуємо, $n = 1$. Але відомо, що $n > 1$. Отримали протиріччя, яке виникло через те, що зробили неправильне припущення. Відповідно, множина простих чисел є нескінченною.

Таким чином, який б, за довжиною, ряд послідовних складених чисел не обирався у ряді натуральних чисел, за ним знайдеться ще нескінченна множина простих чисел.

Алгоритм виділення простих чисел у послідовності натуральних $2, \ldots, n$ (так званий решето Ератосфена) полягає в наступному.

1) Викреслюємо послідовно кожне друге число після 2. Перше незакреслене число 3 є простим.

2) Викреслюємо кожне третє число після 3. Перше незакреслене число 5 є простим.

3) Викреслюємо кожне п’яте число після 5 і т.д., доки не дійдемо до числа, яке більше $\sqrt{n}$.

4) Всі числа, які лишаються не закресленими, є простими.

Найбільший спільний дільник (НСД) та найменше спільне кратне (НСК). Взаємно прості числа

Означення. **Спільним дільником** цілих чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ називається будь-яке ціле число d, таке, що

$$d \vdots a_1, d \vdots a_2, ..., d \vdots a_n .$$

Приклад. Числа 30, 165 мають спільними дільниками числа 3, -3, 15, -15.

Означення. **Найбільшим спільним дільником (НСД)** цілих чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ називається такий їх додатній спільний дільник, який ділиться на будь-який інший спільний дільник цих чисел.

Позначення: якщо d є НСД чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, то записується так: $(a_1, a_2, ..., a_n) = d$.

Основні властивості НСД цілих чисел

1. $d > 0$.

2. $d \vdots a_1, d \vdots a_2, ..., d \vdots a_n$.

3. Якщо існує ціле число k, таке, що $k \vdots a_1, k \vdots a_2, ..., k \vdots a_n$, то $k \vdots d$.

4. Для будь-яких цілих чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, з яких хоча б одне не дорівнює нулю, існує НСД.

Виходячи з властивості 4 існує спосіб знаходження НСД, а саме: 1) спочатку розкласти кожне число на прості множники, записавши розклад у канонічній формі; 2) потім знайти добуток мінімальних степенів простих множників, які входять в розклади.

Приклад. Знайти НСД чисел 5775, 15246, 399. Розкладемо числа на прості множники:

$$5775 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11, \quad 15246 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2, \quad 399 = 3 \cdot 7 \cdot 19.$$

Знайдемо добуток мінімальних степенів простих чисел, які входять в розклади:

$$d = 2^0 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 7 \cdot 11^0 \cdot 19^0 = 27.$$

Таким чином $(5775, 15246, 399) = 27$.

Означення. **Найменшим спільним (НСК)** цілих чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ називається найменше додатнє число, яке ділиться на всі ці числа.

Позначення: якщо m є НСК чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, то записується так: $m = [a_1, a_2, ..., a_n]$.

Основні властивості НСК цілих чисел

1. $m > 0$.

2. $a_1 \vdots m, a_2 \vdots m, ..., a_n \vdots m$.

3. Якщо $M > 0$ і $a_1 \vdots M, ..., a_n \vdots M$, то $m \le M$.

Означення. Числа a і b називаються **взаємно простими**, якщо НСД цих чисел дорівнює 1.

Основні властивості взаємно простих чисел

1. Якщо a і p – цілі числа, причому p – просте, то або $a \vdots p$, або числа a і p взаємно прості.

2. НСК двох взаємно простих чисел дорівнює їх добутку.

3. Для того, щоб число a ділилось на взаємно прості числа b і c, необхідно і достатньо, щоб воно ділилось на їх добуток.

4. Якщо $a \cdot b \vdots c$, причому $(a, c) = 1$, то $b \vdots c$.

Алгоритм Евкліда

Щоб знайти найбільший спільний дільник двох чисел, є дуже простий спосіб, відомий під назвою **алгоритму Евкліда,** або **способу послідовного ділення**.

Алгоритм Евкліда полягає в наступному. Нехай дано натуральні числа *a* і *b,* $a > b$.

1. Ділимо перше число на друге; дістанемо остачу $r_1 (r_1 < b)$.

2. Тепер *b* поділимо на r_1; дістанемо остачу $r_2 (r_2 < r_1)$.

3. Ділимо r_1 на r_2 і т. д.

Оскільки після кожного наступного кроку утворюється остача, менша від попередньої, то через скінченну кількість кроків дістанемо остачу, яка дорівнює нулю: ділення відбудеться націло і процес зупиниться.

Остання відмінна від нуля остача r_k, на яку націло ділиться остача r_{k-1}, і буде найбільшим спільним дільником чисел *a* і *b.*

Запишемо сказане як ланцюжок рівностей:

$$\begin{aligned}
&a = bq + r_1,\\
&b = r_1 q_1 + r_2,\\
&r_1 = r_2 q_2 + r_3,\\
&\dots\\
&r_{k-2} = r_{k-1} q_{k-1} + r_k,\\
&r_{k-1} = r_k q_k.
\end{aligned}$$

З останньої рівності випливає, що r_k є дільником r_{k-1}, $r_k = (r_k, r_{k-1})$. З передостанньої рівності випливає, що r_k ділить також r_{k-2} і $r_k = (r_{k-1}, r_{k-2})$. Так, послідовно піднімаючись кроками вгору, дістанемо, що $r_k = (a, b)$.

Приклад. Знайти НСД чисел 9765 і 6944.

$$9765 = 6944 \cdot 1 + 2821,$$

$$6944 = 2821 \cdot 2 + 1302,$$

$$2821 = 1302 \cdot 2 + 217,$$

$$1302 = 217 \cdot 6.$$

Отже $(9765,6944) = 217$.

4.2. Числові послідовності

Означення. Якщо кожному натуральному числу n поставлено у відповідність число x_n, то говорять, що задана **послідовність**

$$x_1, x_2, ..., x_n = \{x_n\}.$$

Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ називаються **членами послідовності**, а член з номером n - її n-им членом.

Спільний елемент послідовності є функцією від n.

$$x_n = f(n).$$

Таким чином послідовність може розглядатись як функція.

Задати послідовність можна різними способами – головне, щоб був вказаний спосіб отримання будь-якого члена послідовності.

Приклад. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ або $\{x_n\} = -1;1;-1;1;...$

$$\{x_n\} = \{\frac{\sin \pi n}{2}\} \text{ або } \{x_n\} = 1;0;1;0;...$$

Для послідовностей можна визначити наступні **операції**:

1) Множення послідовності на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, тобто $mx_1, mx_2, ..., mx_n$.

2) Додавання (віднімання) послідовностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.

3) Множення послідовностей: $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.

4) Ділення послідовностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

Обмежені і необмежені послідовності

<u>Означення.</u> Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою**, якщо існує таке число $M > 0$, що для будь-якого n вірна нерівність:

$$|x_n| < M,$$

тобто всі члени послідовності належать проміжку $(-M; M)$.

<u>Означення.</u> Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою зверху**, якщо для будь-якого n існує таке число M, що

$$x_n \le M.$$

<u>Означення.</u> Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою знизу**, якщо для будь-якого n існує таке число M, що

$$x_n \ge M.$$

<u>Приклад.</u> Послідовність $\{x_n\} = n$ – обмежена знизу $\{1,2,3,...\}$.

<u>Означення.</u> Число a називається **межею** послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого позитивного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що для всіх $n > N$ виконується умова $|a - x_n| < \varepsilon$.

$$\lim\{x_n\} = a.$$

В цьому випадку говорять, що послідовність $\{x_n\}$ **сходиться** до a при $n \to \infty$.

Якщо відкинути будь-яке число членів послідовності, то виходять нові послідовності, при цьому якщо сходиться одна з них, то сходиться і інша.

Приклад 1. Довести, що межа послідовності $\frac{(-1)^n}{n}$ дорівнює 0, тобто $\lim\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}=0$.

Нехай при $n>N$ вірно $\left|0-\frac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon$, тобто $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Це вірно при $n>\frac{1}{\varepsilon}$ таким чином, якщо за N взяти цілу частку від $\frac{1}{\varepsilon}$, то твердження, приведене вище, виконується.

Приклад 2. Показати, що при $n\to\infty$ послідовність $\left\{3,2\frac{1}{2},2\frac{1}{3},2\frac{1}{4},...,2+\frac{1}{n}\right\}$ має межею число 2.

Результат: $\{x_n=2+\frac{1}{n};\ \frac{1}{n}=x_n - 2\}$. Очевидно, щ існує таке число n, що $|x_n-2|=\left|\frac{1}{n}<\varepsilon\right|$, тобто $\lim\{x_n\}=2$.

Теорема. Послідовність не може мати більш за одну межу.

Теорема. Якщо $x_n\to a$, то $|x_n|\to|a|$.

Теорема. Якщо $x_n\to a$, то послідовність $\{x_n\}$ обмежена.

Слід зазначити, що зворотне твердження невірне, тобто через обмеженість послідовності не виходить її збіжність.

Приклад. Послідовність $x_n=\begin{cases}1+\frac{1}{n}, & \text{при парному } n\\ 2-\frac{1}{n,} & \text{при непарному } n\end{cases}$ не має межі, хоча $|x_n|\le 2$.

Арифметична прогресія

<u>Означення</u>. Числова послідовність $\{a_n\}$, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, з доданим до нього одним і тим же числом d, називається **арифметичною прогресією**.

Число d називається **різницею** арифметичної прогресії:

$$a_{n+1} = a_n + d. \tag{4.1}$$

Число a_1 - називається **першим членом** арифметичної прогресії.

Арифметична прогресія **зростаюча**, якщо її різниця більше нуля ($d > 0$) або **спадна** в протилежному випадку ($d < 0$).

Число S_n називається **сумою** n перших членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \tag{4.2}$$

Властивості арифметичної прогресії

1. $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
2. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad \forall n > 1.$
3. $S_n = \dfrac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$

Геометрична прогресія

<u>Означення</u>. Числова послідовність $\{b_n\}$, перший член якої відмінний від нуля, а кожен член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне і те ж число $q \neq 0$, називається **геометричною прогресією**.

Число q називається **знаменником** прогресії:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q\,. \qquad (4.3)$$

Число b_1 - називається **першим членом** геометричної прогресії.

Число S_n називається **сумою** n перших членів геометричної прогресії.

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}\,. \qquad (4.4)$$

Число P_n називається добутком n перших членів геометричної прогресії.

$$P_n = (a_1 \cdot a_n)^{\frac{n}{2}}\,. \qquad (4.5)$$

Властивості геометричної прогресії

1. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.
2. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1},\ \forall\ n > 1$.
3. $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q - 1}$.
4. Якщо $|q| \le 1$ і послідовність нескінченна, тобто $n \to \infty$, то $S_n = \dfrac{b}{1 - |q|}$.

Ряд Фібоначчі

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Закон створення членів цієї послідовності дуже простий: перші два члени - одиниці, а потім кожний наступний член дорівнює сумі двох попередніх.

Наприклад, 2=1+1, 3=1+2, 5=2+3, 8=3+5 і т. д.: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Будь-яка пара сусідніх чисел ряду Фібоначчі задовольняє одному з рівнянь

$$x^2 - xy - y^2 = 1$$

або

$$x^2 - xy - y^2 = -1,$$

причому більше число є значенням невідомого x, а менше - значенням невідомого y.

Властивості чисел ряду Фібоначчі

1. Принцип створення членів цього ряду приводить до наступного співвідношення між будь-якими його трьома членами, які стоять поруч S_{n-2}, S_{n-1}, S_n:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}.$$

Ця формула дає можливість по перших двох членах ряду встановити його третій член, по другому і третьому - четвертий, по третьому і четвертому - п'ятий і т. д.

2. Щоб відразу отримати будь-який член ряду s_n, знаючи лише номер n його місця, допомагають два ірраціональні числа $a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ та $a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$:

$$s_n = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}.$$

3. Сума n перших членів ряду Фібоначчі на 1 менша від (n+2)-го члена того ж ряду

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = s_{n+2} - 1.$$

4. Сума квадратів чисел ряду Фібоначчі виражається через добуток двох сусідніх членів того ж ряду:

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2 = s_n \cdot s_{n-1}.$$

5. $s_1 + s_3 + \ldots + s_{2n-1} = s_{2n}$.

6. $s_2 + s_4 + \ldots + s_2 = s_{2n+1} - 1$.

7. В ряду Фібоначчі кожне третє число – парне, кожне четверте ділиться на 3, кожне п’яте ділиться на 5, а кожне п’ятнадцяте – на 10.

4.3. Системи числення

Означення. **Системою числення** називається сукупність прийомів запису чисел. У будь-якій системі числення для представлення чисел вибираються деякі символи (їх називають **цифрами**), а решта чисел виходить в результаті операцій над цифрами даної системи числення.

Означення. Система називається **позиційною**, якщо значення кожної цифри (її вага) змінюється залежно від її положення (позиції) в послідовності цифр, що зображає число.

Приклад. Запис 5237 у позиційній системі числення означає, що це число містить 7 одиниць, 3 десятки, 2 сотні і 5 тисяч, тобто 5237 – це скорочене позначення виразу $5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$.

Означення. Число одиниць будь-якого розряду, що об'єднуються в одиницю більш старшого розряду, називають **основою позиційної системи числення**.

Позиційні системи числення розподіляються на великих класи – **однорідні** (з рівною довжиною чисел і основою у вигляді натурального числа) та **неоднорідні** (з рівною та нерівною довжиною числа і більш складною основою, ніж натуральні числа).

Однорідні системи числення відповідно до числа, яке взяте за їх основу, поділяються на двійкові, трійкові, десяткові і т.д.

Неоднорідні поділяються на системи зі змішаною основою, або поліадичні, і структурні – з числовою або функціональною основою. Останні, у свою чергу, поділяються на комбінаторні та табличні.

Під непозиційною системою числення розусіють систему, в якій кожна цифра завжди позначає одне і те саме число, незалежно від її місця (позиції) в запису числа.

Прикладом непозиційної системи числення є римська система. В ній для запису числа використовується сім цифр: цифра I означає одиницю, цифра V – п’ять, цифра X – десять, L – п’ятдесят, C – сто, D – п’ясот, M – тисячу. За допомогою цих цифр можна записати будь-яке число, використовуючи принцип додавання і віднімання. Якщо менша цифра стоїть справа від більшої, то вона додається до неї (причому вона може повторюватись не більше ніж 3 рази), якщо зліва – то віднімається (повторення меншої цифри не дозволяється). Хоч символу для позначеення нуля в римській систимі числення немає, проте можна записувати числа, які містять нуль.

Приклад. 1985 – MCMLXXXV, 2005 – MMV, 1809 – MDCCCIX.

Однорідні системи числення: загальна характеристика

Запис довільного числа *x* в P-ій позиційній системі числення грунтується на представленні цього числа у вигляді многочлена:

$$x = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + ... + a_1 P^1 + a_0 P^0 . \qquad (4.6)$$

У записі $5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$ число 10, що присутне у кожному доданку, є основою системи числення, а сама система називається – десятковою. Нагадаємо, що для запису числа в десятковій системі числення використовується рівно десять цифр, які називаються **алфавітом** системи числення: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Цифра, що позначає основу, тобто в даному разі число 10, відсутня. За принципом позиційної системи це число позначається одиницею в наступній позиції. Для того, щоб підкреслити, що число задане саме у десятковій системі пишуть $(5237)_{10}$.

Якщо за основу позиційної системи взяти число 7, то запис $(123)_7$ буде означати вираз

$$1\cdot 7^2 + 2\cdot 7^1 + 3\cdot 7^0 .$$

Якщо виконати арифметичні дії, то отримаємо число 66, тобто $(123)_7 = (66)_{10}$.

У сімковій системі числення для запису чисел використовуються тільки 7 цифр: 0,1,2,3,4,5,6 і наступні числа у цій системі будуть позначатись таким чином: 10,11,12,13,14,15,16,20,21….і т.д.

В комп’ютерних технологіях широко використовується шістнадцяткова система числення. В даній системі числення необхідно мати 16 символів для позначення цифр. Перші десять цифр запозичені з десяткової системи читслення, а решта позначаються великими латинськими літерами:

$$10\text{ - A}, 11\text{ - B}, 12\text{ - C}, 13\text{ - D}, 14\text{ - E}, 15\text{ - F} .$$

Таким чином запис $(2CF)_{16}$ буде означати вираз

$$2\cdot 16^2 + 12\cdot 16^1 + 15\cdot 16^0 = (944)_{10} .$$

Окрім шістнадцяткової, в комп’ютерних технологіях використовуються двійкова, а також вісіькова системи числення, які, як і шістнадцяткова, мають основою степені двійки.

Алфавіт двійкової системи складається лише з двох цифр: 0 та 1. Ці цифри називаються біт (від англ. «binary digit»). Запис вигляду $(101101)_2$ означає вираз

$$1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=(45)_{10}.$$

Дріб у двійковій системі числення записується за тими ж правилами, що і десятковий дріб, але при підрахунку значення необхідно використовувати від’ємні степені двійки. Запис $(0{,}1101)_2$ означає

$$\begin{gathered}1\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}+0\cdot 2^{-3}+1\cdot 2^{-4}=\\ 1\cdot 0{,}5+1\cdot 0{,}25+0\cdot 0{,}125+1\cdot 0{,}0625=(0{,}8125)_{10}\end{gathered}.$$

Арифметичні операції в однорідних системах числення

Арифметичні дії над числами в будь-якій однорідній системі числення проводяться по тих же правилах, що і десятковій системі, оскільки всі вони грунтуються на правилах виконання дій над відповідними многочленами. При цьому потрібно тільки користуватися тими таблицями складання і множення, які відповідають даній основі *P* системи числення.

Додавання

Операція додавання чисел у однорідних системах числення відбувається згідно таблиць додавання, які задаються за основами систем числення. При цьому одиниця переносу в старший розряд у цих таблицях не враховується. Так для двійкової, вісімкової та шістнадцяткової систем чилення таблиці додавання мають вигляд таблиць 4.1, 4.2 та 4.3.

Таблиця 4.1

Додавання для двійкової системи числення

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

Приклад 1. Скласти два числа $a=(1100)_2$ та $b=(0101)_2$. Отримуємо $c=a+b=(1100)_2+(0101)_2=(10001)_2$.

$$\begin{array}{r} {}_{+}(1100)_2 \\ \underline{(0101)_2} \\ (10001)_2 \end{array}$$

Перевірка:

$a=(1100)_2=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0=(12)_{10}$,

$b=(0101)_2=0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=(5)_{10}$,

$c=(10001)_2=1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=(17)_{10}$.

Таблиця 4.2

Додавання для вісімкової системи числення

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

Приклад 2. Скласти два числа $a=(316)_8$ та $b=(271)_8$. Отримуємо $c=a+b=(316)_8+(271)_8=(607)_8$.

$$\begin{array}{r} {}_{+}(316)_8 \\ \underline{(271)_8} \\ (697)_8 \end{array}$$

Перевірка:

$$a = (316)_8 = 3 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = (206)_{10},$$

$$b = (271)_8 = 2 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = (185)_{10},$$

$$c = (607)_8 = 6 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = (391)_{10}.$$

Таблиця 4.3

Додавання для шістнадцяткової системи числення

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	A	B	C	D	E	F	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	A	B	C	D	E	F	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	A	B	C	D	E	F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	B	C	D	E	F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
C	C	D	E	F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
D	D	E	F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C
E	E	F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D
F	F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E

Приклад 3. Скласти два числа $a = (A45)_{16}$ та $b = (CCA)_{16}$. Отримуємо $c = a + b = (A45)_{16} + (CCA)_{16} = (170F)_{16}$.

$$\begin{array}{r} + \ (A45)_{16} \\ \underline{(CCA)_{16}} \\ (170F)_{16} \end{array}$$

Перевірка:

$a = (A45)_{16} = 10 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = (2629)_{10}$,

$b = (CCA)_{16} = 12 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = (3274)_{10}$,

$c = (170F)_{16} = 1 \cdot 16^3 + 7 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = (5903)_{10}$.

Віднімання

Для операції віднімання застосовуються також відповідні таблиці (табл.4.4-4.6), в яких враховується одиниця займу зі старшого розряду.

Таблиця 4.4

Віднімання для двійкової системи числення

-	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

Приклад 1. Відняти два числа $a = (1101)_2$ та $b = (1011)_2$. Отримуємо $c = a - b = (1101)_2 - (1011)_2 = (10)_2$.

$$\begin{array}{r} - (1101)_2 \\ \underline{(1011)_2} \\ (0010)_2 \end{array}$$

Перевірка:

$a = (1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (13)_{10}$,

$b = (1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11)_{10}$,

$c = (10)_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (2)_{10}$.

Таблиця 4.5

Віднімання для вісімкової системи числення

-	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	7	6	5	4	3	2	1
1	1	0	7	6	5	4	3	2
2	2	1	0	7	6	5	4	3
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	3	2	1	0	7	6	5
5	5	4	3	2	1	0	7	6
6	6	5	4	3	2	1	0	7
7	7	6	5	4	3	2	1	0

Таблиця 4.6

Віднімання для шістнадцяткової системи числення

-	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
0	0	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	1	0	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2
2	2	1	0	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3
3	3	2	1	0	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4
4	4	3	2	1	0	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5
5	5	4	3	2	1	0	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6
6	6	5	4	3	2	1	0	F	E	D	C	B	A	9	8	7
7	7	6	5	4	3	2	1	0	F	E	D	C	B	A	9	8
8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	F	E	D	C	B	A	9
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	F	E	D	C	B	A
A	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	F	E	D	C	B
B	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	F	E	D	C
C	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	F	E	D
D	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	F	E
E	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	F
F	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Приклад 2. Відняти два числа $a = (151)_8$ та $b = (123)_8$. Отримуємо $c = a - b = (151)_8 - (123)_8 = (26)_8$.

$$\begin{array}{r} _{-}(151)_8 \\ \underline{(123)_8} \\ (26)_8 \end{array}$$

Перевірка:

$a = (151)_8 = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = (105)_{10}$,

$b = (123)_8 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = (83)_{10}$,

$c = (26)_8 = 2 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = (22)_{10}$.

Приклад 3. Відняти два числа $a = (27D)_{16}$ та $b = (191)_{16}$. Отримуємо $c = a - b = (27D)_{16} - (191)_{16} = (EC)_{16}$.

$$\begin{array}{r} _{-}(27D)_{16} \\ \underline{(191)_{16}} \\ (EC)_{16} \end{array}$$

Перевірка:

$a = (27D)_{16} = 2 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = (637)_{10}$,

$b = (191)_{16} = 1 \cdot 16^2 + 9 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = (401)_{10}$,

$c = (EC)_{16} = 14 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = (236)_{10}$.

Множення

Операція множення виконується на базі таблиць множення та додавання відповідно певної основи (таблиці 4.7-4.9). Ці таблиці утворюються в результаті множення стрічки на стовпчик у десятковій системі числення, а потім добуток подається в іншій системі числення як розклад за степенями відповідно до числової функції для однорідної системи числення. Наприклад, для десяткової системи числення після множення 5 на 7 отримуємо 35. У вісімковій системі числення цей добуток дорівнює

$$(43)_8 = 4 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 32 + 3 = (35)_{10}.$$

і знаходиться на перетині п'ятої стрічки і сьомого стовпця (див.табл. 4.8). А в шістнадцятковій системі числення добуток матиме наступне значення (див.табл. 4.9)

$$(23)_{16} = 2 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 32 + 3 = (35)_{10}.$$

Таблиця 4.7

Множення для двійкової системи числення

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Таблиця 4.8

Множення для вісімкової системи числення

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Приклад 1. Перемножити два числа $a = (100111)_2$ та $b = (1000111)_2$. Отримуємо $c = a \cdot b = (100111)_2 \cdot (1000111)_2 = (101011010001)_2$.

$$
\begin{array}{r}
{}_*(100111)_2 \\
\underline{(1000111)_2} \\
100111 \\
+\quad 100111 \\
100111 \\
\underline{100111} \\
(101011010001)_2
\end{array}
$$

Перевірка:

$a=(1100)_2=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0=(12)_{10}$,

$b=(0101)_2=0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=(5)_{10}$,

$c=(111)_2=1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0=(7)_{10}$.

Приклад 2. Перемножити два числа $a=(117064)_8$ та $b=(463)_8$. Отримуємо $c=a\cdot b=(117064)_8\cdot(463)_8=(57334134)_8$.

$$
\begin{array}{r}
{}_*(117064)_8 \\
\underline{(463)_8} \\
355234 \\
+\quad 732470 \\
\underline{474320} \\
(57334134)_8
\end{array}
$$

Перевірка:

$a=(117064)_8=1\cdot 8^5+1\cdot 8^{41}+7\cdot 8^3+0\cdot 8^2+6\cdot 8^1+4\cdot 8^0=(40500)_{10}$,

$b=(463)_8=4\cdot 8^2+6\cdot 8^1+3\cdot 8^0=(307)_{10}$,

$$
\begin{aligned}
c=(57334134)_8 &= 5\cdot 8^7+7\cdot 8^6+3\cdot 8^5+3\cdot 8^4+4\cdot 8^3+1\cdot 8^2+ \\
&+3\cdot 8^1+4\cdot 8^0=(12433500)_{10}
\end{aligned}.
$$

Таблиця 4.9

Множення для шістнадцяткової системи числення

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Приклад 3. Перемножити два числа $a = (A1B)_{16}$ та $b = (11F)_{16}$. Отримуємо $c = a \cdot b = (A1B)_{16} \cdot (11F)_{16} = (B5445)_{16}$.

$$
\begin{array}{r}
{}_{*}(A1B)_{16} \\
(11F)_{16} \\
\hline
9795 \\
+ \quad A1B \\
A1B \\
\hline
(B5445)_{16}
\end{array}
$$

Перевірка:

$a = (A1B)_{16} = 10 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = (2587)_{10}$,

$b = (11F)_{16} = 1 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = (287)_{10}$,

$c = (B5445)_{16} = 12 \cdot 16^4 + 5 \cdot 16^3 + 4 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = (742469)_{10}$.

Ділення

Операція ділення проводиться на основі таблиць множення та віднімання відповідно заданої основи до отримання залишку меншого дільника.

Приклад 1. Поділити два числа $a = (100110010011000)_2$ та $b = (101011)_2$. Отримуємо $c = a \div b = (100110010011000)_2 \div (101011)_2 = (111001000)_2$.

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{100110010011000} & 101011 \\ \cline{2-2}
 & 111001000 \\
\underline{101011} & \\
1000011 & \\
\underline{101011} & \\
110000 & \\
\underline{101011} & \\
101011 & \\
\underline{101011} & \\
0 &
\end{array}
$$

Перевірка:

$a = (100110010011000)_2 = (19608)_{10}$,

$b = (101011)_2 = (43)_{10}$,

$c = (111001000)_2 = (456)_{10}$.

Приклад 2. Поділити два числа $a = (46230)_8$ та $b = (53)_8$. Отримуємо $c = a \div b = (46230)_8 \div (53)_8 = (710)_8$.

$$\begin{array}{l|l} & 53 \\ \cline{2-2} \underline{46230} & 710 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{455} \\ \quad 53 \\ \quad \underline{53} \\ \quad\; 0 \end{array}$$

Перевірка:

$a = (46230)_8 = (19608)_{10}$,

$b = (53)_8 = (43)_{10}$,

$c = (710)_8 = (456)_{10}$.

<u>Приклад 3</u>. Поділити два числа $a = (4C98)_{16}$ та $b = (2B)_{16}$. Отримуємо $c = a \div b = (4C98)_{16} \div (2B)_{16} = (1C8)_{16}$.

$$\begin{array}{l|l} & 2B \\ \cline{2-2} \underline{4C98} & 1C8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{2B} \\ 219 \\ \underline{204} \\ \quad 158 \\ \quad \underline{158} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Перевірка:

$a = (4C98)_{16} = (19608)_{10}$,

$b = (2B)_{16} = (43)_{10}$,

$c = (1C8)_{16} = (456)_{10}$.

Перехід з десяткової в іншу систему числення

При переводі чисел з десяткової системи числення в систему з основою $P > 1$ зазвичай використовують наступний алгоритм:

1) якщо переводиться ціла частка числа, то вона ділиться на P (основу), після чого запам'ятовується залишок від ділення. Отримана частка знов

ділиться на *P*, залишок запам'ятовується. Процедура продовжується до тих пір, доки частка не стане меншою ніж основа. Залишки від ділення на *P* виписуються в порядку, зворотному їх отриманню;

2) якщо переводиться дробова частка числа, то вона множиться на *P*, після чого ціла частка запам'ятовується і відкидається. Знов отримана дробова частка множиться на *P* і так далі Процедура продовжується до тих пір, доки дробова частка не стане рівною нулю. Цілі частки виписуються після коми в порядку їх отримання. Результатом може бути або кінцевий, або періодичний дріб в системі числення з основою *P*. Тому, коли дріб є періодичним, доводиться переривати множення на будь-якому кроці і задовольнятися наближеним записом початкового числа в системі з основою *P*.

Приклад 1. Знайти запис числа $(464)_{10}$ у двійковій системі числення:

$464 \div 2 = 232$ остача 0

$232 \div 2 = 116$ остача 0

$116 \div 2 = 58$ остача 0

$58 \div 2 = 29$ остача 0

$29 \div 2 = 14$ остача 1

$14 \div 2 = 7$ остача 0

$7 \div 2 = 3$ остача 1

$3 \div 2 = 1$ остача 1

Частка від ділення 1 менше основи 2, тоді $(464)_{10} = (111010000)_2$.

Приклад 2. Знайти запис числа $(1216)_{10}$ у вісімковій системі числення:

$1216 \div 8 = 152$ остача 0

$152 \div 8 = 19$ остача 0

$19 \div 8 = 2$ остача 3

Частка від ділення 2 менше основи 8, тоді $(1216)_{10} = (2300)_8$.

Приклад 3. Знайти запис числа $(12135)_{10}$ у шістнадцятковій системі числення:

$12135 \div 16 = 758$ остача 7

$758 \div 16 = 47$ остача 6 .

$47 \div 16 = 2$ остача 15 (F)

Частка від ділення 2 менше основи 16, тоді $(12135)_{10} = (2F67)_{16}$.

Якщо необхідно перевести число з двійкової системи числення в систему числення, основою якої є ступінь двійки, досить об'єднати цифри двійкового числа в групи по стільки цифр, який показник ступеня, і використовувати приведений нижче алгоритм.

Наприклад, якщо перевід здійснюється у вісімкову систему, то групи міститимуть три цифри ($8 = 2^3$), які називаються тріади; якщо у шістнадцяткову систему, то групи міститимуть чотири цифри ($16 = 2^4$) – тетради. Отже, в цілій частці проводиться угрупування справа наліво, в дробі — зліва направо. Якщо в останній групі бракує цифри, дописуються нулі: у цілій частці — зліва, в дробі — справа. Потім кожна група замінюється відповідною цифрою нової системи. Відповідності приведені в таблиці 4.9.

Таблиця 4.9

Перші 16 чисел у чотирьох різних системах числення

Десяткова система числення	Двійкова система числення	Вісімкова система числення	Шістнадцяткова система числення
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Приклад. Перевести з двійкової системи у вісімкову та шістнадцяткову число $(1111010101)_2$.

$$(1111010101)_2 = (1725)_8$$
$$\left(\frac{1}{1}\,\frac{111}{7}\,\frac{010}{2}\,\frac{101}{5}\right)$$

.

$$(1111010101)_2 = (3D5)_{16}$$
$$\left(\frac{11}{3}\,\frac{1101}{D}\,\frac{0101}{5}\right)$$

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

5.1 Основні поняття та визначення

Теорія графів — це розділ дискретної математики, особливістю якого є геометричний підхід до вивчення об'єктів. Основне поняття теорії — граф. Поняття графа спирається на основні поняття теорії множин, тому що граф можна розглядати як об'єкт, що складається із двох множин — множини крапок (вершин) X і множини ліній (ребер) V, які з'єднують деякі вершини, кожне ребро являє собою неупорядковану пару вершин із множини X.

При цьому зовсім несуттєво, чи з'єднані вершини графа відрізками прямих ліній або криволінійних дуг, яка довжина ліній, як розташовані вершини графа на площини й інші геометричні характеристики графа.

Граф є математичною моделлю найрізноманітніших об'єктів, явищ і процесів, що досліджуються і використовуються в науці, техніці та на практиці.

Основні елементи геометричних фігур, які застосовуються у теорії графів наведені на рисунку 5.1 та складаються з вершин графу, ребер графу та дуг графу.

Сполучення цих елементів визначає поняття: неорієнтований граф, орієнтований граф та змішаний граф.

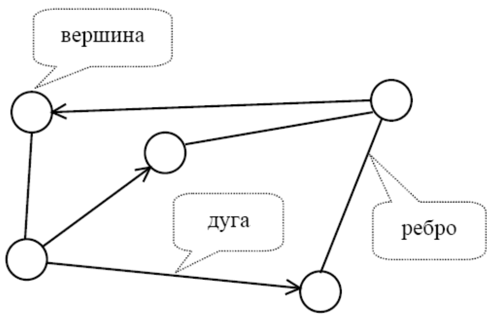


Рис. 5.1. Основні елементи графу

<u>Означення</u>. Граф, для кожного ребра якого несуттєвий порядок двох його кінцевих вершин, називається **неорієнтованим (неографом)**.

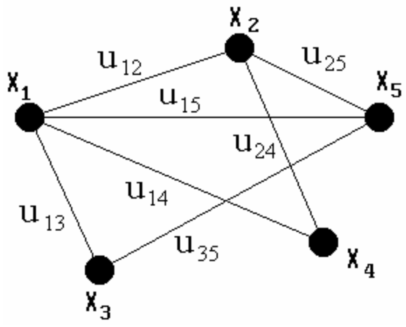


Рис. 5.2. Неорієнтований граф

Означення. Граф, для кожного ребра якого істотний порядок двох його кінцевих вершин, називається **орієнтованим (орграфом)**. Ребра орграфа називають **дугами**.

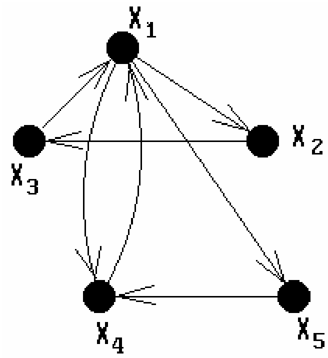


Рис. 5.3. Орієнтований граф

Означення. Граф, який містить як орієнтовані, так і неорієнтовані ребра, називається **змішаним**.

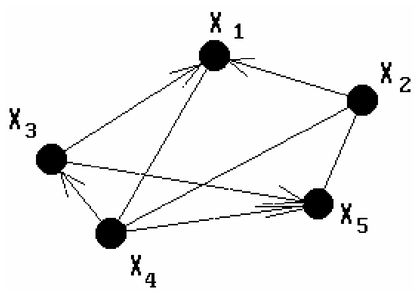


Рис. 5.4. Змішаний граф

Кожний з перерахованих видів графа може містити одне або кілька ребер, у яких обидва кінці сходяться в одній вершині, такі ребра називаються **петлями**.

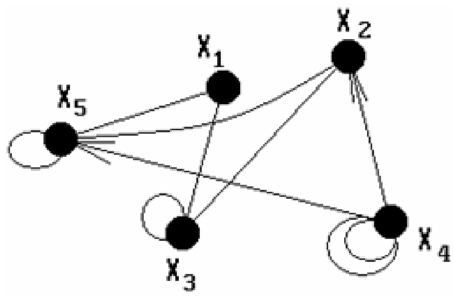


Рис. 5.5. Змішаний граф з петлями

У загальному випадку множина ребер може складатися із трьох непересічних підмножин: підмножини ланок, підмножини дуг і підмножини петель.

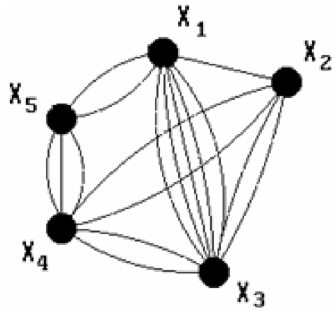


Рис. 5.6. Загальний випадок графа

Наочно граф можна уявляти як геометричну конфігурацію, яка складається з точок (вершин графу 1,2,3,4,5,6) і ребер (ліній або відрізків №1(1-3), №2(3-4), №3(4-5), №4(3-5), №5(2-3), №6(2-5), №7(5-6), №8(6-2), №9(2-1), які сполучають деякі точки (вершини) за вибраним алгоритмом обходу вершин графу).

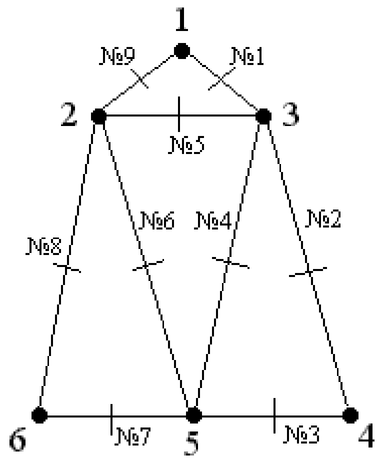


Рис. 5.7. Геометрична конфігурація графа, в якому всі вершини можна обійти за маршрутом без перетинання ребер графу

Означення. **Граф** $G=(X,V)$ – це пара множин X та V. Множина X –це множина вершин, множина V –це множина ребер.

Існує декілька ***способів задання*** графів.

Одним зі способів задання графа $G=(X,V)$ є задання кожної з множин X та V за допомогою переліку їх елементів.

Приклад. Граф $G_1=(X_1,V_1)$, $X_1=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ та $V_1=\{(x_1,x_3),(x_1,x_4),(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_3,x_4)\}$ – це граф із чотирма вершинами і п'ятьма ребрами.

А граф $G_2=(X_2,V_2)$, $X_2=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ та $V_2=\{(x_1,x_2),(x_2,x_4),(x_1,x_5),(x_3,x_2),(x_3,x_5),(x_4,x_1),(x_5,x_4)\}$ – граф із п'ятьма вершинами і сімома ребрами.

Граф $G=(X,V)$ зручно зображати за допомогою рисунка на площині, який називають ***діаграмою*** графа *G*. Вершинам графа *G* ставляться у бієктивну відповідність точки площини; точки, що відповідають вершинам x_i і x_j, з'єднуються лінією (відрізком або кривою) тоді і тільки тоді, коли x_i і x_j суміжні вершини. Зрозуміло, що діаграма графа змінюватиме свій вигляд в залежності від вибору відповідних точок на площині.

Приклад. На рисунку 5.8 зображені діаграми графів G_1 і G_2 з попереднього прикладу.

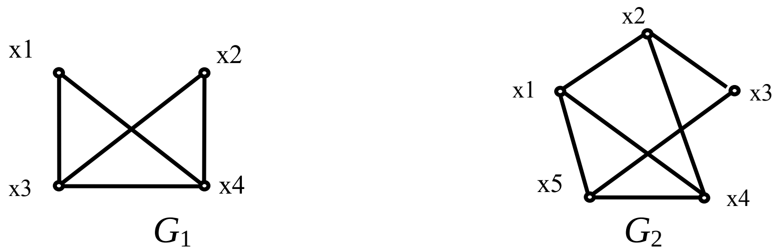


Рис 5.8. Діаграми графів

Графи можна задавати також за допомогою матриць.

Означення. **Матриця суміжності** графа $G=(X,V)$ - це симетрична квадратна $n\times n$-матриця, в якій елементи a_{ij} i-го рядка і j-го стовпчика дорівнює 1, якщо вершини x_i і x_j з номерами i та j суміжні, і дорівнює 0 у противному разі.

Матриця $A=\{a_{ij}\}$ - матриця суміжності графа $G=(X,V)$:

$$a_{ij}=\begin{cases}1,(x_i,x_j)\in V\\ 0,(x_i,x_j)\notin V\end{cases}. \tag{5.1}$$

Приклад. Для графів G_1 і G_2 маємо відповідно

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix} \text{ та } A_2=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&1&1&0\\0&1&0&0&1\\1&1&0&0&1\\1&0&1&1&0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, що матриці суміжності графів – симетричні.

Пронумеруємо всі вершини графа G числами від 1 до n і всі його ребра – числами від 1 до m.

Означення. **Матриця інцидентності** орграфа $G=(X,V)$ - це прямокутна $n\times m$-матриця $B=\{b_{ij}\}$, елементи b_{ij} якої дорівнюють 1, якщо вершина x_i є початком дуги v_j; $b_{ij}=-1$, якщо вершина x_i є кінцем дуги v_j; $b_{ij}=0$, якщо вершина x_i не інцидентна дузі v_j.

Матриця $B=\{b_{ij}\}$ - матриця інцидентності орграфа $G=(X,V)$:

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо } x_i - \text{початок дуги}\\ -1, & \text{якщо } x_i - \text{кінець дуги}\\ 0, & \text{якщо } x_i - \text{не інцидентна дузі}\end{cases}. \tag{5.2}$$

Матриця $B=\{b_{ij}\}$ - матриця інцидентності неографа $G=(X,V)$:

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо } x_i - \text{інцидентна дузі}\\ 0, & \text{якщо } x_i - \text{не інцидентна дузі}\end{cases}. \tag{5.3}$$

Приклад. Для графів G_1 і G_2 маємо:

$$B_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1\end{pmatrix} \text{ та } B_2=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&1&0\\1&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

Нарешті, ще одним способом задання графів є ***списки суміжності***. Кожній вершині графа відповідає свій список. У список, що відповідає вершині x_i, послідовно записуються всі суміжні їй вершини.

Приклад. Для графів G_1 і G_2 маємо списки

G_1: G_2:

x_1: x_3,x_4 x_1: x_2,x_4,x_5

x_2:	x_3,x_4	x_2:	x_1,x_3,x_4
x_3:	x_1,x_2,x_4	x_3:	x_2,x_5
x_4:	x_1,x_2,x_3	x_4:	x_1,x_2,x_5
		x_5:	x_1,x_3,x_4

Вибір та зручність того чи іншого зі способів завдання графів залежать від особливостей задачі, яка розв’язується.

Означення. Вершина орграфа, якій інцидентні тільки вихідні дуги, називається **початковою** вершиною. Нехай $G=(X,V)$ – орієнтований граф, $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $V=\{v_1=\{x_1,x_2\},v_2=\{x_1,x_3\}\}$, тоді x_1 – початкова вершина.

Означення. Вершина орграфа, якій інцидентні тільки вхідні дуги, називається **кінцевою** вершиною. Нехай $G=(X,V)$ – орієнтований граф, $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $V=\{v_1=\{x_2,x_1\},v_2=\{x_3,x_1\}\}$, тоді x_1 – кінцева вершина.

Означення. Вершину, з якої не виходить і в яку не входить жодна дуга, називають **ізольованою**.

Означення. Вершину, з якої не виходить жодної дуги (ребра) називають **тупіком** або **висячою**.

Дві **вершини суміжні**, якщо вони з’єднані дугою чи ребром.

Два **ребра суміжні**, якщо вони мають спільну вершину.

Якщо суміжність – це відношення між однорідними об’єктами, то інциденція – між різнорідними.

Вершина і дуга є інцидентними, якщо дана вершина є початком або кінцем заданої дуги.

Означення. Граф $G=(X,V)$ називається **повним**, якщо він складається з максимально можливої кількості ребер, які попарно з’єднують точки (x_i,x_j) його вершин. Якщо множина X містить n вершин, то число ребер повного графа дорівнює C_n^2.

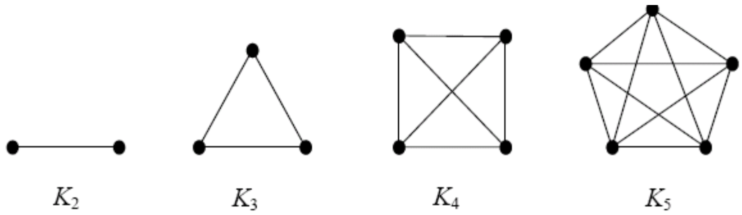


Рис. 5.9. Приклади повних графів

Означення. Граф $G=(X,V)$ називається **порожнім**, якщо $V=\varnothing$, тобто граф не має ребер.

Означення. **Напівстепенем виходу** $d(x_i)$ **вершини** називається кількість вихідних з вершини дуг.

Означення. **Напівстепенем входу** $q(x_i)$ **вершини** називається кількість вхідних у вершину дуг.

Означення. **Степенем** $p(x_i)$ вершини x_i графа $G=(X,V)$ називається число вершин x_j, які інцидентні вершині x_i або іншими словами

$$p(x_i)=d(x_i)+q(x_i). \tag{5.4}$$

Означення. Послідовність ребер $(x_{i_1},x_{i_2}),(x_{i_2},x_{i_3}),...,(x_{i_{l-2}},x_{i_{l-1}}),(x_{i_{l-1}},x_{i_l})$, в якій сусідні ребра інцидентні одній і тій же вершині називаються **ланцюгом**. Ланцюг називається простим, якщо всі вершини, які належать йому – різні. Число в цьому випадку називають довжиною ланцюга.

Якщо $x_{i_1}=x_{i_l}$, то ланцюг називається **циклом**. Цикл, в якому всі вершини різні, називається простим. Приклади простих ланцюгів та простих циклів наведені на рисунку 5.10:

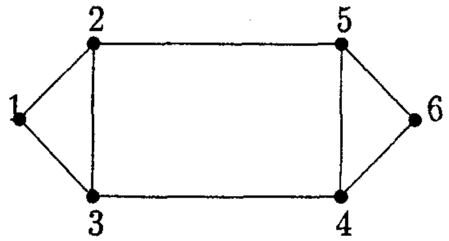


Рис. 5.10. Приклад графа з простими ланцюгами та простими циклами, де: 1) (1,3), (3,4), (4,6) – простий ланцюг; 2) (1,2), (2,5), (5,6) – простий ланцюг; 3) (1,3), (3,4), (4,6), (6,5), (5,2), (2,1) – простий цикл.

Означення. Граф $G_1 = (X_1, V_1)$ є **підграфом** графа $G = (X, V)$, якщо $X_1 \subset X, V_1 \subset V_1 \times V_1$.

Якщо $X_1 = X$, то підграф $G_1 = (X_1, V_1)$ називається **остовом** графа.

Граф $G = (X, V)$ є сумою графів $G_1 = (X_1, V_1) \dots G_k = (X_k, V_k)$, якщо

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} X_k, \quad V = \bigcup_{i=1}^{k} V_k . \tag{5.5}$$

Дана сума називається прямою, якщо $X_i \cap X_j = \varnothing$, $i \neq j$

Означення. Граф $G_2 = (X_2, V_2)$ є **суграфом** графа $G = (X, V)$, якщо $X_2 = X, V_2 \subset V$.

Означення. Граф $G_3 = (X_3, V_3)$ є **частковим графом** графа $G = (X, V)$, якщо $X_3 \subset X, V_3 \subset V$.

Іншими словами підграф отримується з графа видаленням вершин разом з інцидентними їм дугами (ребрами). Суграф отримується з графа видаленням дуг (ребер) зі збереженням всіх вершин. А частковий граф отримується з графа поєднанням двох вищеописаних операцій.

Важливі класи підграфів складають підграфи, які отримуються в результаті застосування до заданого графа операції вилучення вершини і/або операції вилучення ребра.

Операція вилучення вершини x з графа $G=(X,V)$ полягає у вилученні з множини X елемента x, а з множини V – всіх ребер, інцидентних x.

Операція вилучення ребра v з графа $G=(X,V)$ – це вилучення елемента v з множини V. При цьому всі вершини зберігаються.

Також для графів можна означити наступны операції: об’єднання, переріз, різниця та добуток графів.

Означення. **Об’єднанням** графів $G_1=(X_1,V_1)$ та $G_2=(X_2,V_2)$ називається граф $G=(X,V)$, у якого $X=X_1\bigcup X_2, V=V_1\bigcup V_2$.

Означення. **Перерізом** графів $G_1=(X_1,V_1)$ та $G_2=(X_2,V_2)$ називається граф $G=(X,V)$, у якого $X=X_1\bigcap X_2, V=V_1\bigcap V_2$.

Означення. **Різницею** графів $G_1=(X_1,V_1)$ та $G_2=(X_2,V_2)$ називається граф $G=(X,V)$, у якого $X=X_1, V=V_1\setminus V_2$.

Означення. **Добутком** графів $G_1=(X_1,V_1)$ та $G_2=(X_2,V_2)$ називається граф $G=(X,V)$, у якого $X=X_1\times X_2$ і $((x_i^{(1)},x_k^{(2)}),(x_j^{(1)},x_{el}^{(2)})\in V$, якщо $(x_i^{(1)},x_j^{(1)})\in V_1$ і $(x_k^{(2)},x_e^{(2)})\in V_2$.

Означення. Граф $G=(X,V)$ називається **зв’язним**, якщо будь-які вершини x_i та x_j $\left(x_i\in X, x_j\in X\right)$ сполучені ланцюгом з початком в x_i і кінцем в x_j. З симетрії випливає, що в цьому випадку і вершина x_j сполучена з вершиною x_i.

Кожен граф є прямою сумою зв’язних графів.

Графи $G_i=(X_i,V_i)$ є зв’язними графами і їх сума є прямою сумою зв’язних графів.

$$G(X,V)=\bigcup_{i=1}^{k}G_i(X_i,V_i). \tag{5.6}$$

Ці графи називаються **компонентами** зв’язності.

Неформально, граф виглядає як діаграма, тобто множина точок площини (вершин, або вузлів), з'єднаних між собою лініями (ребрами). Діаграма дає уяву про зв'язки між елементами (вершинами), але нічого не каже про метричні властивості (довжина ліній, їх форма тощо).

Залежно від типу ребер відрізняють кілька типів графів. **Петля** — це ребро, що з'єднує вершину саму з собою. У **мультиграфі** петлі не допускаються, але пари вершин можуть з'єднуватися кількома ребрами, які називаються **кратними**, або паралельними. У **псевдографі** допускаються петлі й кратні ребра. В звичайному графі немає ні петель, ні кратних ребер.

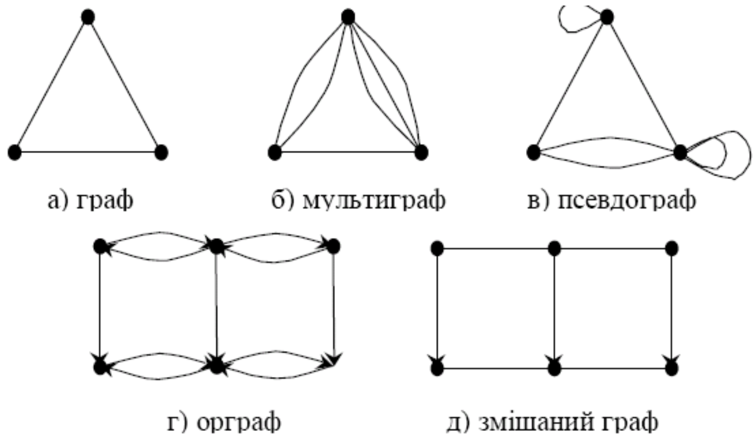


Рис. 5.11. Види орієнтованих графів

Означення. Зв'язний граф називається **ейлеровим графом**, якщо існує замкнений ланцюг, який проходить через кожне ребро. Такий ланцюг називається ейлеровим ланцюгом, або ейлеровим циклом.

Теорема. Зв'язний граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли кожна його вершина має парний степінь.

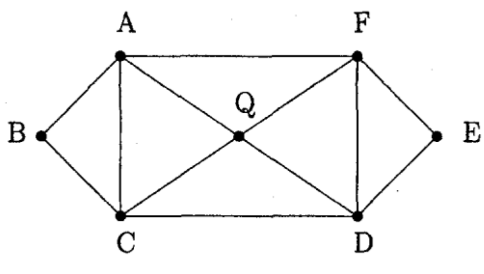


Рис. 5.12. Приклад ейлерового графу

Доведення. Граф зображений на рисунку 5.12 є ейлеровим, оскільки:

1. Степінь вершин A, F, D, C, Q = 4(парні);
2. Степінь вершин B, E = 2(парні);
3. Множина ребер цього графа є об' єднання двох простих циклів:

$AB \to BC \to CQ \to QD \to DE \to EF \to FQ \to QA$ і

$AC \to CD \to DF \to FA$.

Теорема. Зв'язний граф є напівойлеровим тоді і тільки тоді , коли в ньому не більше двох вершин непарного степеня.

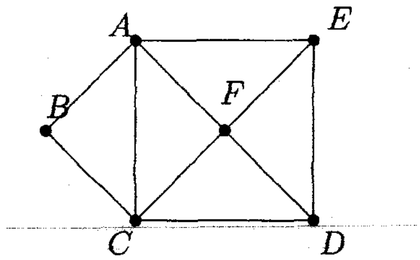


Рис. 5.13. Приклад напівейлерового графу

Доведення. Граф зображений на рисунку 5.13 є напівейлеровим, оскільки

1. Степінь вершин A, F, C = 4(парні);
2. Степінь вершин B = 2(парна);
3. Степінь вершин E,D = 3(непарна);
4. Ось один з можливих варіантів обходу $EA \to AB \to BC \to CD \to DF \to FC \to CA \to AF \to FE \to ED$. Початковою точкою маршрута є точка E, а кінцевою є точка D.

Ейлерові цикли характеризуються властивістю проходити по одному разу через кожне ребро графа, а гамільтонові цикли — через кожну вершину.

Означення. Зв'язний граф називається **гамільтоновим графом**, якщо існує замкнений ланцюг, який проходить через кожну вершину графа рівно один раз.

До теорії гамільтонових графів відноситься задача про комівояжера. В задачі мова йде про деякий район та торговця, який повинен відвідати певну кількість міст цього району. Відстані між містами відомі, і треба знайти найкоротший шлях, який проходить через всі міста і закінчується в початковому пункті.

Міста зображаються вершинами деякого графа, в якому кожній парі вершин приписана відстань $\mu(a,b)$. Мова йде про пошук гамільтонового циклу ρ, для якого сума $\sum\limits_{(a,b)\in\rho}\mu(a,b)$ є мінімальною. Оскільки розглядається скінченне число вершин, то задача розв'язується шляхом простого перебору.

Встановлено різні достатні умови гамільтоновості графа:

1) якщо для будь-якої пари x_i та x_j несуміжних вершин графа $G=(X,V)$ з n вершинами $(n \le 3)$ має місце нерівніть

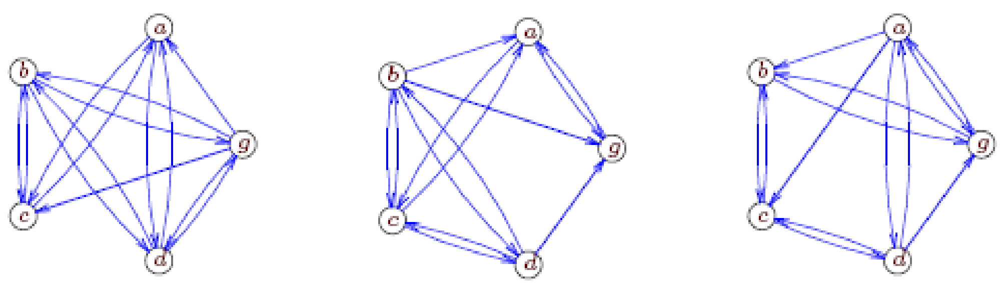
$$p(x_i)+p(x_j)\ge n\,,$$

де $p(x)$ - степінь вершини x, то граф $G=(X,V)$ гамільтонів.

2) якщо для будь-якої вершини x графа $G=(X,V)$ з n вершинами $(n \ge 3)$ виконується нерівність $p(n)\ge \frac{n}{2}$, то граф $G=(X,V)$ гамільтонів.

<u>Приклад</u>. Знайти всі гамільтонові цикли для графів, наведеного на рисунку

а б в



Результати пошуку гамільтонових циклів:

1) для графа а – acbdg, adbgc, adgbc, acbgd;

2) для графа б – acdbg, acbdg;

3) для графа в – agbcd, adcbg, abcdg.

Ізоморфізм та гомеоморфізм графів

Відмічено, що будь-який абстрактний граф ідентичний, або, як говорять математики, ізоморфний деякому геометричному графові. При зображенні геометричних графів присутня велика свобода в розміщенні вершин і у виборі форми ребер, що з'єднують їх. Тому може виявитись, що один і той же граф подається різними кресленнями, роздивляючись які далеко не відразу можна усвідомити, що вони є зображеннями одного і того ж графа. Такі геометричні графи називають ізоморфними.

Означення. Графи $G=(X,V)$ і $G'=(X',V')$ **ізоморфні**, якщо існує таке взаємно однозначне відображення між множинами їх вершин X і X', що вершини сполучені ребрами в одному з графів в тому і лише тому випадку, коли відповідні їм вершини сполучені в іншому графі. Якщо ребра орієнтовані, то і їх напрями також повинні відповідати один одному.

Означення. Геометричний граф, ізоморфний абстрактному графові, називають його **геометричною реалізацією**.

Відмітимо, що відношення ізоморфізму графів є рефлексивним, симетричним, транзитивним і є відношенням еквівалентності. Отже, множина всіх графів розбивається на класи еквівалентності так, що графи з одного класу попарно ізоморфні, а графи з різних класів не ізоморфні. Ізоморфні графи, як правило, ототожнюють, і їх можна зображати одним малюнком. Вони можуть розрізнятися конкретною природою своїх елементів, але саме це і ігнорується при введенні поняття «граф».

Із означення слідує, що ізоморфні графи можуть розрізнятися лише позначеннями вершин і ребер, оскільки у них має бути рівне число вершин і ребер, відповідні один одному вершини зобов'язані мати однакові степені та напівстепені, і, зрозуміло, абсолютно все рівно, яку геометричну інтерпретацію графа вибирати для його зображення.

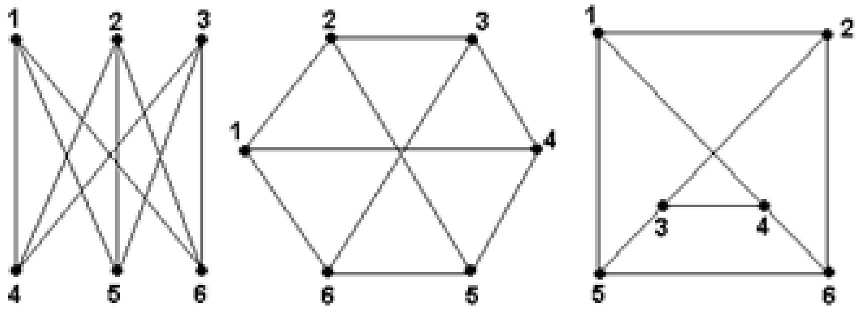


Рис. 5.14. Три ізоморфні графи

Графи на рисунку 5.14 ізоморфні, оскільки існує взаємно однозначна відповідність $p(x_i^{(1)}) \to p(x_i^{(2)}) \to p(x_i^{(3)})$, що зберігає суміжність.

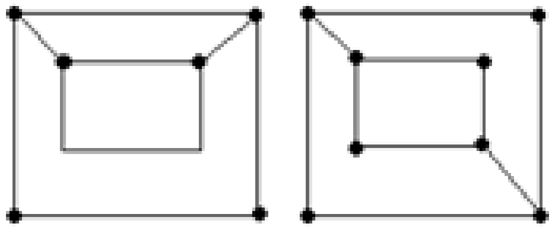
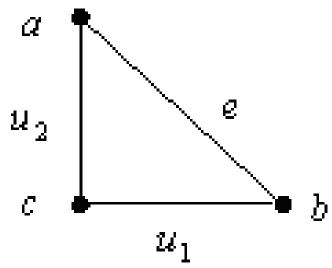


Рис. 5.15. Два неізоморфні графи

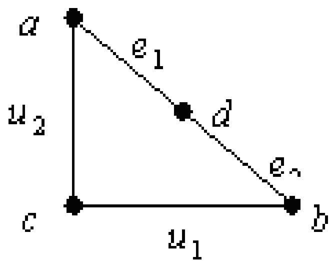
Означення. Граф $G' = (X', V')$ **ізоморфно вкладається** в граф $G = (X, V)$, якщо $G' = (X', V')$ ізоморфний деякій частці графа $G = (X, V)$.

Означення. Два графи називаються **гомеоморфними**, якщо вони можуть бути отримані з одного і того ж графа шляхом підрозбиттям його ребер.

Приклад. Операція підрозбиття ребра e (див.рис.5.16), утвореного парою вершин a і b, полягає у видаленні ребра e і додаванні двох нових ребер e_1 та e_2, що відповідають парам вершин a і d та b і d відповідно. Тут вершина d – нова (додаткова) вершина графа.



а)



б)

Рис. 5.16. Граф: а) до операції підрозбиття ребра; б) результат виконання операції

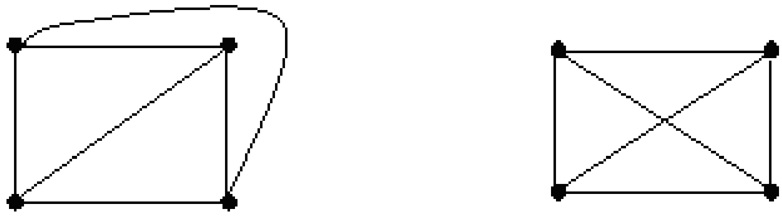
Плоскі та планарні графи

Взагалі кажучи, не має значення, як намалювати граф, оскільки всі його зображення є ізоморфними графами і несуть одну і ту ж інформацію. Однак зустрічаються ситуації, коли важливо, щоб зображення графа на площині задовольняло певним вимогам. Наприклад, в радіоелектроніці при виготовленні мікросхем друкарським способом електричні ланцюги наносять на поверхню ізоляційного матеріалу. А оскільки провідники не ізольовані, то вони не повинні перетинатися. Аналогічне завдання виникає при проектуванні залізничних та інших доріг , де небажані переїзди.

Означення. Геометричний граф називається **плоским**, якщо він намальований на площині так, що всі його лінії, ребра, що зображають його, перетинаються тільки в крапках, відповідних вершинам графа, тобто будь-яка точка перетину таких ліній є вершина, інцидентна ребрам, які ці лінії зображають.

Означення. Граф, ізоморфний плоскому графові, називають **планарним**.

Планарний граф можна укласти на площині, а плоский граф – це граф, вже укладений на площині. Плоский граф є зображенням планарного графа, проте не кожне зображення планарного графа є плоским графом.



а) б)

Рис. 5.17. Графи: а) G1; та б) G2

Приклад плоского графа наведений на рисунку 5.17(а). Ізоморфний йому повний граф G2 (див. рис. 5.17(б)), що укладається на площині, має два пересічні ребра, тому граф G2 не є плоским − він тільки планарний.

Алгоритм пошуку найкоротшого шляху

Результатом алгоритму пошуку найкоротшого шляху є послідовність ребер, що з'єднує задані дві вершини, і, що має найменшу довжину серед всіх таких послідовностей.

На перший погляд здається, що можна використати алгоритм побудови мінімального остовного дерева (МОД), щоб відкинути зайві ребра, а потім взяти шлях, який з'єднує задані вершини в побудованому остовному дереві. На жаль, такі дії не завжди приводять до потрібного результату.

Нагадаємо, що алгоритм побудови МОД націлений на пошук дерева із мінімальною сумарною вагою ребер. Розглянемо, наприклад, "циклічний" граф, тобто такий граф, в якому перша вершина з'єднана з другою, друга - з третьою, і так далі, а остання вершина, у свою чергу, з'єднана з першою. Такий граф є просто кільцем, кожна вершина в якому з'єднана з двома іншими. Приклад такого графа з шістьма вершинами наведений на рисунку 5.28.

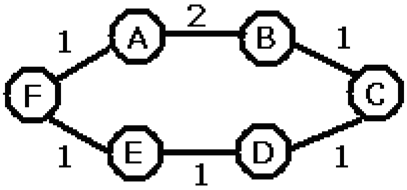


Рис. 5.28. «Циклічний» граф

Відмітимо, що вага кожного ребра дорівнює 1, за винятком ребра, що з’єднує вершини A і B, вага якого дорівнює 2. Алгоритм побудови мінімального остовного дерева вибере всі ребра ваги 1, відкинувши єдине ребро ваги 2. Це означає, що шлях від A до B в мінімальному остовному дереві повинен проходити через всі решта вершин, а його довжина дорівнює 5 (рис. 5.29).

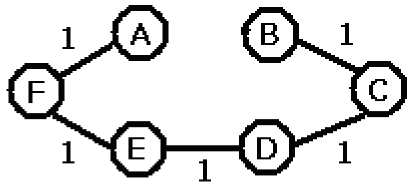


Рис. 5.29. МОД «циклічного» графа

Як видно з рисунку, отриманий шлях не є найкоротшим, оскільки у вихідному графі вершини A і B з’єднані ребром довжини 2.

Алгоритм Дейкстри

Алгоритм побудови мінімального остовного дерева непридатний для пошуку найкоротшого шляху між двома вершинами, оскільки на кожному проході він враховує довжину лише одного ребра. Якщо ж змінити його так, щоб при виборі ребра, яке веде до завершення, він вибирав те, що є часткою найкоротшого шляху в цілому шляху з початкової вершини, тоді отримаємо необхідний результат. Запропоновані зміни можна подати у вигляді алгоритму, який складається з наступних кроків:

1) вибрати початкову вершину;

2) створити початкове завершення з вершин, які з’єднані з початковою;

3) доки вершина призначення не досягнута робити наступне:

а) вибрати вершину завершення з найкоротшою відстанню до початкової;

б) додати цю вершину і ребро, що веде до неї, до дерева;

в) змінити заверешення шляхом додавання до нього вершин, з’єднаних із знову доданою;

г) для будь-якої вершини завершення приписати до неї ребро, що з’єднує її з деревом, і, що завершує найкоротший шлях до початкової вершини.

На рисунках 5.30(а)-5.30(з) наведений приклад виконання алгоритму пошуку найкоротшого шляху від вершини A до вершини G.

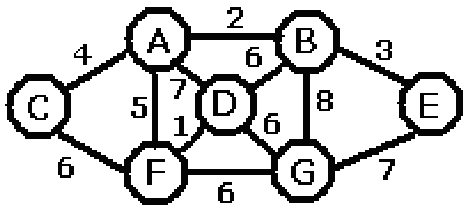


Рис. 5.30(а). Вихідний граф

На початку шляху з вершини A є чотири можливі ребра. З цих чотирьох ребер ребро AB є найкоротшим.

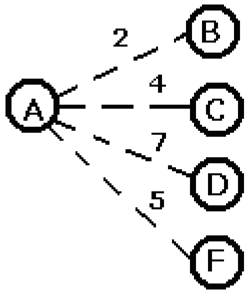


Рис. 5.30(б). Найкоротший шлях до вершини B

Тому додаємо до дерева вершину B (рис. 5.30(б)) і дивимося, як слід відновити набір шляхів. Із вже побудованим деревом з’єднані тепер вершини E і G, тому їх слід додати до завершення. Крім того, необхідно звернути увагу на вершину D і порівняти прямий шлях з неї до A, довжина якого дорівнює 7, з обхідним шляхом через вершину B, довжина якого дорівнює 8. Прямий шлях коротший, тому приписане до D ребро змінювати не слід.

Вивчивши тепер наявні можливості, бачимо, що найкоротшим є шлях з A в C довжиною 4. Ребро BE коротше, проте, важливим є повна довжина шляху з A, а такий шлях, який веде в E, має довжину 5. Тепер до дерева найкоротших шляхів додаємо вершину C (рис. 5.30(в)).

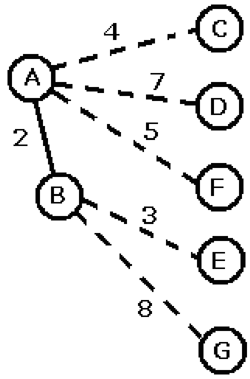


Рис. 5.30(в). Найкоротший шлях довжиною 4 до вершини C

Поглянувши на граф (рис. 5.30(а)), виявляємо, що можемо пройти до вершини F через вершину C, однак довжина цього шляху дорівнюватиме 10 - більше, ніж довжина прямого шляху з A в F. Тому зміни в наборі шляхів не проводяться.

Тепер можемо вибрати або шлях з A в F, або шлях з A в E, що проходить через вершину B: обидва вони мають довжину 5 (рис. 5.30(г)). Який із шляхів буде вибраний при виконанні програми, залежить від способу зберігання даних в ній. Зустрівшись з необхідністю додавати вершину, завжди вибирають ту, мітка якої перша в лексикографічному порядку.

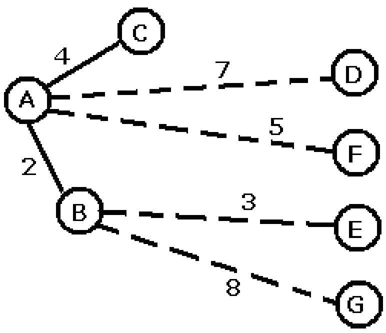


Рис. 5.30(г). Найкоротші шляхи довжиною 5 до вершин F та E

В результаті отримуємо ситуацію, зображену на рисунку 5.30(д).

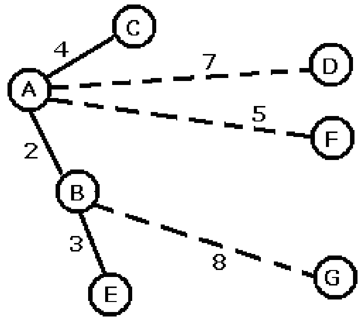


Рис. 5.30(д). Додавання до дерева вершини E

Додавання до дерева вершини E не змінює решти зв'язків, тому тепер додаємо вершину F і отримаємо дерево, зображене на рисунку 5.30(е). Зауважимо, що, хоча додавання вершини F і призвело до зміни ребра, ведучого з D, якщо б початок відбувся з F, все одно на черговому кроці необхідно було б додати E.

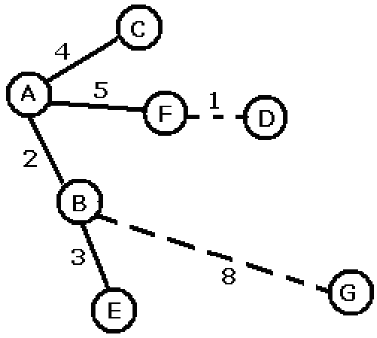


Рис. 5.30(е). Додавання до дерева вершини F

З рисунку 5.30(е) видно, що шлях до вершини D коротший за шлях до вершини G. Тому додаємо до дерева вершину D і отримуємо ситуацію, зображену на рисунку 5.30(ж).

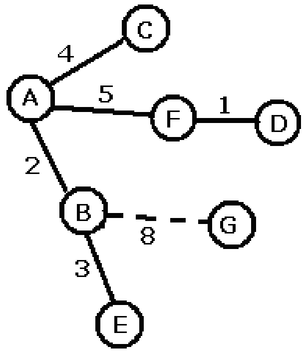


Рис. 5.30(ж). Додавання до дерева вершини D

Залишилося додати тільки вершину G, і в результаті отримаємо дерево найкоротшого шляху, зображене на рисунку 5.30(з). Довжина найкоротшого шляху з вершини A в вершину G дорівнює 10.

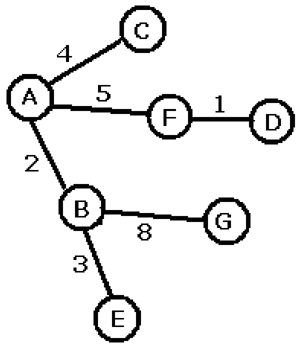


Рис. 5.30(з). Повне дерево найкоротшого шляху з A в G

Розглянутий приклад показав повне дерево найкоротших шляхів, оскільки цільова вершина G була додана до дерева останньою. Якщо б прихід до неї відбувся раніше, алгоритм негайно завершив би свою роботу. Можуть виникнути ситуації, в яких більше цікавлять найкоротші шляхи з даної вершини до всіх інших. Наприклад, коли маємо справу з невеликою комп'ютерною мережею, швидкості передачі даних між вузлами якої приблизно постійні, то для кожного з комп'ютерів мережі можна вибрати найкоротший шлях до решти комп'ютерів. Тому при необхідності переслати повідомлення єдине, що буде потрібно, це скористатися наперед розрахованим найбільш ефективним шляхом.

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ДОВЕДЕНЬ

6.1 Теоретичні основи теорії доведень

Теорія доведень - розділ математичної логіки, присвячений дослідженню поняття доказу в математиці, додаткам цього поняття в різних розділах науки і техніки.

Доведення в широкому значенні цього слова - це спосіб обґрунтування істинності того або іншого судження. Міра переконливості доказу вирішальним чином залежить від засобів, використовуваних для обґрунтування істинності. Наприклад в точних науках вироблені певні умови, при виконанні яких експериментальний факт може вважатися доведеним (потрібна стійка відтворюваність експерименту, виразний опис методики експерименту, його точності, вживаного устаткування і т. п.). У математиці, для якої характерний аксіоматичний метод дослідження, засоби доказу досить чітко визначилися вже на ранньому етапі її розвитку. Доказ фігурує в математиці як послідовне виведення одних суджень з інших, причому способи цього виведення допускають точний аналіз.

Витоки теорії доведень можна простежити з часів античності (дедуктивний метод міркування в елементарній геометрії, силогістика Аристотеля та ін.), але сучасний етап її розвитку починається у кінці 19 ст.- початку 20 ст. під впливом робіт Г. Фреге (G. Frege), Б. Рассела (B. Russell) і А. Уайтхеда (A. Whitehead), Э. Цермела (E. Zermelo) і, особливо, Д. Гільберта (D. Hilbert). В цей час в теорії множин Г. Кантора (G. Cantor) були виявлені антиномії, що поставили під сумнів достовірність навіть простих міркувань з довільними множинами. Л. Брауер (L. Brouwer) піддав дуже серйозній критиці деякі класичні способи доказу існування об'єктів в математиці і запропонував радикальну перебудову математики у рамках інтуіціонізму. Питання математичних підстав придбали особливу актуальність. Д. Гільберт запропонував виділити частину практичної математики, так звану фінітну математику, що не викликає заперечень як з точки зору появи антиномій, так і з точки зору інтуїціоністской критики. У рамках фінітної математики до розгляду допускаються лише конструктивні *об'єкти,* наприклад натуральні числа, і лише такі способи міркувань, які узгоджуються з абстракцією *потенційної здійсненності* і не притягають абстракції *актуальної нескінченності.* Зокрема, обмежується використання закону третього зайвого У фінітній математиці ніяких антиномій не виявлено і немає підстав їх чекати. З філософської точки зору способи міркування у фінітній математиці значно краще відбивають конструктивні процеси реальної дійсності, чим в загальній теоретико-множинній математиці. Ідея Д. Гільберта полягала в тому, щоб обґрунтувати усі основні розділи класичної математики, залишаючись на твердому ґрунті фінітної математики. З цією метою Д. Гільберт запропонував метод формалізації, що є одним з основних методів теорії доведень.

Означення. **Доведенням** називається ланцюжок логічних висновків, який показує, що при якомусь наборі аксіом та правил виводу є правильним деяке твердження.

Залежно від контексту, може матися на увазі формальне доведення (побудована за спеціальними правилами послідовність тверджень, записана на формальній мові) або текст на природній мові, за яким за бажанням можна відновити формальне доведення.

Означення. Доказові твердження називаються **теоремами.**

У математичних текстах зазвичай мається на увазі, що доведення кимнебудь знайдене; виняток з цього звичаю в основному складають роботи з логіки, в яких досліджується саме поняття доведення.

Означення. Якщо ні твердження, ні його заперечення ще не доведені, то таке твердження називають **гіпотезою**.

Іноді в процесі доведення теореми виділяються доведення менш складних допоміжних тверджень, званих **лемами**.

Формальні доведення майже ніколи не використовують, оскільки для людського сприйняття вони дуже складні і часто займають дуже багато місця. Звичайне доведення має вид тексту, в якому автор, спираючись на аксіоми і доведені раніше теореми, за допомогою логічних засобів показує істинність деякого твердження. На відміну від інших наук, в математиці недопустимі емпіричні доведення: всі твердження доводяться виключно логічними способами. У математиці важливу роль відіграють математична інтуїція і аналогії між різними об'єктами і теоремами. Проте, всі ці засоби використовуються вченими тільки при пошуку доведень. Самі доведення не можуть ґрунтуватися на таких засобах. Доведення, написані на природних мовах, можуть бути не дуже докладними з розрахунку на те, що підготовлений читач сам зможе відновити деталі. Строгість доведення гарантується тим, що його можна представити у вигляді запису на формальній мові (це і відбувається при комп'ютерній перевірці доведень).

Означення. **Помилковим доведенням** називається текст, що містить логічні помилки, тобто такий, за яким не можна відновити формальний доказ.

В історії математики були випадки, коли видатні вчені публікували невірні «доведення». Проте зазвичай їхні колеги або вони самі досить швидко знаходили помилки. Помилковим може бути тільки визнання «доведення» на природній або формальній мові; формальне доведення помилковим не може бути за визначенням.

В теорії доведень розрізняють такі **методи доведення**:

- Пряме доведення
- Індуктивний доказ
- Метод перестановки
- Доведення від зворотнього
- Конструктивний доказ
- Метод витягів
- Ймовірносний доказ
- Комбінаторний доказ
- Неконструктивне доведення
- Елементарний доказ

Пряме доведення

При прямому доведенні висновок встановлюється через логічну комбінацію аксіом, визначень і раніше доведених теорем. Для прикладу розглянемо доведення, що сума двох парних цілих чисел також є парною:

кожне з двох парних чисел x та y ми можемо за визначенням записати у вигляді $x = 2a$ та $y = 2b$, де a і b — деякі цілі числа, бо x та $\boldsymbol{y}$ діляться на 2. Але тоді сума

$$x + y = 2a + 2b = 2(a + b)$$

також ділиться на 2, так що вона є парною за визначенням.

Цей доказ використовує визначення парних цілих чисел, і також дистрибутивний закон додавання.

Індуктивний доказ

Припустимо, що потрібно встановити справедливість нескінченної послідовності тверджень, занумерованих натуральними числами:

$$P_1, P_2, ..., P_n, P_{n+1}, ...$$

Припустимо, що

1. Встановлено, що P_1 вірно. (Це твердження називається базою індукції.)
2. Для будь-якого n доведено, що якщо вірно P_n, то вірно P_{n+1}. (Це твердження називається індукційним переходом.)

Тоді всі твердження нашої послідовності вірні.

Метод перестановки

Метод перестановки встановлює істинність твердження *Якшо А, то Б* доведенням еквівалентного твердження *Якщо не Б, то не А*.

Доведення від зворотнього

Цей метод доведення відомий також як *приведення до абсурду*. Доказ твердження *А* проводиться таким чином. Спочатку приймають припущення, що твердження *А* невірно, а потім доводять, що за такого припущення було б вірне деяке твердження *В*, яке заздалегідь невірне. Отримана суперечність показує, що початкове припущення було невірним, і тому вірне твердження $\overline{\overline{A}}$, яке за законом подвійного заперечення рівносильне твердженню *А*.

Конструктивний доказ

Конструктивний доказ або *доведення наданням прикладу* — це конструювання конкретного прикладу з властивостями, для того щоб довести, що існують приклади з цими властивостями. Наприклад,Жозеф Ліувілль, для того щоб довести існування трансцендентних чисел, явно сконструював таке число.

Метод витягів

При доведенні методом витягів висновок про істинність твердження досягається розділенням твердження на скінчену кількість випадків і доведенням кожного такого випадку окремо. Кількість таких випадків може бути дуже великою. Наприклад, перший доказ проблеми чотирьох фарб складався з розгляду 1936 випадків. Більшість цих випадків розглядала комп'ютерна програма, а не людина. Сучасніші коротші докази теореми про чотири фарби все одно вимагають розгляду понад 600 випадків.

Ймовірнісний доказ

Ймовірнісним доказом називають метод, коли існування прикладу доводиться засобами теорії ймовірності. Тільки не треба плутати цей метод з аргументом, що теорема «ймовірно» істинна. Такого типу аргументи називаються «правдоподібністю» і не можуть вважатися доказом. Ймовірнісний доказ, поруч із конструктивним методом, є одним з багатьох шляхів доведення теореми існування.

Комбінаторний доказ

Суть комбінаторного доказу полягає у встановлені еквівалентності різних виразів, так що вони представляють той самий об'єкт, але в різний спосіб. Звичайно, для того щоб показати, що дві інтерпретації дають той самий об'єкт, використовується бієкція.

Неконструктивне доведення

Неконструктивне доведення встановлює, що певний математичний об'єкт повинен існувати, тобто певний *X*, що задовольняє *f(X)*, без пояснення, як цей об'єкт може бути встановлений. Часто це робиться приведенням до протиріччя твердження, що такого об'єкта не існує. На противагу цьому, *конструктивне доведення* встановлює існування об'єкта представленням способу визначення об'єкта.

Відомим прикладом неконструктивного доведення є доказ існування двох ірраціональних чисел a і b, таких що a^b є числом раціональним.

- або $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ є раціональним числом і ми маємо приклад (де $a = b = \sqrt{2}$),
- або ж $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ показує, що ми маємо $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ та $b = \sqrt{2}$.

Ні доказу, ні заперечення

Існує клас математичних тверджень, для яких не існує ані доказу, ані спростування (тобто доведення зворотного твердження) в рамках стандартної основи теорії множин. Чи можна довести певне твердження чи його спростування, не завжди очевидно і може вимагати технічних засобів для встановлення цього факту.

Елементарний доказ

Елементарним доведенням називають докази, що не потребують складного аналізу.

В деяких випадках теореми, як наприклад теорема про асимптотичний розподіл простих чисел, вимагала застосування «вищої» математики. Але з часом були отримані нові докази з використанням елементарної техніки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1) Асеев Е.Е., Абрамов О.М., Ситников Д.Э. Дискретная математика. Ростов н/Д, Феникс, 2003.

2) Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика. М.: Издательский дом "Вильямс", 2004.

3) Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.

4) Белов В.В. и др. Теория графов. М.: Высл. Школа, 1976.

5) Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

6) Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975.

7) Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. М.: Наука, 1992.

8) Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. М.: Физматлит, 2000.

9) Гусева И.А., Жмурова И.Ю., Поляков Н.А. Задачник-практикум по дискретной математике. Ростов н/Д: изд-во РГПУ, 2005.

10) Ерусалимский Я.М.. Дискретная математика. М.: Вузовская книга, 2004.

11) Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988.

12) Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001.

13) Оре О. Графы и их применение. М.: Едиториал УРСС, 2002.