МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ТЕРНОПОЛЬСКИЙ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

НЕМИШ Василий Николаевич

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ

0I.02.04-механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор КИЗЫМА Я.М.

Тернополь-1979

ОГЛАВЛЕНИЕ

СТР.

ВВЕДЕНИЕ

Современную механику можно рассматривать как широкий комплекс научных направлений. Одним из них является механика деформируемого твердого тела и, в частности, теория упругости.

Первые основные результаты по различным вопросам математической и прикладной теории упругости получили Навье, Г.Ляме, А.Л.Коши, С.Д.Пуассон и другие ученые. Особое значение в этой области имеют пространственные задачи математической теории упругости, в которых во многих случаях требуется определить напряженно-деформированное состояние трехмерных тел, находящихся в поле действия поверхностных или объемных сил.

Общие и некоторые частные вопросы, относящиеся к решению трехмерных задач, рассмотрены в монографиях А.И.Лурье [35,36], В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелиа, М.О.Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе [27], В.Новацкого [55], В.Т.Гринченко [12], В.Н. Ионова, П.М.Огибалова [21] и других ученых.

Важную роль в технических приложениях играют задачи о распределении напряжений около различного рода концентраторов напряжений как в конечных, так и бесконечных телах. Решение ряда конкретных задач для эллипсоидальных, а также для других видов канонических областей получено в работах [1,3,5,6,8,9,13,19,28-30,38,59,62-67,73,76,78,91,98,105-108,114,116,117,127,128].

Работы Ю.Н. Подильчука [62-67] посвящены решению пространственных краевых задач математической теории упругости для эллипсоидальных полостей и включений.

В статьях А.Я.Александрова [1,3], Г.Н.Положия [72-74], Ю.И.Соловьева [78], А.Я.Александрова и В.С.Вольперта [5,6], В.С.Вольперта [8,9], Г.Ф. Залесова [19] применяются аналитические и обобщенные аналитические функции при решении осесимметричных задач теории упругости, в частности, для эллипсоида вращения и пространства с эллипсоидальной полостью. В работах В.С.Чемериса [83,84] на основе метода p - аналитических функций рассмотрен вопрос о приближенном решении интегральных уравнений второй основной осесимметричной задачи теории упругости. В частности, решена вторая задача (заданы смещения точек поверхности) о напряженном состоянии конечного полого цилиндра.

В статье [98] получено решение для сферической полости, находящейся под давлением, в неограниченной изотропной упругой среде, сжимаемой на "бесконечности". Деформации и напряжения представлены в виде бесконечных рядов [128] , когда сосредоточенные силы приложены в полюсах. Для бесконечного тела содержащего две и больше сферических полостей посвящены работы [115,119,120,123] . Случай многосвязной среды рассматривался также в статье А.Н.Гузя [15] и монографии А.Н.Гузя и В.Т.Головчана [18] .

Влияние сферического включения на напряженно-деформированное состояние анизотропного тела исследовано в статье [114] . В работах [91,108,122] приводится решение задачи об упругом равновесии бесконечной среды с жестким сферическим включением. В случае растяжения упругого пространства с двумя сферическими включениями одинакового радиуса решение задачи получено в работе [124] .

В.Т.Чен (W.T.Chen) [105,106] рассмотрел осесимметричную задачу о напряженном состоянии упругой трансверсально изотропной среды содержащей сфериодальное включение из того же материала. Г.В.Куценко и А.Ф. Улитко [29] решили вторую основную задачу теории упругости для эллипсоида вращения методом разделения переменных.

В.В.Панасюк ,А.Е.Андрейкив и М.М.Стадник [59] исследовали напряженное состояние неограниченной среды с тонким включением. Для эллипсоидального и эллиптического включений получено точное реение. В случае одноосного растяжения упругого пространства, имеющего упругое осесимметричное включение, приводится решение задачи в работе [107]. Для деформируемого тела с упругими включениями из других материалов получено решение задачи с помощью совместного рассмотрения деформирования включений и основного тела [112].

При решении некоторых трехмерных задач теории упругости используется метод интегральных уравнений [2,4]. Обзор работ по этому вопросу дан в статье В.З.Партона, П.И. Перлина [61].

Ю.Н.Подильчук [68] предложил приближенный метод решения пространственных задач теории упругости для областей, близких к эллипсоидальным. Развитие этого подхода и решение некоторых конкретных осесимметричных задач дано в работах [69-71].

Концентрацию напряжений, обусловленную шероховатостью поверхности, исследовал В.А.Пальмов [57,58]. В монографиях В.А.Ломакина [34] и А.П.Хусу, Ю.Р.Витенберга, В.А.Пальмова [82] решены задачи теории упругости для цилиндра, полупространства и пластины с криволинейным отверстием. Исследован вопрос влияния шероховатых поверхностей на напряженное состояние тела. Математическая постановка граничных задач теплопроводности и термоупругости для тела с шероховатой поверхностью, находящегося в тепловом контакте с внешней средой, рассмотрена в работе Р.Н.Швеца [87]. Развитие этого подхода дано в статьях [88,89]. Задачи решены методами возмущений и канонических разложений.

В современных конструкциях важное место занимают элементы в виде стержней или цилиндрических валов, работающих на кручение. По теории кручения имеется ряд книг, среди которых особое место занимают монографии Н.Х.Арутюняна и Б.Л.Абрамяна [7], С.Г.Лехницкого [31,32], К.В.Соляника-Красса [79], а также некоторые разделы монографий Н.И.Мусхелишвили [40], С.И.Борса (C.I.Bors) [94].

Достаточно полно освещены вопросы кручения круглого вала со сферической или эллипсоидальной полостью (включением).

В.Т.Головчан [II] получил решение задачи о кручении упругого цилиндра, имеющего сферическую полость с центром на оси вращения. В предположении,что модуль сдвига изменяется по квадратичному закону вдоль радиусов,аналогичная задача рассмотрена в статье [I02].

В работе [II0] изучено случай изотропного вала со сферическим включением, а в [I09] - для включения в виде вытянутого или сплюснутого эллипсоида вращения и сферы. С.Ч.Босе (S.C.Bose) [95-97] рассмотрел трансверсально изотропный вал с изотропным сферическим или эллипсоидальным включением, а в работах П.П.Чаттаржи (P.P.Chattarji) [99,IOI] ,Р.Н.Четтержи (R.N.Chatterjee) [I03]- с жестким сферическим включением. В статье [I00] получено решение для двух сферических включений внутри изотропного вала и рассмотрено разные варианты; здесь же найдено точное решение, аналогичное решению Линга, для случая изотропного вала с одним сферическим включением.Случай трансверсально изотропного цилиндра с эллипсоидальным включением рассматривался в работах [93,I04].

В статьях [92,I25,I26] исследовано напряженное состояние изотропного вала с упругими включениями, обладающих криволинейной изотропией специального или эллипсоидального вида.

Влияние включений иной формы, веретенообразного и линзовидного, рассмотрено в работе [II8] , а для включения,образованного вращением кардиоиды вокруг ее оси - в[III].

Рассмотрение более сложных граничных поверхностей во многих случаях не позволяет точно решать даже простейшие пространственные краевые задачи. Из приближенных методов достаточно эффективным оказался метод "возмущения формы границы" в форме,предложенной А.Н. Гузем [I4] при исследовании концентрации напряжений около криволинейных отверстий в оболочках. Далее он применялся в различных разделах механики сплошной среды, где граничные линии были близкими к круговым. В работе Г.Н.Савина, А.Н.Гузя, А.С.Космодамианского (G.N.Sawin, A.N.Guź, A.S.Kosmodamianskij) [121] дан обзор исследований некоторых классов задач для областей, не допускающих решения краевых задач методом непосредственного разделения переменных (неканонические области). При этом рассматривались в основном плоские и некоторые двумерные задачи.

Разработке методов возмущения в краевых задачах математической теории упругости изотропного и анизотропного тела посвящены работы А.Н.Гузя [15-18], А.Д.Коваленко, В.Г. Карнаухова [23,24], А.С.Космодамианского [25,26], А.И.Лобанова, М.М.Сидляра [33], С.Г.Лехницкого [31,32], Ю.Н.Немиша [45 -51] , Ю.Н.Подильчука [62-65 ,67,68], Г.Н.Савина [75] , М.М.Сидляра [77] и другие.

В монографии Д.Д.Ивлева, Л.В.Ершова [20] методом возмущения решены статические задачи теории идеальной пластичности и теории малых упругопластических деформаций.

В настоящей диссертационной работе методом "возмущения формы границы" впервые дано аналитическое и числовое решение нового класса конкретных пространственных осесимметричных краевых задач теории упругости для поверхностей вращения специального типа.

Исследуется напряженное состояние изотропных и трансверсально изотропных тел с полостями и включениями при кручении и растяжении-сжатии в зависимости от упругих и геометрических характеристик. Рассматриваемые граничные поверхности имеют форму конической, биконической и цилиндрической замкнутых поверхностей вращения.

На защиту выносится:

1. Аналитические решения пространственных осесимметричных задач математической теории упругости однородных изотропных и трансверсально изотропных тел с полостями и включениями в виде конических, биконических и цилиндрических замкнутых поверхностей

вращения в случае кручения и растяжения - сжатия.

2.Механические эффекты, вызванные сложностью геометрии рассматриваемого класса поверхностей вращения: локальный характер поля напряжений, зона повышенной концентрации напряжений в окрестности точек наименьшего радиуса кривизны поверхностей.

3.Исследования влияния анизотропии материала на напряженно-деформированное состояние тел в окрестности их концентраторов напряжений.

Во введении приводится краткий обзор опубликованных работ,относящихся в основном к пространственным задачам теории упругости для тел вращения; излагается сжатое содержание полученных результатов диссертации.

В первой главе приводятся основные уравнения и соотношения пространственной теории упругости в сферических координатах.Излагается метод "возмущения формы границы" для фигур, близких к сферическим.

Первый и второй параграфы носят реферативный характер. Здесь приведены уравнения равновесия в векторной форме и в проэкциях на оси координат, закон Гука и постановка основных краевых задач. Решение уравнения равновесия в перемещениях представлено в форме П.Ф.Папковича - Г.Нейбера. Выражения для перемещений и напряжений записаны в виде, необходимом для решения конкретных граничных задач для изотропной среды.

Третий параграф носит вспомогательный характер. Здесь приводятся рекуррентные соотношения из теории сферических функций,необходимые для разложения произведений тригонометрических функций на полиномы Лежандра или их производные, в ряды только по полиномам или их производным.

В четвертом параграфе излагаются основы приближенного метода "возмущения формы границы". Записаны рекуррентные соотношения для последовательных приближений компонентов напряженно-деформированного состояния в криволинейных ортогональных координатах.

Эффективность метода возмущения в случае кручения тела и всестороннего растяжения-сжатия изотропной среды с вытянутой или сжатой эллипсоидной полостью, допускающей точное решение, показано в пятом параграфе. Сравнение полученных результатов приближенным методом с точными, свидетельствует о хорошей практической сходимости метода "возмущения формы границы".

Вторая глава посвящена исследованию напряженного состояния при кручении деформируемых тел с полостями и включениями. Так как в рассматриваемом случае (как и в последующих главах)переменные в граничных условиях не разделяются, то задачи решены приближенным методом "возмущения формы границы".

В шестом параграфе даются основные сведения из теории кручения трансверсально изотропных тел. Приведены выражения для перемещения и напряжений, необходимые для решения конкретных задач.

Исследовано напряженное состояние изотропных тел с жесткими включениями.Максимальные напряжения на поверхности конического (§ 7), биконического и цилиндрического (§ 8) включений представлено как в виде рядов по производным от полиномов Лежандра, так и по степеням радиальной переменной в характерных точках поверхности.

Кручение трансверсально изотропного тела с замкнутыми конической, биконической и цилиндрической полостями рассмотрено в следующих двух параграфах. На поверхности полостей относительные напряжения представлено в виде рядов по полиномам Лежандра.Показано характер изменения напряжений как на поверхности, так и в окрестности точек полостей наименьшего радиуса кривизны. О влиянии анизотропии материала на величину напряжений свидетельствуют приведенные таблицы и графики.

Третья глава посвящена упругому равновесию изотропных тел с поверхностями вращения при растяжении-сжатии.

показано распределение напряжений при растяжении-сжатии изотроп-
среды с жесткими коническим (§ II) , биконическим и цилиндри-
ким (§ I2) включениями. В точках поверхностей наименьшего ради-
кривизны напряжение представлено в виде рядов по степеням ра-
льной переменной.

Исследуется напряженное состояние изотропной среды в окрестности
бодных от напряжений замкнутых конической (§ I3), биконической
илиндрической (§ I4) полостей.

В четвертой главе исследуется напряженное состоя-
деформируемых тел, ограниченных поверхностями вращения,при рас-
ении-сжатии.

В пятнадцатом параграфе дано общее решение осесимметричной за-
и теории упругости (без кручения) для трансверсально изотропной
ды в сферических координатах.

Аналитическое решение осесимметричных задач о напряженном состо-
и трансверсально изотропной среды с замкнутыми конической,бико-
еской и цилиндрической полостями при растяжении-сжатии дано в
тнадцатом и семьнадцатом параграфах. Для некоторых трансверсально
тропных материалов исследуется распределение напряжений на рас-
триваемых поверхностях вращения. Показано изменение коэффициента
центрации напряжений при отдалении от поверхности в характер-
точках.

В § I8 исследовано влияние радиуса кривизны поверхности на напря-
ное состояние упругой среды при растяжении-сжатии. В качестве
меров рассмотрено изотропную среду с жестким гипотрохоидальным
ючением и трансверсально изотропную с гипотрохоидальной полостью.

Краткие выводы по выполненной диссертационной работе содержит
ключение.

В конце работы приведен библиографический список, включающий
наименований литературных источников советских и зарубежных
оров.

Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались:

I.На семинаре кафедры прикладной математики и механики Черновицкого государственного университета (Черновицы, I971 г.).

2.На Первой республиканской конференции " Проблемы механики конструкций из композиционных материалов" (Канев , I975 г.).

3. На расширенном заседании секции математики и механики Западного научного центра АН УССР (Дрогобич, I976 г.).

4.На семинаре "Технология производства и область применения прогрессивных полимерных материалов в машиностроении" (Львов, I976 г.).

5.На заседании секции математики и механики Западного научного центра АН УССР (Тернополь, I976 г.).

6.На республиканской научно-технической конференции "Повышение качества изделий,изготовляемых из полимерных материалов" (Ивано-Франковск, I977 г.).

7. На семинаре кафедры теории упругости Киевского ордена Ленина государственного университета им.Т.Г.Шевченко (Киев,I978 г.).

8.На семинаре по механике сплошной среды при Донецком государственном университете (Донецк, I979 г.).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [22, 42-44, 52-54] .

Соавторам работ Я.М.Кизыма, Ю.Н.Немишу и П.Ф. Яреме принадлежит постановка задач и участие в анализе полученных результатов. Аналитические решения и их численные реализации принадлежит автору диссертации.

ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ. МЕТОД "ВОЗМУЩЕНИЯ ФОРМЫ ГРАНИЦЫ" ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

§ I. Уравнения равновесия, закон Гука и постановка основных граничных задач

Приведем некоторые основные уравнения трехмерной теории упругости в сферических координатах, используя при этом терминологии и результаты, изложенные в монографиях [36, 55, 56].

Рассмотрим упругую изотропную однородную среду, находящуюся под действием некоторых объемных или поверхностных сил. Пусть в каждой точке среды напряженное состояние определяется тензором T. В сферической системе координат $r\theta\alpha$ тензор напряжений T задается таблицей

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\alpha} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\alpha} \\ \sigma_{\alpha r} & \sigma_{\alpha\theta} & \sigma_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \quad (\sigma_{ij} = \sigma_{ji}\ , \quad i,j = r,\theta,\alpha), \tag{I.I}$$

каждая строка которой определяет компоненты напряжений на площадке, перпендикулярной к соответствующей оси. Диагональные элементы σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\alpha\alpha}$ – это нормальные напряжения; они (как и касательные компоненты тензора T) считаются положительными, если их направление совпадает с направлением соответствующих осей координат (отрицательные–в противоположном случае).

Необходимым условием равновесия произвольного элементарного объема сплошной среды является уравнение

$$div\, T + \vec{K} = 0\ , \tag{I.2}$$

где $\vec{K}$ – вектор сил, действующих на единицу объема. В проэкциях на оси координат имеем уравнения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{r\alpha}}{\partial \alpha}+\frac{1}{r}(2\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\alpha\alpha}+$$

$$+\sigma_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta)+K_r=0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\theta\alpha}}{\partial \alpha}+\frac{1}{r}[(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\alpha\alpha})\operatorname{ctg}\theta+ \tag{I.3}$$

$$+3\sigma_{r\theta}]+K_\theta=0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\alpha}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\alpha}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha}+\frac{1}{r}(2\sigma_{\theta\alpha}\operatorname{ctg}\theta+$$

$$+3\sigma_{r\alpha})+K_\alpha=0.$$

При деформации среды в поле вектора перемещений $\vec{u}(u_r, u_\theta, u_\alpha)$ из положения, определяющегося радиус-вектором $\vec{r}$ в положение $\vec{r}+d\vec{r}$, вектор $\vec{u}$ принимает приращение $d\vec{u}$. Проэкции вектора $d\vec{u}$ на оси координат r, θ, α равны полным дифференциалам его проэкций

$$du_r=\frac{\partial u_r}{\partial r}dr+\frac{\partial u_r}{\partial \theta}d\theta+\frac{\partial u_r}{\partial \alpha}d\alpha,$$

$$du_\theta=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}dr+\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}d\theta+\frac{\partial u_\theta}{\partial \alpha}d\alpha, \tag{I.4}$$

$$du_\alpha=\frac{\partial u_\alpha}{\partial r}dr+\frac{\partial u_\alpha}{\partial \theta}d\theta+\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha}d\alpha$$

или

$$d\vec{u}=\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}}d\vec{r}. \tag{I.5}$$

Симметричный тензор E, характеризующийся таблицей

$$E = \begin{bmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{r\alpha} \\ e_{\theta r} & e_{\theta\theta} & e_{\theta\alpha} \\ e_{\alpha r} & e_{\alpha\theta} & e_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \qquad (I.6)$$

называется тензором деформации. Здесь величины

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},$$
$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_\theta}{r}\,ctg\,\theta + \frac{u_r}{r} \qquad (I.7)$$

называются относительными удлинениями, а компоненты

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)\right],$$
$$e_{r\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - \frac{u_\alpha}{r}\right), \qquad (I.8)$$
$$e_{\theta\alpha} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \theta} - u_\alpha\,ctg\,\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \alpha}\right]$$

-сдвигами.

В линейной постановке связь между напряжениями σ_{ij} в однородной изотропной среде и малыми деформациями e_{ij} характеризуется законом Гука

$$\sigma_{ii} = 2G\left(e_{ii} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right), \qquad \sigma_{ij} = 2G\,e_{ij}$$
$$\left(e = e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{\alpha\alpha}, \quad i,j = r,\theta,\alpha\right), \qquad (I.9)$$

где G - модуль сдвига, ν - коэффициент Пуассона, e - объемная деформация. Обратные зависимости имеют вид

$$e_{ii} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ii} - \frac{\sigma\nu}{1+\nu}\right),$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2G}\sigma_{ij} \quad (\sigma=\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{\alpha\alpha}). \qquad (I.I0)$$

В классической теории упругости одними из основных рассматривают следующие случаи загружения тел: заданы силы,приложенные на поверхности тела S ; заданы перемещения точек его поверхности S ; на одной части поверхности S заданы перемещения, а на другой - внешние силы.

В связи с такой классификацией различают три типа основных граничных задач для упругих деформируемых тел.

Первая основная граничная задача состоит в нахождении компонентов u_r, u_θ, u_α, σ_{rr}, ..., $\sigma_{r\theta}$,удовлетворяющих уравнениям (I.3),(I.9) (с учетом соотношений (I.7),(I.8)) в области занятой телом. Эти величины должны быть непрерывными функциями координат вплоть до поверхности тела, на которой заданы граничные условия

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr}n_r+\sigma_{r\theta}n_\theta+\sigma_{r\alpha}n_\alpha=f_r,\\
&\sigma_{\theta r}n_r+\sigma_{\theta\theta}n_\theta+\sigma_{\theta\alpha}n_\alpha=f_\theta, \qquad (I.II)\\
&\sigma_{\alpha r}n_r+\sigma_{\alpha\theta}n_\theta+\sigma_{\alpha\alpha}n_\alpha=f_\alpha,
\end{aligned}$$

где f_j $(j=r,\theta,\alpha)$ - проэкции внешних сил на оси r,θ,α ; n_j - направляющие косинусы единичной нормали $\vec{n}$ к поверхности тела S .

Вторая основная граничная задача состоит в нахождении такого решения уравнений (I.3),(I.9), которое удовлетворяет на поверхности тела граничным условиям

$$u_r=g_r, \quad u_\theta=g_\theta, \quad u_\alpha=g_\alpha, \qquad (I.I2)$$

где g_r , g_θ , g_α - заданные на поверхности функции.

Иногда на практике встречается так называемая основная смешанная граничная задача, когда на одной части заданы напряжения(I.II), а на другой - перемещения (I.I2).

§ 2. Общее решение уравнений равновесия в перемещениях для изотропной среды

Используя соотношения (I.6)-(I.9), уравнения равновесия (I.2) можно представить в перемещениях

$$\nabla^2\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\,grad\,div\,\vec{u} + \frac{\vec{K}}{G} = 0\,. \qquad (2.I)$$

В случае отсутствия объемных сил, решение такого векторного уравнения, в форме предложенной П.Ф.Папковичем [60] и Г. Нейбером [4I], имеет вид

$$\vec{u} = 4(1-\nu)\vec{B} - grad\left(\vec{r}\vec{B} + B_o\right)\,. \qquad (2.2)$$

Здесь $\vec{B}$ - гармонический вектор, B_o - гармонический скаляр, т.е.

$$\nabla^2 B_x = \nabla^2 B_y = \nabla^2 B_z = \nabla^2 B_o = 0\,. \qquad (2.3)$$

Заметим, что функции B_r, B_θ, B_α не удовлетворяют уравнения Лапласса типа (2.3), однако выражаются через гармонические функции B_x, B_y, B_z [35, 56].

В случае симметричного нагружения относительно оси OZ имеем, что скаляр B_o, а также проэкции B_r, B_θ, B_α вектора $\vec{B}$ не должны зависеть от угла α.

Проэкциями вектора перемещений $\vec{u}$, согласно (2.I), на оси сферической системы координат $r\theta\alpha$ будут

$$u_r = 4(1-\nu)B_r - \frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r + B_o\right), \qquad (2.4)$$

$$u_\theta = 4(1-\nu)B_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(rB_r + B_o\right).$$

Если компоненты u_r и u_θ не зависят от α, то деформации e_{rr}, $e_{\theta\theta}$, $e_{\alpha\alpha}$, $e_{r\theta}$ и объемное расширение e определяются формулами

$$
\begin{gathered}
e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad e_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+u_r\right), \\
e_{\alpha\alpha}=\frac{1}{r}\left(u_\theta \operatorname{ctg}\theta+u_r\right), \quad e_{r\theta}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)\right], \\
e=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(u_\theta\sin\theta\right).
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

В этом случае объемная сферическая гармоническая функция представляется в виде одного из произведений

$$
r^n P_n(\mu), \quad \frac{1}{r^{n+1}}P_n(\mu) \quad (\mu=\cos\theta,\ n=0,1,2,\ldots), \tag{2.6}
$$

где $P_n(\mu)$ – полиномы Лежандра.

Тогда на основании формул (2.4) для внешней задачи (бесконечная среда) получим выражения для перемещений в виде [35]

$$
\begin{gathered}
u_r=\sum_{n=0}^{\infty}\left[n(n+3-4\nu)\frac{C_n}{r^n}-(n+1)\frac{D_n}{r^{n+2}}\right]P_n(\mu), \\
u_\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-n+4-4\nu)\frac{C_n}{r^n}+\frac{D_n}{r^{n+2}}\right]\frac{dP_n(\mu)}{d\theta}.
\end{gathered} \tag{2.7}
$$

Определив деформации согласно (2.5), можно найти напряжения на основании соотношения (I.9), т.е.

$$
\sigma_{rr}=2G\sum_{n=0}^{\infty}\left[-n(n^2+3n-2\nu)\frac{C_n}{r^{n+1}}+(n+1)(n+2)\frac{D_n}{r^{n+3}}\right]P_n(\mu),
$$

$$
\sigma_{\theta\theta}=2G\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[n(n^2-2n-1+2\nu)\frac{C_n}{r^{n+1}}-(n+1)^2\frac{D_n}{r^{n+3}}\right]P_n(\mu)-\right.
$$

$$-\left[(-n+4-4\nu)\frac{C_n}{r^{n+1}}+\frac{\mathcal{D}_n}{r^{n+3}}\right]\frac{dP_n(\mu)}{d\theta}\,ctg\,\theta\Big\}\,,$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}=2G\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\left[n(n+3-4n\nu-2\nu)\frac{C_n}{r^{n+1}}-(n+1)\frac{\mathcal{D}_n}{r^{n+3}}\right]P_n(\mu)+$$

$$+\left[(-n+4-4\nu)\frac{C_n}{r^{n+1}}+\frac{\mathcal{D}_n}{r^{n+3}}\right]\frac{dP_n(\mu)}{d\theta}\,ctg\,\theta\Big\}\,, \tag{2.8}$$

$$\sigma_{r\theta}=2G\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n^2-2+2\nu)\frac{C_n}{r^{n+1}}-(n+2)\frac{\mathcal{D}_n}{r^{n+3}}\right]\frac{dP_n(\mu)}{d\theta}\,.$$

Заметим, что представление перемещений и напряжений, соответствующие внутренней задачи, согласно (2.6), легко получить из выражений (2.7), (2.8) в результате замены n на $-n-1$.

§ 3. Некоторые сведения и рекуррентные соотношения из теории сферических функций

Так как общее решение уравнений теории упругости в сферических координатах в случае осевой симметрии выражается через полиномы Лежандра, то при решении конкретных граничных задач возникает необходимость производить различные алгебраические и дифференциальные операции над полиномами Лежандра и их производными.В связи с этим приведем некоторые их основные свойства,изложенные в книгах [I0,90] . Изложим также некоторые новые рекуррентные соотношения, используемые при удовлетворении граничным условиям на поверхностях, близких к сферическим.

Допустим, что уравнение Лапласса

$$\nabla^2 v(r,\theta,\alpha) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) = 0 \tag{3.I}$$

удовлетворяет однородный полином степеня n (гармонический полином), имеющий вид

$$v_n(r,\theta,\alpha) = r^n\, Y_n(\theta,\alpha)\,. \tag{3.2}$$

Функция $r^n Y_n(\theta,\alpha)$ называется объемной сферической функцией степеня n, а функция $Y_n(\theta,\alpha)$, которая является полиномом от $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ –поверхностной сферической или просто сферической функцией степеня n.

В случае осевой симметрии сферические функции $Y_n(\theta,\alpha)$ меняются на полиномы Лежандра $P_n(\mu) = P_n(\cos\theta)$, где

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left[(\mu^2-1)^n\right]. \tag{3.3}$$

Разложение $P_n(\mu)$ по степеням μ имеет вид

$$P_n(\mu) = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{n!}\left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} - \ldots\right]. \tag{3.4}$$

Для действительного аргумента $\mu = \cos\theta$ имеем тригонометрическое представление

$$P_n(\mu) = 2\,\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\left[\cos n\theta + \frac{1}{1}\frac{n}{2n-1}\cos(n-2)\theta + \frac{1\cdot3}{1\cdot2}\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\theta + \frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\cos(n-6)\theta + \ldots\right]. \tag{3.5}$$

Если n – нечетное целое число, то сумма кончается на члене с $\cos\theta$; если n – четное – на члене, не зависящем от $\cos\theta$, причем этот член умножается дополнительно на 1/2.

Заметим, что функция $P_n(\mu)$ удовлетворяет дифференциальное уравнение Лежандра

$$(1-\mu^2)\frac{d^2 v}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dv}{d\mu} + n(n+1)v = 0 \tag{3.6}$$

и называется полиномом Лежандра первого рода степени n или зональной гармонической сферической функцией I-го рода.

Полиномы Лежандра I-го рода удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{gathered}
(n+1)P_{n+1}(\mu) - (2n+1)\mu P_n(\mu) + nP_{n-1}(\mu) = 0, \\
nP_n(\mu) - \mu P_n'(\mu) + P_{n-1}'(\mu) = 0, \\
nP_{n-1}(\mu) - P_n'(\mu) + \mu P_{n-1}'(\mu) = 0, \\
(2n+1)P_n(\mu) - P_{n+1}'(\mu) + P_{n-1}'(\mu) = 0, \\
(\mu^2-1)P_n'(\mu) - n\mu P_n(\mu) + nP_{n-1}(\mu) = 0.
\end{gathered} \tag{3.7}$$

На основании (3.3)–(3.7) можно получить дополнительные формулы [...], которые используются при решении краевых задач математической теории упругости

$$(2n+1)\mu^2 P_n(\mu) = \frac{n(n-1)}{2n-1}P_{n-2}(\mu) + \frac{4n^3+6n^2-1}{(2n-1)(2n+3)}P_n(\mu) + \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3}P_{n+2}(\mu),$$

$$(2n+1)\mu \sqrt{1-\mu^2}\,\frac{dP_n(\mu)}{d\theta} = -\frac{n(n^2-1)}{2n-1}P_{n-2}(\mu) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{(2n-1)(2n+3)}P_n(\mu) +$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{2n+3}P_{n+2}(\mu)\,, \qquad (2n+1)\mu\bar{\mu}\,P_n(\mu)=\frac{n}{2n-1}\,\frac{dP_{n-2}(\mu)}{d\theta}$$

$$-\frac{2n+1}{(2n-1)(2n+3)}\,\frac{dP_n(\mu)}{d\theta}-\frac{n+1}{2n+3}\,\frac{dP_{n+2}(\mu)}{d\theta}\,, \qquad (2n+1)\mu\,\frac{d^2P_n(\mu)}{d\theta^2}=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2n-1}\,\frac{dP_{n-2}(\mu)}{d\theta}+\frac{4n^3+6n^2-4n-3}{(2n-1)(2n+3)}\,\frac{dP_n(\mu)}{d\theta}+\frac{n(n+1)}{2n+3}\,\frac{dP_{n+2}(\mu)}{d\theta}\,,$$

$$(2n+1)\bar{\mu}\,P_n(\mu)=\frac{dP_{n-1}(\mu)}{d\theta}-\frac{dP_{n+1}(\mu)}{d\theta}\,, \tag{3.6}$$

$$(2n+1)\mu\,\frac{dP_n(\mu)}{d\theta}=(n+1)\,\frac{dP_{n-1}(\mu)}{d\theta}+n\,\frac{dP_{n+1}(\mu)}{d\theta}\,,$$

$$(2n+1)\bar{\mu}\,\frac{d^2P_n(\mu)}{d\theta^2}=-(n+1)^2\,\frac{dP_{n-1}(\mu)}{d\theta}+n^2\,\frac{dP_{n+1}(\mu)}{d\theta}\,,$$

где $\mu=\cos\theta$, $\bar{\mu}=\sin\theta$.

Из (3.3) получим, что при $\theta=0$, $\theta=\pi/2$, $\theta=\pi$ имеют место равенства

$$P_n(\pm 1)=(\pm 1)^n\,, \qquad \frac{dP_n(\pm 1)}{d\theta}=0\,, \qquad P_{2n+1}(0)=0\,,$$

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\,.$$

В табл.1 приведены числовые значения полиномов $P_n(\mu)$ $(n=1,2,\ldots,10)$ и их производных $dP_n(\mu)/d\theta$ $(n=1,2,\ldots,10)$ в зависимости от значений угла θ ,изменяющегося в интервале $0\le\theta\le\pi/2$. В промежутке $\pi/2<\theta<\pi$ $P_{2n}(\mu)$ и $dP_{2n+1}(\mu)/d\theta$ симметричные, а $P_{2n+1}(\mu)$ и $dP_{2n}(\mu)/d\theta$ антисимметричные относительно их значений в интервале $0<\theta<\pi/2$.

Таблица I

$P_n(\mu)$ \ θ	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
P_1	0,9659	0,8660	0,707I	0,5000	0,2588	0
P_2	0,8995	0,6250	0,2500	-0,I250	-0,3995	-0,5000
P_3	0,8042	0,3248	- 0,I768	-0,4375	-0,3449	0
P_4	0,6847	0,0234	- 0,4062	-0,289I	0,I434	0,3750
P_5	0,547I	-0,2233	- 0,3757	0,0898	0,3427	0
P_6	0,3983	-0,3740	- 0,I484	0,3232	0,043I	-0,3I25
P_7	0,2455	-0,4I02	0,I27I	0,223I	-0,2730	0
P_8	0,0962	-0,3388	0,2983	-0,0736	-0,I702	0,2734
P_9	-0,0428	-0,I895	0,2856	-0,2679	0,I594	0
P_{10}	-0,I65I	-0,0070	0,II5I	-0,I882	0,23I6	-0,246I

Таблица 2

θ / $dP_n(\mu)/d\theta$	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$dP_1/d\theta$	- 0,2588	- 0,500	- 0,7071	-0,8660	-0,9659	-1,0000
$dP_2/d\theta$	- 0,7500	-1,2990	- 1,500	-1,2990	-0,7500	0
$dP_3/d\theta$	- 1,4229	-2,0625	- 1,5910	-0,3248	0,9636	1,5000
$dP_4/d\theta$	- 2,2069	-2,4357	-0,6250	1,3532	1,5819	0
$dP_5/d\theta$	- 3,0178	-2,1680	0,9944	1,9283	-0,2833	-1,8750
$dP_6/d\theta$	- 3,7646	-1,2077	2,2969	0,4973	-2,0596	0
$dP_7/d\theta$	- 4,3580	0,2632	2,3589	-1,7109	-0,8245	2,1875
$dP_8/d\theta$	- 4,7150	1,8686	0,9492	-2,4014	1,8969	0
$dP_9/d\theta$	- 4,7812	3,1429	-1,2279	-0,6273	1,9701	-2,4609
$dP_{10}/d\theta$	- 4,5075	3,6696	-2,8870	2,0067	-1,0306	0

При решении краевых задач о напряженном состоянии около неканонических поверхностей возникает необходимость разложить произведения вида

$$\begin{pmatrix}\cos k\theta\\ \sin k\theta\end{pmatrix} P_n(\mu), \qquad \begin{pmatrix}\cos k\theta\\ \sin k\theta\end{pmatrix}\frac{dP_n(\mu)}{d\theta}, \qquad \begin{pmatrix}\cos k\theta\\ \sin k\theta\end{pmatrix}\frac{d^2P_n(\mu)}{d\theta^2}$$

в ряды по полиномам Лежандра или их производным. Некоторые из таких разложений, необходимые в дальнейшем для решения конкретных задач, приведены в табл.3-6.

Таблица 3

Выражения	Коэффициенты при $P_n(\mu)$			
	P_0	P_2	P_4	P_6
$\cos 3\theta\, P_1(\mu)$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{32}{35}$	–
$\cos 3\theta\, P_3(\mu)$	$-\frac{8}{35}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{12}{385}$	$\frac{160}{231}$
$\cos 4\theta\, P_0(\mu)$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{16}{21}$	$\frac{64}{35}$	–
$\cos 4\theta\, P_2(\mu)$	$-\frac{16}{105}$	$-\frac{5}{21}$	$\frac{32}{385}$	$\frac{64}{77}$
$\cos 6\theta\, P_0(\mu)$	$-\frac{1}{35}$	$-\frac{4}{21}$	$-\frac{384}{385}$	$\frac{512}{231}$
$\sin 3\theta \frac{dP_1(\mu)}{d\theta}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{22}{21}$	$\frac{32}{35}$	–
$\sin 3\theta \frac{dP_3(\mu)}{d\theta}$	$-\frac{32}{35}$	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{228}{385}$	$\frac{160}{77}$
$\sin 4\theta \frac{dP_2(\mu)}{d\theta}$	$\frac{8}{35}$	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{228}{385}$	$\frac{128}{77}$
$\cos 4\theta \frac{d^2P_2(\mu)}{d\theta^2}$	$\frac{19}{35}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{576}{385}$	$\frac{256}{77}$

Таблица 4

Выражения	Коэффициенты при $P_n(\mu)$: P_0	P_2	P_4	P_6	P_8	P_{10}
$\cos 3\theta \, P_5(\mu)$	-	$\frac{80}{231}$	$\frac{165}{11011}$	$\frac{2}{165}$	$\frac{448}{715}$	-
$\cos 4\theta \, P_4(\mu)$	$\frac{64}{315}$	$\frac{32}{693}$	$\frac{157}{5005}$	$\frac{16}{693}$	$\frac{896}{1287}$	-
$\cos 4\theta \, P_6(\mu)$	-	$\frac{40}{1001}$	$\frac{212}{1001}$	$\frac{71}{187}$	$\frac{784}{2717}$	$\frac{336}{4199}$
$\cos 6\theta \, P_2(\mu)$	$-\frac{4}{105}$	$-\frac{85}{231}$	$\frac{1704}{5005}$	$\frac{128}{1155}$	$\frac{2048}{2145}$	-
$\cos 8\theta \, P_0(\mu)$	$-\frac{1}{63}$	$-\frac{64}{693}$	$-\frac{256}{1001}$	$-\frac{4096}{3465}$	$\frac{16384}{6435}$	-
$\cos 8\theta \, P_2(\mu)$	$-\frac{64}{3465}$	$-\frac{1039}{9009}$	$-\frac{2432}{5005}$	$\frac{24832}{58905}$	$\frac{16384}{122265}$	$\frac{49152}{46189}$
$\sin 3\theta \frac{dP_5(\mu)}{d\theta}$	-	$-\frac{160}{77}$	$-\frac{510}{1001}$	$-\frac{6}{11}$	$\frac{448}{143}$	-
$\sin 4\theta \frac{dP_4(\mu)}{d\theta}$	$-\frac{64}{63}$	$-\frac{400}{693}$	$-\frac{592}{1001}$	$-\frac{416}{693}$	$\frac{3584}{1287}$	-
$\sin 6\theta \frac{dP_2(\mu)}{d\theta}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{116}{231}$	$-\frac{7824}{5005}$	$-\frac{1024}{1155}$	$\frac{28672}{15015}$	-
$\sin 4\theta \frac{dP_6(\mu)}{d\theta}$	-	$-\frac{320}{143}$	$-\frac{72}{143}$	$-\frac{504}{935}$	$-\frac{7616}{13585}$	$\frac{16128}{4199}$
$\sin 8\theta \frac{dP_2(\mu)}{d\theta}$	$\frac{16}{1155}$	$\frac{304}{3003}$	$\frac{3264}{5005}$	$-\frac{7424}{3927}$	$-\frac{8192}{8151}$	$\frac{98304}{46189}$
$\cos 8\theta \frac{d^2P_2(\mu)}{d\theta^2}$	$\frac{67}{1155}$	$\frac{1108}{3003}$	$\frac{768}{455}$	$-\frac{1024}{357}$	$\frac{16384}{8151}$	$-\frac{196608}{46189}$

Таблица 5

Выражения	Коэффициенты при $dP_n(\mu)/d\theta$					
	$\frac{dP_1}{d\theta}$	$\frac{dP_2}{d\theta}$	$\frac{dP_3}{d\theta}$	$\frac{dP_4}{d\theta}$	$\frac{dP_5}{d\theta}$	$\frac{dP_6}{d\theta}$
$\sin 3\theta\, P_0(\mu)$	$\frac{1}{5}$	–	$\frac{8}{15}$	–	–	–
$\sin 3\theta\, P_1(\mu)$	–	$-\frac{5}{21}$	–	$-\frac{8}{35}$		
$\sin 3\theta\, P_2(\mu)$	$-\frac{11}{35}$	–	$-\frac{1}{15}$	–	$-\frac{16}{105}$	–
$\sin 3\theta\, P_3(\mu)$	–	$-\frac{5}{63}$	–	$-\frac{13}{385}$	–	$-\frac{80}{693}$
$\sin 4\theta\, P_0(\mu)$	–	$\frac{4}{21}$	–	$-\frac{16}{35}$	–	–
$\sin 4\theta\, P_2(\mu)$	–	$-\frac{4}{21}$	–	$-\frac{4}{77}$	–	$-\frac{32}{231}$
$\sin 6\theta\, P_0(\mu)$	–	$\frac{2}{63}$		$\frac{64}{385}$		$-\frac{256}{693}$
$\cos 3\theta\, \frac{dP_1(\mu)}{d\theta}$	–	$-\frac{3}{7}$		$\frac{8}{35}$	–	–
$\cos 3\theta\, \frac{dP_2(\mu)}{d\theta}$	$-\frac{27}{35}$	–	$-\frac{2}{15}$	–	$\frac{32}{105}$	–
$\cos 3\theta\, \frac{dP_3(\mu)}{d\theta}$	–	$-\frac{4}{21}$	–	$-\frac{27}{385}$	–	$\frac{80}{231}$
$\cos 4\theta\, \frac{dP_2(\mu)}{d\theta}$	–	$-\frac{11}{21}$	–	$-\frac{48}{385}$	–	$\frac{64}{231}$
$\sin 3\theta\, \frac{d^2P_1(\mu)}{d\theta^2}$	–	$\frac{5}{21}$	–	$\frac{8}{35}$	–	–
$\sin 3\theta\, \frac{d^2P_2(\mu)}{d\theta^2}$	$\frac{51}{35}$	–	$-\frac{4}{15}$	–	$\frac{64}{105}$	–
$\sin 3\theta\, \frac{d^2P_3(\mu)}{d\theta^2}$	–	–	–	$-\frac{21}{55}$	–	$\frac{80}{77}$
$\sin 4\theta\, \frac{d^2P_2(\mu)}{d\theta^2}$	–	$\frac{20}{21}$	–	$-\frac{96}{385}$	–	$\frac{128}{231}$

Таблица 6

Выражения	Коэффициенты при $dP_n(\mu)/d\theta$				
	$\frac{dP_2}{d\theta}$	$\frac{dP_4}{d\theta}$	$\frac{dP_6}{d\theta}$	$\frac{dP_8}{d\theta}$	$\frac{dP_{10}}{d\theta}$
$\sin 3\theta\, P_5(\mu)$	$\frac{80}{693}$	$-\frac{23}{1001}$	$-\frac{7}{495}$	$-\frac{56}{715}$	
$\sin 4\theta\, P_4(\mu)$	$-\frac{16}{231}$	$-\frac{148}{5005}$	$-\frac{4}{231}$	$-\frac{112}{1287}$	–
$\sin 4\theta\, P_6(\mu)$	$\frac{320}{3003}$	$-\frac{8}{385}$	$-\frac{12}{935}$	$-\frac{28}{3135}$	$-\frac{1344}{20995}$
$\sin 6\theta\, P_2(\mu)$	$\frac{58}{693}$	$-\frac{118}{1001}$	$-\frac{128}{3465}$	$-\frac{256}{2145}$	–
$\sin 8\theta\, P_0(\mu)$	$\frac{8}{693}$	$\frac{32}{1001}$	$\frac{512}{3465}$	$-\frac{2048}{6435}$	–
$\sin 8\theta\, P_2(\mu)$	$\frac{152}{9009}$	$\frac{376}{5005}$	$-\frac{5312}{58905}$	$-\frac{3584}{122265}$	$-\frac{24576}{230945}$
$\cos 3\theta \frac{dP_5(\mu)}{d\theta}$	$\frac{160}{231}$	$-\frac{54}{1001}$	$-\frac{1}{33}$	$\frac{56}{143}$	–
$\cos 4\theta \frac{dP_4(\mu)}{d\theta}$	$-\frac{160}{693}$	$-\frac{87}{1001}$	$-\frac{32}{693}$	$\frac{448}{1287}$	–
$\cos 4\theta \frac{dP_6(\mu)}{d\theta}$	$\frac{2240}{3003}$	$-\frac{48}{715}$	$-\frac{107}{2805}$	$-\frac{336}{13585}$	$\frac{8064}{20995}$
$\cos 6\theta \frac{dP_2(\mu)}{d\theta}$	$\frac{31}{231}$	$-\frac{1836}{5005}$	$-\frac{128}{1155}$	$\frac{512}{2145}$	–
$\cos 8\theta \frac{dP_2(\mu)}{d\theta}$	$\frac{59}{3003}$	$\frac{576}{5005}$	$-\frac{5888}{19635}$	$-\frac{4096}{40755}$	$\frac{49152}{230945}$
$\sin 3\theta \frac{d^2P_5(\mu)}{d\theta^2}$	$-\frac{320}{77}$	$-\frac{348}{1001}$	$-\frac{5}{11}$	$\frac{280}{143}$	–
$\sin 4\theta \frac{d^2P_4(\mu)}{d\theta^2}$	$\frac{80}{231}$	$-\frac{244}{1001}$	$-\frac{32}{77}$	$\frac{1792}{1287}$	–
$\sin 4\theta \frac{d^2P_6(\mu)}{d\theta^2}$	$-\frac{2240}{429}$	$-\frac{168}{715}$	$-\frac{1084}{2805}$	$-\frac{6272}{13585}$	$\frac{48384}{20995}$
$\sin 6\theta \frac{d^2P_2(\mu)}{d\theta^2}$	$-\frac{10}{33}$	$\frac{456}{715}$	$-\frac{256}{1155}$	$\frac{1024}{2145}$	–
$\sin 8\theta \frac{d^2P_2(\mu)}{d\theta^2}$	$-\frac{8}{143}$	$-\frac{192}{715}$	$\frac{3328}{6545}$	$-\frac{8192}{40755}$	$\frac{98304}{230945}$

§ 4. Исходные соотношения метода "возмущения формы границы"

Под **в о з м у щ е н и е м** [39] будем понимать отклонение от которых условий задачи, допускающей точное решение.

Рассмотрим бесконечную среду, ограниченную изнутри поверхноью S ,образованной вращением контура Γ относительно его оси мметрии Oz . При этом в произвольном меридиональном сечении zoR функция

$$\omega(\zeta)=r_0[\zeta+\varepsilon f(\zeta)]=r_0 r e^{i\theta} \quad (\zeta=\rho e^{i\gamma},\ |\varepsilon|\ll 1) \qquad (4.1)$$

существляет конформное отображение [40,75,80] внешности $\zeta|\geq 1$ (внутренности $|\zeta|\leq 1$)единичной окружности на внешость (внутренность) контура Γ . При этом координатная линия $\rho=1$ совпадает с кривой Γ . Функция $f(\zeta)$ и параметр ε опеделяют форму контура Γ . Для взаимного однозначного отображения еобходимо, чтобы корни уравнения $1+\varepsilon f'(\zeta)=0$ лежали внутри кружности единичного радиуса $(\rho=1)$ плоскости ζ .Величина r_0 арактеризует абсолютные размеры контура и его ориентацию по отошению к избранной системе координат.

Параметрические уравнения контура Γ в рассматриваемой плосости zoR имеют вид

$$\begin{aligned} z&=r_0^{-1}\,\mathrm{Re}\,\omega(\zeta)\big|_{\rho=1}=\cos\gamma+\varepsilon\cos K\gamma\ , \\ R&=r_0^{-1}\,\mathrm{Im}\,\omega(\zeta)\big|_{\rho=1}=\sin\gamma-\varepsilon\sin K\gamma\ . \end{aligned} \qquad (4.2)$$

В зависимости от вида функции $f(\zeta)$ и значения малого параметра ε можно получить различные виды контура Γ .Так,например, для функции $f(\zeta)=\zeta^{-K}$ при $K=1$ уравнениям (4.2)отвечают вытянутые $(\varepsilon>0)$ или сжатые $(\varepsilon<0)$ эллипсоиды вращения. Если $K>1$, то при определенных значениях ε можно получить уравнения, соответствующие в плоскости zoR "правильному" $(K+1)$-угольнику с закругленными углами, при вращении которого вокруг оси OZ образуются специального вида поверхности вращения. Так, например, при $K=2$, $\varepsilon=1/3\div1/4$ соотношениям (4.2) соответствуют "правильный трехугольник", а значениям $K=3$, $\varepsilon=\pm1/6\div1/9$ - "квадрат" с закругленными углами. С увеличением числа сторон многоугольника уменьшается соответствующее ему значение параметра ε, например, "пятиугольнику" отвечает $K=4$, $|\varepsilon|=1/10$, "шестиугольнику" - $K=5$, $|\varepsilon|=1/15$ и т.д. С геометрической точки зрения это значит, что в рассматриваемом случае контур многоугольника все меньше отклоняется от окружности. Следовательно, для каждой пары значений параметров K и ε в трехмерном пространстве образуются столько поверхностей вращения, сколько осей симметрии в соответствующего плоского многоугольника.

Заметим, что уравнение ограничивающей поверхности, соответствующее функции (4.I), в общем случае (за исключением частного $f(\zeta)=\zeta^{-1}$) не является уравнением второго порядка и не сводится к стандартному каноническому виду. Поэтому поверхности этого класса относятся к неканоническим.

В рассматриваемом случае координаты r,θ и угол β (рис.I), между радиальным направлением и нормалью к контуру Γ, в произвольной точке поверхности вращения выражаются через отображающую функцию $\omega(\zeta)$ в виде [I4].

$$r=\frac{1}{r_0}\sqrt{\omega(\zeta)\,\overline{\omega(\zeta)}}\,,\qquad \theta=arc\,tg\,\frac{Jm\,\omega(\zeta)}{Re\,\omega(\zeta)}\,, \tag{4.3}$$

$$e^{i\beta}=\frac{\zeta}{|\zeta|}\,\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\,\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{|\overline{\omega(\zeta)}|}\,.$$

Перемещения u_ℓ и напряжения $\sigma_{m\ell}$ $(m,\ell=\rho,\gamma,\varphi)$ в криволинейной ортогональной системе координат определяются через

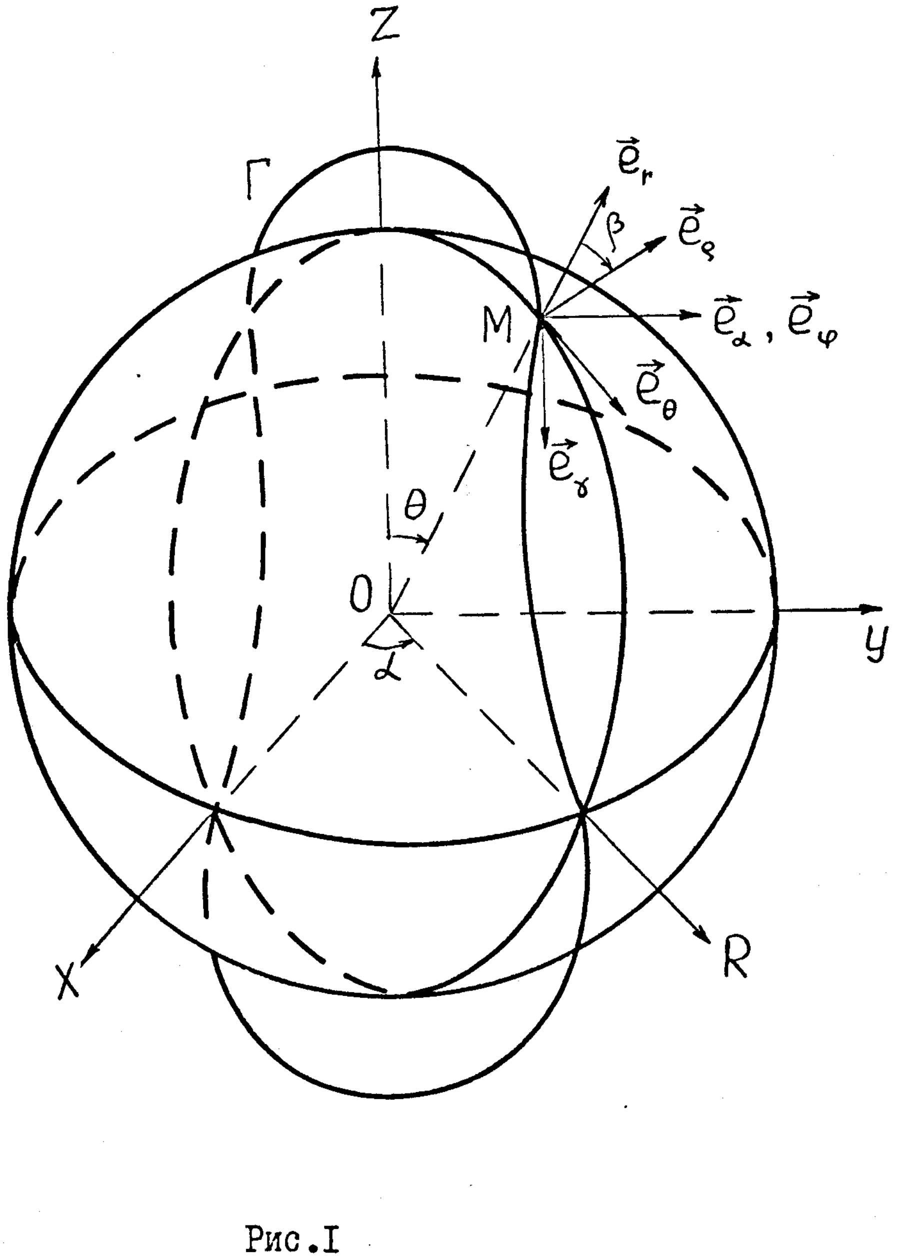

Z
Γ
$\vec{e}_r$
β
$\vec{e}_\varsigma$
M
$\vec{e}_\alpha$, $\vec{e}_\varphi$
$\vec{e}_\theta$
$\vec{e}_\gamma$
θ
O
y
α
X
R

Рис.I

соответствующие компоненты u_s, σ_{ks} $(k,s=r,\theta,\alpha)$ сферической системы координат по формулам [40]

$$u_\rho = u_r\cos\beta + u_\theta\sin\beta\,,\quad u_\gamma = u_\theta\cos\beta - u_r\sin\beta\,,\quad u_\varphi = u_\alpha\,,$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \sigma_{rr} + \frac{1}{2}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})(1-\cos 2\beta) + \sigma_{r\theta}\sin 2\beta\,,$$

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})(1-\cos 2\beta) - \sigma_{r\theta}\sin 2\beta\,, \tag{4.4}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\alpha\alpha}\,,\qquad \sigma_{\rho\gamma} = \frac{1}{2}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})\sin 2\beta + \sigma_{r\theta}\cos 2\beta\,,$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = \sigma_{r\alpha}\cos\beta + \sigma_{\theta\alpha}\sin\beta\,,\qquad \sigma_{\gamma\varphi} = \sigma_{\theta\alpha}\cos\beta - \sigma_{r\alpha}\sin\beta\,.$$

Здесь

$$u_\ell = u_\ell(\rho,\gamma,\varphi)\,,\qquad \sigma_{m\ell} = \sigma_{m\ell}(\rho,\gamma,\varphi),$$
$$u_s = u_s(r,\theta,\alpha)\,,\qquad \sigma_{ks} = \sigma_{ks}(r,\theta,\alpha)\,. \tag{4.5}$$

Граничные условия на координатной поверхности $S(\rho=1)$ при заданных на ней перемещениях $\mathring{u}_\ell$ или напряжениях $\mathring{\sigma}_{\rho\ell}$ соответственно будут

$$(u_\ell + \hat{u}_\ell)_S = \mathring{u}_\ell\,,\qquad (\sigma_{\rho\ell} + \hat{\sigma}_{\rho\ell})_S = \mathring{\sigma}_{\rho\ell}\qquad (\ell=\rho,\gamma,\varphi)\,. \tag{4.6}$$

При этом слагаемые $\hat{u}_\ell$, $\hat{\sigma}_{\rho\ell}$ – известные компоненты основного напряженного состояния среды соответствующего приложенным силам на "бесконечности".

Из соотношений (4.3) видно, что правые части (4.4) являются достаточно сложными функциями от переменных ρ, γ, ε и, следовательно, удовлетворить точно граничным условиям (4.6) на поверхности $\rho=1$ не возможно. Однако при $\varepsilon=0$ на основании (4.I)-(4.3) имеем

$$\Big|_{\varepsilon=0} \equiv \rho\,, \quad \theta\Big|_{\varepsilon=0} \equiv \gamma\,, \quad \beta\Big|_{\varepsilon=0} \equiv 0\,, \quad \omega(\zeta)\Big|_{\varepsilon=0} = r_0 \zeta\,, \tag{4.7}$$

е. кривая Γ переходит в окружность радиуса r_0 и граничные ловия(4.6) в этом случае удовлетворяются точно.

Наличие малого параметра ε в правых частях (4.4) (ввиду висимостей от него функций (4.I)-(4.3)) позволяет решать трех-рные краевые задачи приближенным методом "возмущения формы аницы" [I4,I6,45]. Для его реализации решение граничных за-ч, т.е. компоненты левых частей (4.4), представляются в виде дов по степеням ε

$$u_\ell = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_\ell^{(n)}\,, \qquad \sigma_{m\ell} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_{m\ell}^{(n)}\,. \tag{4.8}$$

Произвольная непрерывная функция $F\,[r(\rho,\gamma,\varepsilon)\,,\theta(\rho,\gamma,\varepsilon)]$ жет быть представлена степенным рядом Маклорена

$$F(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \frac{1}{n!} L^{(n)} F(\rho,\gamma)\,, \tag{4.9}$$

е

$$L^{(n)} F(\rho,\gamma) = \frac{\partial^n F(r,\theta)}{\partial \varepsilon^n}\Big|_{\varepsilon=0}\,. \tag{4.10}$$

частности, операторы $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ имеют вид

$$L^{(1)} = \left(\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon}\frac{\partial}{\partial \gamma}\right)_{\varepsilon=0}\,,$$

$$L^{(2)} = \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + 2\,\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\,\frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon}\,\frac{\partial^2}{\partial \rho\,\partial \gamma} + \right. \tag{4.11}$$

$$\left. + \frac{\partial^2 r}{\partial \varepsilon^2}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon^2}\frac{\partial}{\partial \gamma}\right]_{\varepsilon=0}\,.$$

Следовательно, функция $F(\rho,\gamma)$ в (4.9) получается из $F(r,\theta)$ мальной заменой переменных r,θ соответственно на ρ,γ. Эта бенность играет важную роль при решении конкретных граничных задач, так как позволяет использовать выражения для перемещений и напряжений в сферических координатах для непосредственной их записи в криволинейных ортогональных координатах.

Разложив $e^{i\beta}$ из (4.3) в ряд по ε, получим

$$e^{i\beta}=1+\frac{\varepsilon}{2}A(\zeta,\bar{\zeta})+\frac{\varepsilon^2}{8}\left[A^2(\zeta,\bar{\zeta})-2B(\zeta,\bar{\zeta})\right]+\dots, \tag{4.12}$$

где обозначено

$$A(\zeta,\bar{\zeta})=\frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}}-\frac{f(\zeta)}{\zeta}+f'(\zeta)-\overline{f'(\zeta)},$$

$$B(\zeta,\bar{\zeta})=\frac{\overline{f^2(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}-\frac{f^2(\zeta)}{\zeta^2}+\left[f'(\zeta)\right]^2-\overline{\left[f'(\zeta)\right]^2}. \tag{4.13}$$

Учитывая выражения (4.8),(4,9) и (4.12), представим величины, входящие в правые части (4.4), рядами по степеням ε. После приравнивания членов при одинаковых степенях параметра ε для n-го приближения получим рекуррентные соотношения [16,45]

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{\rho\rho}^{(n)}\\ \sigma_{\gamma\gamma}^{(n)}\end{Bmatrix}=\sum_{j=0}^{n}\left[\Lambda_1^{(n-j)}\begin{Bmatrix}\sigma_{rr}^{(j)}\\ \sigma_{\theta\theta}^{(j)}\end{Bmatrix}\pm\Lambda_2^{(n-j)}\left(\sigma_{\theta\theta}^{(j)}-\sigma_{rr}^{(j)}\right)\pm\Lambda_3^{(n-j)}\sigma_{r\theta}^{(j)}\right],$$

$$\sigma_{\rho\gamma}^{(n)}=\sum_{j=0}^{n}\left[\Lambda_4^{(n-j)}\sigma_{r\theta}^{(j)}+\frac{1}{2}\Lambda_3^{(n-j)}\left(\sigma_{\theta\theta}^{(j)}-\sigma_{rr}^{(j)}\right)\right],$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}\\ u_{\varphi}^{(n)}\end{Bmatrix}=\sum_{j=0}^{n}\Lambda_1^{(n-j)}\begin{Bmatrix}\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}\\ u_{\alpha}^{(j)}\end{Bmatrix}, \tag{4.14}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{\rho\varphi}^{(n)};\ u_{\rho}^{(n)}\\ \sigma_{\gamma\varphi}^{(n)};\ u_{\gamma}^{(n)}\end{Bmatrix}=\sum_{j=0}^{n}\left[\Lambda_5^{(n-j)}\begin{Bmatrix}\sigma_{r\alpha}^{(j)};\ u_{r}^{(j)}\\ \sigma_{\theta\alpha}^{(j)};\ u_{\theta}^{(j)}\end{Bmatrix}\pm\Lambda_6^{(n-j)}\begin{Bmatrix}\sigma_{\theta\alpha}^{(j)};\ u_{\theta}^{(j)}\\ \sigma_{r\alpha}^{(j)};\ u_{r}^{(j)}\end{Bmatrix}\right].$$

Здесь $\Lambda_i^{(n)}$ $(i=1,2,\dots,6)$ –дифференциальные операторы зависящие от функции $f(\zeta)$ и имеющие при $n=0,1,2$ вид

$$\Lambda_1^{(0)}=\Lambda_4^{(0)}=\Lambda_5^{(0)}=1\ ,\quad \Lambda_2^{(0)}=\Lambda_3^{(0)}=\Lambda_6^{(0)}=\Lambda_2^{(1)}=0\ ,$$

$$\Lambda_1^{(1)}=\Lambda_4^{(1)}=\Lambda_5^{(1)}=L^{(1)},\quad \Lambda_3^{(1)}=2\Lambda_6^{(1)}=\frac{1}{i}A(\zeta,\bar\zeta)\ ,$$

$$\Lambda_1^{(2)}=\frac{1}{2}L^{(2)},\qquad \Lambda_2^{(2)}=-\frac{1}{4}A^2(\zeta,\bar\zeta)\ ,$$

$$\Lambda_3^{(2)}=\frac{1}{i}\left[A(\zeta,\bar\zeta)L^{(1)}-\frac{1}{2}B(\zeta,\bar\zeta)\right], \tag{4.15}$$

$$\Lambda_4^{(2)}=\frac{1}{2}\left[L^{(2)}+A^2(\zeta,\bar\zeta)\right],\quad \Lambda_5^{(2)}=\frac{1}{2}\left[L^{(2)}+\frac{1}{4}A^2(\zeta,\bar\zeta)\right],$$

$$\Lambda_6^{(2)}=\frac{1}{2i}\left[A(\zeta,\bar\zeta)L^{(1)}-\frac{1}{2}B(\zeta,\bar\zeta)\right].$$

В частности, для функции $f(\zeta)=\zeta^{-K}$ запишем их выражения в тригонометрической форме

$$\Lambda_1^{(0)}=\Lambda_4^{(0)}=\Lambda_5^{(0)}=1\ ,\quad \Lambda_2^{(0)}=\Lambda_3^{(0)}=\Lambda_6^{(0)}=\Lambda_2^{(1)}=0\ ,$$

$$\Lambda_1^{(1)}=\Lambda_4^{(1)}=\Lambda_5^{(1)}=\frac{\cos(K+1)\gamma}{\rho^K}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\sin(K+1)\gamma}{\rho^{K+1}}\frac{\partial}{\partial\gamma}\ ,$$

$$\Lambda_3^{(1)}=2\Lambda_6^{(1)}=\frac{2(K+1)\sin(K+1)\gamma}{\rho^{K+1}}\ , \tag{4.16}$$

$$\Lambda_1^{(2)}=\frac{1+\cos 2(K+1)\gamma}{4\rho^{2K}}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{\sin 2(K+1)\gamma}{2\rho^{2K}}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\gamma}\frac{1}{\rho}+$$

$$+\frac{1-\cos 2(K+1)\gamma}{4\rho^{2K+2}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right),$$

$$\Lambda_2^{(2)}=\frac{(K+1)^2\left[1-\cos 2(K+1)\gamma\right]}{2\rho^{2K+2}}\ ,$$

$$\Lambda_3^{(2)}=2\Lambda_6^{(2)}=\frac{(K+1)\sin 2(K+1)\gamma}{\rho^{2K+1}}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{(K^2-1)\sin 2(K+1)\gamma}{\rho^{2K+2}}-$$

$$-\frac{(K+1)\left[1-\cos 2(K+1)\gamma\right]}{\rho^{2K+2}}\frac{\partial}{\partial\gamma},$$

$$\Lambda_4^{(2)}=\Lambda_1^{(2)}-2\Lambda_2^{(2)}, \quad \Lambda_5^{(2)}=\Lambda_1^{(2)}-\frac{1}{2}\Lambda_2^{(2)}.$$

Дифференциальные операторы $\Lambda_i^{(j)}$ в произвольном приближении получены в работе [48].

В правых частях соотношений (4.I4), согласно (4.9), все величины являются функциями от новых координат ρ, γ, φ

$$u_s^{(j)}=u_s^{(j)}(\rho,\gamma,\varphi), \quad \sigma_{ks}^{(j)}=\sigma_{ks}^{(j)}(\rho,\gamma,\varphi), \tag{4.I7}$$

т.е. согласно (4,9) они получены в результате формальной замены координат r, θ, α соответственно на ρ, γ, φ.

Краевые условия для произвольного приближения в случае заданных усилий на граничной поверхности S такие

$$\left(u_\ell^{(n)}+\hat{u}_\ell^{(n)}\right)_{\rho=1}=\mathring{u}_\ell^{(n)}(\gamma), \quad \left(\sigma_{\rho\ell}^{(n)}+\hat{\sigma}_{\rho\ell}^{(n)}\right)_{\rho=1}=\mathring{\sigma}_{\rho\ell}^{(n)}(\gamma) \quad (\ell=\rho,\gamma,\varphi); \tag{4.I8}$$

Здесь $\hat{u}_\ell^{(n)}, \hat{\sigma}_{\rho\ell}^{(n)}$ – известные величины, соответствующие действующим усилиям на "бесконечности"; $\mathring{u}_\ell^{(n)}(\gamma), \mathring{\sigma}_{\rho\ell}^{(n)}(\gamma)$ –заданные функции на поверхности тела.

Таким образом, граничные задачи для бесконечной среды, ограниченной изнутри поверхностями вращения рассматриваемого класса, формально сводятся к последовательности краевых задач для среды со сферическими поверхностями.

§ 5. Об эффективности метода возмущения в пространственных осесимметричных задачах теории упругости

Вопрос об эффективности изложенного в § 4 приближенного метода "возмущения формы границы" выясним с помощью двух задач для эллипсоидальных областей, допускающих точное решение.

Кручение тела вращения с эллипсоидальной полостью. Предположим, что сплошной цилиндр радиуса R_1 подвержен кручению моментом M относительно оси Oz. Тогда напряжения $\hat{\sigma}_{xy}$ и $\hat{\sigma}_{yz}$ в безразмерных прямоугольных координатах имеют вид [4I]

$$\hat{\sigma}_{xy} = P' r_0 y\,, \quad \hat{\sigma}_{yz} = -P' r_0 x \quad \left(P' = 2M/\pi R_1^4 \right). \tag{5.I}$$

Следовательно, в безразмерных сферических координатах имеем

$$\hat{\sigma}_{\theta\alpha} = 0{,}5\, P' r_0 r (1 - \cos 2\theta)\,, \quad \hat{\sigma}_{r\alpha} = -0{,}5\, P' r_0 r \sin 2\theta\,. \tag{5.2}$$

Напряженное состояние цилиндра, соответствующее компонентам (5.I),(5.2), будем называть о с н о в н ы м.

Составляющие основного напряженного состояния в криволинейных ортогональных координатах согласно (4.4) имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\gamma\varphi} &= \frac{P' r_0}{2} r \left[(1 - \cos 2\theta)\cos\beta + \sin 2\theta \sin\beta \right], \\ \hat{\sigma}_{\rho\varphi} &= -\frac{P' r_0}{2} r \left[\sin 2\theta \cos\beta - (1 - \cos 2\theta)\sin\beta \right]. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Разложения по степеням ε с точностью до ε^3 по сравнению с единицей получим на основе формул (4.8),(4.I4),(5.3)

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\gamma\varphi} &= \sum_n \varepsilon^n \hat{\sigma}^{(n)}_{\gamma\varphi} = \frac{P' r_0}{3} \Big\{ 2\rho \left(1 - P_2(\mu)\right) + \varepsilon \rho^{-k} \times \\ &\times \left[2\cos(k+1)\gamma \left(1 - P_2(\mu)\right) + (1-k)\sin(k+1)\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} \right] + \\ &+ 0{,}5\,\varepsilon^2 \rho^{-2k-1} \Big[k\left(1 - \cos 2(k+1)\gamma\right)\left(-k - 1 + (k-2) P_2(\mu)\right) - \\ &- k(k+1)\sin 2(k+1)\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} \Big] + \ldots \Big\}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\hat{\sigma}_{\rho\varphi}=\sum_n \varepsilon^n \hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(n)}=\frac{P' r_0}{3}\Big\{\rho\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}+\varepsilon\,\rho^{-K}\Big[\cos(K+1)\gamma\,\times$$

$$\times\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}+\sin(K+1)\gamma\,\big(2K+1-2(K-1)P_2(\mu)\big)\Big]+$$

$$+\varepsilon^2\rho^{-2K-1}\Big[-\frac{K(K-2)}{4}\big(1-\cos 2(K+1)\gamma\big)\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}+$$

$$+K(K+1)\sin 2(K+1)\gamma\big(1-P_2(\mu)\big)\Big]+\ldots\Big\}.$$

Напряжениям (5.4) соответствует перемещение [32]

$= \hat{U}_\varphi(\rho,\gamma\ \ \varepsilon) =$

$$\hat{u}_\varphi=\sum_n \varepsilon^n \hat{u}_\varphi^{(n)}=\cancel{\frac{P' r_0^2}{3G_2}}\,g\Big\{\rho^2\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}+\varepsilon\,\rho^{-K+1}\,\times$$

$$\times\Big[2\cos(K+1)\gamma\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-\sin(K+1)\gamma\big(1-4P_2(\mu)\big)\Big]+ \qquad (5.5)$$

$$+\varepsilon^2\rho^{-2K}\Big[\cos 2(K+1)\gamma\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-\frac{1}{2}\sin 2(K+1)\gamma\,\times$$

$$\times\big(1-4P_2(\mu)\big)\Big]+\ldots\Big\}\qquad\Big(g=\frac{G_1+G_2}{2G_1}\Big).$$

~~Здесь G_1, G_2 —~~ модули сдвига в плоскостях ($\theta\alpha$) и ($r\alpha$).

Рассмотрим далее задачу о кручении цилиндра с эллипсоидальной полостью, поверхность которой описывается уравнениями (4.2) при $K=1$. При этом предлагается, что внешняя цилиндрическая поверхность находится на таком расстоянии от полости, что она не влияет на распределение напряжений у поверхности эллипсоидальной полости. Если полость свободна от напряжений, то имеют место граничные условия

$$\Big[\sigma_{\rho\varphi}^{(n)}(\rho,\gamma)+\hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(n)}(\rho,\gamma)\Big]_{\rho=1}=0\ \ (n\geq 0)\ , \qquad (5.6)$$

где компоненты $\sigma_{\rho\varphi}^{(n)}$ опрсделяются из (4.I4), а составляющие основного напряженного состояния $\hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(n)}$ из (5.4) при $K=1$, $\varepsilon=(a-b)/(a+b)$ (a,b - полуоси эллипсоида).

Приближенные выражения для компонентов $\sigma_{me}^{*(n)}$ будем определять по формулам

$$\sigma_{me}^{*(0)}=\sigma_{me}^{(0)}+\hat{\sigma}_{me}^{(0)}\,, \qquad \sigma_{me}^{*(n)}=\sigma_{me}^{*(n-1)}+\varepsilon^{n}\left(\sigma_{me}^{(n)}+\hat{\sigma}_{me}^{(n)}\right) \tag{5.7}$$

$$(n\geqslant 1, \quad m,e=\rho,\gamma,\varphi).$$

Здесь $\sigma_{me}^{(n)}$ - составляющие n-го приближения дополнительного напряженно-деформированного состояния скручиваемого цилиндра, которое возникло в результате наличия в нем полости.

В случае изотропного цилиндра в нулевом приближении напряжения

$$\sigma_{\gamma\varphi}^{*(0)}=\frac{P' r_0}{3}\left(2\rho+\frac{1}{2\rho^4}\right)\left(1-P_2(\mu)\right), \tag{5.8}$$

$$\sigma_{\rho\varphi}^{*(0)}=\frac{P' r_0}{3}\left(\rho-\frac{1}{\rho^4}\right)\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}$$

соответствуют сферической полости.

Поставленная задача решена с учетом трех приближений ($n=0,1,2$). Очевидно, наибольший интерес представляют напряженная $\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}/P'b$ при $\gamma=\pi/2$, которые согласно (4.8),(4.I4),(5.4),(5.6),(5.7) определяются по формуле

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{P'b}\right|_{\gamma=\pi/2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{b}\right)\left[\rho+\frac{1}{4}\rho^{-4}-\varepsilon\left(\rho^{-1}+\frac{25}{28}\rho^{-4}+\frac{1}{14}\rho^{-6}\right)+\right. \tag{5.9}$$

$$+\varepsilon^2\left(\frac{325}{294}\rho^{-4}+\frac{135}{49}\rho^{-6}-\frac{95}{42}\rho^{-8}\right)\Big].$$

В частности, на поверхности полости имеем

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\varphi}}{P'b}\right|_{\substack{\rho=1\\ \gamma=\pi/2}}\approx\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1{,}25-1{,}9643\,\varepsilon+1{,}5985\,\varepsilon^2\right). \qquad (5.10)$$

Таблица 7

b/a	ε	K_γ	$K_\gamma^{(0)}$	$\Delta_\gamma^{(0)}$	$K_\gamma^{(1)}$	$\Delta_\gamma^{(1)}$	$K_\gamma^{(2)}$	$\Delta_\gamma^{(2)}$
2	-I/3	I,633	I,250	23,5	I,429	I2,5	I,562	4,4
3/2	-I/5	I,437	I,250	I3,0	I,369	4,7	I,422	I,0
4/3	-I/7	I,375	I,250	9,0	I,339	2,6	I,368	0,5
3/4	I/7	I,I62	I,250	7,6	I,I3I	2,7	I,I69	0,6
2/3	I/5	I,I37	I,250	9,9	I,07I	5,8	I,I5I	I,3
I/2	I/3	I,087	I,250	I5,0	0,893	I7,9	I,I59	6,6

В табл.7 наряду с точными числовыми значениями коэффициента концентрации [32] K_γ (при $\rho=1$, $\gamma=\pi/2$) приведены приближенные значения $K_\gamma^{(n)}$, полученные по формуле (5.I0), а также относительные погрешности $\Delta_\gamma^{(n)}$ (в процентах).

$$K_\gamma=\frac{\sigma_{\gamma\varphi}}{P'b}, \quad K_\gamma^{(n)}=\frac{\sigma^{*(n)}_{\gamma\varphi}}{P'b}, \quad \Delta_\gamma^{(n)}=\frac{|K_\gamma-K_\gamma^{(n)}|}{K_\gamma}\cdot 100\% \ (n=0,1,2). \qquad (5.11)$$

Анализ числовых результатов свидетельствует о достаточно быстрой практической сходимости изложенного приближенного метода "возмущения формы границы" в теории кручения тел вращения с неканоническими полостями и включениями.

Если при конкретных инженерных расчетах допустима погрешность до 5 %, то согласно табл.7 для значений параметра $|\varepsilon|<0,2$ искомый результат дает первое приближение поставленной задачи.

Растяжение-сжатие среды с эллипсоидальной полостью. Рассмотрим однородную изотропную среду, ограниченную эллипсоидальной полостью, уравнение контура которой в произвольной меридиональной плоскости имеет вид (4.2) при $K=1$. Допустим, что на "бесконечности" среда находится под действием внешних усилий

$$\sigma_{xx}^{(\infty)}=\sigma_{yy}^{(\infty)}=\sigma_{zz}^{(\infty)}=p\ ,\qquad \sigma_{xy}^{(\infty)}=\sigma_{xz}^{(\infty)}=\sigma_{yz}^{(\infty)}=0\ , \tag{5.I2}$$

где p - интенсивность нагрузки (значение $p>0$ соответствует растяжению, а $p<0$ - сжатию).

Если эллипсоидальная поверхность $\rho=1$ свободна от напряжений, то согласно (4.I8) имеют место следующие граничные условия

$$\left[\sigma_{\rho\rho}^{(n)}(\rho,\gamma)+\hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(n)}(\rho,\gamma)\right]_{\rho=1}=0\ ,\quad \left[\sigma_{\rho\gamma}^{(n)}(\rho,\gamma)+\hat{\sigma}_{\rho\gamma}^{(n)}(\rho,\gamma)\right]_{\rho=1}=0\ , \tag{5.I3}$$

где на основании (5.I2) имеем

$$\hat{\sigma}_{\rho\rho}^{(0)}=\hat{\sigma}_{\gamma\gamma}^{(0)}=\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(0)}=p\ ,\qquad \hat{\sigma}_{\rho\gamma}^{(0)}=\hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(0)}=\hat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(0)}=0\ , \tag{5.I4}$$

$$\hat{\sigma}_{me}^{(j)}=0\quad (j\geqslant 1\ ,\quad m,\ell=\rho,\gamma,\varphi)\ .$$

Концентрация напряжений вдоль экватора эллипсоидальной полости, полученная методом "возмущения формы границы" с точностью до третьего приближения, определяется по формулам[45]

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}\right|_{\substack{\rho=1\\ \gamma=\pi/2}}=\frac{3}{2}-\varepsilon\,\frac{6(2-\nu)}{7-5\nu}+\varepsilon^2\,\frac{4(1104-1311\,\nu+285\,\nu^2)}{35\,(7-5\nu)^2}\ ,$$

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}\right|_{\substack{\rho=1\\ \gamma=\pi/2}} = \frac{3}{2} + \varepsilon\,\frac{6(1-2\nu)}{7-5\nu} + \varepsilon^2\,\frac{4(-111+1389\nu-1200\nu^2)}{35(7-5\nu)^2}\,. \tag{5.15}$$

При $\nu=0,3$ $(\rho=1,\ \gamma=\pi/2)$ имеем

$$\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma} \approx (1{,}5 - 1{,}8546\,\varepsilon + 2{,}7820\,\varepsilon^2)P\,,$$
$$\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi} \approx (1{,}5 + 0{,}4364\,\varepsilon + 0{,}7469\,\varepsilon^2)P\,. \tag{5.16}$$

Таблица 8

b/a	ε	K_γ	$K^{(0)}_\gamma$	$\Delta^{(0)}_\gamma$	$K^{(1)}_\gamma$	$\Delta^{(1)}_\gamma$	$K^{(2)}_\gamma$	$\Delta^{(2)}_\gamma$	K^{M}_γ
0,707	0,172	1,266	1,500	18,5	1,182	6,6	1,263	0,2	1,292
1,225	-0,101	1,719	1,500	12,7	1,688	1,8	1,716	0,2	1,721
1,414	-0,172	1,915	1,500	21,7	1,818	5,1	1,901	0,8	1,930
1,732	-0,268	2,265	1,500	33,8	1,997	11,8	2,197	3,0	2,331

Таблица 9

b/a	ε	K_φ	$K^{(0)}_\varphi$	$\Delta^{(0)}_\varphi$	$K^{(1)}_\varphi$	$\Delta^{(1)}_\varphi$	$K^{(2)}_\varphi$	$\Delta^{(2)}_\varphi$	K^{M}_φ
0,707	0,172	1,598	1,500	6,1	1,575	1,4	1,597	0,1	1,606
1,225	-0,101	1,464	1,500	2,5	1,456	0,5	1,4635	0,03	1,465
1,414	-0,172	1,452	1,500	3,3	1,425	1,9	1,447	0,3	1,456
1,732	-0,268	1,461	1,500	2,7	1,383	5,3	1,437	1,6	1,482

В табл.8,9 приведены, для сравнения, точные значения коэффициентов концентрации K_γ, K_φ [86] и приближенные

$$K^{(n)}_\gamma = \frac{\sigma^{*(n)}_{\gamma\gamma}}{P}\,, \qquad K^{(n)}_\varphi = \frac{\sigma^{*(n)}_{\varphi\varphi}}{P} \quad (n=0,1,2)\,, \tag{5.17}$$

вычисленные по формулам (5.16), а также относительные погрешности

$$\Delta^{(n)}_i = \frac{|K_i - K^{(n)}_i|}{K_i}\cdot 100\% \quad (n=0,1,2, \quad i=\gamma,\varphi) \tag{5.18}$$

в зависимости от величины отношения b/a .

Числовые значения в столбцах табл.8,9 для $K_\gamma^M = \sigma_{\gamma\gamma}^M / p$ и $K_\varphi^M = \sigma_{\varphi\varphi}^M / p$ характеризуют мажорантные напряжения вычисленные по формуле [50]

$$|\sigma_{m\ell}^M| \leq \hat{\sigma}_{m\ell} + |\sigma_{m\ell}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{m\ell}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{m\ell}^{(2)}| + R_n , \qquad (5.19)$$

где

$$R_n = |\varepsilon^3| \frac{\left[\sigma_{m\ell}^{(2)}\right]^2}{|\sigma_{m\ell}^{(1)}|} \frac{1}{1 - |\varepsilon| \left|\frac{\sigma_{m\ell}^{(2)}}{\sigma_{m\ell}^{(1)}}\right|} \quad (m, \ell = \rho, \gamma, \varphi) . \qquad (5.20)$$

Сравнение приближенных числовых результатов с точными, показывает, что при $\nu = 0,3$, $b/a \leq 1,7$ погрешность при вычислении коэффициентов концентрации напряжений не превышает 3 % для $K_\gamma^{(2)}$ и 1,5 % для $K_\varphi^{(2)}$.

Это указывает на достаточно хорошую сходимость метода "возмущения формы границы" в случае всестороннего растяжения-сжатия среды с неканоническими полостями и включениями.

ГЛАВА П. УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ, ПРИ КРУЧЕНИИ

§ 6. Некоторые основные уравнения и соотношения теории кручения трансверсально изотропных тел вращения

Рассмотрим упругое однородное трансверсально изотропное тело вращения, сферические координаты произвольной точки которого будут r, θ, α (r - расстояние от начала координат, θ - угол, образуемый радиус-вектором с осью OZ, α - угол долготы). При этом ось анизотропии совпадает с осью r основной системы. Так как при кручении такого тела составляющие перемещений $U_r = U_\theta = 0$, $U_\alpha \neq 0$, то компоненты деформации, отнесенные к некоторой линейной величине r_0, запишутся в виде [37]

$$
\begin{aligned}
&e_{rr} = e_{\theta\theta} = e_{\alpha\alpha} = e_{r\theta} = 0\,,\\
&e_{\theta\alpha} = \frac{1}{r_0 r}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial\theta} - U_\alpha \operatorname{ctg}\theta\right), \\
&e_{r\alpha} = \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial r} - \frac{1}{r}U_\alpha\right).
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Ненулевые компоненты напряжений обобщенного закона Гука в данном случае выражаются уравнениями

$$
\sigma_{\theta\alpha} = G_1 e_{\theta\alpha}\,, \quad \sigma_{r\alpha} = G_2 e_{r\alpha}\,, \tag{6.2}
$$

где G_1, G_2 - модули сдвига в плоскостях $(\theta\alpha)$ и $(r\alpha)$.

Напряжения (6.2), в случае отсутствия массовых сил, должны удовлетворять уравнению равновесия

$$
\frac{\partial\sigma_{r\alpha}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\alpha}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\left(3\sigma_{r\alpha} + 2\operatorname{ctg}\theta\,\sigma_{\theta\alpha}\right) = 0 \tag{6.3}
$$

и соответствующим краевым условиям на граничных поверхностях.

Перемещение $U_\alpha(r,\theta)$, следуя работам [85,113], будем искать в виде

$$u_{\alpha} = -\frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \theta} . \tag{6.4}$$

Потенциал $\Psi_n(r,\theta)$ выбирается в форме

$$\Psi_n(r,\theta) = A_n r^{\lambda_n + 0,5} P_n(\mu) . \tag{6.5}$$

Здесь A_n - произвольные постоянные подлежащие определению из граничных условий, $P_n(\mu)$ - полиномы Лежандра.

Если выражение (6.5) подставить в (6.4), то получим

$$u_{\alpha} = -\frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\lambda_n - 0,5} \frac{dP_n(\mu)}{d\theta} . \tag{6.6}$$

Поэтому согласно (6.2),(6.6) напряжения $\sigma_{\theta\alpha}$ и $\sigma_{r\alpha}$ имеют вид

$$\sigma_{\theta\alpha} = \frac{G_1}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\lambda_n - 1,5} \left[n(n+1) P_n(\mu) + 2 \operatorname{ctg}\theta \frac{dP_n(\mu)}{d\theta} \right],$$

$$\sigma_{r\alpha} = -\frac{G_2}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\lambda_n - 1,5) r^{\lambda_n - 1,5} \frac{dP_n(\mu)}{d\theta} . \tag{6.7}$$

Для удовлетворения уравнению равновесия (6.3) необходимо чтобы параметр λ_n, входящий в формулы (6.6),(6.7), был решением алгебраического уравнения

$$\lambda_n^2 - \left[(n-1)(n+2) \frac{G_1}{G_2} + \frac{9}{4} \right] = 0 . \tag{6.8}$$

В частности, для изотропного случая $(G_1 = G_2)$ имеем $\lambda_n = \pm (n + 0,5)$. Перемещение и напряжения совпадают с соответствующими [35,41], полученными на основе решения в форме П.Ф.Папковича - Г.Нейбера с точностью до постоянного множителя.

Предположим, что требуется исследовать напряженное состояние рассматриваемого трансверсально изотропного тела ограниченного изнутри поверхностью вращения S, уравнение которой имеет вид (4.2). Тогда граничные условия при заданных на поверхности S перемещениях $\overset{\circ}{u}_\varphi$ или напряжениях $\overset{\circ}{\sigma}_{\rho\varphi}$ имеют вид

$$(u_\varphi + \hat{u}_\varphi)_S = \overset{\circ}{u}_\varphi, \quad (\sigma_{\rho\varphi} + \hat{\sigma}_{\rho\varphi})_S = \overset{\circ}{\sigma}_{\rho\varphi}. \tag{6.9}$$

Ввиду сложности поверхности S, решение поставленной задачи будем искать методом возмущения в виде рядов (4.8), составляющие которых в произвольном приближении определяются из рекуррентных соотношений

$$u_\varphi = \sum_{j=0}^{n} \Lambda_1^{(n-j)} u_\alpha^{(j)}, \tag{6.10}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\rho\varphi}^{(n)} \\ \sigma_{\gamma\varphi}^{(n)} \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^{n} \left[\Lambda_5^{(n-j)} \begin{Bmatrix} \sigma_{r\alpha}^{(j)} \\ \sigma_{\theta\alpha}^{(j)} \end{Bmatrix} \pm \Lambda_6^{(n-j)} \begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\alpha}^{(j)} \\ \sigma_{r\alpha}^{(j)} \end{Bmatrix} \right].$$

Выражения для $u_\alpha^{(j)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{\theta\alpha}^{(j)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{r\alpha}^{(j)}(\rho,\gamma)$, входящие в правые части соотношений (6.10), записываются на основе (6.6), (6.7) в результате формальной замены r, θ на ρ, γ, т.е.

$$u_\alpha^{(j)}(\rho,\gamma) = -\frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(j)} \rho^{\lambda_n - 0,5} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma},$$

$$\sigma_{\theta\alpha}^{(j)}(\rho,\gamma) = \frac{G_1}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(j)} \rho^{\lambda_n - 1,5} \left[n(n+1) P_n(\mu) + 2\operatorname{ctg}\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \right], \tag{6.11}$$

$$\sigma_{r\alpha}^{(j)}(\rho,\gamma) = -\frac{G_2}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(j)} (\lambda_n - 1,5) \rho^{\lambda_n - 1,5} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}.$$

Заметим, что для каждого конкретного значения n компоненты $\sigma_{\theta\alpha}^{(j)}(\rho,\gamma)$ могут быть представлены разложениями только по полиномам $P_n(\mu)$. Для этого необходимо воспользоваться формулой

$$\operatorname{ctg}\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} = -n P_n(\mu) - (2n-3) P_{n-2}(\mu) - (2n-7) P_{n-4}(\mu) -$$
$$- (2n-11) P_{n-6}(\mu) - P'_{n-7}(\mu) , \tag{6.12}$$

которая следует из рекуррентных соотношений (3.7), где штрихом обозначена производная по μ.

Дифференциальные операторы $\Lambda_1^{(n)}$, $\Lambda_5^{(n)}$, $\Lambda_6^{(n)}$, входящие в выражения (6.10), имеют вид (4.15),(4,16).

§ 7. Кручение изотропного тела вращения с жестким коническим включением

Рассмотрим задачу о распределении напряжений, возникающих при кручении упругого изотропного тела вращения с впаянным жестким коническим включением (рис.2).

Уравнение контура произвольного меридионального сечения поверхности включения, согласно (4.2), имеет вид

$$Z = \cos\gamma + \frac{1}{4}\cos 2\gamma , \quad R = \sin\gamma - \frac{1}{4}\sin 2\gamma . \tag{7.1}$$

В этом случае компоненты основного напряженного состояния определяются по формулам (5.4), в которых следует положить $K=2$, $\varepsilon = 1/4$. Граничные условия, согласно (6.9),(6.10), в произвольном приближении такие

$$u_\alpha^{(0)}\Big|_{\rho=1} = -\hat{u}_\varphi^{(0)}\Big|_{\rho=1} ,$$
$$u_\alpha^{(n)}\Big|_{\rho=1} = -\Big[\hat{u}_\varphi^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} \Lambda_1^{(n-j)} u_\alpha^{(j)}\Big]_{\rho=1} \quad (n \geqslant 1) , \tag{7.2}$$

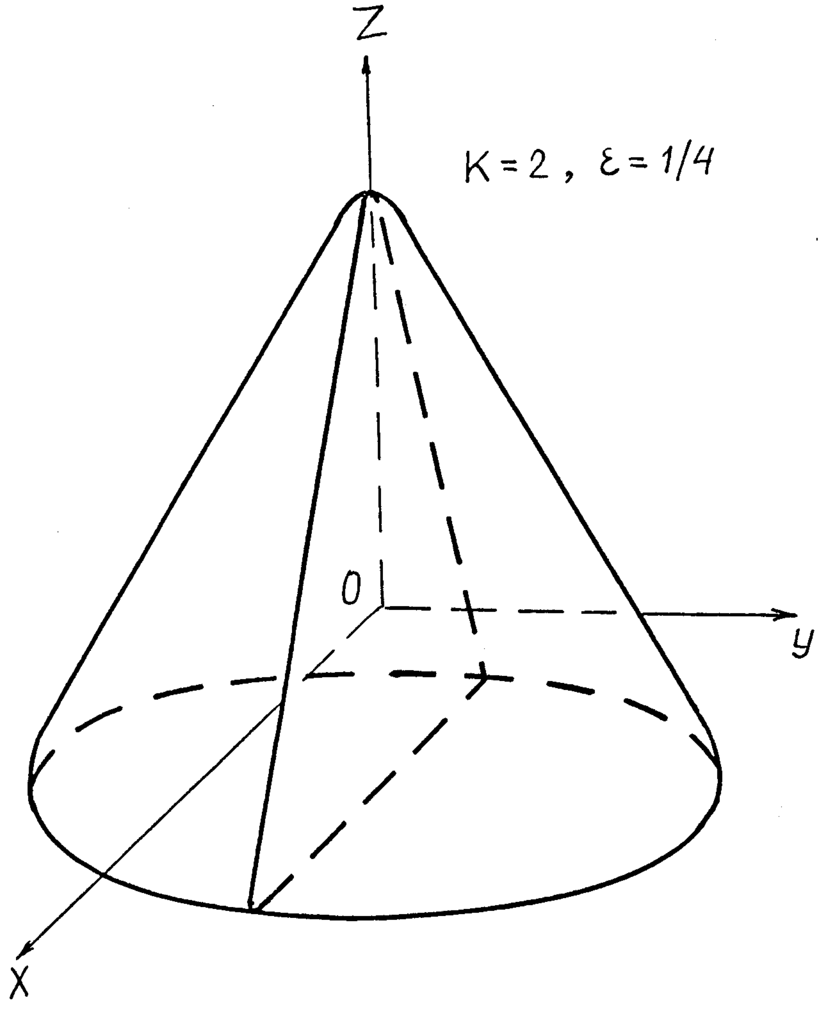


Рис.2

где компоненты $\hat{u}_\varphi^{(n)}$ определяются из (5.5) при $K=2$, $\varepsilon=1/4$.

Учитывая вид $u_\alpha^{(0)}(\rho,\gamma)$, из (6.II),(7.2) находим

$$A_2^{(0)} = \frac{\rho' r_0^3}{3G}\,. \tag{7.3}$$

Поэтому в нулевом приближении (сферическое включение) имеют место формулы

$$\begin{gathered} u_\varphi^{*(0)} = \frac{\rho' r_0}{3G}\left(\rho^2 - \rho^{-3}\right)\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}\,, \\ \sigma_{\gamma\varphi}^{*(0)} = \frac{2\rho' r_0}{3}\left(\rho - \rho^{-4}\right)\left(1 - P_2(\mu)\right), \\ \sigma_{\rho\varphi}^{*(0)} = \frac{\rho' r_0}{3}\left(\rho + 4\rho^{-4}\right)\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}\,. \end{gathered} \tag{7.4}$$

На основе соотношений (6.I0) в первом приближении получим выражения

$$\begin{gathered} u_\varphi^{(1)} + \hat{u}_\varphi^{(1)} = u_\alpha^{(1)}(\rho,\gamma) - \frac{2}{3}\rho' r_0^2 \rho^{-6}\left(\frac{3}{7}\frac{dP_1(\mu)}{d\gamma} + \frac{1}{3}\frac{dP_3(\mu)}{d\gamma} - \right. \\ \left. - \frac{16}{21}\frac{dP_5(\mu)}{d\gamma}\right) + \frac{\rho' r_0^2}{3G}\rho^{-1}\left[2\cos 3\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} - \sin 3\gamma\left(1 - 4P_2(\mu)\right)\right], \\ \sigma_{\gamma\varphi}^{(1)} + \hat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(1)} = \sigma_{\theta\alpha}^{(1)}(\rho,\gamma) - \frac{2}{3}\rho' r_0 \rho^{-7}\left[4\cos 3\gamma\left(P_2(\mu) - 1\right) + 7\sin 3\gamma \times \right. \\ \left. \times \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}\right] + \frac{\rho' r_0}{3}\rho^{-2}\left[2\cos 3\gamma\left(1 - P_2(\mu)\right) - \sin 3\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}\right], \\ \sigma_{\rho\varphi}^{(1)} + \hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\alpha}^{(1)}(\rho,\gamma) - \frac{2}{3}\rho' r_0 \rho^{-7}\left\{8\cos 3\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} - \sin 3\gamma\left[3\left(P_2(\mu) - 1\right) \right.\right. \\ \left.\left. - 2\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}\right]\right\} + \frac{\rho' r_0}{3}\rho^{-2}\left[\cos 3\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} + \sin 3\gamma\left(5 - 2P_2(\mu)\right)\right]. \end{gathered} \tag{7.5}$$

десь $u_\alpha^{(1)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{\theta\alpha}^{(1)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{r\alpha}^{(1)}(\rho,\gamma)$ определяются о формулам (6.II) при $j=1$, $G_1=G_2=G$, $\lambda_n=-(n+0{,}5)$ в которых роизвольные постоянные $A_n^{(j)}$ $(j=1,\ n=1,3,5)$ находятся из граничных условий (7.2), и имеют вид

$$A_1^{(1)}=-\frac{9}{7}\frac{P'r_0^3}{G}, \quad A_3^{(1)}=-\frac{2}{9}\frac{P'r_0^3}{G}, \quad A_5^{(1)}=\frac{32}{63}\frac{P'r_0^3}{G}. \tag{7.6}$$

Во втором приближении получим

$$\begin{aligned} u_\varphi^{(2)}+\hat{u}_\varphi^{(2)} &= u_\alpha^{(2)}(\rho,\gamma)+\frac{1}{r_0}\sum_{n=1,3,5}A_n^{(1)}\rho^{-n-4}\Big[(n+1)\cos 3\gamma\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}-\\ &-\sin 3\gamma\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}\Big]-\frac{1}{4r_0}A_2^{(0)}\rho^{-9}\Big\{\big[12(1+\cos 6\gamma)-\\ &-7(1-\cos 6\gamma)\big]\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}+8\sin 6\gamma\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}\Big\}+\\ &+\frac{1}{r_0^2}A_2^{(0)}\rho^{-4}\Big(\cos 6\gamma\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-0{,}5\sin 6\gamma\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}\Big). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Используем разложения произведений тригонометрических функций на производные от полиномов Лежандра вида

$$\cos 6\gamma\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}, \quad \sin 6\gamma\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2},$$

$$\cos 3\gamma\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}, \quad \sin 3\gamma\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2} \quad (n=1,3,5)$$

в ряды, содержащие только их первые производные (табл. 5,6), например,

$$\begin{aligned} \cos 6\gamma\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} &= \frac{31}{231}\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-\frac{1836}{5005}\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}-\frac{128}{1155}\frac{dP_6(\mu)}{d\gamma}+\\ &+\frac{512}{2145}\frac{dP_8(\mu)}{d\gamma}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Удовлетворив краевые условия (7.2) при $n=2$, приравняем коэффициенты при одинаковых производных от полиномов Лежандра. Из системы алгебраических уравнений находим

$$A_2^{(2)}=0,6333\,\frac{p' r_0^3}{G}, \quad A_4^{(2)}=-1,1484\,\frac{p' r_0^3}{G}, \quad A_6^{(2)}=-0,5387\,\frac{p' r_0^3}{G}, \tag{7.9}$$

$$A_8^{(2)}=1,4918\,\frac{p' r_0^3}{G}.$$

Компоненты напряжений во втором приближении имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma\varphi}^{(2)}+\hat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(2)} &= \sigma_{\theta\alpha}^{(2)}(\rho,\gamma)-\frac{G}{r_0^2}\sum_{n=1,3,5} A_n^{(1)}\rho^{-n-5}\Big\{(n+2)\cos 3\gamma\Big[n(n+1)P_n(\mu)+\\
&+2\operatorname{ctg}\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big]+\sin 3\gamma\Big[n(n+1)\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}-\frac{2}{\sin^2\gamma}\times\\
&\times\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}+2\operatorname{ctg}\gamma\,\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}\Big]\Big\}-\frac{3G}{r_0^2}\sin 3\gamma\sum_{n=1,3,5}A_n^{(1)}\times\\
&\times(n+2)\rho^{-n-5}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}-\frac{p' r_0}{6}\rho^{-10}\Big\{5(1+\cos 6\gamma)\times\\
&\times\big(P_2(\mu)-1\big)+\frac{1}{4}(1-\cos 6\gamma)\Big[\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}-\\
&-4\big(P_2(\mu)-1\big)\Big]+2{,}5\sin 6\gamma\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-2{,}25(1-\cos 6\gamma)\times\\
&\times\big(P_2(\mu)-1\big)\Big\}-0{,}5\,p' r_0\,\rho^{-10}\Big[3\sin 6\gamma\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}+\\
&+(1-\cos 6\gamma)\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}\Big]+p' r_0\,\rho^{-5}\Big\{\frac{1}{3}(1-\cos 6\gamma)\times\\
&\times\Big[\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}-4\big(1-P_2(\mu)\big)\Big]-\sin 6\gamma\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}\Big\},
\end{aligned}\tag{7.10}$$

$$\sigma^{(2)}_{\rho\varphi} + \hat{\sigma}^{(2)}_{\rho\varphi} = \sigma^{(2)}_{r\alpha}(\rho,\gamma) - \frac{G}{r_0^2}\sum_{n=1,3,5} A^{(1)}_n (n+2)\,\rho^{-n-5}\left[\sin 3\gamma\,\frac{d^2 P_n(\mu)}{d\gamma^2} + \right.$$

$$\left. + (n+2)\cos 3\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\right] + \frac{3G}{r_0^2}\sin 3\gamma \times$$

$$\times \sum_{n=1,3,5} A^{(1)}_n \rho^{-n-5}\left[n(n+1)P_n(\mu) + 2\operatorname{ctg}\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\right] -$$

$$-\frac{5}{6}p' r_0 \rho^{-10}\left[4\cos 6\gamma\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} + \sin 6\gamma\,\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2} + \right.$$

$$\left. + 0{,}9\sin 6\gamma\,(1 - P_2(\mu))\right] + 2p' r_0 \rho^{-5}\sin 6\gamma\,(1 - P_2(\mu)),$$

где $\sigma^{(2)}_{\theta\alpha}(\rho,\gamma)$, $\sigma^{(2)}_{r\alpha}(\rho,\gamma)$ определяются формулами (6.II) при $j=2$, $G_1 = G_2 = G$ и $\lambda_n = -(n+0{,}5)$. В частности, при $\gamma = 2\pi/3$ получим

$$\sigma^{(2)}_{\gamma\varphi} + \hat{\sigma}^{(2)}_{\gamma\varphi} = \frac{G}{r_0^2}\sum_{n=2,4,6,8} A^{(2)}_n \rho^{-n-2}\left[n(n+1)P_n(\mu) + 2\operatorname{ctg}\gamma \times\right.$$

$$\left.\times\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\right]_{\gamma=2\pi/3} + 2{,}5\,p' r_0\left(2{,}5\,\rho^{-8} + 7\,\rho^{-10}\right),$$

$$\sigma^{(2)}_{\rho\varphi} + \hat{\sigma}^{(2)}_{\rho\varphi} = \frac{G}{r_0^2}\sum_{n=2,4,6,8} A^{(2)}_n (n+2)\rho^{-n-2}\left.\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\right|_{\gamma=2\pi/3} - \tag{7.II}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}p' r_0\left(\frac{81}{7}\rho^{-6} + \frac{25}{12}\rho^{-8} + \frac{425}{12}\rho^{-10}\right).$$

Из приведенных двух выражений определяющим является напряжение $\sigma^{*(2)}_{\rho\varphi}/p' r_0$. На поверхности конического включения ($\rho = 1$, $\varepsilon = 1/4$), в соответствии с обозначениями (5.7), имеет место формула

$$\frac{\sigma_{\rho\varphi}^{*(2)}}{p'r_0} \approx -0{,}6071\frac{dP_1(\mu)}{d\gamma} + 1{,}8070\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} - 0{,}1008\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma} + + 0{,}2540\frac{dP_5(\mu)}{d\gamma} - 0{,}0154\frac{dP_6(\mu)}{d\gamma} + 0{,}0746\frac{dP_8(\mu)}{d\gamma}. \tag{7.12}$$

Таблица 10

γ	$\frac{\sigma_{\rho\varphi}^{*(0)}}{p'r_0}$	$\frac{\sigma_{\rho\varphi}^{*(2)}}{p'r_0}$
0	0	0
$\pi/12$	- 1,250	-2,036
$\pi/6$	- 2,165	-2,191
$\pi/4$	- 2,500	- 1,930
$\pi/3$	- 2,165	- 1,655
$5\pi/12$	- 1,250	- 0,827
$\pi/2$	0	0,131
$7\pi/12$	1,250	1,856
$2\pi/3$	2,165	3,686
$3\pi/4$	2,500	3,294
$5\pi/6$	2,165	1,697
$11\pi/12$	1,250	0,817
π	0	0

Таблица 11

ρ	$\frac{\sigma_{\rho\varphi}^{*(0)}}{p'r_0}$	$\frac{\sigma_{\rho\varphi}^{*(2)}}{p'r_0}$	$\frac{\hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{*(2)}}{p'r_0}$
1,00	2,165	3,686	0,541
1,10	1,659	2,673	0,566
1,25	1,251	1,884	0,611
1,50	0,992	1,341	0,698
2,00	0,974	1,121	0,893
3,00	1,320	1,365	1,311

Числовые значения в табл.10 характеризуют распределение напряжений $\sigma_{\rho\varphi}^{*(0)}/p'r_0$ на поверхности сферического и $\sigma_{\rho\varphi}^{*(2)}/p'r_0$ – конического жестких включений в случае кручения изотропного цилиндрического вала. На рис. 3 показано изменение этих напряжений соответственно штриховой и сплошной линиями.

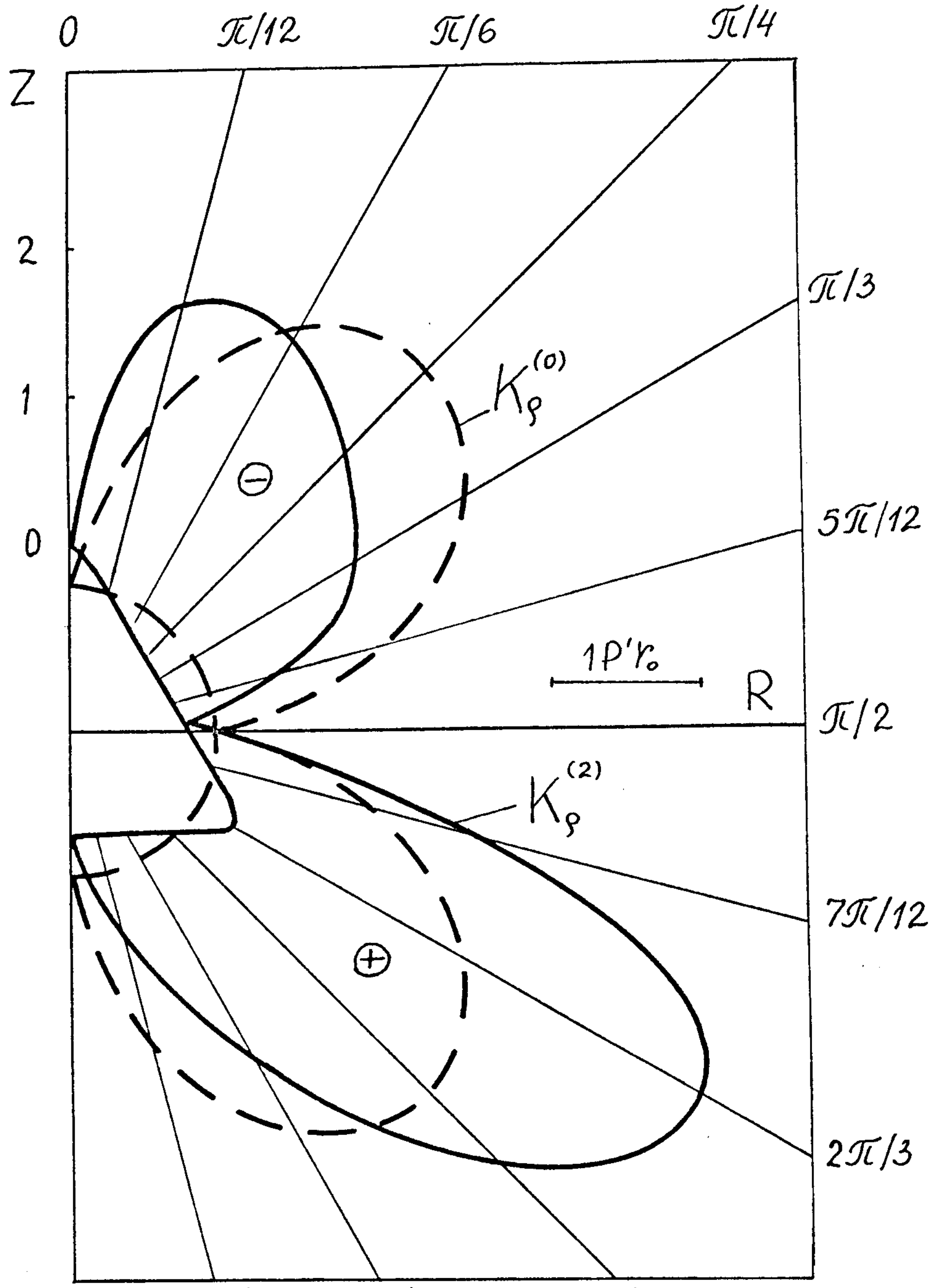

0
π/12
π/6
π/4
Z
2
1
0
π/3
$K_\rho^{(0)}$
5π/12
1P'r₀
R
π/2
$K_\rho^{(2)}$
7π/12
2π/3
π
11π/12
5π/6
3π/4

Рис.3

Представления напряжений $\sigma^{*(2)}_{\rho\varphi}/p'r_0$ и $\hat{\sigma}^{*(2)}_{\rho\varphi}/p'r_0$ по степеням при $\gamma=2\pi/3$ имеют вид

$$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\varphi}}{p'r_0} \approx 0{,}4330\,\rho + \frac{0{,}1083}{\rho^2} + \frac{0{,}8351}{\rho^3} + \frac{1{,}9377}{\rho^4} + \frac{0{,}0902}{\rho^5} - \tag{7.13}$$

$$- \frac{0{,}0436}{\rho^6} - \frac{0{,}0181}{\rho^7} + \frac{0{,}0212}{\rho^8} + \frac{0{,}3221}{\rho^{10}}\,,$$

$$\frac{\hat{\sigma}^{*(2)}_{\rho\varphi}}{p'r_0} \approx 0{,}4330\,\rho + \frac{0{,}1083}{\rho^2}\,.$$

Изменение коэффициентов концентрации напряжений

$$K^{(0)}_{\rho} = \sigma^{*(0)}_{\rho\varphi}/p'r_0\,, \quad K^{(2)}_{\rho} = \sigma^{*(2)}_{\rho\varphi}/p'r_0$$

при $\gamma=2\pi/3,\ \varepsilon=1/4$ имеют ярко выраженный локальный характер. Это видно из табл.II и рис. 4, где штриховая линия соответствует основному напряженному состоянию. В частности, напряжение $K^{(2)}_{\rho}$ при $\rho=2$ отличается от основного напряженного состояния не более, чем на 25,5 %, а при $\rho=3$ такое отклонение не превышает 4,I %. Это свидетельствует о том, что внешняя поверхность цилиндрического вала, находящаяся на расстоянии не менее двух радиусов от поверхности включения, не существенно влияет на напряженное состояние около жесткого конического включения с координатной поверхностью $\rho=1$.

Отклонение коэффициента концентрации $K^{(2)}_{\rho}$ при $\gamma=2\pi/3$ на поверхности жесткого конического включения от значения $K^{(0)}_{\rho}$ при $\gamma=3\pi/4$ на сферическом жестком включении составляет 32,2 % (за I00 % принято значение $K^{(2)}_{\rho}$).

§ 8. Кручение изотропного тела вращения с жестким биконическим или цилиндрическим включением

Исследуем напряженное состояние при кручении изотропного тела вращения с включением (рис.5), поверхность которого условно бу-

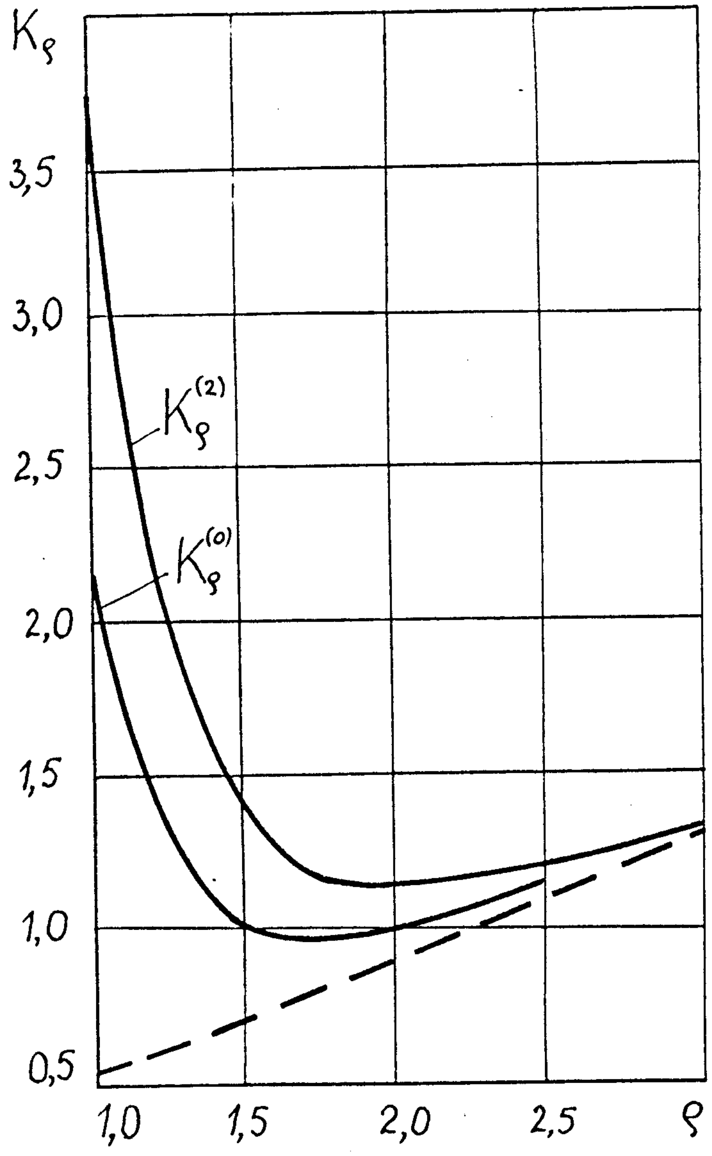


Рис.4

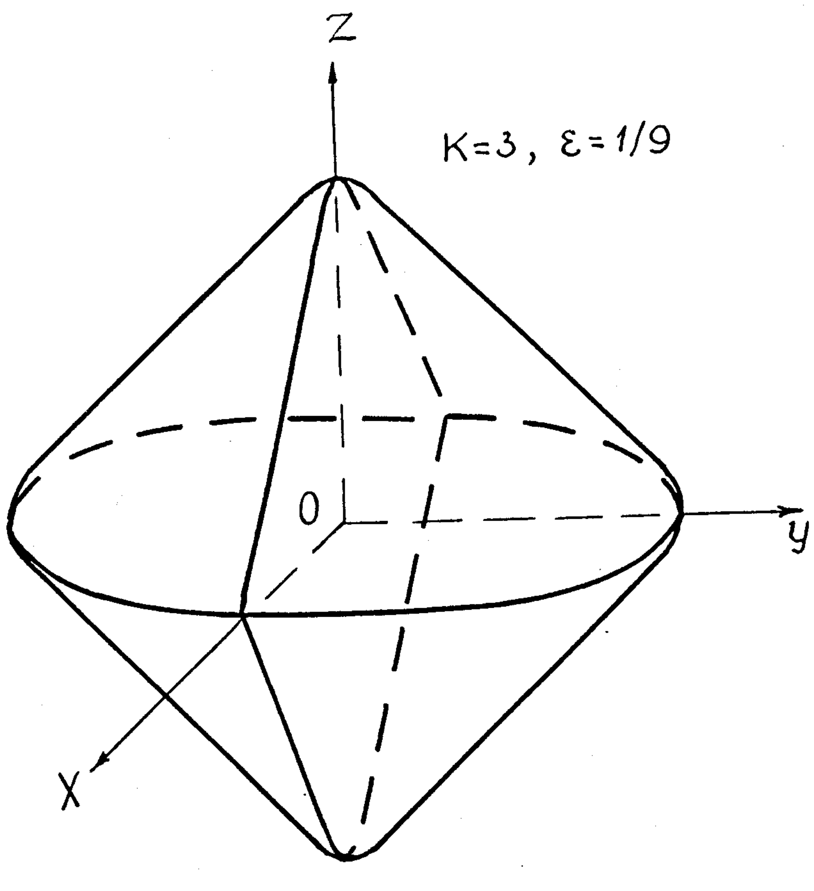


Рис.5

дем называть биконической. Она образована вращением квадрата с округленными углами $(K=3,\ \varepsilon=1/9)$ вокруг своей диагонали, как оси симметрии. Одновременно будем рассматривать изотропное тело с цилиндрическим включением (рис.6), образованного вращением того же квадрата $(K=3,\ \varepsilon=-1/9)$, повернутого на угол $\pi/4$, около его другой оси симметрии, проходящей через середину стороны. Контуры меридионального сечения этих граничных поверхностей описываются, согласно (4.2), уравнениями

$$Z=\cos\gamma+\varepsilon\cos 3\gamma\,,\quad R=\sin\gamma-\varepsilon\sin 3\gamma\,. \tag{8.1}$$

Краевые условия в произвольном приближении имеют вид (7.2). Напряжения и перемещение, соответствующие основному напряженному состоянию, определяются по формулам (5.4), (5.5) при $K=3$, $\varepsilon=\pm 1/9$. В нулевом приближении, соответствующем точному решению задачи о напряженном состоянии изотропного тела с жестким сферическим включением, справедливы формулы (7.3), (7.4).

Перемещения, найденные по формулам (6.10), в первом и втором приближениях имеют вид

$$u_\varphi^{(1)}+\hat{u}_\varphi^{(1)}=\frac{A_2^{(0)}}{r_0}\Big[\rho^{-7}\Big(3\cos 4\gamma\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}+\sin 4\gamma\,\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}\Big)+$$
$$+\rho^{-2}\Big(2\cos 4\gamma\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-\sin 4\gamma\,\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}\Big)\Big]-$$
$$-\frac{1}{r_0}\sum_{n=2,4,6}A_n^{(1)}\rho^{-n-1}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\,, \tag{8.2}$$

$$u_\varphi^{(2)}+\hat{u}_\varphi^{(2)}=-\frac{A_2^{(0)}}{2r_0}\rho^{-n-9}\Big\{\Big[6(1+\cos 8\gamma)-3{,}5(1-\cos 8\gamma)\Big]\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}+$$
$$+4\sin 8\gamma\,\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}\Big\}+\frac{1}{r_0}\Big\{\sum_{n=2,4,6}A_n^{(1)}\rho^{-n-5}\Big[\sin 4\gamma\,\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}+$$

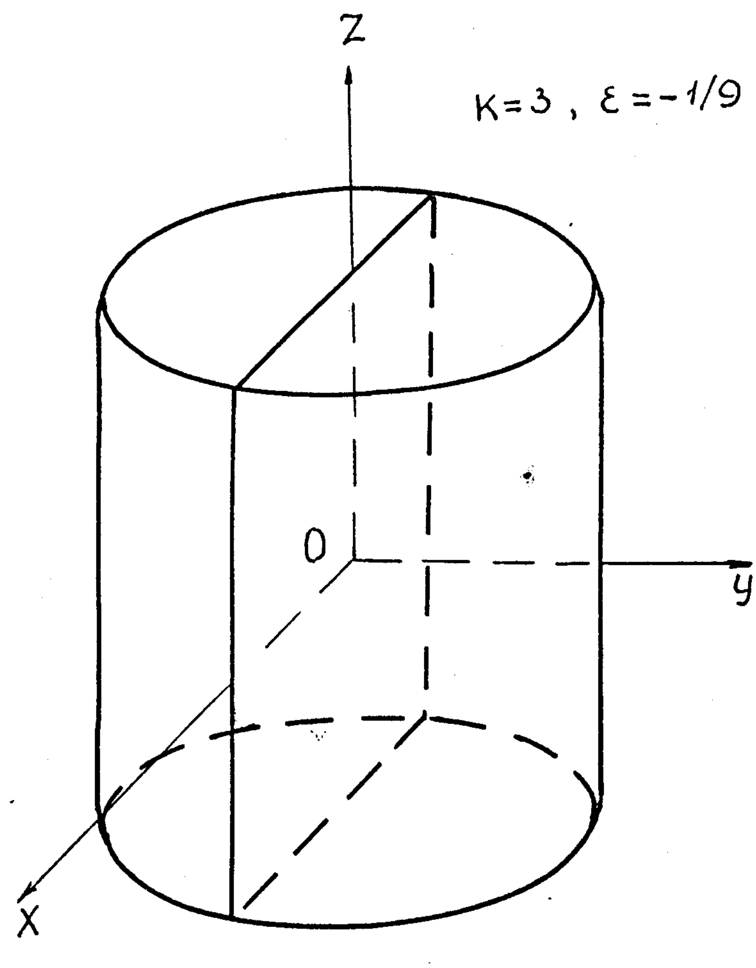


Рис.6

$$+ (n+1)\cos 4\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big] - \sum_{n=2,4,\ldots}^{10} A_n^{(2)} \rho^{-n-1} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \Big\} .$$

Для удовлетворения краевым условиям (7.2) необходимо разложить по производным от полиномов Лежандра выражения

$$\cos 8\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}, \qquad \sin 8\gamma \frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2},$$

$$\cos 4\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}, \qquad \sin 4\gamma \frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2} \quad (n=2,4,6)$$

входящие в правые части (8.2), например (табл.5,6),

$$\cos 4\gamma \frac{dP_6(\mu)}{d\gamma} = \frac{2240}{3003}\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} - \frac{48}{715}\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma} - \frac{107}{2805}\frac{dP_6(\mu)}{d\gamma} - \tag{8.3}$$

$$- \frac{336}{13585}\frac{dP_8(\mu)}{d\gamma} + \frac{8064}{20995}\frac{dP_{10}(\mu)}{d\gamma} .$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых производных от полиномов Лежандра. Из алгебраической системы уравнений получим числовые значения постоянных $A_n^{(1)}$ $(n=2,4,6)$, $A_n^{(2)}$ $(n=2,4,\ldots,10)$

$$A_2^{(1)} = -0{,}8730\frac{P'r_0^3}{G}, \quad A_4^{(1)} = -0{,}2078\frac{P'r_0^3}{G}, \quad A_6^{(1)} = 0{,}4618\frac{P'r_0^3}{G},$$

$$A_2^{(2)} = 0{,}3088\frac{P'r_0^3}{G}, \quad A_4^{(2)} = 0{,}4108\frac{P'r_0^3}{G}, \quad A_6^{(2)} = -1{,}3507\frac{P'r_0^3}{G}, \tag{8.4}$$

$$A_8^{(2)} = -0{,}6259\frac{P'r_0^3}{G}, \quad A_{10}^{(2)} = 1{,}6317\frac{P'r_0^3}{G} .$$

Напряженное состояние изотропного тела с жестким биконическим или цилиндрическим включением в первом приближении характеризуется выражениями

$$\bar{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(1)} + \hat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(1)} = \frac{G}{r_0^2}\sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} \rho^{-n-2}\left[n(n+1)P_n(\mu) + 2\,\mathrm{ctg}\,\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\right] +$$

$$+ \frac{p' r_0}{3}\left\{\rho^{-8}\left[2\cos 4\gamma\left(P_2(\mu)-1\right) + 4{,}5\sin 4\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}\right] -\right.$$

$$\left. - 2\rho^{-3}\left[\cos 4\gamma\left(P_2(\mu)-1\right) + \sin 4\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}\right]\right\}, \qquad (8.5)$$

$$\bar{\sigma}_{\rho\varphi}^{(1)} + \hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(1)} = \frac{G}{r_0^2}\sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} (n+2)\rho^{-n-2}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} + \frac{p' r_0}{3}\left\{\rho^{-8} \times\right.$$

$$\times\left[\sin 4\gamma \frac{d^2 P_2(\mu)}{d\gamma^2} + 4\cos 4\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} + 2\sin 4\gamma\left(1 - P_2(\mu)\right)\right] +$$

$$\left. + \rho^{-3}\left[\cos 4\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} + \left(7 - 4P_2(\mu)\right)\sin 4\gamma\right]\right\}.$$

Во втором приближении компоненты напряжений имеют более громоздкий вид

$$\bar{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(2)} + \hat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(2)} = \sigma_{\theta\alpha}^{(2)}(\rho,\gamma) - \frac{G}{r_0^2}\sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} \rho^{-n-6}\left\{(n+2)\cos 4\gamma \times\right.$$

$$\times\left[n(n+1)P_n(\mu) + 2\,\mathrm{ctg}\,\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\right] + \sin 4\gamma\left[n(n+1) \times\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} - \frac{2}{\sin^2\gamma}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} + 2\,\mathrm{ctg}\,\gamma \frac{d^2 P_n(\mu)}{d\gamma^2}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{4G}{r_0^2}\sin 4\gamma \sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} \rho^{-n-6}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} + \frac{17}{3}p' r_0 \rho^{-12}\left(0{,}5 - 2P_2(\mu)\right) + \qquad (8.6)$$

$$+ p' r_0 \rho^{-12}\left[\frac{1}{3}\cos 8\gamma\left(-28{,}5 + 54P_2(\mu)\right) + 7\sin 8\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}\right] +$$

$$+ p' r_0 \rho^{-7}\left[0{,}5(1 - \cos 8\gamma)\left(P_2(\mu) - 4\right) - 2\sin 8\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}\right],$$

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(2)} + \hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\alpha}^{(2)}(\rho,\gamma) + \frac{G}{r_0^2}\sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} \rho^{-n-6}\Big\{4\sin 4\gamma \times$$

$$\times\Big[n(n+1)P_n(\mu) + 2\operatorname{ctg}\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big] - (n+2)\Big[(n+2)\times$$

$$\times\cos 4\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} + \sin 4\gamma \frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}\Big]\Big\} - \frac{2}{3}p' r_0 \rho^{-12}\times$$

$$\times\Big[4\sin 8\gamma\big(P_2(\mu)-1\big) + 4\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} - 24\cos 8\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} -$$

$$-5\sin 8\gamma \frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}\Big] - p' r_0 \rho^{-7}\Big[0{,}25(1-\cos 8\gamma)\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} -$$

$$-4\sin 8\gamma\big(1-P_2(\mu)\big)\Big].$$

Здесь $\sigma_{\theta\alpha}^{(2)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{r\alpha}^{(2)}(\rho,\gamma)$ определяются из (6.II) при $j=2$, $G_1=G_2=G$, $\lambda_n=-(n+0{,}5)$.

В рассматриваемом случае, определяющим является напряжение $\sigma_{\rho\varphi}^{*(2)}$. В частности, при $\gamma=\pi/4$ имеем

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(1)} + \hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(1)} = \frac{G}{r_0^2}\sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)}(n+2)\rho^{-n-2}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\bigg|_{\gamma=\pi/4} +$$

$$+0{,}5\,p' r_0\left(\rho^{-3}+4\rho^{-8}\right),$$

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(2)} + \hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(2)} = \frac{G}{r_0^2}\Big[\sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)}(n+2)^2\rho^{-n-6}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} + \sum_{n=2,4,\dots}^{10} A_n^{(2)}\times \tag{8.7}$$

$$\times(n+2)\rho^{-n-2}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big]_{\gamma=\pi/4} - 20\,p' r_0 \rho^{-12}.$$

На поверхности $\rho=1$ биконического и цилиндрического включений напряжения $\sigma_{\rho\varphi}^{*(2)}/p' r_0$ (в соответствии с (5.7)) имеют следующую структуру

$$\left.\frac{\sigma_{\rho\varphi}^{*(2)}}{p'r_0}\right|_{\varepsilon=1/9} \approx 1{,}3657\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} - 0{,}2970\,\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma} + 0{,}4823\,\frac{dP_6(\mu)}{d\gamma} -$$

$$-0{,}0055\,\frac{dP_8(\mu)}{d\gamma} + 0{,}0217\,\frac{dP_{10}(\mu)}{d\gamma}\,,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\rho\varphi}^{*(2)}}{p'r_0}\right|_{\varepsilon=-1/9} \approx 2{,}0536\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} + 0{,}3264\,\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma} - 0{,}5438\,\frac{dP_6(\mu)}{d\gamma} - \tag{8.8}$$

$$-0{,}0055\,\frac{dP_8(\mu)}{d\gamma} + 0{,}0217\,\frac{dP_{10}(\mu)}{d\gamma}\,.$$

В разложении по степеням ρ напряжения $\sigma_{\rho\varphi}^{*(2)}/p'r_0$ и $\hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{*(2)}/p'r_0$ при $\gamma=\pi/4$, $\varepsilon=-1/9$ имеют вид

$$\frac{\sigma_{\rho\varphi}^{*(2)}}{p'r_0} \approx -0{,}5000\,\rho - \frac{0{,}0556}{\rho^3} - \frac{2{,}6049}{\rho^4} - \frac{0{,}1056}{\rho^6} - \frac{1{,}2127}{\rho^8} -$$

$$-\frac{0{,}0156}{\rho^{10}} - \frac{0{,}1068}{\rho^{12}}\,, \tag{8.9}$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{*(2)}}{p'r_0} \approx -0{,}5000\,\rho - \frac{0{,}0556}{\rho^3}\,.$$

Изменение напряжений $\sigma_{\rho\varphi}^{*(0)}/p'r_0$ и $\sigma_{\rho\varphi}^{*(2)}/p'r_0$ вдоль четверти меридионального сечения биконического и цилиндрического включений при $0\le\gamma\le\pi/2$ приведено в табл.12 и показано на рис.7,8 (числовые значения для напряжений при $0<\gamma<\pi/2$ в основном отрицательны, а при $\pi/2<\gamma<\pi$ – положительны).Штриховые кривые соответствуют сферическому включению.

На рис.9 показано распределение коэффициентов концентрации $K_\rho^{(0)}=|\sigma_{\rho\varphi}^{*(0)}|/p'r_0$ и $K_\rho^{(2)}=|\sigma_{\rho\varphi}^{*(2)}|/p'r_0$ при $\gamma=\pi/4$, $\varepsilon=-1/9$

Таблица I2

γ	$\varepsilon = 1/9$		$\varepsilon = -1/9$	
	$\frac{\sigma^{*(0)}_{\rho\varphi}}{p' r_0}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\varphi}}{p' r_0}$	$\frac{\sigma^{*(0)}_{\rho\varphi}}{p' r_0}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\varphi}}{p' r_0}$
0	0	0	0	0
$\pi/12$	- I,250	- 2,249	- I,250	- 0,285
$\pi/6$	- 2,I65	- I,564	- 2,I65	- 2,737
$\pi/4$	- 2,500	- 0,823	- 2,500	- 4,60I
$\pi/3$	- 2,I65	- I,879	- 2,I65	- 2,440
$5\pi/12$	- I,250	- 2,520	- I,250	0,063
$\pi/2$	0	0	0	0

Таблица I3

ρ	$\frac{\lvert\sigma^{*(0)}_{\rho\varphi}\rvert}{p' r_0}$	$\frac{\lvert\sigma^{*(2)}_{\rho\varphi}\rvert}{p' r_0}$	$\frac{\lvert\hat{\sigma}^{*(2)}_{\rho\varphi}\rvert}{p' r_0}$
I,00	2,500	4,60I	0,556
I,I0	I,9I6	3,036	0,592
I,25	I,444	I,96I	0,653
I,50	I,I45	I,339	0,766
2,00	I,I25	I,I76	I,007
3,00	I,525	I,535	I,502

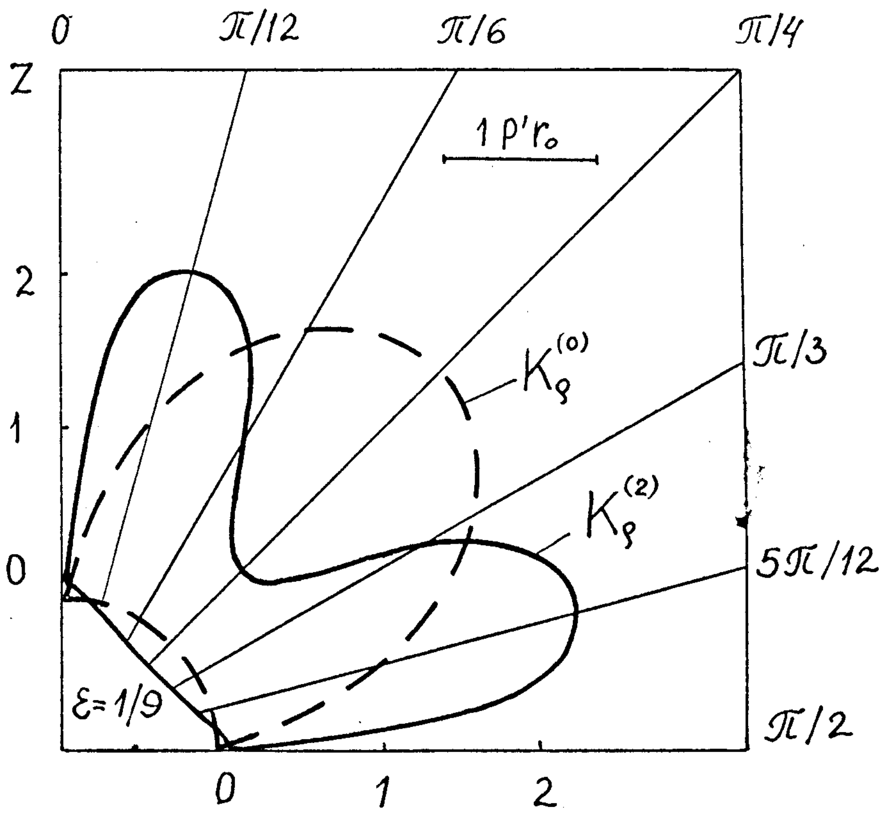


Рис.7

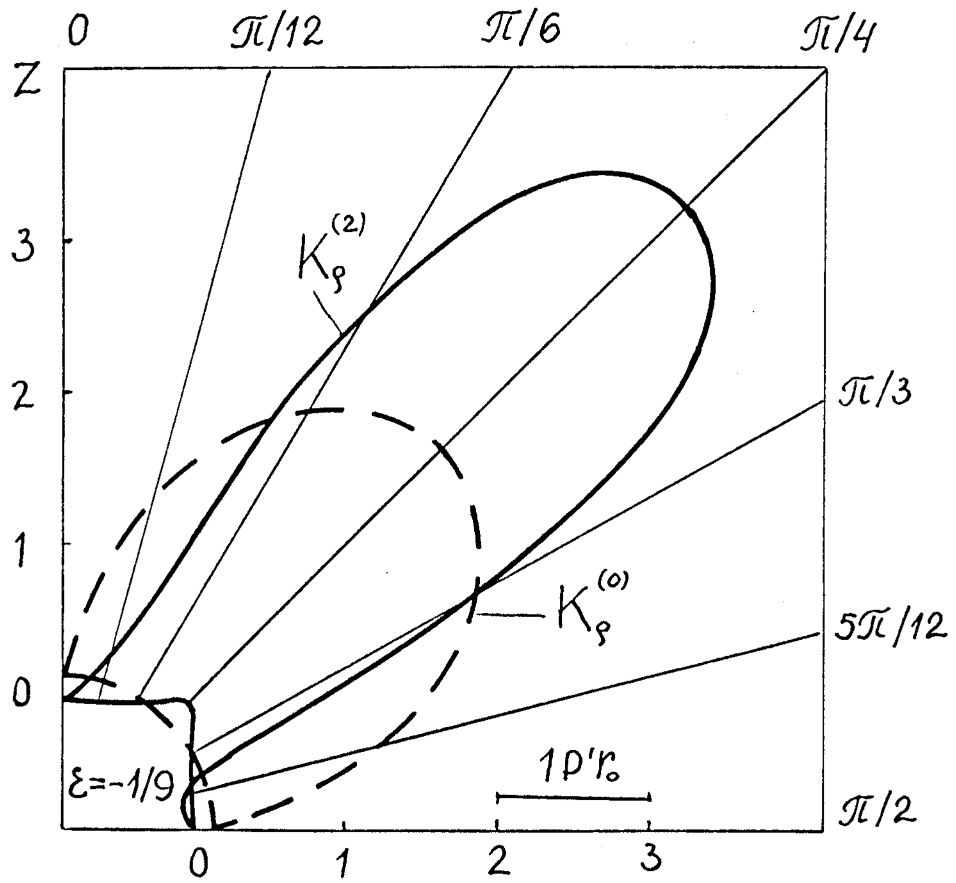


Рис.8

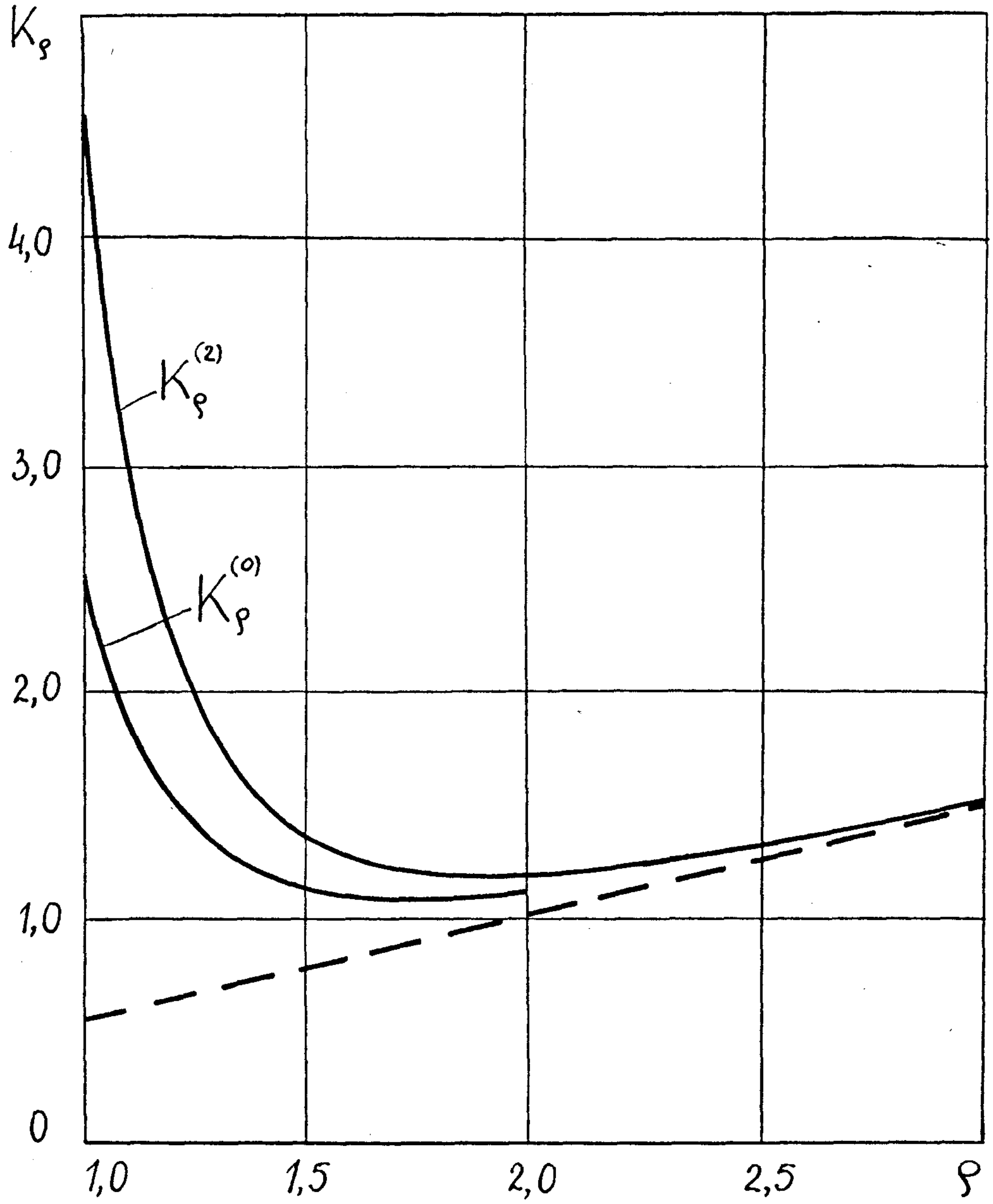


Рис.9

в зависимости от величины расстояния от поверхности включения. Штриховая линия соответствует основному напряженному состоянию $\hat{\sigma}^{*(2)}_{\rho\varphi}/p'r_0$.Их числовые значения приведено в табл.I3.Следовательно, поле напряжений в окрестности жесткого включения носит ярко выраженный локальный характер, так что на расстоянии одного радиуса $(\rho=2)$ отличие относительного напряжения $K^{(2)}_{\rho}$ от соответствующего значения для сплошного цилиндра составляет I6,8%, а на расстоянии двух радиусов $(\rho=3)$ –2,2 %.

Достаточно быструю сходимость метода "возмущения формы границы", применяемого к решению рассматриваемой задачи, подтверждают мажорантные значения коэффициентов концентрации напряжений $|\sigma^{M}_{\rho\varphi}|/p'r_0$ (табл.I4),вычисленные по формуле (5.I9). В табл.I4 приведено,также,процентное содержание третьего приближения $\Delta^{(3)}_{\rho\varphi}=\varepsilon^3\sigma^{(3)}_{\rho\varphi}/p'r_0$ (в предположении, что сумма четырех приближений составляет I00%).

Таблица I4

Параметры	$\dfrac{\lvert\sigma^{*(2)}_{\rho\varphi}\rvert}{p'r_0}$	$\dfrac{\lvert\sigma^{M}_{\rho\varphi}\rvert}{p'r_0}$	$\Delta^{(3)}_{\rho\varphi}$, %
$\gamma=\pi/12$, $\varepsilon=1/9$	2,2490	2,249I	0,0I
$\gamma=5\pi/12$, $\varepsilon=1/9$	2,5203	2,5207	0,0I
$\gamma=\pi/4$, $\varepsilon=-1/9$	4,60II	4,6280	0,5I

Следует иметь в виду, что это напряжение удовлетворяет неравенству [50]

$$|\sigma^{(n+1)}_{me}|\leq\frac{\left[\sigma^{(n)}_{me}\right]^2}{|\sigma^{(n-1)}_{me}|}\quad(m,\ell=\rho,\gamma,\varphi). \tag{8.I0}$$

Отклонение коэффициента концентрации $K^{(2)}_{\rho}$ на поверхности цилиндрического включения от значения $K^{(0)}_{\rho}$ на сферическом включении при $\gamma=\pi/4$ составляет 45,7 %.

§ 9. Кручение трансверсально изотропного тела вращения с замкнутой конической полостью

Допустим, что требуется определить напряженное состояние при кручении трансверсально изотропного тела вращения, ослабленного замкнутой конической полостью (рис.2). При этом, компоненты основного напряженного состояния определяются формулами (5.4) при $K=2$, $\varepsilon=1/4$.

Предположим, что поверхность конической полости $\rho=1$ свободна от напряжений $(\overset{\circ}{\sigma}_{\rho\varphi}=0)$. Тогда краевые условия, согласно (6.9), (6.10), имеют вид

$$\sigma_{r\alpha}^{(0)}\Big|_{\rho=1}=-\hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(0)}\Big|_{\rho=1}, \tag{9.1}$$

$$\sigma_{r\alpha}^{(n)}\Big|_{\rho=1}=-\hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(n)}\Big|_{\rho=1}-\sum_{j=0}^{n-1}\left[\Lambda_5^{(n-j)}\sigma_{r\alpha}^{(j)}+\Lambda_6^{(n-j)}\sigma_{\theta\alpha}^{(j)}\right]_{\rho=1}\quad (n\geqslant 1).$$

Для составляющих тензора напряжений нулевого приближения получим формулы

$$\begin{aligned}\sigma_{\gamma\varphi}^{*(0)}&=\frac{2P'r_0}{3}\left(\rho-\frac{G_1}{G_2}\frac{1}{\lambda_2-1{,}5}\rho^{\lambda_2-1{,}5}\right)\left(1-P_2(\mu)\right),\\ \sigma_{\rho\varphi}^{*(0)}&=\frac{P'r_0}{3}\left(\rho-\rho^{\lambda_2-1{,}5}\right)\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}.\end{aligned}\tag{9.2}$$

Эти компоненты соответствуют точному решению задачи о распределении напряжений в упругом однородном трансверсально изотропном теле со сферической полостью, подверженном кручению.

На основе соотношений (6.10),(6.11),(5.4) в первом приближении имеем

$$\sigma_{\gamma\varphi}^{(1)}+\hat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(1)}=\frac{G_1}{r_0}\sum_{n=1,3,5}A_n^{(1)}\rho^{\lambda_n-1{,}5}\left[n(n+1)P_n(\mu)+2\operatorname{ctg}\gamma\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\right]+$$

$$+ P' r_0 \left\{ \frac{1}{3} \left[2\rho^{-2} - \varkappa (\lambda_2 - 1{,}5) \rho^{\lambda_2 - 4{,}5} \right] \cos 3\gamma \, (1 - P_2(\mu)) - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{1}{3} \rho^{-2} - \left(1 - \frac{\varkappa}{3}\right) \rho^{\lambda_2 - 4{,}5} \right] \sin 3\gamma \, \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} \right\},$$

$$\sigma^{(1)}_{\rho\varphi} + \hat{\sigma}^{(1)}_{\rho\varphi} = - \frac{G_2}{r_0^2} \sum_{n=1,3,5} A^{(1)}_n (\lambda_n - 1{,}5) \rho^{\lambda_n - 1{,}5} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} +$$

$$+ \frac{P' r_0}{3} \left\{ \cos 3\gamma \, \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} \left[\rho^{-2} - (\lambda_2 - 1{,}5) \rho^{\lambda_2 - 4{,}5} \right] - \sin 3\gamma \, \times \right. \tag{9.3}$$

$$\times \left(\rho^{-2} - \rho^{\lambda_2 - 4{,}5} \right) \frac{d^2 P_2(\mu)}{d\gamma^2} + 3 \sin 3\gamma \, (1 - P_2(\mu)) \left(2\rho^{-2} - \right.$$

$$\left. \left. - \varkappa \rho^{\lambda_2 - 4{,}5} \right) \right\},$$

где коэффициенты $A^{(1)}_n \ (n = 1,3,5)$ определяются из граничных условий (9.I) при $n=1$ и имеют вид

$$A^{(1)}_1 = \frac{9(2\lambda_2 - 4\varkappa + 3)}{35(2\lambda_1 - 3)} \frac{P' r_0^3}{G_2}, \qquad A^{(1)}_3 = \frac{2(2\lambda_2 + 21\varkappa - 47)}{45(2\lambda_3 - 3)} \frac{P' r_0^3}{G_2},$$

$$A^{(1)}_5 = - \frac{32(2\lambda_2 + 3\varkappa - 11)}{315(2\lambda_5 - 3)} \frac{P' r_0^3}{G_2} \qquad \left(\varkappa = \frac{4}{2\lambda_2 - 3} \frac{G_1}{G_2} \right). \tag{9.4}$$

Аналогичным образом во втором приближении компоненты напряжений определяются формулами

$$\sigma^{(2)}_{\gamma\varphi} + \hat{\sigma}^{(2)}_{\gamma\varphi} = \sigma^{(2)}_{\theta\alpha}(\rho, \gamma) + \frac{G_1}{r_0^2} \sum_{n=1,3,5} A^{(1)}_n \rho^{\lambda_n - 4{,}5} \left\{ \cos 3\gamma \, \times \right.$$

$$\times (\lambda_n - 1{,}5) \left[n(n+1) P_n(\mu) + 2 \operatorname{ctg} \gamma \, \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \right] - \sin 3\gamma \, \times$$

$$\left. \times \left[n(n+1) \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} - \frac{2}{\sin^2 \gamma} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} + 2 \operatorname{ctg} \gamma \, \frac{d^2 P_n(\mu)}{d\gamma^2} \right] \right\} +$$

$$+\frac{3G_2}{r_0^2}\sin 3\gamma\sum_{n=1,3,5}A_n^{(1)}(\lambda_n-1,5)\,\rho^{\lambda_n-4,5}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}+\frac{p'r_0}{3}\times$$

$$\times\,\text{\ae}\,\rho^{\lambda_2-7,5}\Big\{0,25(1+\cos 6\gamma)(\lambda_2-1,5)(\lambda_2-2,5)\times$$

$$\times\big(P_2(\mu)-1\big)+0,25(1-\cos 6\gamma)\Big[\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}+(\lambda_2-1,5)\times$$

$$\times\big(P_2(\mu)-1\big)\Big]-0,5(\lambda_2-2,5)\sin 6\gamma\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-2,25(1-\cos 6\gamma)\times$$

$$\times\big(P_2(\mu)-1\big)\Big\}+\frac{p'r_0}{2}\rho^{\lambda_2-7,5}\Big[(\lambda_2-0,5)\sin 6\gamma\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-$$

$$-(1-\cos 6\gamma)\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}\Big]+p'r_0\,\rho^{-5}\Big\{\frac{1}{3}(1-\cos 6\gamma)\times$$

$$\times\Big[\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}-4\big(1-P_2(\mu)\big)\Big]-\sin 6\gamma\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}\Big\},$$

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(2)}+\hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(2)}=\sigma_{r\alpha}^{(2)}(\rho,\gamma)+\frac{G_2}{r_0^2}\sum_{n=1,3,5}A_n^{(1)}(\lambda_n-1,5)\,\rho^{\lambda_n-4,5}\times \qquad (9.5)$$

$$\times\Big[\sin 3\gamma\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}-(\lambda_n-1,5)\cos 3\gamma\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big]+$$

$$+\frac{3G_1}{r_0^2}\sin 3\gamma\sum_{n=1,3,5}A_n^{(1)}\rho^{\lambda_n-4,5}\Big[n(n+1)P_n(\mu)+2\,\mathrm{ctg}\,\gamma\times$$

$$\times\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big]-\frac{p'r_0}{6}\rho^{\lambda_2-7,5}\Big[\frac{4\lambda_2^2-12\lambda_2+24\text{\ae}-43}{8}\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}+$$

$$+3\text{\ae}\sin 6\gamma(\lambda_2-0,5)\big(1-P_2(\mu)\big)+\frac{4\lambda_2^2-20\lambda_2-24\text{\ae}+73}{8}\times$$

$$\times \cos 6\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} - (\lambda_2 - 2,5)\sin 6\gamma \frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}\Big] + 2P'r_o\rho^{-5} \times$$

$$\times \sin 6\gamma \left(1 - P_2(\mu)\right).$$

Здесь $\sigma^{(2)}_{\theta\alpha}(\rho,\gamma)$, $\sigma^{(2)}_{r\alpha}(\rho,\gamma)$ определяются выражениями (6.II) при $j=2$. В частности, при $\gamma = 2\pi/3$ получим

$$\sigma^{(2)}_{\gamma\varphi} + \hat{\sigma}^{(2)}_{\gamma\varphi} = \frac{G_1}{r_o^2}\Big\{\sum_{n=1,3,5} A^{(1)}_n (\lambda_n - 1,5)\rho^{\lambda_n - 4,5}\Big[n(n+1)P_n(\mu) +$$

$$+ 2\operatorname{ctg}\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big] + \sum_{n=2,4,6,8} A^{(2)}_n \rho^{\lambda_n - 1,5}\Big[n(n+1)P_n(\mu) +$$

$$+ 2\operatorname{ctg}\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big]\Big\}_{\gamma=2\pi/3} - \frac{3}{16}P'r_o\varkappa(\lambda_2 - 1,5)(\lambda_2 - 2,5)\rho^{\lambda_2 - 7,5},$$

$$\sigma^{(2)}_{\rho\varphi} + \hat{\sigma}^{(2)}_{\rho\varphi} = -\frac{G_2}{r_o^2}\Big[\sum_{n=1,3,5} A^{(1)}_n (\lambda_n - 1,5)^2 \rho^{\lambda_n - 4,5}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} + \tag{9.6}$$

$$+ \sum_{n=2,4,6,8} A^{(2)}_n (\lambda_n - 1,5)\rho^{\lambda_n - 1,5}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big]_{\gamma=2\pi/3} -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{32}P'r_o\rho^{\lambda_2 - 7,5}\left(4\lambda_2^2 - 16\lambda_2 + 15\right).$$

Для удовлетворения краевых условий (9.I) необходимо переразложить произведения вида

$$\sin 6\gamma P_o(\mu), \quad \sin 6\gamma P_2(\mu), \quad \cos 6\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma},$$

$$\sin 6\gamma \frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2},$$

$$\sin 3\gamma \frac{d^2 P_n(\mu)}{d\gamma^2}, \quad \sin 3\gamma \, P_n(\mu), \quad \cos 3\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \quad (n=1,3,5)$$

в ряды, содержащие в качестве слагаемых только первые производные от полиномов Лежандра. Такие разложения приведены в табл.5,6, например

$$\sin 6\gamma \, P_2(\mu) = \frac{58}{693} \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} - \frac{118}{1001} \frac{dP_4(\mu)}{d\gamma} - \frac{128}{3465} \frac{dP_6(\mu)}{d\gamma} - \frac{256}{2145} \frac{dP_8(\mu)}{d\gamma} \tag{9.7}$$

После приравнивания коэффициентов при одинаковых производных от полиномов Лежандра из системы алгебраических уравнений находим коэффициенты

$$A_n^{(2)} = \frac{a_n^{(2)}}{G_2 (\lambda_n - 1{,}5)} p' r_e^3 \quad (n = 2,4,6,8), \tag{9.8}$$

где обозначено

$$a_2^{(2)} = \frac{-524 \lambda_2^2 + 8 \lambda_2 (177 + 18 \varkappa) - 2472 \varkappa + 3959}{5544} + \frac{3(18\lambda_1 - 17)(2\lambda_2 - 4\varkappa + 3)}{980} + \frac{2(2\lambda_3 - 3)(2\lambda_2 + 21\varkappa - 47)}{945} + \frac{256(2\lambda_5 + 9)(2\lambda_2 + 3\varkappa - 11)}{14553} + \frac{G_1}{G_2} \frac{8}{63} \left[\frac{2\lambda_2 + 21\varkappa - 47}{2\lambda_3 - 3} + \frac{128(11 - 2\lambda_2 - 3\varkappa)}{11(2\lambda_5 - 3)} \right],$$

$$a_4^{(2)} = \frac{612 \lambda_2^2 - 4\lambda_2 (233 + 711\varkappa) - 2250\varkappa + 17225}{20020} -$$

$$-\frac{18(2\lambda_1-5)(2\lambda_2-4\varkappa+3)}{1225}+\frac{(18\lambda_3-125)(2\lambda_2+21\varkappa-47)}{11550}-$$

$$-\frac{16(18\lambda_5-143)(2\lambda_2+3\varkappa-11)}{105105}+$$

$$+\frac{G_1}{G_2}\frac{12}{7}\left[\frac{2\lambda_2+21\varkappa-47}{11(2\lambda_3-3)}-\frac{16(2\lambda_2+3\varkappa-11)}{65(2\lambda_5-3)}\right],$$

$$a_6^{(2)}=\frac{8\left[4\lambda_2^2-36\lambda_2(1-2\varkappa)-60\varkappa-175\right]}{3465}-$$

$$-\frac{8(2\lambda_3-9)(2\lambda_2+21\varkappa-47)}{2079}-\frac{8(2\lambda_5-33)(2\lambda_2+3\varkappa-11)}{10395}- \qquad (9.9)$$

$$-\frac{G_1}{G_2}\frac{64}{63}\left[\frac{2\lambda_2+21\varkappa-47}{11(2\lambda_3-3)}+\frac{2(2\lambda_2+3\varkappa-11)}{5(2\lambda_5-3)}\right],$$

$$a_8^{(2)}=\frac{-32\left[4\lambda_2^2-12\lambda_2(3-\varkappa)-30\varkappa+65\right]}{6435}+$$

$$+\frac{64(2\lambda_5-13)(2\lambda_2+3\varkappa-11)}{6435}+\frac{G_1}{G_2}\frac{1024}{2145}\frac{2\lambda_2+3\varkappa-11}{2\lambda_5-3}.$$

В дальнейшем , для определения напряжений, необходимо знать конкретные значения коэффициентов (9.4) и (9.8). Поэтому приведем их значения при некоторых отношениях

$$\frac{G_1}{G_2}=\frac{7}{16} \qquad A_1^{(1)}=0\,, \quad A_3^{(1)}=0{,}3068\frac{p'r_0^3}{G_2}\,, \quad A_5^{(1)}=-0{,}1507\frac{p'r_0^3}{G_2}\,,$$

$$A_2^{(2)}=-0{,}0017\frac{p'r_0^3}{G_2}\,, \quad A_4^{(2)}=-0{,}3433\frac{p'r_0^3}{G_2}\,,$$

$$A_6^{(2)}=0{,}7085\frac{p'r_0^3}{G_2}\,, \quad A_8^{(2)}=-0{,}3748\frac{p'r_0^3}{G_2}\,,$$

$$\frac{G_1}{G_2}=1 \qquad A_1^{(1)}=0, \quad A_3^{(1)}=0,2778\,\frac{p'r_0^3}{G_2}, \quad A_5^{(1)}=-0,1270\,\frac{p'r_0^3}{G_2},$$

$$A_2^{(2)}=-0,1563\,\frac{p'r_0^3}{G_2}, \quad A_4^{(2)}=0,3109\,\frac{p'r_0^3}{G_2},$$

$$A_6^{(2)}=0,6734\,\frac{p'r_0^3}{G_2}, \quad A_8^{(2)}=-0,3730\,\frac{p'r_0^3}{G_2}, \tag{9.10}$$

$$\frac{G_1}{G_2}=\frac{5}{2} \qquad A_1^{(1)}=0, \quad A_3^{(1)}=0,2480\,\frac{p'r_0^3}{G_2}, \quad A_5=-0,1067\,\frac{p'r_0^3}{G_2},$$

$$A_2^{(2)}=-0,5431\,\frac{p'r_0^3}{G_2}, \quad A_4^{(2)}=-0,1921\,\frac{p'r_0^3}{G_2},$$

$$A_6^{(2)}=0,7004\,\frac{p'r_0^3}{G_2}, \quad A_8^{(2)}=-0,4028\,\frac{p'r_0^3}{G_2},$$

$$\frac{G_1}{G_2}=\frac{9}{2} \qquad A_1^{(1)}=0, \quad A_3^{(1)}=0,2322\,\frac{p'r_0^3}{G_2}, \quad A_5^{(1)}=-0,0970\,\frac{p'r_0^3}{G_2},$$

$$A_2^{(2)}=-0,7631\,\frac{p'r_0^3}{G_2}, \quad A_4^{(2)}=-0,3143\,\frac{p'r_0^3}{G_2},$$

$$A_6^{(2)}=0,7426\,\frac{p'r_0^3}{G_2}, \quad A_8^{(2)}=-0,4443\,\frac{p'r_0^3}{G_2}.$$

Напряжения $\sigma_{\gamma\varphi}^{*(0)}/p'r_0$ и $\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}/p'r_0$ на поверхности $\rho=1$ сферической и конической полостей, согласно обозначениям (5.7), определяются формулами

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(0)}}{p'r_0}\right|_{\frac{G_1}{G_2}=1}=\frac{5}{6}\left(1-P_2(\mu)\right), \qquad \left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(0)}}{p'r_0}\right|_{\frac{G_1}{G_2}=\frac{5}{2}}=1-P_2(\mu),$$

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\varphi}}{p'r_0}\right|_{\frac{G_1}{G_2}=1} \approx 0,8805 - 0,4048\,P_1(\mu) - 0,8610\,P_2(\mu) + 0,7222\,P_3(\mu) - $$

$$- 0,2282\,P_4(\mu) - 0,3174\,P_5(\mu) + 0,3579\,P_6(\mu) - 0,1492\,P_8(\mu),$$

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\varphi}}{p'r_0}\right|_{\frac{G_1}{G_2}=\frac{5}{2}} \approx 0,8427 - 0,5512\,P_1(\mu) - 0,9948\,P_2(\mu) + 1,3135\,P_3(\mu) - \qquad (9.11)$$

$$- 0,5086\,P_4(\mu) - 0,7623\,P_5(\mu) + 1,2600\,P_6(\mu) - 0,5993\,P_8(\mu).$$

На рис.10 показано распределение напряжений вдоль половины контура произвольного меридионального сечения конической полости. Для сравнения приведены штриховые кривые, характеризующие изменение напряжений на поверхности сферической полости. Соответствующие числовые значения приведены в табл. 15.

Таблица 15

γ	$G_1/G_2=1$		$G_1/G_2=5/2$	
	$\frac{\sigma^{*(0)}_{\gamma\varphi}}{p'r_0}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\varphi}}{p'r_0}$	$\frac{\sigma^{*(0)}_{\gamma\varphi}}{p'r_0}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\varphi}}{p'r_0}$
0	0	0	0	0
$\pi/12$	0,084	0,094	0,101	0,151
$\pi/6$	0,313	0,209	0,375	0,060
$\pi/4$	0,625	0,366	0,750	0,099
$\pi/3$	0,938	0,634	1,125	0,647
$5\pi/12$	1,166	0,770	1,400	0,467
$\pi/2$	1,250	1,073	1,500	0,592
$7\pi/12$	1,166	1,695	1,400	2,181
$2\pi/3$	0,938	1,728	1,125	2,484
$3\pi/4$	0,625	0,955	0,750	0,770
$5\pi/6$	0,313	0,299	0,375	- 0,179
$11\pi/12$	0,084	0,062	0,101	- 0,063
π	0	0	0	0

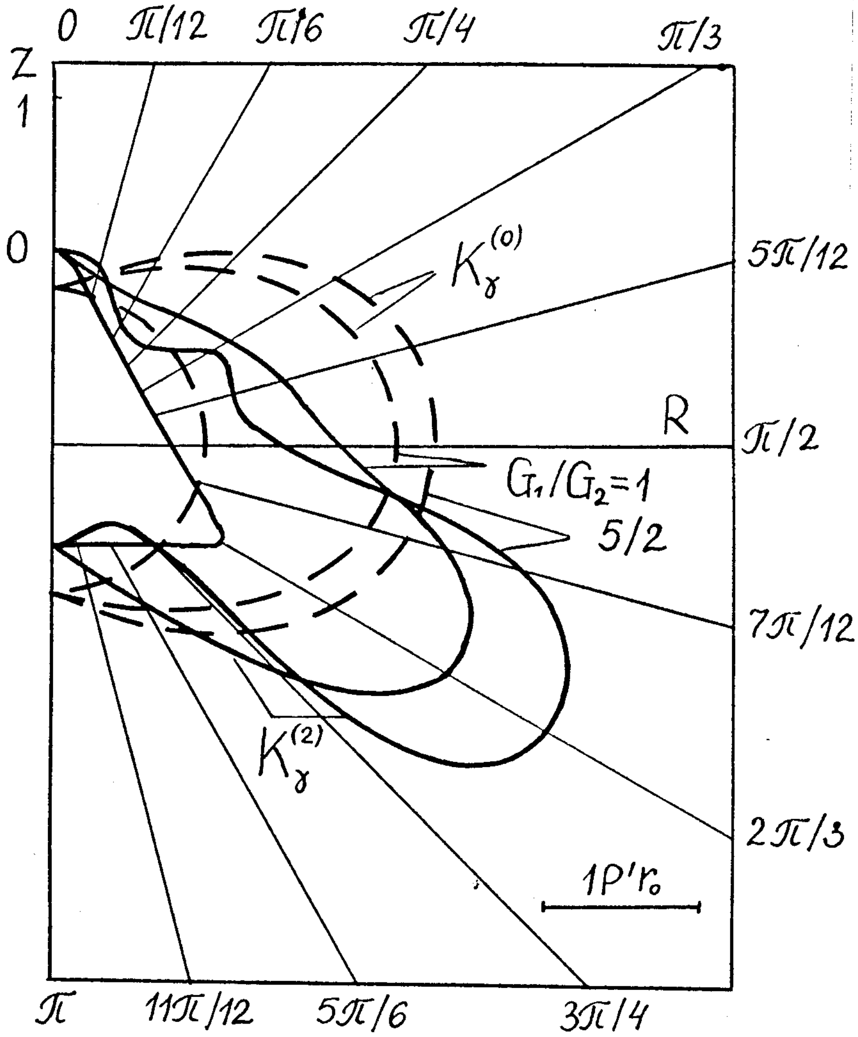

0
π/12
π/6
π/4
π/3
Z
1
0
5π/12
R
π/2
$K_\gamma^{(0)}$
$G_1/G_2=1$
5/2
7π/12
$K_\gamma^{(2)}$
2π/3
1P'r₀
π
11π/12
5π/6
3π/4

Рис.10

Напряжения в цилиндре с замкнутой конической полостью существенным образом зависят от отношения G_1/G_2. Так, например, при $\gamma = 2\pi/3$, $\varepsilon = 1/4$ напряжения $\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}/p'b'$ характеризуются выражениями

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p'b'}\right|_{\frac{G_1}{G_2}=0} \approx 0{,}6928\,\rho + \frac{0{,}1732}{\rho^2},$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p'b'}\right|_{\frac{G_1}{G_2}=\frac{7}{16}} \approx 0{,}6928\,\rho + \frac{0{,}1732}{\rho^2} + \frac{0{,}2612}{\rho^4} + \frac{0{,}1115}{\rho^5} + \frac{0{,}1775}{\rho^6} - \frac{0{,}1012}{\rho^7} - \frac{0{,}0994}{\rho^8} + \frac{0{,}0426}{\rho^{10}},$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p'b'}\right|_{\frac{G_1}{G_2}=1} \approx 0{,}6928\,\rho + \frac{0{,}1732}{\rho^2} + \frac{0{,}1935}{\rho^4} + \frac{0{,}3608}{\rho^5} + \frac{0{,}0758}{\rho^6} - \frac{0{,}0288}{\rho^7} + \frac{0{,}0991}{\rho^8} + \frac{0{,}0296}{\rho^{10}}, \qquad (9.12)$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p'b'}\right|_{\frac{G_1}{G_2}=\frac{5}{2}} \approx 0{,}6928\,\rho + \frac{0{,}1732}{\rho^2} + \frac{0{,}5228}{\rho^5} + \frac{0{,}8053}{\rho^7} - \frac{0{,}3160}{\rho^8} - \frac{1{,}0500}{\rho^{10}} + \frac{0{,}3248}{\rho^{11}} + \frac{1{,}4306}{\rho^{12}} - \frac{0{,}7581}{\rho^{13}} + \frac{0{,}4696}{\rho^{15}},$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p'b'}\right|_{\frac{G_1}{G_2}=\frac{9}{2}} \approx 0{,}6928\,\rho + \frac{0{,}1732}{\rho^2} + \frac{0{,}9657}{\rho^6} + \frac{1{,}3574}{\rho^8} - \frac{0{,}7795}{\rho^9} - \frac{2{,}4972}{\rho^{11}} + \frac{0{,}6820}{\rho^{12}} + \frac{0{,}4962}{\rho^{13}} + \frac{2{,}7302}{\rho^{15}} - \frac{1{,}5908}{\rho^{16}} + \frac{0{,}9321}{\rho^{19}}.$$

Здесь напряжения $\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}/p'b'$ при $G_1/G_2=0$ совпадают с основным напряженным состоянием $\hat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{*(2)}/p'b'$, а при $G_1/G_2=1$ – соответствуют изотропному телу.

Изменение относительных напряжений (коэффициента концентраци

$$K_\gamma^{(2)}=\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p'b'}\right|_{\gamma=2\pi/3} \qquad \left(b'=r_0 R=\frac{5\sqrt{3}}{8}r_0\right) \tag{9.I3}$$

при некоторых отношениях G_1/G_2 и расстояних от поверхности к[...]нической полости видно из табл.I6 и показано на рис.II,I2.

Таблица I6

$$K_\gamma^{(2)}=\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p'b'}\right|_{\gamma=2\pi/3}$$

ρ \ G_1/G_2	0	7/16	1	5/2	9/2
I,00	0,866	I,258	I,596	2,295	3,I62
I,I0	0,905	I,I7I	I,347	I,553	I,699
I,25	0,977	I,I34	I,208	I,252	I,278
I,50	I,II6	I,I89	I,2II	I,2I4	I,2I7
2,00	I,429	I,450	I,454	I,450	I,447
3,00	2,098	2,I02	2,I02	2,I00	2,099

Штриховая линия соответствует основному напряженному состоянию.

Отметим, что максимальное отклонение коэффициента концентрации $K_\gamma^{(2)}$ $(0<G_1/G_2\leq 9/2)$ от соответствующего ему числового значения в сплошном цилиндре при $\rho=2$ составляет I,7 %, а при $\rho=3$ -0,2 %.

Напряжение $K_\gamma^{(2)}=\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}/p'b'$ при $\gamma=2\pi/3$, $G_1/G_2=1$ на поверхности конической полости больше максимального значения $K_\gamma^{(0)}=\sigma_{\gamma\varphi}^{*(0)}/p'b'$ на сферической полости при $\gamma=\pi/2$ на 2I,7%

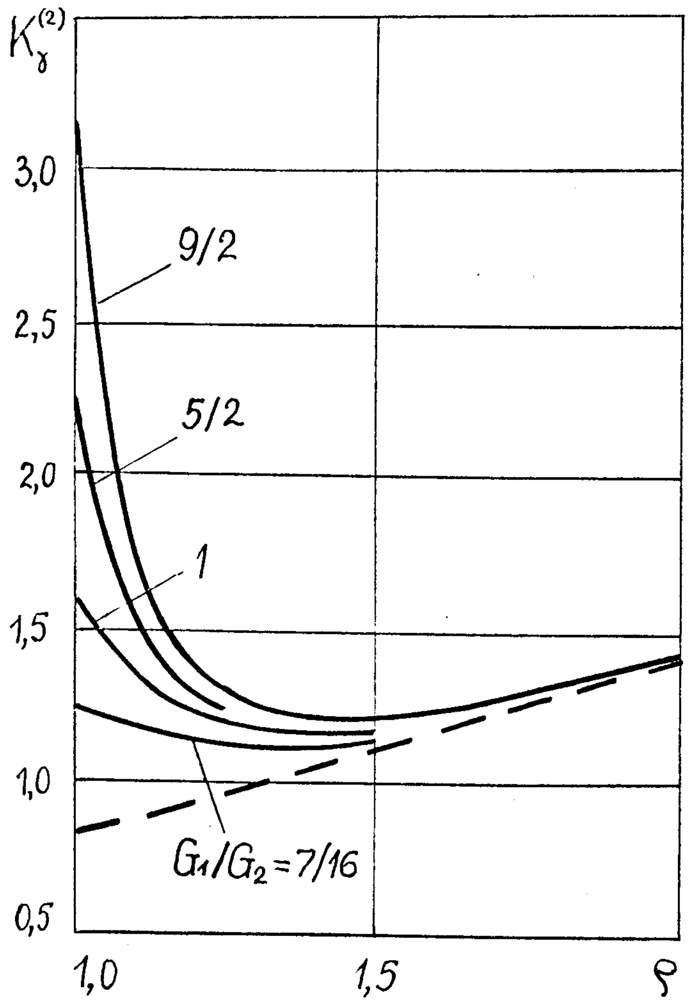


Рис.II

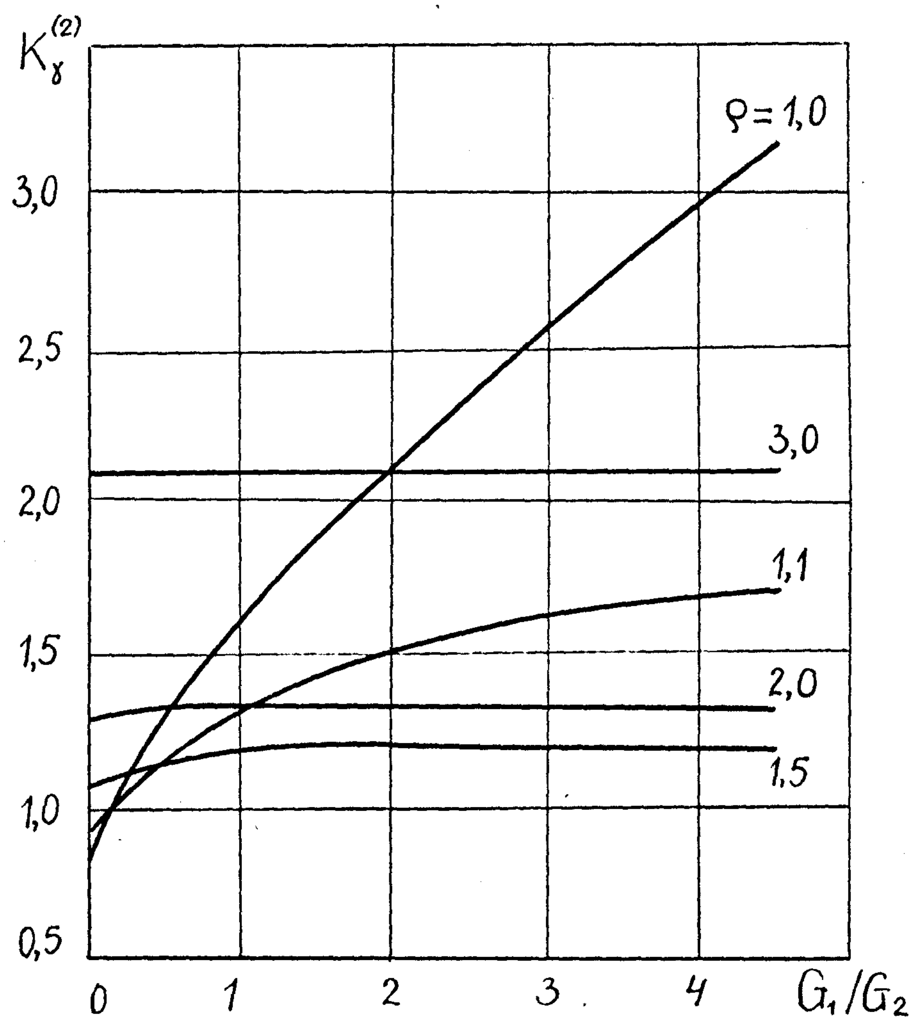


Рис.I2

Заметим, что значение коэффициента концентраций около конической полости значительно увеличивается с увеличением G_1/G_2. Так, например, при $G_1/G_2 = 9/2$ $\max K_\gamma^{(0)} = 1{,}75$, $\max K_\gamma^{(2)} = 3{,}162$ и, следовательно $\max K_\gamma^{(2)} > \max K_\gamma^{(0)}$ на 44,7 %.

§ 10. Кручение трансверсально изотропного тела вращения с биконической или замкнутой цилиндрической полостью

Рассмотрим задачу о распределении напряжений при кручении упругого трансверсально изотропного тела с биконической (рис.5) или замкнутой цилиндрической (рис.6) полостью.

Допустим, что поверхность полости свободна от напряжений. Тогда граничные условия в произвольном приближении имеют вид (9.1). Компоненты основного напряженного состояния выражаются формулами (5.4) при $K=3$, $\varepsilon = \pm 1/9$.

В нулевом приближении справедливы формулы (9.2).

Согласно (6.10), (6.11), (5.4) в первом приближении получим

$$\sigma_{\gamma\varphi}^{(1)} + \hat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(1)} = \frac{P' r_0}{3} \Big\{ \rho^{\lambda_2 - 5{,}5} \Big[\varkappa (\lambda_2 - 1{,}5)(P_2(\mu) - 1)\cos 4\gamma + (4-\varkappa) \times$$

$$\times \sin 4\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} \Big] - 2\rho^{-3} \Big[(P_2(\mu) - 1)\cos 4\gamma + \sin 4\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} \Big] \Big\} +$$

$$+ \frac{G_1}{r_0^2} \sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} \rho^{\lambda_n - 1{,}5} \Big[n(n+1) P_n(\mu) + 2\,\mathrm{ctg}\,\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \Big], \quad (10.1)$$

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(1)} + \hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(1)} = \frac{P' r_0}{3} \Big\{ \rho^{\lambda_2 - 5{,}5} \Big[\sin 4\gamma \frac{d^2 P_2(\mu)}{d\gamma^2} - (\lambda_2 - 1{,}5) \times$$

$$\times \cos 4\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} - 4\varkappa \sin 4\gamma (1 - P_2(\mu)) \Big] +$$

$$+ \rho^{-3} \Big[\cos 4\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} + (7 - 4P_2(\mu)) \sin 4\gamma \Big] \Big\} -$$

$$- \frac{G_2}{r_0^2} \sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} (\lambda_n - 1,5)\, \varrho^{\lambda_n - 1,5} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} .$$

Коэффициенты $A_n^{(1)} (n=2,4,6)$ определяются из краевых условий (9.I) и имеют вид

$$A_2^{(1)} = \frac{22\lambda_2 - 64\varkappa + 73}{63(2\lambda_2 - 3)} \frac{p' r_0^3}{G_2}, \quad A_4^{(1)} = \frac{16(2\lambda_2 + 26\varkappa - 57)}{385(2\lambda_4 - 3)} \frac{p' r_0^3}{G_2}, \tag{I0.2}$$

$$A_6^{(1)} = - \frac{64(2\lambda_2 + 4\varkappa - 13)}{693(2\lambda_6 - 3)} \frac{p' r_0^3}{G_2} \quad \left(\varkappa = \frac{4}{2\lambda_2 - 3} \frac{G_1}{G_2} \right) .$$

Во втором приближении выражения для напряжений, полученные на основе соотношений (6.I0),(6.II),(5.4) при $n=2$, имеют более сложный вид, например,

$$\sigma_{\varrho\varphi}^{(2)} + \hat{\sigma}_{\varrho\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\alpha}^{(2)}(\varrho,\gamma) + \frac{1}{r_0^2} \sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} \varrho^{\lambda_n - 5,5} \Big\{ 4G_1 \sin 4\gamma \times$$

$$\times \left[n(n+1) P_n(\mu) + 2 \operatorname{ctg} \gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \right] - G_2 (\lambda_n - 1,5) \times$$

$$\times \left[(\lambda_n - 1,5) \cos 4\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} - \sin 4\gamma \frac{d^2 P_n(\mu)}{d\gamma^2} \right] + \tag{I0.3}$$

$$+ \frac{4G_1}{r_0^2} A_2^{(0)} \varrho^{\lambda_2 - 9,5} \sin 8\gamma (\lambda_2 + 0,5)(P_2(\mu) - 1) - \frac{1}{r_0^2} A_2^{(0)} \times$$

$$\times \varrho^{\lambda_2 - 9,5} \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} \Big\{ 4G_1 + 0,25\, G_2 (\lambda_2 - 1,5) \big[\lambda_2 - 21,5 +$$

$$+ (\lambda_2 - 1,5)(\lambda_2 - 2,5) \big] \Big\} + \frac{1}{r_0^2} A_2^{(0)} \varrho^{\lambda_2 - 9,5} \cos 8\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} \Big\{ 4G_1 + 0,25 \times$$

$$\times G_2(\lambda_2-1{,}5)\left[\lambda_2-21{,}5-(\lambda_2-1{,}5)(\lambda_2-2{,}5)\right]\Big\}+\frac{1}{2r_0^2}A_2^{(0)}G_2(\lambda_2-1{,}5)\times$$

$$\times(\lambda_2-2{,}5)\rho^{\lambda_2-9{,}5}\sin 8\gamma\,\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}-p'r_0\rho^{-7}\left[0{,}25(1-\cos 8\gamma)\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-\right.$$

$$\left.-4\sin 8\gamma\,(1-P_2(\mu))\right]\qquad\left(A_2^{(0)}=\frac{2}{3(2\lambda_2-3)}\,\frac{p'r_0^3}{G_2}\right),$$

$\sigma_{r\alpha}^{(2)}(\rho,\gamma)$ – это выражение (6.II) при $j=2$.

Для удовлетворения граничным условиям (9.I) на поверхности
1 возникает необходимость переразложить выражения

$$\sin 8\gamma,\quad \sin 8\gamma\,P_2(\mu),\quad \cos 8\gamma\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma},\quad \sin 8\gamma\,\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2},$$

$$\sin 4\gamma\,P_n(\mu)\;(n=0,2,4,6),\;\cos 4\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma},\;\sin 4\gamma\,\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}\quad(n=2,4,6)$$

производным от полиномов Лежандра. Это удается сделать на основе рекуррентных соотношений, приведенных в § 3. Например, выражение $\sin 4\gamma\, d^2P_6(\mu)/d\gamma^2$ представим в виде

$$\sin 4\gamma\,\frac{d^2P_6(\mu)}{d\gamma^2}=-\frac{2240}{429}\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-\frac{168}{715}\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}-$$
$$-\frac{1084}{2805}\frac{dP_6(\mu)}{d\gamma}-\frac{6272}{13585}\frac{dP_8(\mu)}{d\gamma}+\frac{48384}{20995}\frac{dP_{10}(\mu)}{d\gamma}.\qquad(10.4)$$

Приравнивая в преобразованных выражениях для $\sigma_{\rho\varphi}^{(2)}+\hat{\sigma}_{\rho\varphi}^{(2)}$ на поверхности полости $\rho=1$ коэффициенты при одинаковых производных от полиномов Лежандра, получим алгебраические уравнения, из которых находим

$$A_2^{(2)}=\frac{1}{(\lambda_2-1{,}5)G_2}\left\{A_2^{(0)}(\lambda_2-1{,}5)\left[\frac{4G_1(16\lambda_2-2995)}{3003(\lambda_2-1{,}5)}-\right.\right.$$

$$- 0,25\ G_2 (\lambda_2^2 - 3\lambda_2 - 17,75) + \frac{236\ G_1}{3003\,(\lambda_2 - 1,5)} -$$

$$- \frac{59\ G_2}{12012} (\lambda_2^2 - 5\lambda_2 + 25,25) - \frac{4\,G_2}{143} (\lambda_2 - 2,5)\Big] +$$

$$+ \frac{A_2^{(1)}}{21} \left[0,25\ G_2 (2\lambda_2 - 3)(22\lambda_2 + 7) - 64\,G_1\right] +$$

$$+ A_4^{(1)} \frac{160}{231} \left[\frac{G_2 \lambda_4 (2\lambda_4 - 3)}{6} + 4\,G_1\right] - A_6^{(1)} \frac{320}{429} \times$$

$$\times \left[\frac{G_2 (2\lambda_6 + 11)(2\lambda_6 - 3)}{4} - 32\ G_1\right] - 0,2664\ p' r_0^3 \Big\},$$

$$A_4^{(2)} = \frac{1}{(\lambda_4 - 1,5)\,G_2} \Big\{ A_2^{(0)} \frac{288\ G_1}{5005} (3\lambda_2 + 9,5) + \qquad (I0.5)$$

$$+ A_2^{(0)}\ \frac{48\ G_2 (\lambda_2 - 1,5)}{715} \Big[\frac{3\,(\lambda_2 - 21,5 - (\lambda_2 - 1,5)(\lambda_2 - 2,5))}{7} -$$

$$- 2(\lambda_2 - 2,5)\Big] + A_2^{(1)} \frac{48}{385} \left[0,25\ G_2 (2\lambda_2 - 3)(2\lambda_2 - 7) + 26\ G_1\right] +$$

$$+ A_4^{(1)} \frac{1}{1001} \left[0,25\,G_2 (2\lambda_4 - 3)(174\lambda_4 - 749) + 4320\ G_1\right] +$$

$$+ A_6^{(1)} \frac{48}{143} \left[0,1\ G_2 (2\lambda_6 - 3)(\lambda_6 - 5) + 16\ G_1\right] - 0,1439\ p' r_0^3 \Big\},$$

$$A_6^{(2)} = \frac{1}{(\lambda_6 - 1,5)\,G_2} \Big\{ - A_2^{(0)} \frac{256\ G_1}{19635} (73\lambda_2 + 128,5) -$$

$$- A_2^{(0)}\ \frac{64\ G_2 (\lambda_2 - 1,5)}{6545} \Big[\frac{23\,(\lambda_2 - 21,5 - (\lambda_2 - 1,5)(\lambda_2 - 2,5))}{3} -$$

$$- 26(\lambda_2 - 2,5)\Big] - A_2^{(1)} \frac{64}{231}\Big[0,25\, G_2\,(2\lambda_2 - 3)(2\lambda_2 - 7) + 4G_1\Big] +$$

$$+ A_4^{(1)} \frac{32}{231}\Big[\frac{G_2\,(2\lambda_4 - 3)(2\lambda_4 - 21)}{12} + 34\, G_1\Big] + A_6^{(1)} \frac{1}{561} \times$$

$$\times \Big[\frac{G_2\,(2\lambda_6 - 3)(214\lambda_6 - 2489)}{20} + 2944\, G_1\Big] + 0,8768\, p' r_0^3 \Big\},$$

$$A_8^{(2)} = \frac{1}{(\lambda_8 - 1,5) G_2} \Big\{ A_2^{(0)} \frac{2048\, G_1}{40755}\,(23\lambda_2 + 3,5) -$$

$$- A_2^{(0)} \frac{1024\, G_2\,(\lambda_2 - 1,5)}{40755}\Big[\big(\lambda_2 - 21,5 - (\lambda_2 - 1,5)(\lambda_2 - 2,5)\big) +$$

$$+ 4(\lambda_2 - 2,5)\Big] - A_4^{(1)} \frac{448}{1287}\Big[0,25(2\lambda_4 - 3)(2\lambda_4 - 11) + 12\, G_1\Big] +$$

$$+ A_6^{(1)} \frac{112}{2717}\Big[\frac{G_2\,(2\lambda_6 - 3)(6\lambda_6 - 121)}{20} + 126\, G_1\Big] - 1,1809\, p' r_0^3 \Big\},$$

$$A_{10}^{(2)} = \frac{1}{(\lambda_{10} - 1,5) G_2} \Big\{ - A_2^{(0)} \frac{98304\, G_1}{230945}\,(\lambda_2 - 1,5) +$$

$$+ A_2^{(0)} \frac{12288\, G_2\,(\lambda_2 - 1,5)}{230945}\Big[\big(\lambda_2 - 21,5 - (\lambda_2 - 1,5)(\lambda_2 - 2,5)\big) + 4(\lambda_2 - 2,5)\Big] -$$

$$- A_6^{(1)} \frac{8064}{4199}\Big[\frac{G_2\,(2\lambda_6 - 3)(2\lambda_6 - 15)}{20} + 4\, G_1\Big] + 0,4789\, p' r_0^3 \Big\}.$$

Числовые значения коэффициентов $A_n^{(j)} G_2 / p' r_0^3$ для некоторых отношений G_1 / G_2 приведены в табл.I7.

Напряжения $\sigma_{\gamma\varphi}^{(2)} + \hat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(2)}$ находим с помощью рекуррентных соотношений (6.I0) при $n = 2$, в которых дифференциальные операторы $\Lambda_5^{(n)}, \Lambda_6^{(n)}$ имеют вид (4.I6) при $K = 3$. В ко-

Таблица I7

$A_n^{(j)} G_2/p' r_0^3$ \ G_1/G_2	$\frac{7}{16}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$
$j=0,\ n=2$	– 0,0952	– 0,0833	– 0,0667	– 0,0556
$j=1,\ n=2$	– 0,I020	– 0,0992	–0,0952	–0,0926
$j=1,\ n=4$	0,2996	0,2597	0,2233	0,2054
$j=1,\ n=6$	– 0,I398	– 0,II54	– 0,0954	– 0,0862
$j=2,\ n=2$	0,I080	– 0,I232	– 0,5022	– I,28I5
$j=2,\ n=4$	0,020I	– 0,00I8	– 0,0287	– 0,0486
$j=2,\ n=6$	– 0,4598	– 0,4I52	– 0,3973	– 0,4053
$j=2,\ n=8$	0,8602	0,8I37	0,8324	0,8896
$j=2,\ n=10$	– 0,43I7	– 0,42I2	– 0,4474	– 0,4893

нечном итоге выражения для $\sigma^{(2)}_{\gamma\varphi} + \hat{\sigma}^{(2)}_{\gamma\varphi}$ принимают форму

$$\sigma^{(2)}_{\gamma\varphi} + \hat{\sigma}^{(2)}_{\gamma\varphi} = \sigma^{(2)}_{\theta\alpha}(\rho,\gamma) + \frac{G_1}{r_0^2}\sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} \rho^{\lambda_n - 5,5}\Big\{\cos 4\gamma(\lambda_n - 1,5)\times$$

$$\times\Big[n(n+1)P_n(\mu) + 2\,\mathrm{ctg}\,\gamma\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big] - \sin 4\gamma\Big[n(n+1)\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} -$$

$$-\frac{2}{\sin^2\gamma}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} + 2\,\mathrm{ctg}\,\gamma\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}\Big]\Big\} + 4\sin 4\gamma\,\frac{G_2}{r_0^2}\times$$

$$\times\sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)}\rho^{\lambda_n-5,5}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} + \frac{1}{r_0^2}A_2^{(0)}\rho^{\lambda_2-9,5}\times \qquad (I0,6)$$

$$\times\Big\{G_1\big[8,5-0,5(\lambda_2-1,5)^2\big] - G_1\big[10-0,5(\lambda_2-1,5)^2\big]P_2(\mu) -$$

$$-2G_2\big[\lambda_2-1,5-4(\lambda_2-1,5)P_2(\mu)\big]\Big\} + \frac{1}{r_0^2}A_2^{(0)}\rho^{\lambda_2-9,5}\times$$

$$\times \cos 8\gamma \Big\{ G_1 \left[-8{,}5 - 0{,}5(\lambda_2 - 1{,}5)(\lambda_2 - 3{,}5)\right] + G_1 \left[10 + 0{,}5(\lambda_2 - 1{,}5) \times \right.$$

$$\left. \times (\lambda_2 - 3{,}5)\right] P_2(\mu) + 2 G_2 \left[\lambda_2 - 1{,}5 - 4(\lambda_2 - 1{,}5) P_2(\mu)\right] \Big\} +$$

$$+ \frac{1}{r_o^2} A_2^{(6)} \rho^{\lambda_2 - 9{,}5} \sin 8\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} \left[2 G_2 (\lambda_2 - 1{,}5)(\lambda_2 + 0{,}5) - G_1 \times \right.$$

$$\left. \times (\lambda_2 - 2{,}5)\right] + p' r_o \rho^{-7} \left[0{,}5(1 - \cos 8\gamma)(P_2(\mu) - 4) - 2 \sin 8\gamma \frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}\right].$$

Здесь $\bar{\sigma}_{\theta\alpha}^{(2)}(\rho,\gamma)$ выражается формулой (6.II) при $j = 2$.

В частности, при $\gamma = \pi/2$ имеют место формулы

$$\bar{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(1)} + \hat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(1)} = \frac{G_1}{r_o^2} \sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} \rho^{\lambda_n - 1{,}5} \left[n(n+1) P_n(\mu) + 2 \operatorname{ctg} \gamma \times \right.$$

$$\left. \times \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\right]_{\gamma = \pi/2} + p' r_o \left[\rho^{-3} - 0{,}5 \varkappa (\lambda_2 - 1{,}5) \rho^{\lambda_2 - 5{,}5}\right],$$

$$\sigma_{\gamma\varphi}^{(2)} + \hat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{(2)} = \frac{G_1}{r_o^2} \Big\{ \sum_{n=2,4,6} A_n^{(1)} \rho^{\lambda_n - 5{,}5} (\lambda_n - 1{,}5) \left[n(n+1) P_n(\mu) + \right.$$

$$\left. + 2 \operatorname{ctg} \gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\right] + \sum_{n=2,4,\dots}^{10} A_n^{(2)} \rho^{\lambda_n - 1{,}5} \left[n(n+1) P_n(\mu) + \right. \tag{10.7}$$

$$\left. + 2 \operatorname{ctg} \gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\right] \Big\}_{\gamma = \pi/2} - 0{,}5\, p' r_o \frac{G_1}{G_2} (\lambda_2 - 2{,}5) \rho^{\lambda_2 - 9{,}5}.$$

На поверхности биконической $(\rho = 1,\ \varepsilon = 1/9)$ и цилиндрической $(\rho = 1,\ \varepsilon = -1/9)$ полостей при некоторых значениях G_1/G_2 представление напряжений $\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}/p' r_o$ по полиномам Лежандра, в силу обозначений (5.7), имеет вид

$G_1/G_2 = 1$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p' r_0}\right|_{\varepsilon=1/9} \approx 0{,}8643 - 1{,}1391\, P_2(\mu) + 0{,}5177\, P_4(\mu) - 0{,}3419\, P_6(\mu) + 0{,}1729\, P_8(\mu) - 0{,}0739\, P_{10}(\mu)\,,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p' r_0}\right|_{\varepsilon=-1/9} \approx 0{,}8420 - 0{,}5627\, P_2(\mu) - 0{,}4981\, P_4(\mu) + 0{,}1198\, P_6(\mu) + 0{,}1729\, P_8(\mu) - 0{,}0739\, P_{10}(\mu)\,, \tag{I0.8}$$

$G_1/G_2 = 5/2$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p' r_0}\right|_{\varepsilon=1/9} \approx 0{,}9463 - 1{,}3618\, P_2(\mu) + 0{,}9658\, P_4(\mu) - 0{,}8434\, P_6(\mu) + 0{,}5625\, P_8(\mu) - 0{,}2694\, P_{10}(\mu)\,,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p' r_0}\right|_{\varepsilon=-1/9} \approx 0{,}9508 - 0{,}5137\, P_2(\mu) - 0{,}9233\, P_4(\mu) + 0{,}1931\, P_6(\mu) + 0{,}5625\, P_8(\mu) - 0{,}2694\, P_{10}(\mu)\,.$$

При значении $\gamma = \pi/2$, $\varepsilon = 1/9$ и некоторых отношениях G_1/G_2 имеем

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p' b'}\right|_{\frac{G_1}{G_2}=0} = \frac{\hat{\sigma}_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p' b'} \approx 0{,}9\,\rho + \frac{0{,}1}{\rho^3}\,,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p' b'}\right|_{\frac{G_1}{G_2}=\frac{7}{16}} \approx 0{,}9000\,\rho + \frac{0{,}1000}{\rho^3} + \frac{0{,}1243}{\rho^4} + \frac{0{,}0990}{\rho^5} + \frac{0{,}1096}{\rho^6} + \frac{0{,}0823}{\rho^7} - \frac{0{,}0489}{\rho^8} + \frac{0{,}0057}{\rho^9} - \frac{0{,}0530}{\rho^{10}} + \frac{0{,}0109}{\rho^{12}}\,,$$

$$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\varphi}}{p'b'}\Bigg|_{\frac{G_1}{G_2}=1} \approx 0,9000\rho + \frac{0,1000}{\rho^3} + \frac{0,2589}{\rho^4} + \frac{0,1947}{\rho^6} + \frac{0,0988}{\rho^8} + \frac{0,0481}{\rho^{10}} + \frac{0,0198}{\rho^{12}},$$

$$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\varphi}}{p'b'}\Bigg|_{\frac{G_1}{G_2}=\frac{5}{2}} \approx 0,9000\rho + \frac{0,1000}{\rho^3} + \frac{0,5633}{\rho^5} + \frac{0,4128}{\rho^8} - \frac{0,2897}{\rho^9} + \frac{0,0684}{\rho^{12}} + \frac{0,0833}{\rho^{13}} + \frac{0,4552}{\rho^{15}} - \frac{0,4040}{\rho^{16}} + \frac{0,3364}{\rho^{18}}, \qquad (10.9)$$

$$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\varphi}}{p'b'}\Bigg|_{\frac{G_1}{G_2}=\frac{9}{2}} \approx 0,9000\rho + \frac{0,1000}{\rho^3} + \frac{0,9922}{\rho^6} - \frac{0,5333}{\rho^{10}} + \frac{0,6749}{\rho^{11}} + \frac{0,1750}{\rho^{14}} - \frac{0,0431}{\rho^{15}} + \frac{0,0272}{\rho^{19}} + \frac{0,6623}{\rho^{24}}.$$

На рис.13,14 представлено распределение напряжений $\sigma^{*(0)}_{\gamma\varphi}/p'r_0$ и $\sigma^{*(2)}_{\gamma\varphi}/p'r_0$ вдоль четверти меридионального сечения сферического $(\varepsilon=0)$, биконического $(\varepsilon=1/9)$ и цилиндрического $(\varepsilon=-1/9)$ поверхностей, причем штриховые линии соответствуют распределению напряжений на поверхности сферической полости. Соответствующие этому случаю числовые значения приведены в табл.18,19.

Изменение коэффициента концентрации напряжений

$$K^{(2)}_{\gamma} = \frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\varphi}}{p'b'}\Bigg|_{\substack{\gamma=\pi/2\\ \varepsilon=1/9}} \qquad (b'=r_0R)$$

в зависимости от значения ρ и отношения G_1/G_2 задается табл.20. и показано на рис.15,16, где штриховая линия соответствует напряжениям сплошного цилиндра.

В табл.21 приведены мажорантные напряжения $\sigma^{M}_{\gamma\varphi}/p'b'$, вычисленные на основе неравенства (5.19), а также процентное содер-

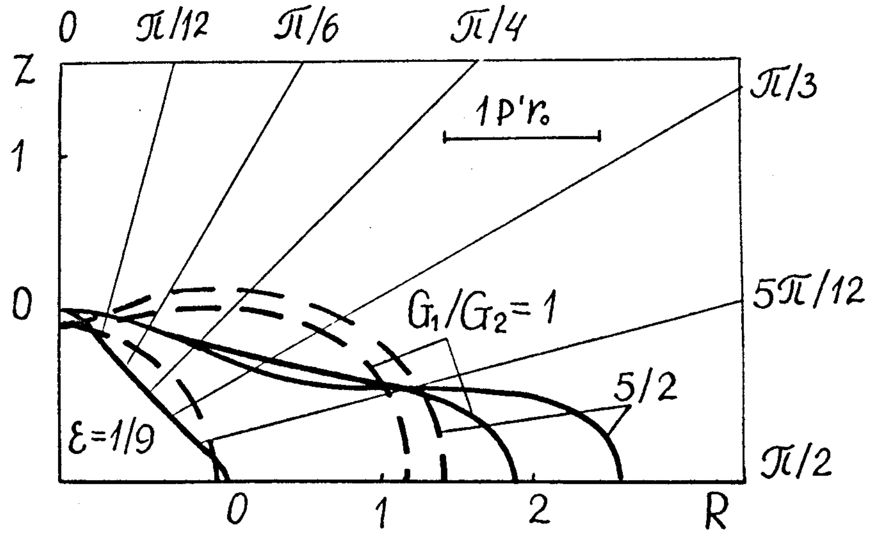

0
π/12
π/6
π/4
π/3
5π/12
π/2
Z
1
0
1 p'r₀
G₁/G₂=1
5/2
ε=1/9
0
1
2
R

Рис.I3

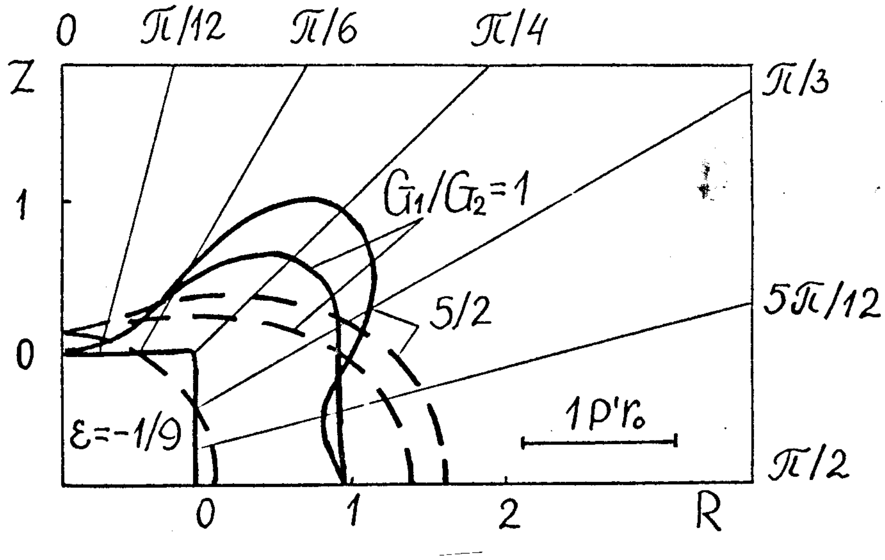

0
π/12
π/6
π/4
π/3
5π/12
π/2
Z
1
0
G₁/G₂=1
5/2
ε=-1/9
1 p'r₀
0
1
2
R

Рис.I4

жание третьего приближения $\Delta^{(3)}_{\gamma\varphi} = \varepsilon^3 \sigma^{(3)}_{\gamma\varphi} / p'b'$.

Наибольший коэффициент концентрации $K^{(2)}_{\gamma}$ для $7/16 \le G_1/G_2 \le 9/2$ на поверхности биконической полости больше от соответствующей величины на поверхности сферы на 40,8 %.

Таблица I8

γ	$\varepsilon = 1/9$			
	$G_1/G_2 = 1$		$G_1/G_2 = 5/2$	
	$\dfrac{\sigma^{*(0)}_{\gamma\varphi}}{p'r_0}$	$\dfrac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\varphi}}{p'r_0}$	$\dfrac{\sigma^{*(0)}_{\gamma\varphi}}{p'r_0}$	$\dfrac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\varphi}}{p'r_0}$
0	0	0	0	0
$\pi/12$	0,084	0,087	0,I0I	0,I45
$\pi/6$	0,3I3	0,234	0,375	0,245
$\pi/4$	0,625	0,463	0,750	0,476
$\pi/3$	0,938	0,748	I,I25	0,574
$5\pi/12$	I,I66	1,332	I,400	I,434
$\pi/2$	I,250	I,800	I,500	2,473

Таблица I9

γ	$\varepsilon = -1/9$			
	$G_1/G_2 = 1$		$G_1/G_2 = 5/2$	
	$\dfrac{\sigma^{*(0)}_{\gamma\varphi}}{p'r_0}$	$\dfrac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\varphi}}{p'r_0}$	$\dfrac{\sigma^{*(0)}_{\gamma\varphi}}{p'r_0}$	$\dfrac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\varphi}}{p'r_0}$
0	0	0	0	0
$\pi/12$	0,084	0,07I	0,I0I	0,032
$\pi/6$	0,3I3	0,376	0,375	0,347
$\pi/4$	0,625	0,929	0,750	I,306
$\pi/3$	0,938	I,096	I,I25	I,354
$5\pi/12$	I,I66	0,954	I,400	0,874
$\pi/2$	I,250	0,965	I,500	I,02I

Таблица 20

$$K_{\gamma}^{(2)} = \frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p'b'}\Bigg|_{\gamma=\pi/2,\ \varepsilon=1/9}$$

ρ \ G_1/G_2	0	$\frac{7}{16}$	I	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$
I,00	I,000	I,330	I,620	2,226	2,955
I,I0	I,065	I,278	I,423	I,6I2	I,764
I,25	I,I76	I,293	I,356	I,4II	I,447
I,50	I,380	I,429	I,453	I,464	I,466
2,00	I,8I3	I,826	I,832	I,83I	I,828
3,00	2,704	2,706	2,707	2,706	2,705

Таблица 2I

G_1/G_2	$\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{*(2)}}{p'b'}$	$\frac{\sigma_{\gamma\varphi}^{M}}{p'b'}$	$\Delta_{\gamma\varphi}^{(3)}$, %
	$\gamma=\pi/2,\ \varepsilon=1/9$		
7/I6	I,330	I,357	I,4
I	I,620	I,676	2,3
5/2	2,226	2,340	3,3
9/2	2,955	3,238	5,3
	$\gamma=\pi/3,\ \varepsilon=-1/9$		
7/I6	I,093	I,II0	I,0
I	I,266	I,268	0,I
5/2	I,563	I,694	4,7
9/2	I,856	2,34I	I0,6

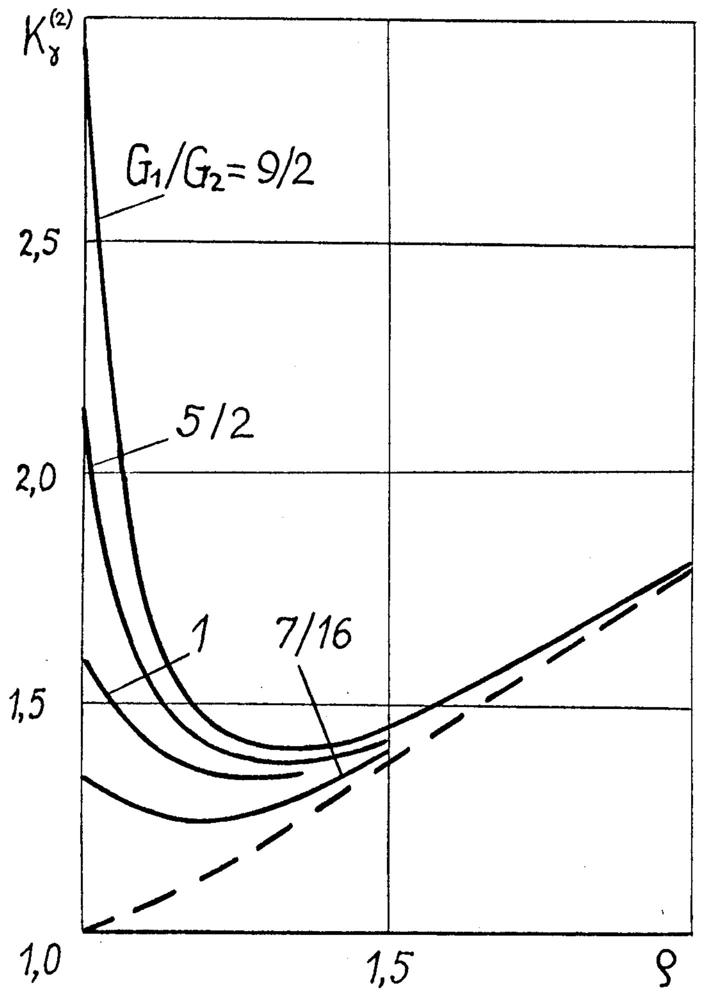


Рис.I5

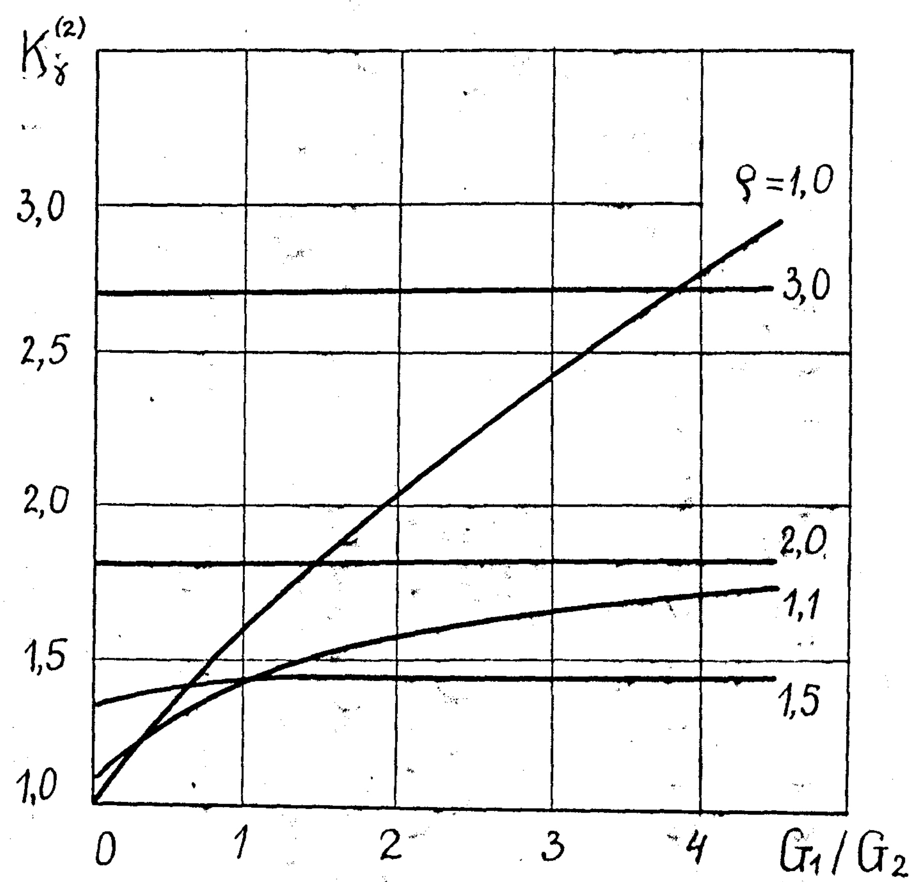


Рис.I6

ГЛАВА Ш. УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ, ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

§ II. Растяжение-сжатие среды с жестким коническим включением

Рассмотрим упругую изотропную среду с неканоническим включением, поверхность которого описывается уравнениями (4.2). Составляющие напряжений каждого приближения определяем с помощью рекуррентных соотношений (4.I4).

Исследование напряженного состояния среды с неканоническим включением будем проводить методом "возмущения формы границы", изложенным в § 4, согласно которому решение поставленной задачи будем искать в виде рядов (4.8). Следовательно, согласно (4.I4) граничные условия в произвольном приближении на поверхности жесткого включения в рассматриваемом осесимметричном случае (без кручения) принимают вид

$$
\begin{gathered}
u_r^{(0)}\Big|_{\rho=1} = -\hat{u}_\rho^{(0)}\Big|_{\rho=1}, \quad u_\theta^{(0)}\Big|_{\rho=1} = -\hat{u}_\gamma^{(0)}\Big|_{\rho=1}, \\
u_r^{(n)}\Big|_{\rho=1} = -\Big[\hat{u}_\rho^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1}\Big(\Lambda_5^{(n-j)} u_r^{(j)} + \Lambda_6^{(n-j)} u_\theta^{(j)}\Big)\Big]_{\rho=1}, \\
u_\theta^{(n)}\Big|_{\rho=1} = -\Big[\hat{u}_\gamma^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1}\Big(\Lambda_5^{(n-j)} u_\theta^{(j)} - \Lambda_6^{(n-j)} u_r^{(j)}\Big)\Big]_{\rho=1},
\end{gathered}
\tag{II.I}
$$

где $\hat{u}_\rho^{(n)}$, $\hat{u}_\gamma^{(n)}$ соответствуют основному напряженному состоянию среды, а компоненты $u_r^{(n)}$, $u_\theta^{(n)}$ согласно (4.I7), записываются на основании представлений (2.7) и имеют вид

$$
u_r^{(j)} = \frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[n(n+3-4\nu)\frac{C_n^{(j)}}{\rho^n} - (n+1)\frac{D_n^{(j)}}{\rho^{n+2}}\Big]P_n(\mu),
$$

$$u_\theta^{(j)} = \frac{1}{r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-n+4-4\nu)\frac{C_n^{(j)}}{\rho^n} + \frac{\mathcal{D}_n^{(j)}}{\rho^{n+2}}\right]\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\,. \qquad \text{(II.2)}$$

Напряжения $\sigma_{\rho\rho}^{(n)}$, $\sigma_{\gamma\gamma}^{(n)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}$, $\sigma_{\rho\gamma}^{(n)}$, в соответствии с (4.8), определяются формулами

$$\sigma_{\rho\rho}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n}\left[\Lambda_1^{(n-j)}\sigma_{rr}^{(j)} + \Lambda_2^{(n-j)}\left(\sigma_{\theta\theta}^{(j)} - \sigma_{rr}^{(j)}\right) + \Lambda_3^{(n-j)}\sigma_{r\theta}^{(j)}\right],$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n}\left[\Lambda_1^{(n-j)}\sigma_{\theta\theta}^{(j)} - \Lambda_2^{(n-j)}\left(\sigma_{\theta\theta}^{(j)} - \sigma_{rr}^{(j)}\right) - \Lambda_3^{(n-j)}\sigma_{r\theta}^{(j)}\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n}\Lambda_1^{(n-j)}\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}, \qquad \text{(II.3)}$$

$$\sigma_{\rho\gamma}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n}\left[\Lambda_4^{(n-j)}\sigma_{r\theta}^{(j)} + \frac{1}{2}\Lambda_3^{(n-j)}\left(\sigma_{\theta\theta}^{(j)} - \sigma_{rr}^{(j)}\right)\right].$$

Здесь, а также в граничных условиях (II.I), дифференциальные операторы $\Lambda_m^{(j)}$ $(m = 1, 2, \ldots, 6,\ j = 1, 2)$ имеют вид (4.I6) при $K = 2$.

Компоненты $\sigma_{rr}^{(j)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(j)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{r\theta}^{(j)}(\rho,\gamma)$, входящие в (II.3), записываются на основании их представлений (2.8) в безразмерных (отнесенных к величине r_0) сферических координатах, если формально заменить переменные r, θ соответственно на ρ, γ, а произвольные постоянные снабдить индексом (j)

$$\sigma_{rr}^{(j)}(\rho,\gamma) = \frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-n(n^2+3n-2\nu)\frac{C_n^{(j)}}{\rho^{n+1}} + (n+1)(n+2)\frac{\mathcal{D}_n^{(j)}}{\rho^{n+3}}\right]P_n(\mu),$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(j)}(\rho,\gamma) = \frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[n(n^2-2n-1+2\nu)\frac{C_n}{\rho^{n+1}} - (n+1)^2\frac{\mathcal{D}_n}{\rho^{n+3}}\right]P_n(\mu) - \right.$$

$$-\left[(-n+4-4\nu)\frac{C_n^{(j)}}{\rho^{n+1}}+\frac{\mathcal{D}_n^{(j)}}{\rho^{n+3}}\right]\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\,\mathrm{ctg}\,\gamma\Big\},$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}(\rho,\gamma)=\frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\left[n(n+3-4n\nu)-2\nu)\frac{C_n^{(j)}}{\rho^{n+1}}-(n+1)\frac{\mathcal{D}_n^{(j)}}{\rho^{n+3}}\right]P_n(\mu)+$$

$$+\left[(-n+4-4\nu)\frac{C_n^{(j)}}{\rho^{n+1}}+\frac{\mathcal{D}_n^{(j)}}{\rho^{n+3}}\right]\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\,\mathrm{ctg}\,\gamma\Big\}, \qquad \text{(II.4)}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(j)}(\rho,\gamma)=\frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n^2-2+2\nu)\frac{C_n^{(j)}}{\rho^{n+1}}-(n+2)\frac{\mathcal{D}_n^{(j)}}{\rho^{n+3}}\right]\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}.$$

Напряжения $\sigma_{\theta\theta}^{(j)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}(\rho,\gamma)$ могут быть представлены только по полиномам Лежандра с помощью формулы (6.12).

Предположим, что на "бесконечности" среда находится под действием равномерно растягивающих (или сжимающих)усилий

$$\sigma_{xx}^{(\infty)}=\sigma_{yy}^{(\infty)}=\sigma_{zz}^{(\infty)}=P\,,\quad \sigma_{xy}^{(\infty)}=\sigma_{xz}^{(\infty)}=\sigma_{yz}^{(\infty)}=0\,, \qquad \text{(II.5)}$$

т.е. основное напряженное состояние в криволинейных ортогональных координатах характеризуется компонентами

$$\hat{\sigma}_{\rho\rho}=\hat{\sigma}_{\gamma\gamma}=\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}=P\,,\quad \hat{\sigma}_{\rho\gamma}=\hat{\sigma}_{\gamma\varphi}=\hat{\sigma}_{\rho\varphi}=0\,. \qquad \text{(II.6)}$$

Следовательно, на основании закона Гука (I.9) находим

$$\hat{e}_{rr}=\hat{e}_{\theta\theta}=\hat{e}_{\alpha\alpha}=\frac{P}{2G}\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\,,\quad e=\frac{3P}{2G}\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\,. \qquad \text{(II.7)}$$

Согласно формул (I.7),(II,7) имеем

$$\hat{u}_r=\frac{P}{2G}\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\,r=a_0 r\,,\quad \hat{u}_\theta=0 \qquad \text{(II.8)}$$

или в криволинейной ортогональной системе координат, на основании (4.4), находим

$$\hat{u}_\rho = a_o r \cos\beta\ , \quad \hat{u}_\gamma = -a_o r \sin\beta\,. \tag{II.9}$$

Для возможности удовлетворения граничным условиям (II.I) компоненты перемещений $\hat{u}_\rho$ и $\hat{u}_\gamma$ представим в виде

$$\hat{u}_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \hat{u}_\rho^{(n)}\ , \quad \hat{u}_\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \hat{u}_\gamma^{(n)}\ , \tag{II.10}$$

где

$$\hat{u}_\rho^{(0)} = a_o r_o \rho\ , \quad \hat{u}_\gamma^{(0)} = 0\ ,$$

$$\hat{u}_\rho^{(1)} = a_o r_o \rho^{-K} \cos(K+1)\gamma\,, \quad \hat{u}_\gamma^{(1)} = -a_o r_o \rho^{-K}(K+1)\sin(K+1)\gamma\,, \tag{II.II}$$

$$\hat{u}_\rho^{(2)} = -0{,}25\, a_o r_o \rho^{-2K-1} K(K+2)\left[1-\cos 2(K+1)\gamma\right],$$

$$\hat{u}_\gamma^{(2)} = -0{,}5\, a_o r_o \rho^{-2K-1} K(K+1)\sin 2(K+1)\gamma\,.$$

Из соотношений (4.I4),(II.2) и краевых условий (II.I) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[n(n+3-4\nu)C_n^{(j)} - (n+1)\mathcal{D}_n^{(j)}\right]P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(j)}(\nu)\,P_n(\mu),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-n+4-4\nu)C_n^{(j)} + \mathcal{D}_n^{(j)}\right]\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(j)}(\nu)\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\,, \tag{II.I2}$$

где $c_n^{(j)}(\nu), d_n^{(j)}(\nu)$ – известные выражения. Приравнивая коэффициенты при одинаковых полиномах Лежандра и их производных, получим систему алгебраических уравнений, из которой находим

$$C_n^{(j)} = \frac{c_n^{(j)}(\nu) + (n+1)\,d_n^{(j)}(\nu)}{2\left[n(3-4\nu)+2(1-\nu)\right]}\ , \quad \mathcal{D}_o^{(j)} = -\,c_o^{(j)}(\nu)\,,$$

$$\mathcal{D}_n^{(j)} = (n-4+4\nu)\,C_n^{(j)} + d_n^{(j)}(\nu) \quad (n \geqslant 1)\ . \tag{II.I3}$$

Таким образом, граничная задача для неканонических включений формально сводится к последовательности граничных задач для сферических включений.

В случае однородной изотропной среды с впаянным жестким коническим включением (рис.2), согласно граничным условиям (II.I), в нулевом приближении имеем

$$C_n^{(0)}=0\ (n=0,1,\dots)\,,\quad \mathcal{D}_0^{(0)}=a_0 r_0^2\,,\quad \mathcal{D}_n^{(0)}=0\,(n=1,2,\dots)\,. \qquad \text{(II.I4)}$$

Напряженное состояние, в обозначениях (5.7), характеризуется величинами

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(0)}}{p}=1+\frac{2(1-2\nu)}{1+\nu}\rho^{-3}\,,\quad \frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(0)}}{p}=\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(0)}}{p}=1-\frac{1-2\nu}{1+\nu}\rho^{-3}\,,\quad \frac{\sigma_{\rho\gamma}^{*(0)}}{p}=0 \qquad \text{(II.I5)}$$

и соответствует задаче об упругом равновесии изотропной среды с жестким сферическим включением в случае растяжения-сжатия усилиями интенсивности p .

В первом приближении компоненты перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} u_\rho^{(1)}+\hat{u}_\rho^{(1)}&=U_r^{(1)}(\rho,\gamma)+a_0 r_0\cos 3\gamma\,(\rho^{-3}+2\rho^{-5})\,,\\ u_\gamma^{(1)}+\hat{u}_\gamma^{(1)}&=U_\theta^{(1)}(\rho,\gamma)-3a_0 r_0\sin 3\gamma(\rho^{-2}-\rho^{-5})\,, \end{aligned} \qquad \text{(II.I6)}$$

где $U_r^{(1)}(\rho,\gamma),\,U_\theta^{(1)}(\rho,\gamma)$ выражаются формулами (II.2) при j =I.

Удовлетворив краевые условия (II.I) в первом приближении, найдем коэффициенты $C_n^{(1)},\ \mathcal{D}_n^{(1)}\ (n=1,3)$ в форме

$$C_1^{(1)}=\frac{9}{10(5-6\nu)}a_0 r_0^2\,,\qquad C_3^{(1)}=-\frac{12}{5(11-14\nu)}a_0 r_0^2\,, \qquad \text{(II.I7)}$$

$$\mathcal{D}_1^{(1)}=-(3-4\nu)\,C_1^{(1)}\,,\quad \mathcal{D}_3^{(1)}=-(1-4\nu)\,C_3^{(1)}\,.$$

Из рекуррентных соотношений (II.3) получим формулы для определения напряжений

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)} = \frac{6}{5} G a_0 \left\{ 3\left[-\frac{2-\nu}{5-6\nu}\rho^{-2} - \frac{3(3-4\nu)}{5-6\nu}\rho^{-4} + 2\rho^{-6} \right] P_1(\mu) + \right.$$

$$\left. + 8\left[\frac{3(9-\nu)}{11-14\nu}\rho^{-4} - \frac{12(1-\nu)}{11-14\nu}\rho^{-6} \right] P_3(\mu) \right\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)} = \frac{6}{5} G a_0 \left\{ 3\left[\frac{1-2\nu}{2(5-6\nu)}\rho^{-2} + \left(\frac{3(3-4\nu)}{2(5-6\nu)} - \frac{4(1-4\nu)}{11-14\nu} \right)\rho^{-4} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{7+2\nu}{11-14\nu}\rho^{-6} \right] P_1(\mu) - 12\left(\frac{3-2\nu}{11-14\nu}\rho^{-4} - \frac{3+8\nu}{11-14\nu}\rho^{-6} \right) P_3(\mu) \right\}, \tag{II.18}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{6}{5} G a_0 \left\{ 3\left[\frac{1-2\nu}{2(5-6\nu)}\rho^{-2} + \left(\frac{3(3-4\nu)}{2(5-6\nu)} + \frac{4(1-4\nu)}{11-14\nu} \right)\rho^{-4} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{15(1-2\nu)}{11-14\nu}\rho^{-6} \right] P_1(\mu) - 60\left(\frac{1-2\nu}{11-14\nu} - \frac{1}{11-14\nu}\rho^{-6} \right) P_3(\mu) \right\},$$

$$\sigma_{\rho\gamma}^{(1)} = \frac{6}{5} G a_0 \left\{ 3\left[-\frac{1-2\nu}{2(5-6\nu)}\rho^{-2} + \frac{3(3-4\nu)}{2(5-6\nu)}\rho^{-4} - \rho^{-6} \right] \frac{dP_1(\mu)}{d\gamma} - \right.$$

$$\left. - 4\left(\frac{7+2\nu}{11-14\nu}\rho^{-4} - \frac{17-8\nu}{11-14\nu}\rho^{-6} \right) \frac{dP_3(\mu)}{d\gamma} \right\} \quad \left(a_0 = \frac{p}{2G}\cdot\frac{1-2\nu}{1+\nu} \right).$$

На поверхности включения $(\rho = 1)$ при $\gamma = 0$ получаем

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{(1)}}{p} = \frac{3(1-2\nu)}{5(1+\nu)}\left[-\frac{3(11-13\nu)}{5-6\nu} + \frac{8(37-43\nu)}{11-14\nu} - 10 \right],$$

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}}{p} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}}{p} = \frac{9\nu(1-2\nu)(189-226\nu)}{5(1+\nu)(5-6\nu)(11-14\nu)}. \tag{II.19}$$

Перемещения во втором приближении при $\rho = 1$ имеют вид

$$u_\rho^{(2)} + \overset{1}{u}{}_\rho^{(2)} = u_r^{(2)}(1,\gamma) + \frac{2}{r_0}\left\{ \left[-2(1-\nu)C_1^{(1)} + 3\mathcal{D}_1^{(1)} \right] \cos 3\gamma\, P_1(\mu) - \right.$$

$$-\left[9(3-2\nu)C_3^{(1)}-10\mathcal{D}_3^{(1)}\right]\cos 3\gamma P_3(\mu)\Big\}+\frac{1}{r_0}\Big\{\left[-4(1-\nu)C_1^{(1)}+\right.$$

$$\left.+2\mathcal{D}_1^{(1)}\right]\sin 3\gamma\frac{dP_1(\mu)}{d\gamma}-\left[6(3-2\nu)C_3^{(1)}-4\mathcal{D}_3^{(1)}\right]\sin 3\gamma\frac{dP_3(\mu)}{d\gamma}$$

$$+\left[3(3-4\nu)C_1^{(1)}+3\mathcal{D}_1^{(1)}\right]\sin 3\gamma\frac{dP_1(\mu)}{d\gamma}+\left[3(1-4\nu)C_3^{(1)}+\right.$$

$$\left.+3\mathcal{D}_3^{(1)}\right]\sin 3\gamma\frac{dP_3(\mu)}{d\gamma}\Big\}-0{,}75a_0r_0(1+3\cos 6\gamma),$$

$$U_\gamma^{(2)}+\hat{U}_\gamma^{(2)}=U_\theta^{(2)}(1,\gamma)-\frac{1}{r_0}\Big\{\left[12(1-\nu)C_1^{(1)}-6\mathcal{D}_1^{(1)}\right]\sin 3\gamma P_1(\mu)+ \qquad \text{(II.}$$

$$+\left[18(3-2\nu)C_3^{(1)}-12\mathcal{D}_3^{(1)}\right]\sin 3\gamma P_3(\mu)+\left[(3-4\nu)C_1^{(1)}+3\mathcal{D}_1^{(1)}\right]$$

$$\times\cos 3\gamma\frac{dP_1(\mu)}{d\gamma}+\left[3(1-4\nu)C_3^{(1)}+5\mathcal{D}_3^{(1)}\right]\cos 3\gamma\frac{dP_3(\mu)}{d\gamma}+$$

$$+\left[(3-4\nu)C_1^{(1)}+\mathcal{D}_1^{(1)}\right]\sin 3\gamma\frac{d^2P_1(\mu)}{d\gamma^2}+\left[(1-4\nu)C_3^{(1)}+\right.$$

$$\left.+\mathcal{D}_3^{(1)}\right]\sin 3\gamma\frac{d^2P_3(\mu)}{d\gamma^2}-4{,}5a_0r_0\sin 6\gamma.$$

Здесь $U_r^{(2)}(1,\gamma)$, $U_\theta^{(2)}(1,\gamma)$ определяются формулами (II.2) при $j=2$, $\rho=1$.

Учитывая выражения (II.2) и найденные в (II.I7) коэффициенты $C_n^{(1)}$, $\mathcal{D}_n^{(1)}$ $(n=1,3)$ удовлетворим краевые условия (II.I) при $j=2$. Приравняем величины при одинаковых полиномах Лежандра и их производных, использовав предварительно необходимые разложения вида

$$\cos 6\gamma, \quad \sin 6\gamma, \quad \cos 3\gamma P_n(\mu), \quad \sin 3\gamma\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma},$$

$$\sin 3\gamma\, P_n(\mu)\,, \quad \cos 3\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\,, \quad \sin 3\gamma \frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2} \quad (n=1,3)$$

приведенные в табл.3,4,5, например,

$$\sin 3\gamma \frac{dP_3(\mu)}{d\gamma} = -\frac{32}{35} - \frac{4}{7}P_2(\mu) - \frac{228}{385}P_4(\mu) + \frac{160}{77}P_6(\mu)\,, \qquad \text{(II.21)}$$

$$\sin 3\gamma\, P_3(\mu) = -\frac{5}{63}\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} - \frac{13}{385}\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma} - \frac{80}{693}\frac{dP_6(\mu)}{d\gamma}\,.$$

Откуда следует

$$C_0^{(2)}(\nu) = \frac{3}{175}\left[\frac{3(13-10\nu)}{5-6\nu} + \frac{64(7+2\nu)}{11-14\nu}\right]a_0 r_0^2\,,$$

$$C_2^{(2)}(\nu) = \frac{1}{7}\left[-\frac{9(23-26\nu)}{5(5-6\nu)} + \frac{8(19-22\nu)}{11-14\nu}\right]a_0 r_0^2\,,$$

$$C_4^{(2)}(\nu) = \frac{228}{175}\left[\frac{7+2\nu}{11(11-14\nu)} + \frac{4(4-5\nu)}{5-6\nu}\right]a_0 r_0^2\,,$$

$$C_6^{(2)}(\nu) = \frac{128}{77}\left[3 - \frac{20(7-10\nu)}{11-14\nu}\right]a_0 r_0^2\,, \qquad \text{(II.22)}$$

$$d_2^{(2)}(\nu) = \left[\frac{1}{7} - \frac{18(8-9\nu)}{35(5-6\nu)} + \frac{24(17-18\nu)}{35(11-14\nu)}\right]a_0 r_0^2\,,$$

$$d_4^{(2)}(\nu) = \frac{144}{35}\left[\frac{2}{11} - \frac{9-11\nu}{5(5-6\nu)} + \frac{67-73\nu}{55(11-14\nu)}\right]a_0 r_0^2\,,$$

$$d_6^{(2)}(\nu) = \frac{128}{77}\left[-1 + \frac{6(2-3\nu)}{11-14\nu}\right]a_0 r_0^2\,.$$

Коэффициенты $\mathcal{D}_0^{(2)}, C_n^{(2)}, \mathcal{D}_n^{(2)} (n=2,4,6)$ определяются на основе (II.13), (II.22) и имеют вид

$$C_2^{(2)} = \frac{c_2^{(2)}(\nu) + 3\,d_2^{(2)}(\nu)}{4(4-5\nu)}\,, \qquad C_4^{(2)} = \frac{c_4^{(2)}(\nu) + 5\,d_4^{(2)}(\nu)}{4(7-9\nu)}\,,$$

$$C_6^{(2)} = \frac{C_6^{(2)}(\nu) + 7 d_6^{(2)}(\nu)}{4(10-13\nu)}, \qquad \mathcal{D}_0^{(2)} = -C_0^{(2)}(\nu), \tag{II.23}$$

$$\mathcal{D}_2^{(2)} = -2(1-2\nu)\, C_2^{(2)} + d_2^{(2)}(\nu), \quad \mathcal{D}_4^{(2)} = 4\nu\, C_4^{(2)} + d_4^{(2)}(\nu),$$

$$\mathcal{D}_6^{(2)} = 2(1+2\nu)\, C_6^{(2)} + d_6^{(2)}(\nu).$$

В частности, при $\nu = 0,3$ имеем

$$C_2^{(2)} = 0,0692\,\frac{r_0^2 p}{2G}, \quad C_4^{(2)} = 0,1021\,\frac{r_0^2 p}{2G}, \quad C_6^{(2)} = -0,1794\,\frac{r_0^2 p}{2G},$$
$$\mathcal{D}_0^{(2)} = -0,4268\,\frac{r_0^2 p}{2G}, \quad \mathcal{D}_2^{(2)} = 0,0864\,\frac{r_0^2 p}{2G}, \quad \mathcal{D}_4^{(2)} = 0,0544\,\frac{r_0^2 p}{2G}, \tag{II.24}$$
$$\mathcal{D}_6^{(2)} = -0,5892\,\frac{r_0^2 p}{2G}.$$

Компоненты напряжений во втором приближении выражаются формулами

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)} = \sigma_{rr}^{(2)}(\rho,\gamma) - \frac{3(1-2\nu)}{1+\nu}(3 - 7\cos 6\gamma)\, p\rho^{-9} + \frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=1,3}\Big\{\Big[n(n+1)\,\times$$
$$\times\,(n^2+3n-2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}} - (n+1)(n+2)(n+3)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\,\times$$
$$\times \cos 3\gamma\, P_n(\mu) + \Big[(n^3 + 9n^2 - 2n\nu + 12\nu - 12)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}} -$$
$$-\,(n+2)(n+7)\,\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\sin 3\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\rho,\gamma) + \frac{3(1-2\nu)}{4(1+\nu)}(15-23\cos 6\gamma)\,p\rho^{-9} + \frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=1,3}\Big\{\Big[-n\times$$

$$\times(n+1)(n^2-2n-1+2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}} + (n+3)(n+1)^2\frac{D_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\times$$

$$\times\cos 3\gamma\, P_n(\mu) + \Big[(n+1)(-n+4-4\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}} + (n+3)\frac{D_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\times$$

$$\times\cos 3\gamma\,\mathrm{ctg}\,\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} - \Big[n(n^2-2n-1+2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}} -$$

$$-(n+1)^2\frac{D_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\sin 3\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} - \Big[(-n+4-4\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}} +$$

$$+\frac{D_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\Big(\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}\,\mathrm{ctg}\,\gamma - \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\,\frac{1}{\sin^2\gamma}\Big)\sin 3\gamma - \qquad (\mathrm{II}.25)$$

$$-6\Big[(n^2-2+2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}} - (n+2)\frac{D_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\sin 3\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big\},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}(\rho,\gamma) - \frac{3(1-2\nu)}{4(1+\nu)}(3+5\cos 6\gamma)\,p\rho^{-9} + \frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=1,3}\Big\{\Big[n\times$$

$$\times(n+1)(n+3-4n\nu-2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}} + (n+1)(n+3)\frac{D_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\times$$

$$\times\cos 3\gamma\, P_n(\mu) - \Big[(n+1)(-n+4-4\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}} + (n+3)\frac{D_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\times$$

$$\times\cos 3\gamma\,\mathrm{ctg}\,\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} - \Big[n(n+3-4n\nu-2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}} -$$

$$-(n+1)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\sin 3\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}+\Big[(-n+4-4\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}}+$$

$$+\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\left(\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}\,\mathrm{ctg}\,\gamma-\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\,\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)\sin 3\gamma\Big\},$$

$$\sigma_{\rho\gamma}^{(2)}=\sigma_{r\theta}^{(2)}(\rho,\gamma)+\frac{9(1-2\nu)}{1+\nu}\sin 6\gamma\,P\rho^{-9}+\frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=1,3}\Big\{\Big[-(n+1)\times$$

$$\times(n^2-2+2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}}+(n+2)(n+3)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\cos 3\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}-$$

$$-\Big[(n^2-2+2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}}-(n+2)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\sin 3\gamma\,\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}+$$

$$+3\Big[n(2n^2+n-1)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}}-(n+1)(2n+3)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\sin 3\gamma\,P_n(\mu)-$$

$$-3\Big[(-n+4-4\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+4}}+\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+6}}\Big]\sin 3\gamma\,\mathrm{ctg}\,\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big\}.$$

Здесь составляющие $\sigma_{rr}^{(2)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{r\theta}^{(2)}(\rho,\gamma)$ определяются формулами (II.4) при $j=2$.

На поверхности конического включения $(\rho=1)$, согласно (5.7), имеют место выражения

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{P}\approx 1{,}6134-0{,}0302\,P_1(\mu)+0{,}0142\,P_2(\mu)+0{,}5700\,P_3(\mu)-$$

$$-0{,}2206\,P_4(\mu)+0{,}3187\,P_6(\mu),\quad \frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}\approx 0{,}7361-0{,}0130\,P_1(\mu)+$$

$$+0{,}0342\,P_2(\mu)+0{,}2443\,P_3(\mu)-0{,}0120\,P_4(\mu)+0{,}0596\,P_6(\mu), \tag{II.26}$$

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\approx 0{,}6914-0{,}0130\,P_1(\mu)+0{,}0062\,P_2(\mu)+0{,}2443\,P_3(\mu)-$$

$$-0{,}0408\,P_4(\mu)+0{,}1611\,P_6(\mu)\,,\qquad \frac{\sigma_{\rho\gamma}^{*(2)}}{p}=-0{,}0303\,\frac{dP_1(\mu)}{d\gamma}+$$

$$+0{,}0134\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}+0{,}1900\,\frac{dP_3(\mu)}{d\gamma}+0{,}0031\,\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}+0{,}0707\,\frac{dP_6(\mu)}{d\gamma}.$$

По некоторым характерным сечениям имеют место выражения

$$\left.\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=0}\approx 1-\frac{0{,}0735}{\rho^2}+\frac{0{,}4807}{\rho^3}+\frac{1{,}1834}{\rho^4}-\frac{0{,}5978}{\rho^5}-\frac{0{,}5701}{\rho^6}+$$
$$+\frac{2{,}5114}{\rho^7}-\frac{1{,}6686}{\rho^9}\,,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=2\pi/3}\approx 1+\frac{0{,}0368}{\rho^2}+\frac{0{,}5722}{\rho^3}+\frac{0{,}7368}{\rho^4}+\frac{0{,}1757}{\rho^5}-\frac{0{,}5090}{\rho^6}+$$
$$+\frac{0{,}3950}{\rho^7}-\frac{0{,}3644}{\rho^9}\,,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=0}=\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=0}\approx 1+\frac{0{,}0087}{\rho^2}-\frac{0{,}2741}{\rho^3}-\frac{0{,}0624}{\rho^4}+\frac{0{,}0807}{\rho^5}+$$
$$+\frac{0{,}2850}{\rho^6}-\frac{0{,}8229}{\rho^7}+\frac{0{,}8342}{\rho^9}\,,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=2\pi/3}\approx 1-\frac{0{,}0043}{\rho^2}-\frac{0{,}2780}{\rho^3}-\frac{0{,}1520}{\rho^4}-\frac{0{,}0378}{\rho^5}+\frac{0{,}2698}{\rho^6}-$$
$$-\frac{0{,}3496}{\rho^7}+\frac{0{,}4199}{\rho^9}\,,\qquad\text{(II.27)}$$

$$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=2\pi/3}\approx 1-\frac{0{,}0043}{\rho^2}-\frac{0{,}2858}{\rho^3}-\frac{0{,}1215}{\rho^4}-\frac{0{,}0176}{\rho^5}+\frac{0{,}2392}{\rho^6}+$$
$$+\frac{0{,}1133}{\rho^7}-\frac{0{,}0554}{\rho^9}\,,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\rho\gamma}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=2\pi/3}\approx\frac{0{,}0075}{\rho^2}+\frac{0{,}0146}{\rho^3}-\frac{0{,}0341}{\rho^4}-\frac{0{,}1579}{\rho^5}-\frac{0{,}0088}{\rho^6}+$$
$$+\frac{0{,}2547}{\rho^7}-\frac{0{,}1333}{\rho^9}\,.$$

Таблица 22

γ	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\rho}}{p}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{p}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{p}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\gamma}}{p}$
0	2,266	I,049	I,049	0
$\pi/12$	2,03I	0,966	0,9I7	- 0,546
$\pi/6$	I,657	0,803	0,702	- 0,487
$\pi/4$	I,537	0,689	0,633	- 0,I4I
$\pi/3$	I,5I4	0,64I	0,64I	- 0,0I4
$5\pi/12$	I,386	0,636	0,602	- 0,062
$\pi/2$	I,424	0,696	0,623	0,3I5
$7\pi/12$	I,794	0,8II	0,778	0,36I
$2\pi/3$	2,043	0,868	0,8679	- 0,0573
$3\pi/4$	I,78I	0,793	0,738	-0,42I
$5\pi/6$	I,339	0,667	0,566	- 0,266
$11\pi/12$	I,I73	0,599	0,549	0,02I
π	I,I86	0,587	0,587	0

Таблица 23

ρ	$\gamma=0$		$\gamma=2\pi/3$			
	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\rho}}{P}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{P}, \frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\rho}}{P}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{P}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\gamma}}{P}$
I,00	2,266	I,049	2,043	0,868	0,8679	-0,0573
I,I0	I,997	0,90I	I,834	0,8II	0,858	-0,035
I,25	I,64I	0,880	I,576	0,834	0,874	-0,020
I,50	I,3I8	0,920	I,323	0,895	0,9I3	-0,009
2,00	I,I05	0,966	I,I27	0,956	0,960	-0,002
3,00	I,022	0,990	I,035	0,987	0,988	0,0004

Числовые значения табл.22,23 характеризуют напряженное состояние изотропной среды на поверхности конического включения и на некотором расстоянии от нее по сечениях $\gamma=0$ и $\gamma=2\pi/3$.

На основании неравенства (5.I9) для мажорантного напряжения $\sigma^{M}_{\rho\rho}/P$ получаем: $\sigma^{M}_{\rho\rho}/P$ =2,294 при $\gamma=0$ и $\sigma^{M}_{\rho\rho}/P$ =2,305 при $\gamma=2\pi/3$

Распределение напряжений на поверхности рассматриваемого конического включения произвольного меридионального сечения при $\nu=0{,}3$, $\varepsilon=1/4$ показано на рис. I7. Штриховые линии соответствуют напряженному состоянию на поверхности сферического включения. Из рис.I8 видно, что при незначительном отдалении от поверхности, все напряжения приближаются к основному напряженному состоянию среды, причем, при $\gamma=2\pi/3$ значения $\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}/P$ очень близки к соответствующим величинам $\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}/P$. Отметим, что максимальное отклонение напряжений $\sigma^{*(2)}_{\ell\ell}/P$ $(\ell=\rho,\gamma,\varphi)$ от соответствующих значений в среде без включения при $\rho=2$ составляет I2,7%, а при $\rho=3$ -3,5%.

Коэффициент концентрации напряжений $\sigma^{*(2)}_{\rho\rho}/P$ в вершине конического включения больше от соответствующего значения на поверх-

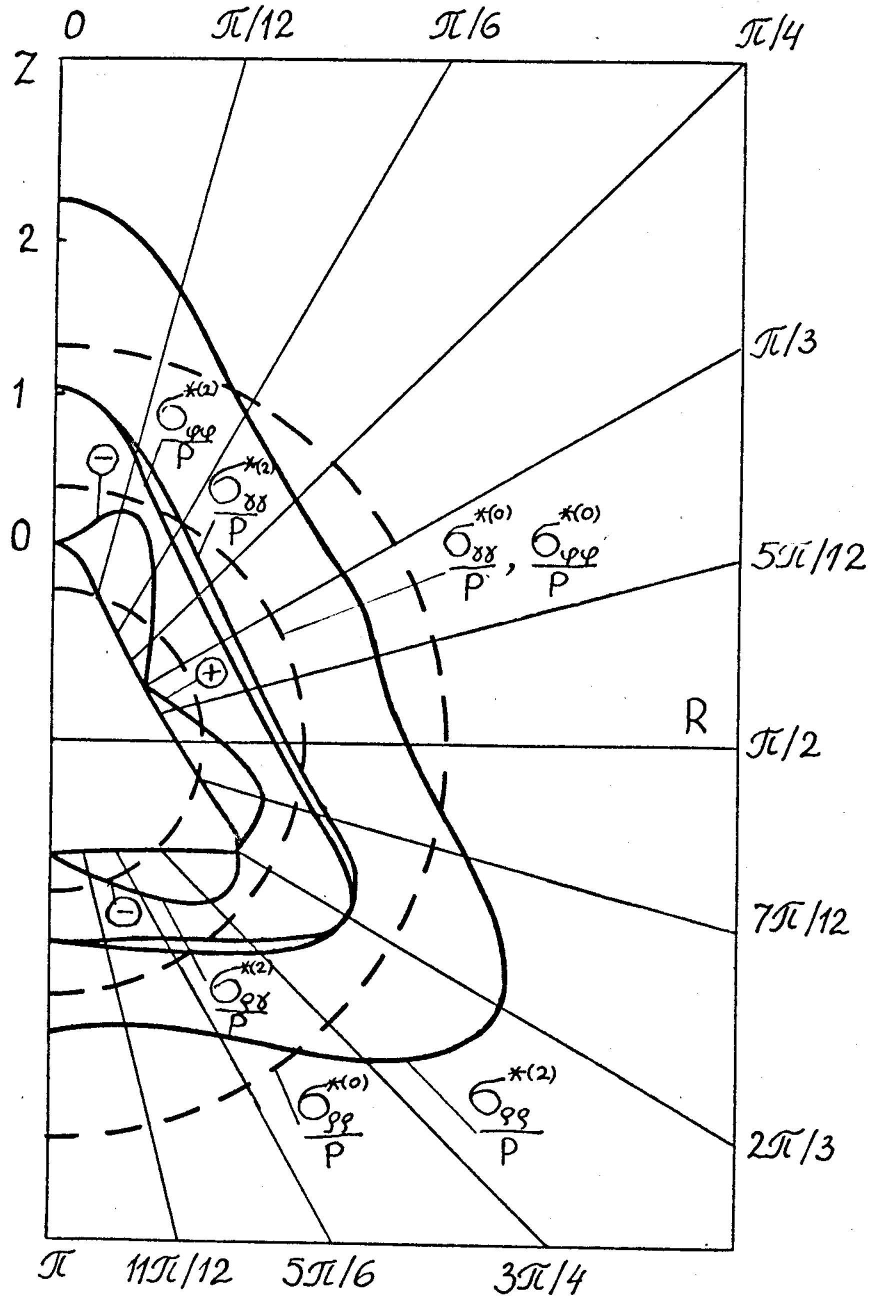

0
π/12
π/6
π/4
Z
2
1
0
π/3
5π/12
R
π/2
7π/12
2π/3
π
11π/12
5π/6
3π/4
$\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(2)}_{\vartheta\vartheta}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(0)}_{\vartheta\vartheta}}{P}, \frac{\sigma^{*(0)}_{\varphi\varphi}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\vartheta}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(0)}_{\rho\rho}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\rho}}{P}$
⊖
⊕
⊖

Рис.I7

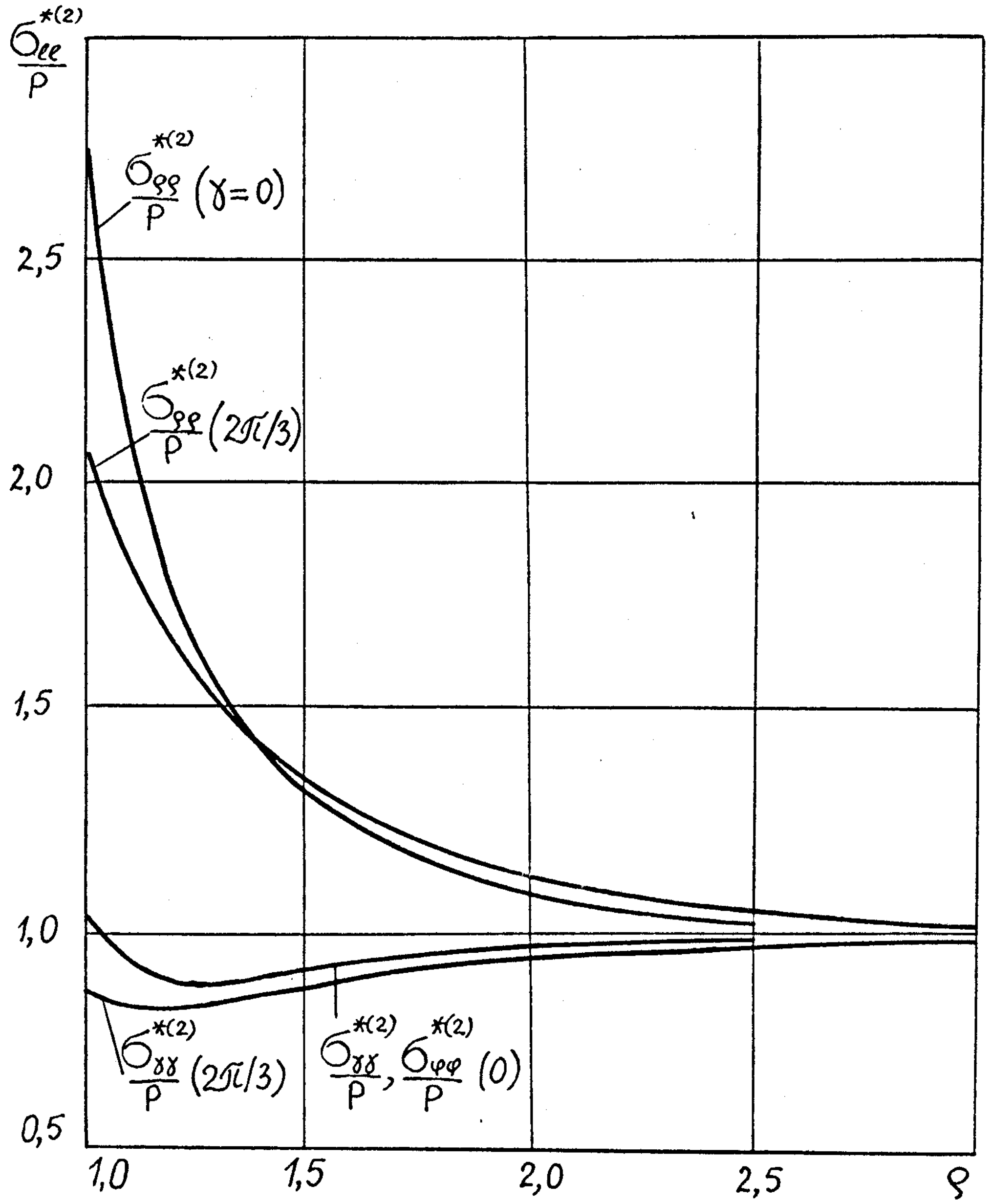

$\frac{\sigma_{ee}^{*(2)}}{P}$
$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{P}(\gamma=0)$
$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{P}(2\pi/3)$
$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}(2\pi/3)$
$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}, \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}(0)$
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
ρ

Рис.I8

ности сферического включения на 28,7 %, а при $\gamma = 2\pi/3$ такое отклонение составляет 20,9 %.

§ I2. Растяжение-сжатие среды с жестким биконическим или цилиндрическим включением

Рассмотрим задачу о напряженном состоянии упругой изотропной среды с жестким биконическим (рис.5) или цилиндрическим (рис.6) включением находящейся в поле равномерного всестороннего растяжения-сжатия. Решение этой задачи в нулевом приближении определяется формулами (II.I4),(II.I5).

В первом приближении, на основе соотношений (4.I4),(4.I6), (II.II), находим компоненты перемещений

$$u_\rho^{(1)} + \hat{u}_\rho^{(1)} = u_r^{(1)}(\rho,\gamma) + a_0 r_0 \cos 4\gamma\,(\rho^{-3} + 2\rho^{-6}), \qquad \text{(I2.I)}$$

$$u_\gamma^{(1)} + \hat{u}_\gamma^{(1)} = u_\theta^{(1)}(\rho,\gamma) - 4 a_0 r_0 \sin 4\gamma\,(\rho^{-3} - \rho^{-6}),$$

где $u_r^{(1)}(\rho,\gamma), u_\theta^{(1)}(\rho,\gamma)$ имеют вид (II.2) при $j=1$.

Следовательно, из граничных условий (II.I) получаем

$$C_0^{(1)}(\nu) = \frac{1}{5} a_0 r_0^2, \quad C_2^{(1)}(\nu) = \frac{16}{7} a_0 r_0^2, \quad C_4^{(1)}(\nu) = -\frac{192}{35} a_0 r_0^2, \qquad \text{(I2.2)}$$

$$C_n^{(1)}(\nu) = 0 \quad (n \neq 0,2,4), \quad d_n^{(1)}(\nu) = 0 \quad (n = 0,1,\ldots)$$

$$\left(a_0 = \frac{P}{2G}\,\frac{1-2\nu}{1+\nu} \right).$$

Коэффициенты $C_n^{(1)}$, $\mathcal{D}_n^{(1)}$, вычисленные по формулам (II.I3), такие

$$C_0^{(1)} = \frac{a_0 r_0^2}{20(1-\nu)}, \quad C_2^{(1)} = \frac{4 a_0 r_0^2}{7(4-5\nu)}, \quad C_4^{(1)} = -\frac{48\, a_0 r_0^2}{35(7-9\nu)},$$

$$\mathcal{D}_0^{(1)} = -4(1-\nu)\, C_0^{(1)}\,, \quad \mathcal{D}_2^{(1)} = -2(1-2\nu)\, C_2^{(1)}\,, \quad \mathcal{D}_4^{(1)} = 4\nu\, C_4^{(1)}\,. \qquad (12.3)$$

Составляющие напряжений первого приближения имеют вид

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)} = 4a_0 G\Big\{-\frac{1}{5}\left(\rho^{-3}-\rho^{-7}\right) - \frac{8}{7}\Big[\frac{5-\nu}{4-5\nu}\rho^{-3} + \frac{6(1-2\nu)}{4-5\nu}\rho^{-5} -$$

$$-2\rho^{-7}\Big]P_2(\mu) + \frac{192}{35(7-9\nu)}\Big[(14-\nu)\rho^{-5} - (7+6\nu)\rho^{-7}\Big]P_4(\mu)\Big\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)} = 2a_0 G\Big\{\Big[\frac{1}{5} + \frac{8(1-2\nu)}{7(4-5\nu)}\Big]\rho^{-3} - \Big[\frac{8(1-2\nu)}{7(4-5\nu)} - \frac{192\nu}{35(7-9\nu)}\Big]\rho^{-5} -$$

$$-\Big[\frac{1}{5} + \frac{192\nu}{35(7-9\nu)}\Big]\rho^{-7} + 8\Big[\frac{1-2\nu}{7(4-5\nu)}\rho^{-3} +$$

$$+\left(\frac{1-2\nu}{4-5\nu} + \frac{24\nu}{7(7-9\nu)}\right)\rho^{-5} - \frac{2(7+3\nu)}{7(7-9\nu)}\rho^{-7}\Big]P_2(\mu) -$$

$$-\frac{192}{5}\Big[\frac{7-2\nu}{7(7-9\nu)}\rho^{-5} - \frac{7+12\nu}{7(7-9\nu)}\rho^{-7}\Big]P_4(\mu)\Big\},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = 2a_0 G\Big\{\Big[\frac{1}{5} - \frac{8(1-2\nu)}{7(4-5\nu)}\Big]\rho^{-3} + \Big[\frac{8(1-2\nu)}{7(4-5\nu)} - \frac{192\nu}{35(7-9\nu)}\Big]\rho^{-5} - \qquad (12.4)$$

$$-\Big[\frac{1}{5} - \frac{192\nu}{35(7-9\nu)}\Big]\rho^{-7} + \frac{8}{7}\Big[\frac{3(1-2\nu)}{4-5\nu}\rho^{-3} +$$

$$+\left(\frac{5(1-2\nu)}{4-5\nu} - \frac{24\nu}{7-9\nu}\right)\rho^{-5} - \frac{14(1-3\nu)}{7-9\nu}\rho^{-7}\Big]P_2(\mu) -$$

$$-\frac{192}{5(7-9\nu)}\Big[(1-2\nu)\rho^{-5} - \rho^{-7}\Big]P_4(\mu)\Big\},$$

$$\sigma_{\rho\gamma}^{(1)} = \frac{16}{7}a_0 G\Big\{\frac{1}{4-5\nu}\Big[-(7-11\nu)\rho^{-3} + 4(1-2\nu)\rho^{-5}\Big]\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} +$$

$$+\frac{12}{5}\left[2\rho^{-3}-\frac{7+\nu}{7-9\nu}\rho^{-5}+\frac{12\nu}{7-9\nu}\rho^{-7}\right]\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}.$$

На поверхности включения $(\rho=1)$ справедливы выражения

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{(1)}}{P}=\frac{48(1-\nu)(1-2\nu)}{1+\nu}\left[-\frac{1}{7(4-5\nu)}P_2(\mu)+\frac{8}{5(7-9\nu)}P_4(\mu)\right],$$

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}}{P}=\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}}{P}=\frac{48\nu(1-2\nu)}{1+\nu}\left[-\frac{1}{7(4-5\nu)}P_2(\mu)+\frac{8}{5(7-9\nu)}P_4(\mu)\right], \qquad (I2.5)$$

$$\frac{\sigma_{\rho\gamma}^{(1)}}{P}=\frac{-24(1-\nu)(1-2\nu)}{1+\nu}\left[\frac{1}{7(4-5\nu)}\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-\frac{4}{5(7-9\nu)}\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}\right].$$

Во втором приближении компоненты перемещений такие

$$u_\rho^{(2)}+\hat{u}_\rho^{(2)}=u_r^{(2)}(\rho,\gamma)+\frac{1}{r_0}\cos 4\gamma\left\{2\mathcal{D}_0^{(1)}\rho^{-6}-\left[4(5-4\nu)C_2^{(1)}\rho^{-6}-\right.\right.$$

$$\left.-12\mathcal{D}_2^{(1)}\rho^{-8}\right]P_2(\mu)-\left.\left[16(7-4\nu)C_4^{(1)}\rho^{-8}-30\mathcal{D}_4^{(1)}\rho^{-10}\right]P_4(\mu)\right\}-$$

$$-\frac{1}{r_0}\sin 4\gamma\left\{\left[2(5-4\nu)C_2^{(1)}\rho^{-6}-3\mathcal{D}_2^{(1)}\rho^{-8}\right]\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}+\right.$$

$$\left.+\left[4(7-4\nu)C_4^{(1)}\rho^{-8}-5\mathcal{D}_4^{(1)}\rho^{-10}\right]\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}\right\}+\frac{4}{r_0}\sin 4\gamma\times \qquad (I2.6)$$

$$\times\left\{\left[2(1-2\nu)C_2^{(1)}\rho^{-6}+\mathcal{D}_2^{(1)}\rho^{-8}\right]\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-\left(4\nu C_4^{(1)}\rho^{-8}-\mathcal{D}_4^{(1)}\rho^{-10}\right)\times\right.$$

$$\times\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}+3a_0r_0\rho^{-10}(1-2\cos 8\gamma)-3{,}75\,a_0r_0\rho^{-7}(1-\cos 8\gamma),$$

$$u_\gamma^{(2)}+\hat{u}_\gamma^{(2)}=u_\theta^{(2)}(\rho,\gamma)+\frac{1}{r_0}\cos 4\gamma\left\{-4(1-2\nu)C_2^{(1)}\rho^{-6}-\right.$$

$$-4\mathcal{D}_2^{(1)}\rho^{-8}\Big]\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}+\Big[16\nu C_4^{(1)}\rho^{-8}-6\mathcal{D}_4^{(1)}\rho^{-10}\Big]\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}\Big\}-$$

$$-\frac{1}{r_0}\sin 4\gamma\Big\{\Big[(1-2\nu)2C_2^{(1)}\rho^{-6}+\mathcal{D}_2^{(1)}\rho^{-8}\Big]\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}-$$

$$-\Big[4\nu C_4^{(1)}\rho^{-8}-\mathcal{D}_4^{(1)}\rho^{-10}\Big]\frac{d^2P_4(\mu)}{d\gamma^2}\Big\}-\frac{4}{r_0}\sin 4\gamma\times$$

$$\times\Big\{-\mathcal{D}_0^{(1)}\rho^{-8}+\Big[2(5-4\nu)C_2^{(1)}\rho^{-6}-3\mathcal{D}_2^{(1)}\rho^{-8}\Big]P_2(\mu)+$$

$$+\Big[4(7-4\nu)C_4^{(1)}\rho^{-8}-5\mathcal{D}_4^{(1)}\rho^{-10}\Big]P_4(\mu)-6a_0r_0\rho^{-7}\sin 8\gamma.$$

Для удовлетворения краевым условиям (II.I), необходимо произведения вида

$$\cos 8\gamma,\ \cos 4\gamma,\ \cos 4\gamma\, P_n(\mu),\ \sin 4\gamma\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\quad (n=2,4)$$

разложить по полиномам Лежандра, а произведения

$$\sin 8\gamma,\ \sin 4\gamma,$$

$$\sin 4\gamma P_n(\mu),\ \sin 4\gamma\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2},\ \cos 4\gamma\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\ (n=2,4)$$

-по их производным, использовав для этого табл.3-6, например,

$$\cos 4\gamma P_2(\mu)=-\frac{16}{105}+\frac{5}{21}P_2(\mu)+\frac{32}{385}P_4(\mu)+\frac{64}{77}P_6(\mu),$$

$$\cos 4\gamma\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}=-\frac{160}{693}\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-\frac{87}{1001}\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}-\frac{32}{693}\frac{dP_6(\mu)}{d\gamma}+\frac{448}{1287}\frac{dP_8(\mu)}{d\gamma}.\quad (I2.7)$$

Согласно формул (II.I2) получим

$$
\begin{aligned}
C_0^{(2)}(\nu) &= \frac{1}{105}\left[\frac{361}{5} - \frac{128(10-17\nu)}{7(4-5\nu)} + \frac{4096(7+\nu)}{35(7-9\nu)}\right] a_0 r_0^2\,; \\
C_2^{(2)}(\nu) &= \frac{16}{21}\left[-\frac{37}{55} - \frac{41-40\nu}{7(4-5\nu)} + \frac{64(119-133\nu)}{385(7-9\nu)}\right] a_0 r_0^2\,, \\
C_4^{(2)}(\nu) &= \frac{64}{385}\left[\frac{61}{65} - \frac{8(25-29\nu)}{7(4-5\nu)} + \frac{6(8162-9709\nu)}{455(7-9\nu)}\right] a_0 r_0^2\,, \\
C_6^{(2)}(\nu) &= \frac{1024}{77}\left[-\frac{1}{5} + \frac{19-26\nu}{7(4-5\nu)} + \frac{2(77-94\nu)}{105(7-9\nu)}\right] a_0 r_0^2 \\
C_8^{(2)}(\nu) &= \frac{4096}{715}\left[1 - \frac{4(28-41\nu)}{3(7-9\nu)}\right] a_0 r_0^2\,, \\
d_2^{(2)}(\nu) &= \frac{16}{21}\left[\frac{16}{55} - \frac{53-58\nu}{7(4-5\nu)} + \frac{256(21-22\nu)}{385(7-9\nu)}\right] a_0 r_0^2\,, \\
d_4^{(2)}(\nu) &= \frac{64}{385}\left[-\frac{68}{65} - \frac{4(17-19\nu)}{7(4-5\nu)} + \frac{6(2072-2229\nu)}{455(7-9\nu)}\right] a_0 r_0^2\,, \\
d_6^{(2)}(\nu) &= \frac{1024}{77}\left[\frac{1}{15} - \frac{3-4\nu}{7(4-5\nu)} + \frac{21-23\nu}{105(7-9\nu)}\right] a_0 r_0^2\,, \\
d_8^{(2)}(\nu) &= \frac{4096}{2145}\left[-1 + \frac{7-11\nu}{7-9\nu}\right] a_0 r_0^2\,.
\end{aligned}
\qquad \text{(I2.8)}
$$

Удовлетворяя граничным условиям (II.I) на поверхности включения, приходим к системе алгебраических уравнений типа (II.I2), из которой находим следующие ненулевые коэффициенты $C_2^{(2)}$, $C_4^{(2)}$, $C_6^{(2)}$, $\mathcal{D}_0^{(2)}$, $\mathcal{D}_2^{(2)}$, $\mathcal{D}_4^{(2)}$, $\mathcal{D}_6^{(2)}$ по формулам (II.22), а $C_8^{(2)}$ и $\mathcal{D}_8^{(2)}$ имеют вид

$$
C_8^{(2)} = \frac{c_8^{(2)}(\nu) + 9 d_8^{(2)}(\nu)}{4(13-17\nu)}\,, \qquad \mathcal{D}_8^{(2)} = 4(1+\nu)\,C_8^{(2)} + d_8^{(2)}(\nu)\,. \qquad \text{(I2.9)}
$$

В частности, при $\nu = 0,3$ имеем

$$C_2^{(2)} = 0,0511\frac{r_0^2 P}{2G},\quad C_4^{(2)} = 0,0385\frac{r_0^2 P}{2G},\quad C_6^{(2)} = 0,1042\frac{r_0^2 P}{2G},$$

$$C_8^{(2)} = -0,2391\frac{r_0^2 P}{2G},\quad \mathcal{D}_0^{(2)} = -0,6587\frac{r_0^2 P}{2G},\quad \mathcal{D}_2^{(2)} = 0,0725\frac{r_0^2 P}{2G}, \tag{12.10}$$

$$\mathcal{D}_4^{(2)} = 0,0807\frac{r_0^2 P}{2G},\quad \mathcal{D}_6^{(2)} = 0,3132\frac{r_0^2 P}{2G},\quad \mathcal{D}_8^{(2)} = -1,3254\frac{r_0^2 P}{2G}.$$

Напряженное состояние во втором приближении характеризуется выражениями

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)} = \sigma_{rr}^{(2)}(\rho,\gamma) - \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}(13-21\cos 8\gamma)P\rho^{-11} + \frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=0,2,4}\Big\{\Big[n\times$$

$$\times(n+1)(n^2+3n-2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}} - (n+1)(n+2)(n+3)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}\Big]\times$$

$$\times\cos 4\gamma\, P_n(\mu) + \Big[\left(n^3+11n^2-2n\nu+16\nu-16\right)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}} -$$

$$-(n+2)(n+9)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}\Big]\sin 4\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\rho,\gamma) + \frac{3(1-2\nu)}{4(1+\nu)}(29-37\cos 8\gamma)P\rho^{-11} + \tag{12.11}$$

$$+\frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=0,2,4}\Big\{\Big[-n(n+1)(n^2-2n-1+2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}} + (n+3)(n+1)^2\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}\Big]\times$$

$$\times\cos 4\gamma\, P_n(\mu) + \Big[(n+1)(-n+4-4\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}} - (n+3)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}\Big]\times$$

$$\times\cos 4\gamma\,\mathrm{ctg}\,\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} - \Big[n(n^2-2n-1+2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}} - (n+1)^2\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}$$

$$\times \sin 4\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} - \left[(-n+4-4\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}} + \frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}\right] \times$$

$$\times \left(\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2} - \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)\sin 4\gamma -$$

$$-8\left[(n^2-2+2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}} - (n+2)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}\right]\sin 4\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Bigg\},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}(\rho,\gamma) - \frac{3(1-2\nu)}{4(1+\nu)}(3+5\cos 8\gamma)P\rho^{-11} + \frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=0,2,4}\Bigg\{\Big[-n \times$$

$$\times (n+1)(n+3-4n\nu-2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}} + (n+1)(n+3)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}\Big]\cos 4\gamma P_n(\mu) -$$

$$-\left[(n+1)(-n+4-4\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}} + (n+3)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}\right]\cos 4\gamma \,\mathrm{ctg}\,\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} -$$

$$-\left[n(n+3-4n\nu-2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}} - (n+1)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}\right]\sin 4\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} +$$

$$+\left[(-n+4-4\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}} + \frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}\right]\left(\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}\,\mathrm{ctg}\,\gamma -\right.$$

$$\left. - \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)\sin 4\gamma\Bigg\},$$

$$\sigma_{\rho\gamma}^{(2)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}(\rho,\gamma) + \frac{6(1-2\nu)}{1+\nu}\sin 8\gamma \, P\rho^{-11} + \frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=0,2,4}\Bigg\{\Big[-(n+1)\times$$

$$\times (n^2-2+2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}} + (n+2)(n+3)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}\Big]\cos 4\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} -$$

$$-\left[(n^2-2+2\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}} - (n+2)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}\right]\sin 4\gamma \frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2} +$$

$$+4\left[n(2n^2+n-1)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}} - (n+1)(2n+3)\frac{\mathcal{D}_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}\right]\sin 4\gamma P_n(\mu) -$$

$$-4\left[(-n+4-4\nu)\frac{C_n^{(1)}}{\rho^{n+5}}+\frac{D_n^{(1)}}{\rho^{n+7}}\right]\sin 4\gamma \operatorname{ctg}\gamma \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}.$$

Здесь компоненты $\sigma_{rr}^{(2)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{r\theta}^{(2)}(\rho,\gamma)$ выражаются формулами (II.4) при $j=2$.

На поверхности биконического $(\rho=1,\ \varepsilon=1/9,\ \nu=0,3)$ и цилиндрического $(\rho=1,\ \varepsilon=-1/9,\ \nu=0,3)$ включений с учетом трех приближений имеют место выражения в виде (5.7)

$$\left.\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=1/9}\approx 1,6137-0,0575\,P_2(\mu)+0,4257\,P_4(\mu)-0,0656\,P_6(\mu)+$$
$$+0,1984\,P_8(\mu),$$

$$\left.\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=-1/9}\approx 1,6137+0,0735\,P_2(\mu)-0,4290\,P_4(\mu)-0,0656\,P_6(\mu)+$$
$$+0,1984\,P_8(\mu),$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=1/9}=\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=1/9}\approx 0,6916-0,0247\,P_2(\mu)+0,1825\,P_4(\mu)- \qquad (12.12)$$
$$-0,0281\,P_6(\mu)+0,0851\,P_8(\mu),$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=-1/9}=\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=-1/9}\approx 0,6916+0,0315\,P_2(\mu)-0,1839\,P_4(\mu)-$$
$$-0,0281\,P_6(\mu)+0,0851\,P_8(\mu),$$

$$\left.\frac{\sigma_{\rho\gamma}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=1/9}\approx -0,0281\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}+0,1080\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}-0,0071\frac{dP_6(\mu)}{d\gamma}+$$
$$+0,0248\frac{dP_8(\mu)}{d\gamma},$$

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\gamma}}{p}\right|_{\varepsilon=-1/9} \approx 0{,}0375\,\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} - 0{,}1058\,\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma} - 0{,}0071\,\frac{dP_6(\mu)}{d\gamma} + $$

$$+ 0{,}0248\,\frac{dP_8(\mu)}{d\gamma}\,.$$

Аналитическая структура нормальных напряжений по степеням переменной ρ будет

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\rho}}{p}\right|_{\substack{\gamma=0\\ \varepsilon=1/9}} \approx 1 + \frac{0{,}4260}{\rho^3} + \frac{1{,}0783}{\rho^5} - \frac{0{,}9262}{\rho^7} + \frac{1{,}6586}{\rho^9} - \frac{1{,}1220}{\rho^{11}}\,,$$

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\rho}}{p}\right|_{\substack{\gamma=\pi/2\\ \varepsilon=1/9}} \approx 1 + \frac{0{,}6641}{\rho^3} + \frac{0{,}4605}{\rho^5} - \frac{0{,}2321}{\rho^7} + \frac{0{,}2270}{\rho^9} - \frac{0{,}2426}{\rho^{11}}\,,$$

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\rho}}{p}\right|_{\substack{\gamma=\pi/4\\ \varepsilon=-1/9}} \approx 1 + \frac{0{,}6458}{\rho^3} + \frac{0{,}5279}{\rho^5} - \frac{0{,}3322}{\rho^7} + \frac{0{,}3038}{\rho^9} - \frac{0{,}2699}{\rho^{11}}\,,$$

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{p}\right|_{\substack{\gamma=\pi/2\\ \varepsilon=1/9}} \approx 1 - \frac{0{,}2890}{\rho^3} - \frac{0{,}1429}{\rho^5} + \frac{0{,}1556}{\rho^7} - \frac{0{,}1635}{\rho^9} + \frac{0{,}2442}{\rho^{11}}\,,$$

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{p}\right|_{\substack{\gamma=\pi/4\\ \varepsilon=-1/9}} \approx 1 - \frac{0{,}3132}{\rho^3} - \frac{0{,}1544}{\rho^5} + \frac{0{,}2416}{\rho^7} - \frac{0{,}2488}{\rho^9} + \frac{0{,}2785}{\rho^{11}}\,, \qquad \text{(I2.I3)}$$

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{p}\right|_{\substack{\gamma=0\\ \varepsilon=1/9}} = \left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{p}\right|_{\substack{\gamma=0\\ \varepsilon=1/9}} \approx 1 - \frac{0{,}2789}{\rho^3} - \frac{0{,}1597}{\rho^5} + \frac{0{,}3732}{\rho^7} - $$

$$- \frac{0{,}5892}{\rho^9} + \frac{0{,}5610}{\rho^{11}}\,,$$

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{p}\right|_{\substack{\gamma=\pi/2\\ \varepsilon=1/9}} \approx 1 - \frac{0{,}3092}{\rho^3} - \frac{0{,}0331}{\rho^5} + \frac{0{,}1252}{\rho^7} + \frac{0{,}0230}{\rho^9} - \frac{0{,}0015}{\rho^{11}}\,,$$

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}\right|_{\substack{\gamma=\pi/4\\ \varepsilon=-1/9}} \simeq 1-\frac{0,3046}{\rho^3}-\frac{0,0371}{\rho^5}+\frac{0,1133}{\rho^7}+\frac{0,0408}{\rho^9}-\frac{0,0087}{\rho^{11}},$$

Распределение напряжений вдоль четверти меридионального сечения биконического и цилиндрического включений показано на рис. I9,20 (штриховые линии соответствуют сферическому включению). Как и в случае конического жесткого включения, распределение напряжений в окрестности рассматриваемых включений носит ярко выраженный локальный характер (рис.2I). Сплошные линиии на этом рисунке соответствуют значению $\varepsilon=1/9$, а штриховые - $\varepsilon=-1/9$. В частности, при $\rho=2$ максимальное отличие нормальных напряжений от соответствующих значений в среде без включения составляет 9,6 %, а при $\rho=3$ - 2,6 %.

Таблица 24

γ	$\varepsilon=1/9$			$\varepsilon=-1/9$		
	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\rho}}{P}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{P}, \frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\gamma}}{P}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\rho}}{P}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{P}, \frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\gamma}}{P}$
0	2,II5	0,906	0	I,39I	0,596	0
$\pi/12$	I,846	0,79I	- 0,308	I,379	0,59I	0,II5
$\pi/6$	I,545	0,662	- 0,I72	I,607	0,689	0,264
$\pi/4$	I,495	0,64I	- 0,0I8	I,875	0,804	0,0I7
$\pi/3$	I,462	0,627	0,I20	I,693	0,726	- 0,255
$5\pi/12$	I,66I	0,7I2	0,254	I,486	0,637	- 0,I34
$\pi/2$	I,877	0,804	0	I,50I	0,639	0

Таблица 25

Параметры	$\sigma_{ee}^{*(2)}/P$ \ ρ	I,00	I,I0	I,25	I,50	2,00	3,00
$\gamma=0,\ \varepsilon=1/9$	$\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}/P$	2,II5	I,825	I,504	I,244	I,082	I,020
	$\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/P,\ \sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}/P$	0,906	0,830	0,852	0,909	0,962	0,989
$\gamma=\pi/2,\ \varepsilon=1/9$	$\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}/P$	I,877	I,677	I,452	I,247	I,096	I,026
	$\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/P$	0,804	0,790	0,837	0,903	0,960	0,989
	$\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}/P$	0,804	0,82I	0,860	0,9I2	0,96I	0,989
$\gamma=\pi/4,\ \varepsilon=-1/9$	$\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}/P$	I,875	I,677	I,452	I,246	I,095	I,026
	$\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/P$	0,804	0,785	0,830	0,898	0,958	0,988
	$\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}/P$	0,804	0,82I	0,860	0,9I3	0,962	0,989

Таблица 26

ε	γ	$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{P}$	$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{M}}{P}$	$\Delta_{\rho}^{(3)}$	$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}$	$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{M}}{P}$	$\Delta_{\gamma}^{(3)}$
$\frac{I}{9}$	0	2,II5	2,I99	2,4	0,906	0,943	2,4
	$\pi/2$	I,877	I,9I5	I,3	0,804	0,82I	I,3
$-\frac{I}{9}$	0	I,39I	I,475	3,6	0,596	0,632	3,6
	$\pi/4$	I,875	I,9I6	I,4	0,804	0,82I	I,4
	$\pi/2$	I,50I	I,529	I,6	0,639	0,655	I,6

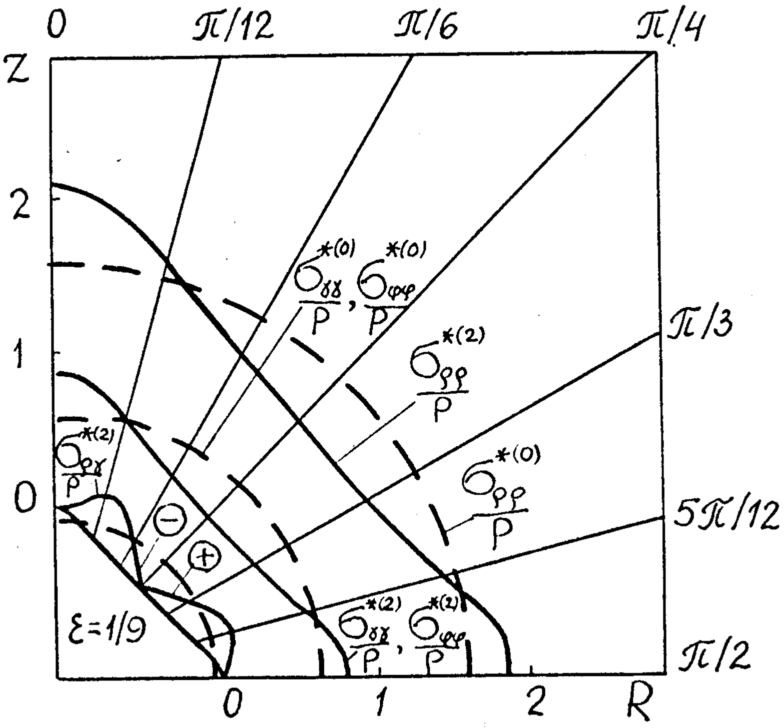

0
π/12
π/6
π/4
Z
2
1
0
π/3
5π/12
π/2
ε=1/9
0
1
2
R

Рис.I9

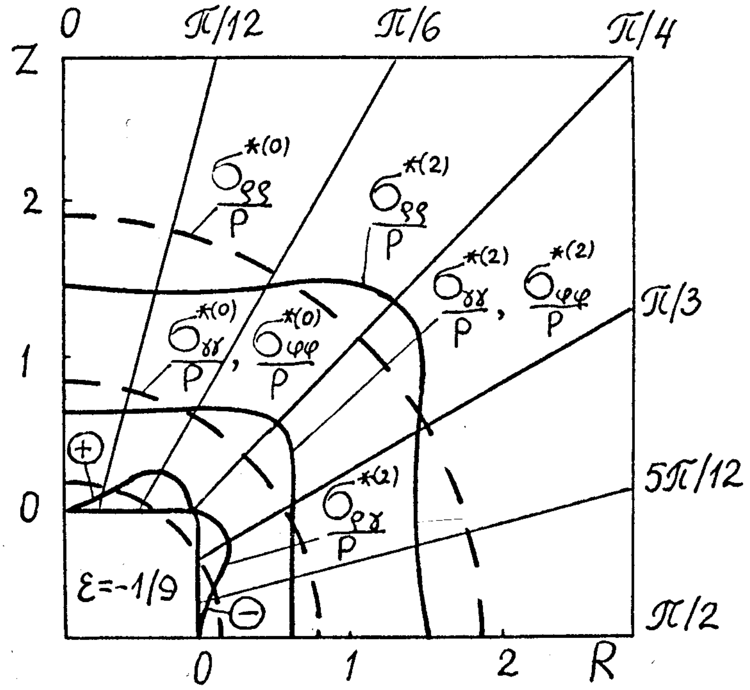

0
π/12
π/6
π/4
Z
2
1
0
π/3
5π/12
π/2
ε=-1/9
0
1
2
R

Рис.20

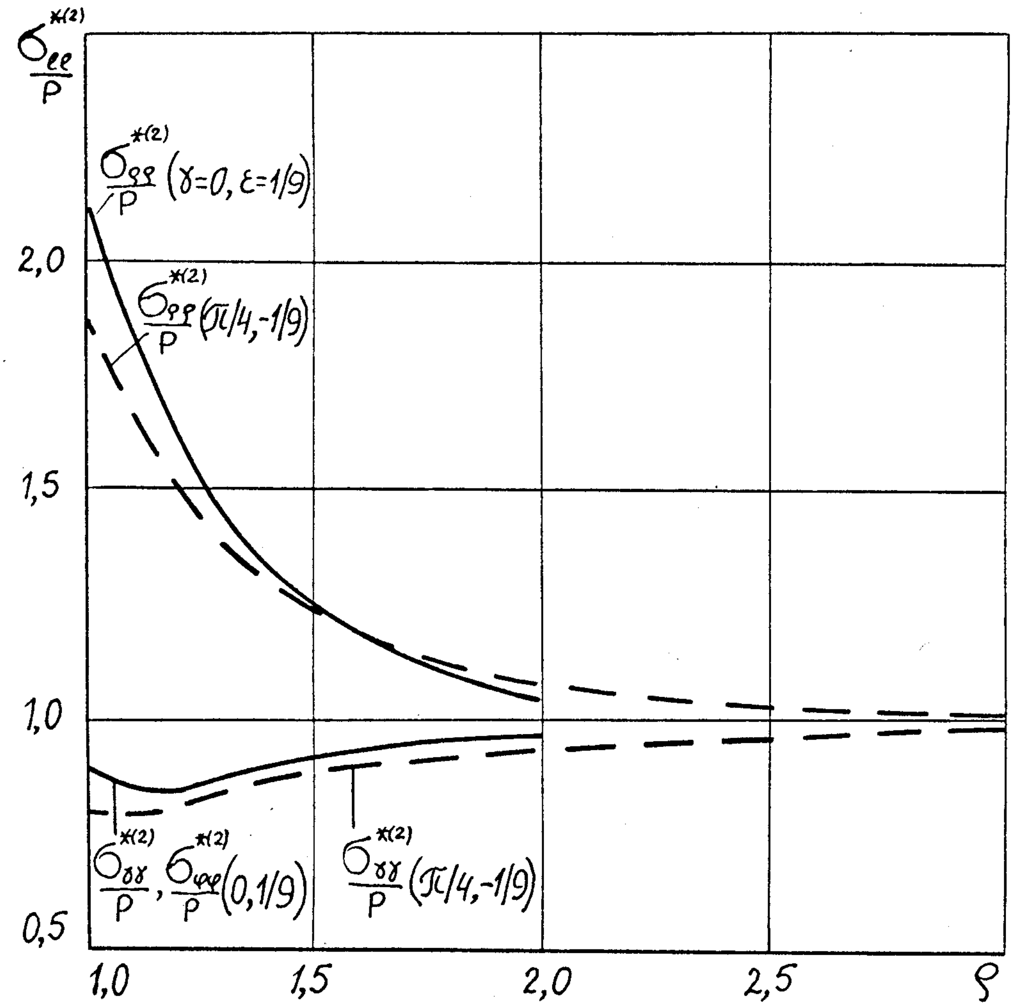

$\frac{\sigma_{ee}^{*(2)}}{P}$
$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{P}(\gamma=0, \varepsilon=1/9)$
$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{P}(\pi/4,-1/9)$
$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}, \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}(0,1/9)$
$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}(\pi/4,-1/9)$
2,0
1,5
1,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
ρ

Рис.2I

В табл. 24,25 приведены числовые значения напряжений $\sigma^{*(2)}_{ee}/P$ $(e = \rho, \gamma, \varphi)$, полученных с точностью до $O(\varepsilon^3)$, для случая растяжения-сжатия изотропной среды с жестким биконическим или цилиндрическим включением.

Вычисленные, согласно неравенства (5.I9), мажорантные напряжения (табл.26) дают возможность оценить напряженное состояние рассматриваемой среды. Максимальная погрешность $\Delta^{(3)}_{i} = \frac{|\varepsilon^3 \sigma^{(3)}_{ee}|}{P} \cdot 100\%$ $(e = \rho, \gamma, \varphi)$ которая допускается при пренебрежении членами содержащими ε^3 , меньше 4 %.

Коэффициенты концентрации напряжений $\sigma^{*(2)}_{\rho\rho}/P$ при $\gamma = 0$, $\varepsilon = 1/9$ и $\gamma = \pi/4$, $\varepsilon = -1/9$ на поверхности рассматриваемых включений больше от таких же напряжений на сферическом жестком включении, соответственно на 23,6 % и I3,9 %.

§ I3. Растяжение-сжатие среды с замкнутой конической полостью

Предположим, что требуется определить напряженное состояние однородной изотропной среды с замкнутой конической полостью (рис.2). Если рассматриваемая среда находится на "бесконечности" в поле равномерного всестороннего растяжения-сжатия усилиями интенсивности P , то основное напряженное состояние характеризуется компонентами

$$\hat{\sigma}_{\rho\rho} = \hat{\sigma}_{\gamma\gamma} = \hat{\sigma}_{\varphi\varphi} = P, \quad \hat{\sigma}_{\rho\gamma} = \hat{\sigma}_{\rho\varphi} = \hat{\sigma}_{\gamma\varphi} = 0 . \tag{I3.I}$$

Краевые условия в произвольном приближении на поверхности замкнутой конической полости, согласно (4.I4), имеют вид

$$\sigma^{(0)}_{rr}\Big|_{\rho=1} = -P, \quad \sigma^{(0)}_{r\theta}\Big|_{\rho=1} = 0,$$

$$\sigma^{(n)}_{rr}\Big|_{\rho=1} = -\sum_{j=0}^{n-1} \left[\Lambda^{(n-j)}_{1} \sigma^{(j)}_{rr} + \Lambda^{(n-j)}_{2} \left(\sigma^{(j)}_{\theta\theta} - \sigma^{(j)}_{rr} \right) + \Lambda^{(n-j)}_{3} \sigma^{(j)}_{r\theta} \right]_{\rho=1}, \tag{I3.2}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(n)}\Big|_{\rho=1} = -\sum_{j=0}^{n-1}\left[\Lambda_4^{(n-j)}\sigma_{r\theta}^{(j)} + \frac{1}{2}\Lambda_3^{(n-j)}\left(\sigma_{\theta\theta}^{(j)} - \sigma_{rr}^{(j)}\right)\right]_{\rho=1} \quad (n \geqslant 1).$$

Компоненты напряжений $\sigma_{\gamma\gamma}^{(n)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}$ определяются из рекуррентных соотношений (II.3).

Используя выражения (II.3),(II.4) и граничные условия (I3.2), получим

$$\frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-n(n^2+3n-2\nu)C_n^{(j)} + (n+1)(n+2)\mathcal{D}_n^{(j)}\right]P_n(\mu) = \Phi^{(j)}(\nu,\gamma),$$

$$\frac{2G}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n^2-2+2\nu)C_n^{(j)} - (n+2)\mathcal{D}_n^{(j)}\right]\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} = \Psi^{(j)}(\nu,\gamma), \tag{I3.3}$$

где $\Phi^{(j)}(\nu,\gamma)$, $\Psi^{(j)}(\nu,\gamma)$ – известные функции, которые могут быть представлены в виде

$$\Phi^{(j)}(\nu,\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(j)}(\nu)P_n(\mu), \quad \Psi^{(j)}(\nu,\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty}b_n^{(j)}(\nu)\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}. \tag{I3.4}$$

Заметим, что функции $\Phi^{(j)}(\nu,\gamma)$ содержат произведения вида

$$\cos k\gamma\, P_n(\mu), \quad \sin k\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}, \quad \cos k\gamma\,\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2},$$

а $\Psi^{(j)}(\rho,\gamma)$ – выражения

$$\sin k\gamma\, P_n(\mu), \quad \cos k\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}, \quad \sin k\gamma\,\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}.$$

Следовательно, для получения представлений (I3.4) необходимо предварительно воспользоваться разложениями только по полиномам Лежандра или их производных, приведенных в табл.3-6.

Подставляя выражения (I3.4) в правые части уравнений (I3.3), после приравнивания коэффициентов при одинаковых полиномах Лежандра или их первых производных, получим систему алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} -n(n^2+3n-2\nu)\,C_n^{(j)}+(n+1)(n+2)\,\mathcal{D}_n^{(j)} &= \frac{r_0^2}{2G}\,a_n^{(j)}(\nu) \\ (n^2-2+2\nu)\,C_n^{(j)}-(n+2)\,\mathcal{D}_n^{(j)} &= \frac{r_0^2}{2G}\,b_n^{(j)}(\nu) \end{aligned}\right\} \qquad (13.5)$$

из которой находим

$$C_n^{(j)} = -\frac{a_n^{(j)}(\nu)+(n+1)\,b_n^{(j)}(\nu)}{2\left[n(n+1)+1-(2n+1)\nu\right]}\,\frac{r_0^2}{2G}\,, \quad \mathcal{D}_0^{(j)} = \frac{a_0^{(j)}(\nu)}{2}\,\frac{r_0^2}{2G}\,, \qquad (13.6)$$

$$\mathcal{D}_n^{(j)} = \frac{1}{n+2}\left[(n^2-2+2\nu)\,C_n^{(j)} - \frac{r_0^2}{2G}\,b_n^{(j)}(\nu)\right] \quad (n \geqslant 1)\,.$$

Допустим, что требуется определить напряженное состояние рассматриваемой среды, ограниченной изнутри замкнутой конической полостью (рис.2), которой соответствует $K=2$, $\varepsilon=1/4$ в уравнениях (4.2). На основании (13.2), в нулевом приближении получим

$$\mathcal{D}_0^{(0)} = -\frac{1}{2}\,\frac{r_0^2 P}{2G}\,, \quad C_n^{(0)} = \mathcal{D}_n^{(0)} = 0 \quad (n \geqslant 1)\,. \qquad (13.7)$$

Следовательно, для напряжений имеют место формулы

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(0)}}{P} = 1-\frac{1}{\rho^3}\,, \quad \frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(0)}}{P} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(0)}}{P} = 1+\frac{1}{2\rho^3}\,, \quad \frac{\sigma_{\rho\gamma}^{*(0)}}{P} = 0\,. \qquad (13.8)$$

Компоненты (13,8) соответствуют точному решению задачи для изотропной среды со сферической полостью. В частности, на ее поверхности коэффициент концентрации равен

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(0)}}{P}\right|_{\rho=1} = \left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(0)}}{P}\right|_{\rho=1} = 1,5\,. \qquad (13.9)$$

В первом приближении для коэффициентов $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$ $(n=1,3)$, входящих в правые части уравнений (13.5), справедливы выражения

$$a_1^{(1)} = \frac{9}{5}P\,,\quad a_3^{(1)} = -\frac{24}{5}P\,,\quad b_1^{(1)} = -\frac{9}{10}P\,,\quad b_3^{(1)} = \frac{36}{5}P\,. \tag{13.10}$$

Тогда по формулам (13.6) находим

$$C_3^{(1)} = -\frac{12}{5(13-7\nu)}\frac{r_0^2 P}{2G}\,,\quad C_n^{(1)} = 0\ (n \neq 3)\,,$$

$$\mathcal{D}_1^{(1)} = \frac{6}{20}\frac{r_0^2 P}{2G}\,,\quad \mathcal{D}_3^{(1)} = -\frac{12(4-\nu)}{5(13-7\nu)}\frac{r_0^2 P}{2G}\,,\quad \mathcal{D}_n^{(1)} = 0\,(n \neq 1,3)\,. \tag{13.11}$$

Учитывая вид операторов (4.16), а также формулы (11.4),(13.11), для компонентов первого приближения из (11.3) получим

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{(1)}}{P} = (\rho^{-4} - \rho^{-6})\left[\frac{9}{5}P_1(\mu) + \frac{72(9-\nu)}{5(13-7\nu)}P_3(\mu)\right],$$

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}}{P} = -\frac{9}{10(13-7\nu)}\left[3(7-13\nu)\rho^{-4} + (19-\nu)\rho^{-6}\right]P_1(\mu) -$$

$$-\frac{36}{5(13-7\nu)}\left[(3-2\nu)\rho^{-4} - (13-2\nu)\rho^{-6}\right]P_3(\mu),$$

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}}{P} = -\frac{9}{2(13-7\nu)}\left[(1+5\nu)\rho^{-4} - 3(3-\nu)\rho^{-6}\right]P_1(\mu) - \tag{13.12}$$

$$-\frac{36}{13-7\nu}\left[(1-2\nu)\rho^{-4} - \rho^{-6}\right]P_3(\mu)\,,$$

$$\frac{\sigma_{\rho\gamma}^{(1)}}{P} = -(\rho^{-4} - \rho^{-6})\left[0{,}9\,\frac{dP_1(\mu)}{d\gamma} - \frac{12(7+2\nu)}{5(13-7\nu)}\frac{dP_3(\mu)}{d\gamma}\right].$$

При определении компонентов напряженного состояния во втором приближении задача значительно усложняется. На основании формул (II.3),(II.4), при известных коэффициентах (I3.II), имеем

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{(2)}}{P}=\frac{\sigma_{rr}^{(2)}(\rho,\gamma)}{P}+\frac{3(3-7\cos 6\gamma)}{2\rho^9}+\frac{36\cos 3\gamma}{\rho^2}\left\{-\frac{1}{5\rho^5}P_1(\mu)-\right.$$

$$\left.-\frac{8}{5(13-7\nu)}\left[\frac{9-\nu}{\rho^5}-\frac{5(4-\nu)}{\rho^7}\right]P_3(\mu)\right\}-\frac{12\sin 3\gamma}{5\rho^5}\left\{\frac{3}{\rho^4}\frac{dP_1(\mu)}{d\gamma}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{13-7\nu}\left[\frac{3(16+\nu)}{\rho^4}-\frac{25(4-\nu)}{\rho^6}\right]\frac{dP_3(\mu)}{d\gamma}\right\},$$

$$\frac{\sigma_{\rho\gamma}^{(2)}}{P}=\frac{\sigma_{r\theta}^{(2)}(\rho,\gamma)}{P}-\frac{9\sin 6\gamma}{2\rho^9}+\frac{6\cos 3\gamma}{5\rho^2}\left\{\frac{3}{\rho^5}\frac{dP_1(\mu)}{d\gamma}+\right. \tag{I3.I3}$$

$$\left.+\frac{4}{13-7\nu}\left[\frac{2(7+2\nu)}{\rho^5}-\frac{15(4-\nu)}{\rho^7}\right]\frac{dP_3(\mu)}{d\gamma}\right\}+\frac{3\sin 3\gamma}{10\rho^3}\left\{\frac{3}{\rho^4}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d^2P_1(\mu)}{d\gamma^2}+\frac{8}{13-7\nu}\left[\frac{7+2\nu}{\rho^4}-\frac{5(4-\nu)}{\rho^6}\right]\frac{d^2P_3(\mu)}{d\gamma^2}\right\}-\frac{27\sin 3\gamma}{10\rho^3}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{13-7\nu}\left[\frac{47-53\nu}{\rho^4}+\frac{8(4-\nu)}{\rho^6}\right]P_1(\mu)+\frac{8}{13-7\nu}\left[\frac{21-4\nu}{\rho^4}-\frac{11(4-\nu)}{\rho^6}\right]P_3(\mu)\right\}.$$

Здесь $\sigma_{rr}^{(2)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{r\theta}^{(2)}(\rho,\gamma)$ выражаются формулами (II.4).

Используем разложения произведений $\cos 6\gamma$, $\cos 3\gamma\, P_n(\mu)$, $\sin 3\gamma\, dP_n(\mu)/d\gamma$ $(n=1,3)$ в ряды по полиномам Лежандра, а $\sin 6\gamma$, $\cos 3\gamma\, dP_n(\mu)/d\gamma$, $\sin 3\gamma\, P_n(\mu)$, $\sin 3\gamma\, d^2P_n(\mu)/d\gamma^2$ -по их производных,приведенных в табл.3,5, например,

$$\cos 3\gamma\, P_3(\mu)=\frac{8}{35}+\frac{1}{21}P_2(\mu)+\frac{12}{385}P_4(\mu)+\frac{160}{231}P_6(\mu),$$

$$\cos 3\gamma \frac{dP_3(\mu)}{d\gamma} = -\frac{4}{21}\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma} - \frac{27}{385}\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma} + \frac{80}{231}\frac{dP_6(\mu)}{d\gamma}. \qquad (13.14)$$

Из граничных условий (13.2) получим систему алгебраических уравнений, из которой находим

$$C_2^{(2)} = \frac{2(307-313\nu)}{14(7-5\nu)(13-7\nu)}\frac{r_0^2 p}{2G}, \qquad C_4^{(2)} = \frac{12(813-777\nu)}{385(7-3\nu)(13-7\nu)}\frac{r_0^2 p}{2G},$$

$$C_6^{(2)} = -\frac{320}{77(13-7\nu)}\frac{r_0^2 p}{2G}, \qquad D_0^{(2)} = \frac{6(43-97\nu)}{35(13-7\nu)}\frac{r_0^2 p}{2G}, \qquad (13.15)$$

$$D_2^{(2)} = \frac{2(1147-1446\nu+287\nu^2)}{28(7-5\nu)(13-7\nu)}\frac{r_0^2 p}{2G}, \qquad D_4^{(2)} = \frac{16(3192-3243\nu+375\nu^2)}{385(7-3\nu)(13-7\nu)}\frac{r_0^2 p}{2G},$$

$$D_6^{(2)} = -\frac{64(43-7\nu)}{77(13-7\nu)}\frac{r_0^2 p}{2G}.$$

Напряжения $\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}/p$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}/p$ имеют вид

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}}{p} = \frac{\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\rho,\gamma)}{p} + \frac{3(23\cos 6\gamma - 15)}{8\rho^9} + \frac{18\cos 3\gamma}{5(13-7\nu)}\frac{1}{\rho^2}\left\{3\left[\frac{7-13\nu}{\rho^5} + \frac{4(4-\nu)}{\rho^7}\right]P_1(\mu) + 4\left[\frac{2(3-2\nu)}{\rho^5} - \frac{13(4-\nu)}{\rho^7}\right]P_3(\mu)\right\} +$$

$$+ \frac{3\sin 3\gamma}{10(13-7\nu)}\frac{1}{\rho^3}\left\{3\left[\frac{9(11-9\nu)}{\rho^4} + \frac{8(4-\nu)}{\rho^6}\right]\frac{dP_1(\mu)}{d\gamma} + 8\left[\frac{3(17+2\nu)}{\rho^4} - \frac{43(4-\nu)}{\rho^6}\right]\frac{dP_3(\mu)}{d\gamma}\right\}, \qquad (13.16)$$

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}}{p} = \frac{\sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}(\rho,\gamma)}{p} + \frac{3(3+5\cos 6\gamma)}{8\rho^9} + \frac{\cos 3\gamma}{\rho^2}\left\{\frac{18}{5(13-7\nu)}\left[\frac{5(1+5\nu)}{\rho^5} - \right.\right.$$

$$- \frac{12(4-\nu)}{\rho^7}\Big] P_1(\mu) + \frac{72}{5(13-7\nu)}\Big[\frac{10(1-2\nu)}{\rho^5} - \frac{7(4-\nu)}{\rho^7}\Big] P_3(\mu) \Big\} +$$

$$+ \frac{\sin 3\gamma}{\rho^3}\Big\{\frac{9}{10(13-7\nu)}\Big[\frac{5(1+5\nu)}{\rho^4} - \frac{8(4-\nu)}{\rho^6}\Big]\frac{dP_1(\mu)}{d\gamma} +$$

$$+ \frac{12}{5(13-7\nu)}\Big[\frac{15(1-2\nu)}{\rho^4} - \frac{7(4-\nu)}{\rho^6}\Big]\frac{dP_3(\mu)}{d\gamma}\Big\} .$$

Приведем некоторые характерные частные случаи формул (13.12), (13.16). На поверхности конической полости $(\rho=1)$ справедливы выражения

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^{(1)}_{\gamma\gamma}}{p} &= -\frac{36(1-\nu)}{13-7\nu} P_1(\mu) - \frac{72}{13-7\nu} P_3(\mu) ,\\
\frac{\sigma^{(1)}_{\varphi\varphi}}{p} &= \frac{36(1-\nu)}{13-7\nu} P_1(\mu) + \frac{72\nu}{13-7\nu} P_3(\mu) ,\\
\frac{\sigma^{(2)}_{\gamma\gamma}}{p} &= a(\nu) + b(\nu) P_2(\mu) + c(\nu) P_4(\mu) + d(\nu) P_6(\mu) ,\\
\frac{\sigma^{(2)}_{\varphi\varphi}}{p} &= -a(\nu) + b^*(\nu) P_2(\mu) + \nu c(\nu) P_4(\mu) + \nu d(\nu) P_6(\mu) .
\end{aligned} \tag{13.17}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
a(\nu) &= \frac{2}{5\Omega(\nu)}\left(115073 - 438825\nu + 465367\nu^2 - 141615\nu^3\right) ,\\
b(\nu) &= \frac{4}{\Omega(\nu)}\left(-48377 + 32268\nu + 44105\nu^2 - 28980\nu^3\right) ,\\
b^*(\nu) &= \frac{4}{\Omega(\nu)}\left(3457 - 10185\nu + 5956\nu^2 + 5913\nu^3\right) ,
\end{aligned} \tag{13.18}$$

$$c(\nu)=\frac{576(7-5\nu)}{5\Omega(\nu)}\left(-791+839\nu\right), \qquad d(\nu)=\frac{15360}{77(13-7\nu)},$$

$$\Omega(\nu)=77(7-3\nu)(7-5\nu)(13-7\nu).$$

Напряжения в первом и втором приближениях по сечению $\gamma=0$ определяются формулами

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}}{p}=\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}}{p}=\frac{9}{2(13-7\nu)}\left(-\frac{9-11\nu}{\rho^4}+\frac{17-3\nu}{\rho^6}\right),$$

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}}{p}=\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}}{p}=\frac{2(2167-6588\nu+4805\nu^2)}{35(7-5\nu)(13-7\nu)}\frac{1}{\rho^3}+ \tag{I3.I9}$$

$$+\frac{3(195797-1046931\nu+1302547\nu^2-449925\nu^3)}{5\Omega(\nu)}\frac{1}{\rho^5}-$$

$$-\frac{6(46823-44160\nu+6897\nu^2)}{77(7-3\nu)(13-7\nu)}\frac{1}{\rho^7}+\frac{5101-439\nu}{11(13-7\nu)}\frac{1}{\rho^9}.$$

В точке $\rho=1,\gamma=2\pi/3$, согласно обозначений (5.7), находим

$$\frac{\overset{*}{\sigma}{}_{\gamma\gamma}^{(2)}}{p}=1,5+\varepsilon\,\frac{9(11-4\nu)}{2(13-7\nu)}+$$

$$+\varepsilon^2\,\frac{6(414904-666647\nu+315219\nu^2-35130\nu^3)}{385(7-3\nu)(7-5\nu)(13-7\nu)}, \tag{I3.20}$$

$$\frac{\overset{*}{\sigma}{}_{\varphi\varphi}^{(2)}}{p}=1,5-\varepsilon\,\frac{9(4-11\nu)}{2(13-7\nu)}-$$

$$-\varepsilon^2\,\frac{6(39746-506908\nu+662031\nu^2-223215\nu^3)}{385(7-3\nu)(7-5\nu)(13-7\nu)}.$$

Из формул (I3.8),(I3.I7),(I3.I9) при $\nu=0,3$, $\varepsilon=1/4$ получим выражения

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}\right|_{\rho=1} \approx 1{,}5190-0{,}5780\,P_1(\mu)-0{,}2993\,P_2(\mu)+1{,}6514\,P_3(\mu)-$$
$$-0{,}7584\,P_4(\mu)+1{,}1438\,P_6(\mu),$$

$$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{p}\right|_{\rho=1} \approx 1{,}4809+0{,}5780\,P_1(\mu)+0{,}0086\,P_2(\mu)+0{,}4954\,P_3(\mu)-$$
$$-0{,}2275\,P_4(\mu)+0{,}3431\,P_6(\mu), \tag{13.21}$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=0}=\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=0} \approx 1+\frac{0{,}5371}{\rho^3}-\frac{0{,}5883}{\rho^4}-\frac{0{,}0176}{\rho^5}+\frac{1{,}6617}{\rho^6}-$$
$$-\frac{2{,}5047}{\rho^7}+\frac{2{,}5903}{\rho^9},$$

$$\left.\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=0} \approx 1-\frac{1{,}5693}{\rho^3}+\frac{3{,}3224}{\rho^4}-\frac{1{,}2017}{\rho^5}-\frac{3{,}3224}{\rho^6}+$$
$$+\frac{6{,}9517}{\rho^7}-\frac{5{,}1807}{\rho^9}.$$

В табл. 27 приведены значения $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(n)}/p$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{*(n)}/p$ $(n=1,2)$ в зависимости от изменения угла γ.

Числовые значения табл.28 показывают изменение напряженного состояния среды при отдалении от вершины конической полости.

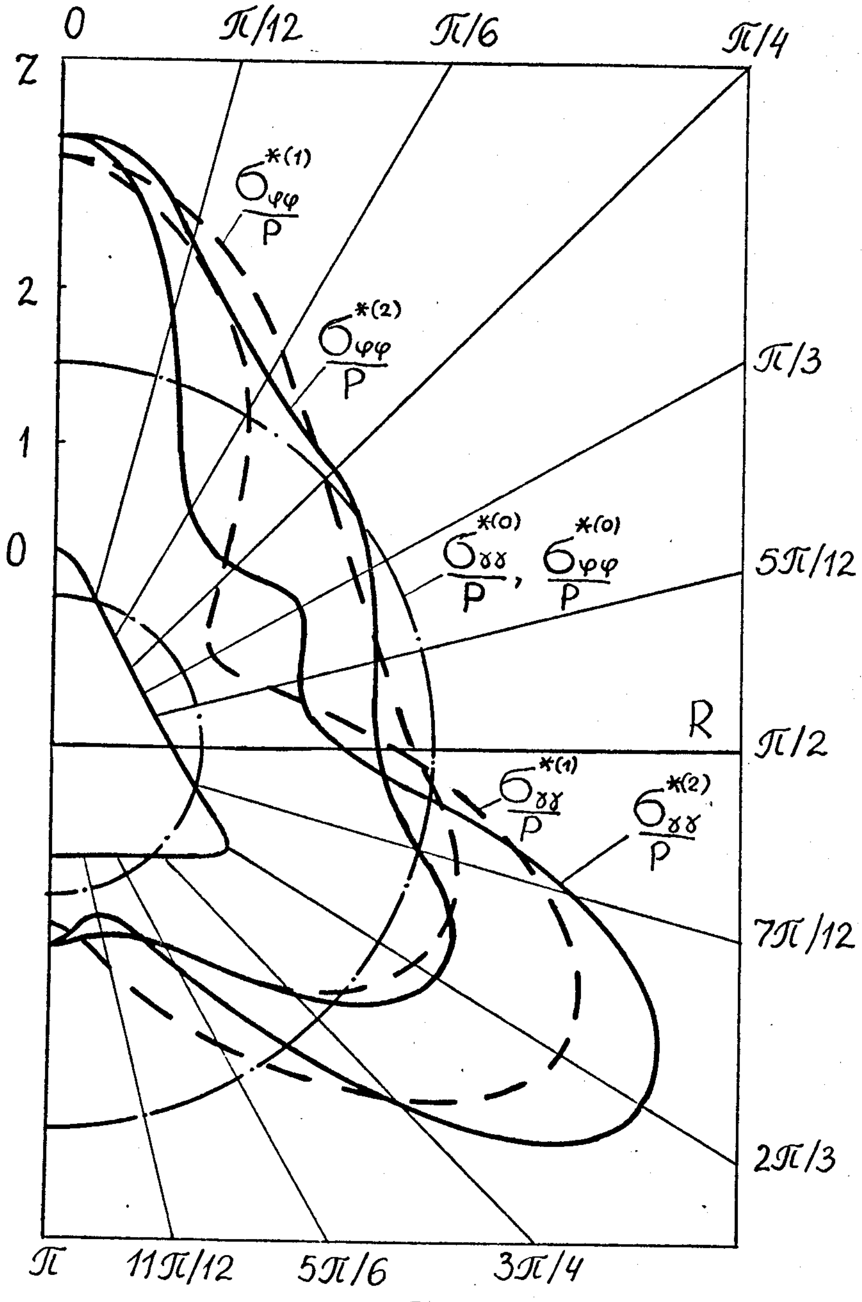
На рис. 22 показано распределение напряжений $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(n)}/p$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{*(n)}/p$ $(n=0,1,2)$ вдоль половины меридионального сечения конической полости $\rho=1$ при $\nu=0{,}3$, $\varepsilon=1/4$. Изменение коэффициентов концентрации по сечению $\gamma=0$ $(\nu=0{,}3,\ \varepsilon=1/4)$ показано на рис.23. Как видно, зона повышенной концентрации напряжений носит ярко выраженный локальный характер. Так при $\rho=2$, $\gamma=0$ отклонение относительных напряжений от соответствующих значений для сплошной среды составляет 6,3 %, а при $\rho=3$, $\gamma=0$ – 1,9 %.

Таблица 2[illegible]

γ	$\frac{\sigma^{*(1)}_{\gamma\gamma}}{P}$	$\frac{\sigma^{(1)}_{\varphi\varphi}}{P}$	$\frac{\sigma^{*(2)}}{P}$ [illegible]	[illegible]
0	2,573	[illegible],573	2,67[illegible]	[illegible],679
$\pi/12$	2,270	2,457	[illegible],95[illegible]	2,42[illegible]
$\pi/6$	I,536	2,I62	0,922	2,[illegible]
$\pi/4$	0,799	I,82I	0,882	I,[illegible]46
$\pi/3$	0,489	I,572	I,I34	I,72[illegible]
$5\pi/12$	0,78[illegible]	I,479	0,86[illegible]	I,438
$\pi/2$	I,500	I,500	I,02[illegible]	I,2[illegible]4
$7\pi/12$	[illegible],2I9	I,52I	2,298	[illegible]
$2\pi/3$	2,512	I,428	3,I57	[illegible],58[illegible]
$3\pi/4$	2,20I	I,I79	2,283	I,20[illegible]
$5\pi/6$	[illegible],464	0,839	0,85I	0,69[illegible]
$11\pi/12$	[illegible],730	0,543	0,416	[illegible],5I3
π	0,427	0,427	0,332	[illegible],53[illegible]

Табли[illegible]а

ρ	$\frac{\sigma^{*(0)}_{\gamma\gamma}}{P}, \frac{\sigma^{*(0)}_{\varphi\varphi}}{P}$	$\frac{\sigma^{*(0)}_{\rho\rho}}{P}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{P}, \frac{\sigma^{(2)}_{\varphi\varphi}}{P}$	[illegible] $\rho\rho$
I,00	I,500	0	[illegible],679	[illegible]
I,I0	I,376	0,249	I,[illegible]	[illegible]
I,25	I,256	0,488	I,2[illegible]	[illegible],055
I,50	I,I48	0,704	I,I0[illegible]	[illegible]
2,00	[illegible],063	0,875	I,0[illegible]	[illegible]
3,00	I,0I9	0,963	I,0[illegible]	[illegible]



0
π/12
π/6
π/4
Z
2
1
0
π/3
5π/12
R
π/2
7π/12
2π/3
π
11π/12
5π/6
3π/4
$\frac{\sigma^{*(1)}_{\varphi\varphi}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(0)}_{\gamma\gamma}}{P}, \frac{\sigma^{*(0)}_{\varphi\varphi}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(1)}_{\gamma\gamma}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{P}$

Рис.22

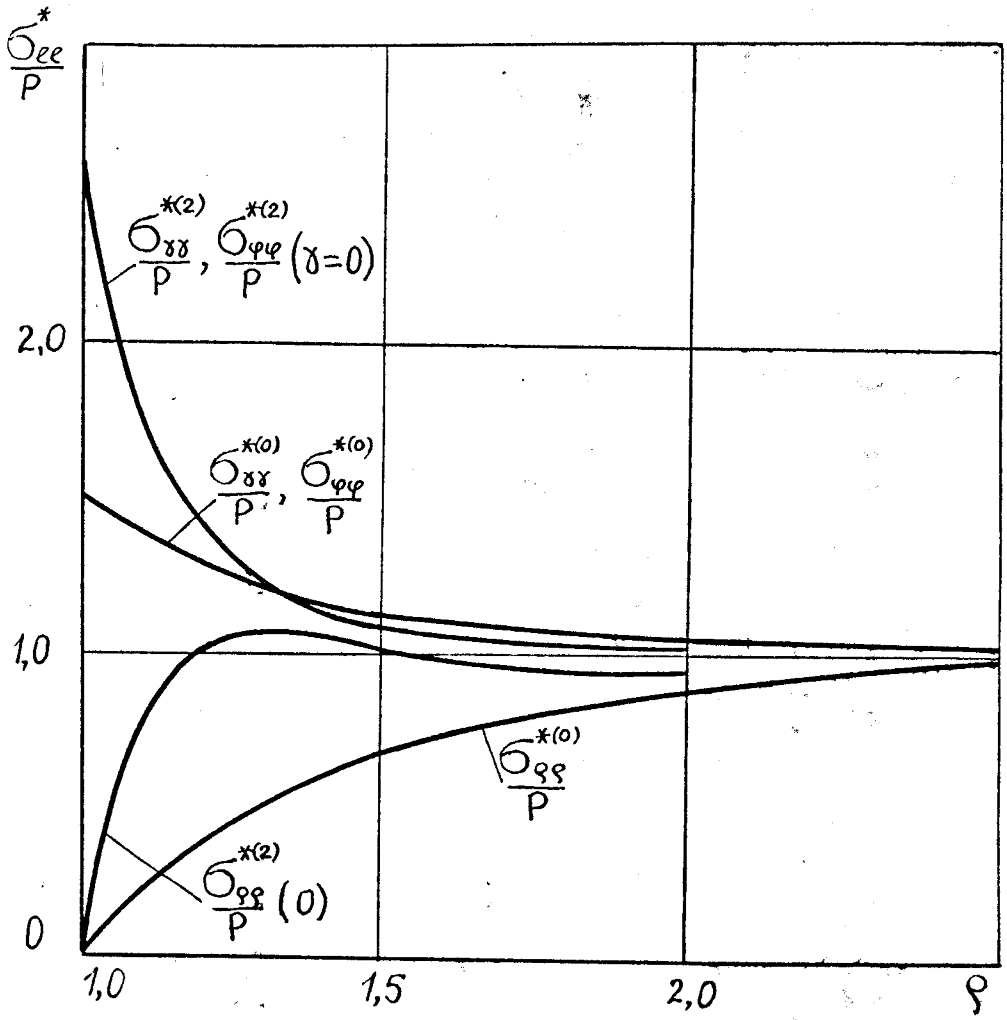

$\frac{\sigma^*_{ee}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{P}, \frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}(\gamma=0)$
$\frac{\sigma^{*(0)}_{\gamma\gamma}}{P}, \frac{\sigma^{*(0)}_{\varphi\varphi}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(0)}_{\rho\rho}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(2)}_{\rho\rho}}{P}(0)$
2,0
1,0
0
1,0
1,5
2,0
ρ

Рис.23

Коэффициент концентрации напряжений $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/P$ у вершине конической полости во втором приближении превышает аналогичное значение в нулевом приближении (сферическая полость) на 44,0 %, а при $\gamma = 2\pi/3$ – на 52,5 %.

Мажорантные напряжения $\sigma_{\gamma\gamma}^{M}$ в сечениях наименьшего радиуса кривизны $(\rho=1,\ \gamma=0,\ \gamma=2\pi/3)$ равны $\sigma_{\gamma\gamma}^{M}\Big|_{\gamma=0} = 2{,}690\,P$ и $\sigma_{\gamma\gamma}^{M}\Big|_{\gamma=2\pi/3} = 4{,}295\,P$.

§ I4. Растяжение-сжатие среды с биконической или замкнутой цилиндрической полостью

Предположим, что требуется исследовать напряженное состояние упругой изотропной среды с биконической (рис.5) или замкнутой цилиндрической (рис.6) полостью. Допустим, что поверхность полости $\rho = 1$ не загружена, а на "бесконечности" среда находится под действием усилий (I3.I). Исследование напряженного состояния, ввиду сложности граничной поверхности $\rho = 1$, описываемой на основе параметрического уравнения (8.I), будем проводить методом "возмущения формы границы", изложенным в § 4. Тогда для этой задачи справедливы формулы (I3.7)-(I3.9), характеризующие нулевое приближение поставленной задачи.

В первом приближении коэффициенты разложений (I3.4) имеют простой вид

$$a_0^{(1)} = \frac{1}{5}P,\quad a_2^{(1)} = \frac{16}{7}P,\quad a_4^{(1)} = -\frac{192}{35}P,\quad b_2^{(1)} = -\frac{8}{7}P,\quad b_4^{(1)} = \frac{96}{35}P. \tag{I4.I}$$

Следовательно, по формулам (I3.6) легко определелить коэффициенты

$$C_2^{(1)} = \frac{4}{7(7-5\nu)}\frac{r_0^2 P}{2G},\qquad C_4^{(1)} = -\frac{48}{35(7-3\nu)}\frac{r_0^2 P}{2G}, \tag{I4.2}$$

$$\mathcal{D}_0^{(1)} = \frac{1}{10}\frac{r_0^2 P}{2G},\quad \mathcal{D}_2^{(1)} = \frac{8(2-\nu)}{7(7-5\nu)}\frac{r_0^2 P}{2G},\quad \mathcal{D}_4^{(1)} = -\frac{32(7-\nu)}{35(7-3\nu)}\frac{r_0^2 P}{2G},$$

$$C_n^{(1)}=0\ (n\neq 2,4)\ ,\quad \mathcal{D}_n^{(1)}=0\ (n\neq 0,2,4)\ .$$

На основании соотношений (II.3),(II.4) в первом приближении $(j=1)$ получаем

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{(1)}}{P}=\sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}h_{kj}(\nu)\rho^{-2j-3}P_{2k}(\mu)+3\rho^{-7}\cos 4\gamma ,$$

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}}{P}=\sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\ell_{kj}(\nu)\rho^{-2j-3}P_{2k}(\mu)-1{,}5\rho^{-7}\cos 4\gamma , \qquad (14.3)$$

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}}{P}=\sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}t_{kj}(\nu)\rho^{-2j-3}P_{2k}(\mu)-1{,}5\rho^{-7}\cos 4\gamma ,$$

$$\frac{\sigma_{\rho\gamma}^{(1)}}{P}=\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2}g_{kj}(\nu)\rho^{-2j-3}\frac{dP_{2k}(\mu)}{d\gamma}+6\rho^{-7}\sin 4\gamma .$$

Здесь $h_{kj}(\nu)$, $\ell_{kj}(\nu)$, $t_{kj}(\nu)$, $g_{kj}(\nu)$ - известные выражения

$$h_{00}=\frac{1}{5}\ ,\quad h_{10}=-\frac{16(5-\nu)}{7(7-5\nu)}\ ,\quad h_{11}=\frac{96(2-\nu)}{7(7-5\nu)}\ ,$$

$$h_{21}=\frac{384(14-\nu)}{35(7-3\nu)}\ ,\ h_{22}=-\frac{192(7-\nu)}{7(7-3\nu)}\ ,\ h_{01}=h_{02}=h_{12}=h_{20}=0,$$

$$\ell_{00}=-\frac{1}{10}+\frac{8(1-2\nu)}{7(7-5\nu)}\ ,\quad \ell_{01}=\frac{8(2-\nu)}{7(7-5\nu)}+\frac{192\nu}{35(7-3\nu)}\ , \qquad (14.4)$$

$$\ell_{02}=-\frac{32(7-\nu)}{35(7-3\nu)}\ ,\ \ell_{10}=\frac{8(1-2\nu)}{7(7-5\nu)}\ ,\ \ell_{11}=-\frac{8(2-\nu)}{7-5\nu}+\frac{192\nu}{7(7-3\nu)}\ ,$$

$$\ell_{20}=0\ ,$$

$$\ell_{12}=-\frac{32(7-\nu)}{7(7-3\nu)}, \quad \ell_{21}=-\frac{192(7-2\nu)}{35(7-3\nu)}, \quad \ell_{22}=\frac{96(7-\nu)}{5(7-3\nu)},$$

$$t_{00}=-\frac{1}{10}-\frac{8(1-2\nu)}{7(7-5\nu)}, \quad t_{01}=-\frac{8(2-\nu)}{7(7-5\nu)}-\frac{192\nu}{35(7-3\nu)},$$

$$t_{02}=\frac{32(7-\nu)}{35(7-3\nu)}, \quad t_{10}=\frac{24(1-2\nu)}{7(7-5\nu)}, \quad t_{11}=-\frac{40(2-\nu)}{7(7-5\nu)}-$$

$$-\frac{192\nu}{7(7-3\nu)}, \quad t_{12}=\frac{32(7-\nu)}{7(7-3\nu)}, \quad t_{20}=0,$$

$$t_{21}=-\frac{192(1-2\nu)}{5(7-3\nu)}, \quad t_{22}=\frac{288(7-\nu)}{35(7-3\nu)},$$

$$g_{10}=\frac{8(1+\nu)}{7(7-5\nu)}, \quad g_{11}=-\frac{32(2-\nu)}{7(7-5\nu)}, \quad g_{12}=g_{20}=0,$$

$$g_{21}=-\frac{96(7+\nu)}{35(7-3\nu)}, \quad g_{22}=\frac{192(7-\nu)}{35(7-3\nu)},$$

причем

$$\sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\ell_{kj}(\nu)=\sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}t_{kj}(\nu)=-\frac{1}{10}-\frac{16(5-\nu)}{7(7-5\nu)}+\frac{96(21+11\nu)}{35(7-3\nu)}. \quad (14.5)$$

В явном виде формулы (14.3) такие

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{(1)}}{p}=\frac{1}{5}\left(\rho^{-3}-\rho^{-7}\right)-\frac{16}{7(7-5\nu)}\Big[(5-\nu)\rho^{-3}-6(2-\nu)\rho^{-5}+$$

$$+(7-5\nu)\rho^{-7}\Big]P_2(\mu)+\frac{384(14-\nu)}{35(7-3\nu)}\left(\rho^{-5}-\rho^{-7}\right)P_4(\mu),$$

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}}{p}=\frac{31-125\nu}{70(7-5\nu)}\rho^{-3}+\frac{8(70+103\nu-105\nu^2)}{35(7-3\nu)(7-5\nu)}\rho^{-5}-\frac{399-43\nu}{70(7-3\nu)}\rho^{-7}+$$

$$+\left[\frac{8(1-2\nu)}{7(7-5\nu)}\rho^{-3}-\frac{8(98+259\nu+141\nu^2)}{7(7-3\nu)(7-5\nu)}\rho^{-5}-\frac{8(21-\nu)}{7(7-3\nu)}\rho^{-7}\right]P_2(\mu)-$$

$$-\frac{192}{35(7-3\nu)}\left[(7-2\nu)\rho^{-5}-(21-2\nu)\rho^{-7}\right]P_4(\mu),$$

(I4.6)

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}}{p}=-\frac{129-195\nu}{70(7-5\nu)}\rho^{-3}-\frac{8(70+103\nu-105\nu^2)}{35(7-3\nu)(7-5\nu)}\rho^{-5}+\frac{497-85\nu}{70(7-3\nu)}\rho^{-7}+$$

$$+\left[\frac{24(1-2\nu)}{7(7-5\nu)}\rho^{-3}-\frac{8(70+103\nu-105\nu^2)}{7(7-3\nu)(7-5\nu)}\rho^{-5}+\frac{56(5-\nu)}{7(7-3\nu)}\rho^{-7}\right]P_2(\mu)$$

$$-\frac{192}{5(7-3\nu)}\left[(1-2\nu)\rho^{-5}-\rho^{-7}\right]P_4(\mu),$$

$$\frac{\sigma_{\rho\gamma}^{(1)}}{p}=\frac{8}{7(7-5\nu)}\left[(1+\nu)\rho^{-3}-4(2-\nu)\rho^{-5}+(7-5\nu)\rho^{-7}\right]\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-$$

$$-\frac{96(7+\nu)}{35(7-3\nu)}\left(\rho^{-5}-\rho^{-7}\right)\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}.$$

На поверхности полости $\rho=1$ получим

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}}{p}=-\Omega(\nu)-\frac{16(119-177\nu+70\nu^2)}{7(7-3\nu)(7-5\nu)}P_2(\mu)+\frac{384}{5(7-3\nu)}P_4(\mu),$$

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}}{p}=\Omega(\nu)+\frac{16(98-189\nu+79\nu^2)}{7(7-3\nu)(7-5\nu)}P_2(\mu)+\frac{384\nu}{5(7-3\nu)}P_4(\mu), \quad \text{(I4.7)}$$

где

$$\Omega(\nu)=\frac{8(91-186\nu+95\nu^2)}{35(7-3\nu)(7-5\nu)} \ . \qquad (14.8)$$

Если $\gamma=0$, то формулы (14.6) преобразуются к виду

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{(1)}}{P}=-\frac{9(39-5\nu)}{35(7-5\nu)}\rho^{-3}+\frac{96}{7}\left[\frac{2-\nu}{7-5\nu}+\frac{4(14-\nu)}{5(7-3\nu)}\right]\rho^{-5}-$$

$$-\frac{1}{35}\left[87+\frac{384(14-\nu)}{7-3\nu}\right]\rho^{-7},$$

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}}{P}=\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}}{P}=\frac{3(37-95\nu)}{70(7-5\nu)}\rho^{-3}-\frac{48(266-429\nu+175\nu^2)}{35(7-3\nu)(7-5\nu)}\rho^{-5}+ \qquad (14.9)$$

$$+\frac{3(399-43\nu)}{14(7-3\nu)}\rho^{-7} \ .$$

При определении напряжений во втором приближении задача несколько усложняется. В этом случае для составляющих $\sigma_{\rho\rho}^{(2)}/P$, $\sigma_{\rho\gamma}^{(2)}/P$ имеем формулы

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{(2)}}{P}=\frac{\sigma_{rr}^{(2)}(\rho,\gamma)}{P}-3\cos 4\gamma\left\{0{,}2\rho^{-7}-\frac{16}{7(7-5\nu)}\left[(5-\nu)\rho^{-7}-\right.\right.$$

$$\left.-10(2-\nu)\rho^{-9}\right]P_2(\mu)+\frac{64}{7(7-3\nu)}\left[2(14-\nu)\rho^{-9}-7(7-\nu)\rho^{-11}\right]P_4(\mu)\Big\}+$$

$$+8\sin 4\gamma\left\{\frac{2}{7(7-5\nu)}\left[3(3+\nu)\rho^{-7}-22(2-\nu)\rho^{-9}\right]\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-\right. \qquad (14.10)$$

$$\left.-\frac{24}{35(7-3\nu)}\left[2(28+\nu)\rho^{-9}-13(7-\nu)\rho^{-11}\right]\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}\right\}+\frac{3}{4}\rho^{-11}(13-21\cos 8\gamma),$$

$$\frac{\sigma_{\rho\gamma}^{(2)}}{\rho}=\frac{\sigma_{r\theta}^{(2)}(\rho,\gamma)}{\rho}-\frac{8}{7}\cos 4\gamma\left\{\frac{1}{7-5\nu}\left[3(1+\nu)\rho^{-7}-20(2-\nu)\rho^{-9}\right]\times\right.$$

$$\times\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-\frac{12}{5(7-3\nu)}\left[5(7+\nu)\rho^{-9}-14(7-\nu)\rho^{-11}\right]\left.\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}\right\}-$$

$$-8\sin 4\gamma\left\{\frac{1}{7(7-5\nu)}\left[(1+\nu)\rho^{-7}-4(2-\nu)\rho^{-9}\right]\frac{d^2P_2(\mu)}{d\gamma^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{12}{35(7-3\nu)}\left[(7+\nu)\rho^{-9}-2(7-\nu)\rho^{-11}\right]\frac{d^2P_4(\mu)}{d\gamma^2}\right\}+$$

$$+3\rho^{-11}\sin 8\gamma+4\rho^{-4}\sin 4\gamma\;\frac{\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\rho,\gamma)-\sigma_{rr}^{(1)}(\rho,\gamma)}{\rho},$$

где, в соответствии с (I4.3), введено обозначение

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\rho,\gamma)-\sigma_{rr}^{(1)}(\rho,\gamma)}{\rho}=\sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\left(\ell_{kj}-h_{kj}\right)\rho^{-2j-3}P_{2k}(\mu), \quad \text{(I4.II)}$$

а компоненты $\sigma_{rr}^{(2)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{r\theta}^{(2)}(\rho,\gamma)$ выражаются формулами (II.4) при $j=2$.

Для удовлетворения краевых условий (I3.2) во втором приближении следует выражения

$$\cos 8\gamma,\ \cos 4\gamma,\ \cos 4\gamma\, P_n(\mu),\ \sin 4\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\quad (n=2,4)$$

разложить по полиномам Лежандра, а

$$\sin 8\gamma,\ \sin 4\gamma,\ \sin 4\gamma\, P_n(\mu),\ \sin 4\gamma\,\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2},\ \cos 4\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\ (n=2,4)$$

– по их первым производным. Это удается реализовать на основании рекуррентных соотношений § 3, например,

$$\sin 4\gamma\,\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}=-\frac{64}{63}-\frac{400}{693}P_2(\mu)-\frac{592}{1001}P_4(\mu)-\frac{416}{693}P_6(\mu)+$$

$$+\frac{3584}{1287}P_8(\mu),$$

$$\cos 4\gamma\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}=-\frac{160}{693}\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-\frac{87}{1001}\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}-\frac{32}{693}\frac{dP_6(\mu)}{d\gamma}+ \qquad (I4.I2)$$

$$+\frac{448}{1287}\frac{dP_8(\mu)}{d\gamma}.$$

В результате таких разложений коэффициенты $a_n^{(2)}(\nu)$, $b_n^{(2)}(\nu)$, входящие в правые части алгебраической системы уравнений (I3.5), имеют вид

$$a_0^{(2)}(\nu)=\frac{1}{5}\left[-\frac{251}{5}+\frac{128(5-7\nu)}{49(7-5\nu)}+\frac{8192(7-5\nu)}{147(7-3\nu)}\right]P,$$

$$a_2^{(2)}(\nu)=\frac{16}{7}\left[-\frac{46}{55}-\frac{5(41-31\nu)}{7(7-5\nu)}+\frac{64(133-65\nu)}{231(7-3\nu)}\right]P,$$

$$a_4^{(2)}(\nu)=\frac{192}{385}\left[-\frac{382}{65}-\frac{48(15-11\nu)}{7(7-5\nu)}+\frac{17423-8095\nu}{91(7-3\nu)}\right]P,$$

$$a_6^{(2)}(\nu)=\frac{1024}{11}\left[-\frac{1}{5}+\frac{115-77\nu}{49(7-5\nu)}+\frac{161-73\nu}{147(7-3\nu)}\right]P, \qquad (I4.I3)$$

$$a_8^{(2)}(\nu)=\frac{4096}{11}\left[\frac{7}{65}-\frac{2(49-17\nu)}{39(7-3\nu)}\right]P,$$

$$b_2^{(2)}(\nu)=\frac{8}{7}\left[\frac{38}{165}-\frac{71-45\nu}{7(7-5\nu)}-\frac{64(49-69\nu)}{231(7-3\nu)}\right]P,$$

$$b_4^{(2)}(\nu)=\frac{96}{35}\left[-\frac{118}{715}+\frac{8(25-26\nu)}{77(7-5\nu)}-\frac{8085-8017\nu}{1001(7-3\nu)}\right]P,$$

$$b_6^{(2)}(\nu)=\frac{512}{77}\left[\frac{1}{15}-\frac{5-3\nu}{7-5\nu}-\frac{77-69\nu}{21(7-3\nu)}\right]P,$$

$$b_8^{(2)}(\nu)=\frac{2048}{429}\left[-\frac{1}{5}+\frac{4(7-2\nu)}{7-3\nu}\right].$$

Тогда формулы (I3.6) дают возможность определить ненулевые коэффициенты $C_n^{(2)}\ (n=2,4,6,8)$, $\mathcal{D}_n^{(2)}\ (n=0,2,4,6,8)$, входящие в компоненты $\sigma_{rr}^{(2)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}(\rho,\gamma)$, $\sigma_{r\theta}^{(2)}(\rho,\gamma)$, согласно соотношениям (II.4). В частности, при $\nu=0,3$ находим

$$C_2^{(2)}=0,7524\,\frac{r_0^2 P}{2G},\quad C_4^{(2)}=0,1994\,\frac{r_0^2 P}{2G},\quad C_6^{(2)}=0,3131\,\frac{r_0^2 P}{2G},$$

$$C_8^{(2)}=-0,5478\,\frac{r_0^2 P}{2G},\quad \mathcal{D}_0^{(2)}=0,1424\,\frac{r_0^2 P}{2G},\quad \mathcal{D}_2^{(2)}=1,2173\,\frac{r_0^2 P}{2G},\tag{I4.I4}$$

$$\mathcal{D}_4^{(2)}=0,8374\,\frac{r_0^2 P}{2G},\quad \mathcal{D}_6^{(2)}=2,2837\,\frac{r_0^2 P}{2G},\quad \mathcal{D}_8^{(2)}=-5,3372\,\frac{r_0^2 P}{2G}.$$

Следовательно, во втором приближении напряжения $\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}/P$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}/P$ имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}}{P}=\frac{\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\rho,\gamma)}{P}&-\cos 4\gamma\left\{\frac{3(31-125\nu)}{70(7-5\nu)}\,\rho^{-7}+\right.\\
&+\frac{8(70+103\nu-105\nu^2)}{7(7-3\nu)(7-5\nu)}\,\rho^{-9}-\frac{32(7-\nu)}{5(7-3\nu)}\,\rho^{-11}+\left[\frac{24(1-2\nu)}{7(7-5\nu)}\,\rho^{-7}-\right.\\
&-\left.\frac{40(98-259\nu+141\nu^2)}{7(7-3\nu)(7-5\nu)}\,\rho^{-9}-\frac{32(7-\nu)}{7-3\nu}\,\rho^{-11}\right]P_2(\mu)-\\
&\left.-\frac{96}{35(7-3\nu)}\left[10(7-2\nu)\,\rho^{-9}-49(7-\nu)\,\rho^{-11}\right]P_4(\mu)\right\}-\\
&-\frac{8}{7}\sin 4\gamma\left\{\left[\frac{3(3+2\nu)}{7-5\nu}\,\rho^{-10}-\frac{3(182-225\nu+79\nu^2)}{(7-3\nu)(7-5\nu)}\,\rho^{-12}-\right.\right.\end{aligned}\tag{I4.I5}$$

$$-\frac{4(7-\nu)}{7-3\nu}\rho^{-14}\Big]\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-\frac{12}{5(7-3\nu)}\Big[2(35+2\nu)\rho^{-12}-$$

$$-23(7-\nu)\rho^{-14}\Big]\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}\Big\}-\frac{3}{8}\rho^{-11}(29-37\cos 8\gamma),$$

$$\frac{\sigma^{(2)}_{\varphi\varphi}}{p}=\frac{\sigma^{(2)}_{\alpha\alpha}(\rho,\gamma)}{p}+\cos 4\gamma\Big\{\frac{9(43-65\nu)}{70(7-5\nu)}\rho^{-7}+$$

$$+\frac{8(70+103\nu-105\nu^2)}{7(7-3\nu)(7-5\nu)}\rho^{-9}-\frac{32(7-\nu)}{5(7-3\nu)}\rho^{-11}-$$

$$-\Big[\frac{72(1-2\nu)}{7(7-5\nu)}\rho^{-7}+\frac{40(70+103\nu-105\nu^2)}{7(7-3\nu)(7-5\nu)}\rho^{-9}-\frac{32(7-\nu)}{7-3\nu}\rho^{-11}\Big]P_2(\mu)+$$

$$+\frac{96}{35(7-3\nu)}\Big[70(1-2\nu)\rho^{-9}-21(7-\nu)\rho^{-11}\Big]P_4(\mu)\Big\}-\sin 4\gamma\times$$

$$\times\Big\{\Big[\frac{24(1-2\nu)}{7(7-5\nu)}\rho^{-7}-\frac{8(70+103\nu-105\nu^2)}{7(7-3\nu)(7-5\nu)}\rho^{-9}+\frac{32(7-\nu)}{7(7-3\nu)}\rho^{-11}\Big]\frac{dP_2(\mu)}{d\gamma}-$$

$$-\frac{96}{35(7-3\nu)}\Big[14(1-2\nu)\rho^{-9}-3(7-\nu)\rho^{-11}\Big]\frac{dP_4(\mu)}{d\gamma}\Big\}+\frac{3}{8}\rho^{-11}(3+5\cos 8\gamma).$$

Приведем соответствующие (I4.I5) выражения для некоторых характерных числовых значений $\rho,\gamma,\nu,\varepsilon$. Так, например, при $\rho=1$, $\nu=0,3$, на основании обозначений (5.7), имеем

$$\left.\frac{\overset{*(2)}{\sigma_{\gamma\gamma}}}{p}\right|_{\varepsilon=1/9}\approx 1,4759-0,6325\,P_2(\mu)+1,2837\,P_4(\mu)-0,3709\,P_6(\mu)+$$

$$+0,6492\,P_8(\mu),$$

$$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=1/9} \approx 1{,}5195 + 0{,}3690\,P_2(\mu) + 0{,}4334\,P_4(\mu) - 0{,}1113\,P_6(\mu) + 0{,}1948\,P_8(\mu),$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=-1/9} \approx 1{,}5422 + 0{,}4605\,P_2(\mu) - 1{,}5141\,P_4(\mu) - 0{,}3709\,P_6(\mu) + 0{,}6492\,P_8(\mu), \tag{14.16}$$

$$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=-1/9} \approx 1{,}4533 - 0{,}3641\,P_2(\mu) - 0{,}4058\,P_4(\mu) - 0{,}1113\,P_6(\mu) + 0{,}1948\,P_8(\mu).$$

По сечениях $\gamma=0$ и $\gamma=\pi/4$ при $\nu=0{,}3$ получим

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}\right|_{\substack{\gamma=0\\ \varepsilon=1/9}} = \left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\right|_{\substack{\gamma=0\\ \varepsilon=1/9}} \approx 1 + \frac{0{,}5205}{\rho^3} - \frac{0{,}7401}{\rho^5} + \frac{1{,}6371}{\rho^7} - \frac{1{,}7125}{\rho^9} + \frac{1{,}7004}{\rho^{11}},$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}\right|_{\substack{\gamma=\pi/4\\ \varepsilon=-1/9}} \approx 1 + \frac{0{,}5070}{\rho^3} - \frac{0{,}3413}{\rho^5} + \frac{1{,}0950}{\rho^7} - \frac{0{,}4954}{\rho^9} + \frac{0{,}7561}{\rho^{11}}, \tag{14.17}$$

$$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\right|_{\substack{\gamma=\pi/4\\ \varepsilon=-1/9}} \approx 1 + \frac{0{,}5098}{\rho^3} + \frac{0{,}0037}{\rho^5} - \frac{0{,}0335}{\rho^7} + \frac{0{,}0911}{\rho^9} + \frac{0{,}0294}{\rho^{11}}.$$

Числовые значения табл. 29 приведены для напряжений $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(1)}/P$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{*(1)}/P$, $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/P$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}/P$ в зависимости от изменения угла $0 \le \gamma \le \pi/2$.

В табл. 30 приведена числовая зависимость напряженного состояния среды при отдалении от поверхности рассматриваемых полостей по сечениях $\gamma=0$, $\varepsilon=1/9$ и $\gamma=\pi/4$, $\varepsilon=-1/9$.

Таблица 29

γ	$\varepsilon=1/9$				$\varepsilon=-1/9$			
	$\frac{\sigma^{*(1)}_{\gamma\gamma}}{p}$	$\frac{\sigma^{*(1)}_{\varphi\varphi}}{p}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{p}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{p}$	$\frac{\sigma^{*(1)}_{\gamma\gamma}}{p}$	$\frac{\sigma^{*(1)}_{\varphi\varphi}}{p}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{p}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{p}$
0	2,3I9	2,3I9	2,405	2,405	0,68I	0,68I	0,767	0,767
$\pi/12$	I,933	2,I50	I,70I	2,I23	I,067	0,850	0,834	0,822
$\pi/6$	I,I58	I,772	I,029	I,736	I,842	I,223	I,7I3	I,I92
$\pi/4$	0,762	I,454	I,045	I,5I0	2,238	I,546	2,52I	I,60I
$\pi/3$	I,I3I	I,366	I,0I6	I,298	I,869	I,634	I,755	I,566
$5\pi/12$	I,866	I,447	I,786	I,396	I,II4	I,553	I,0I5	I,503
$\pi/2$	2,265	I,507	2,567	I,586	0,735	I,493	I,038	I,57I

Таблица 30

ρ	$\gamma=0,\ \varepsilon=1/9$	$\gamma=\pi/4,\ \varepsilon=-1/9$	
	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{p},\ \frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{p}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{p}$	$\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{p}$
I,00	2,405	2,52I	I,60I
I,I0	I,64I	I,786	I,4I7
I,25	I,284	I,376	I,270
I,50	I,I28	I,I65	I,I52
2,00	I,052	I,06I	I,064
3,00	I,0I7	I,0I8	I,0I9

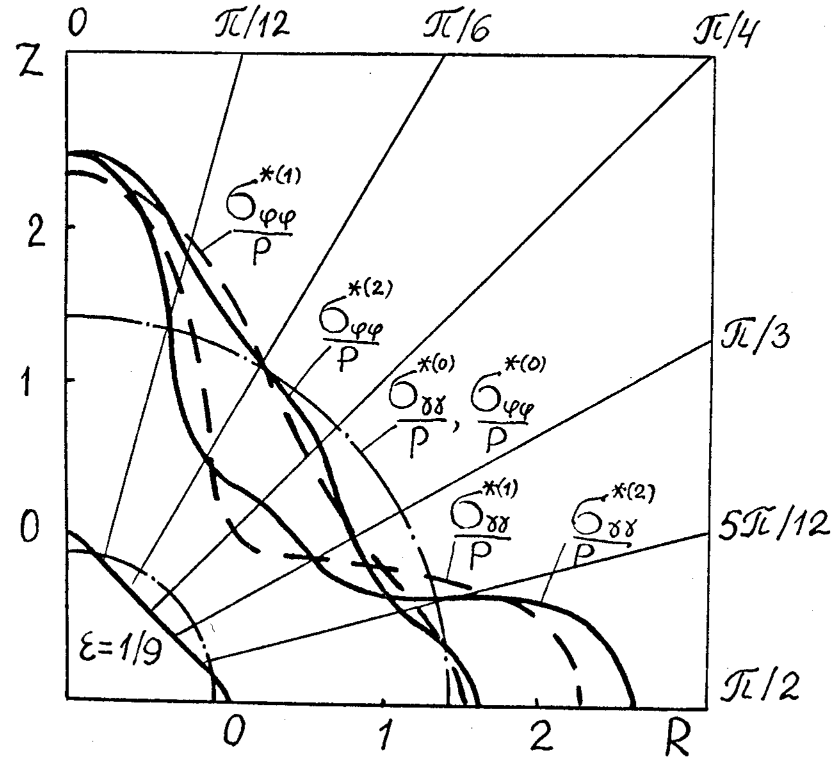


Рис.24

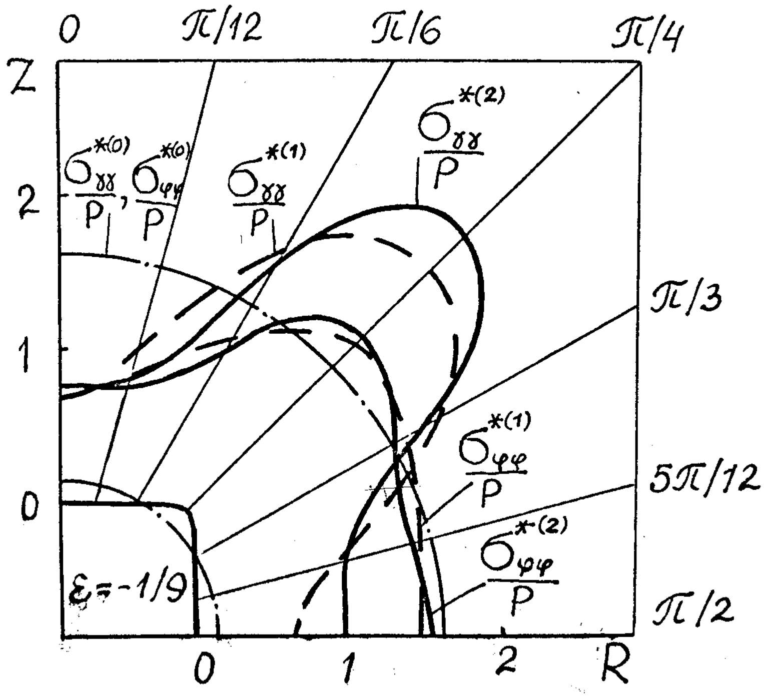


Рис.25

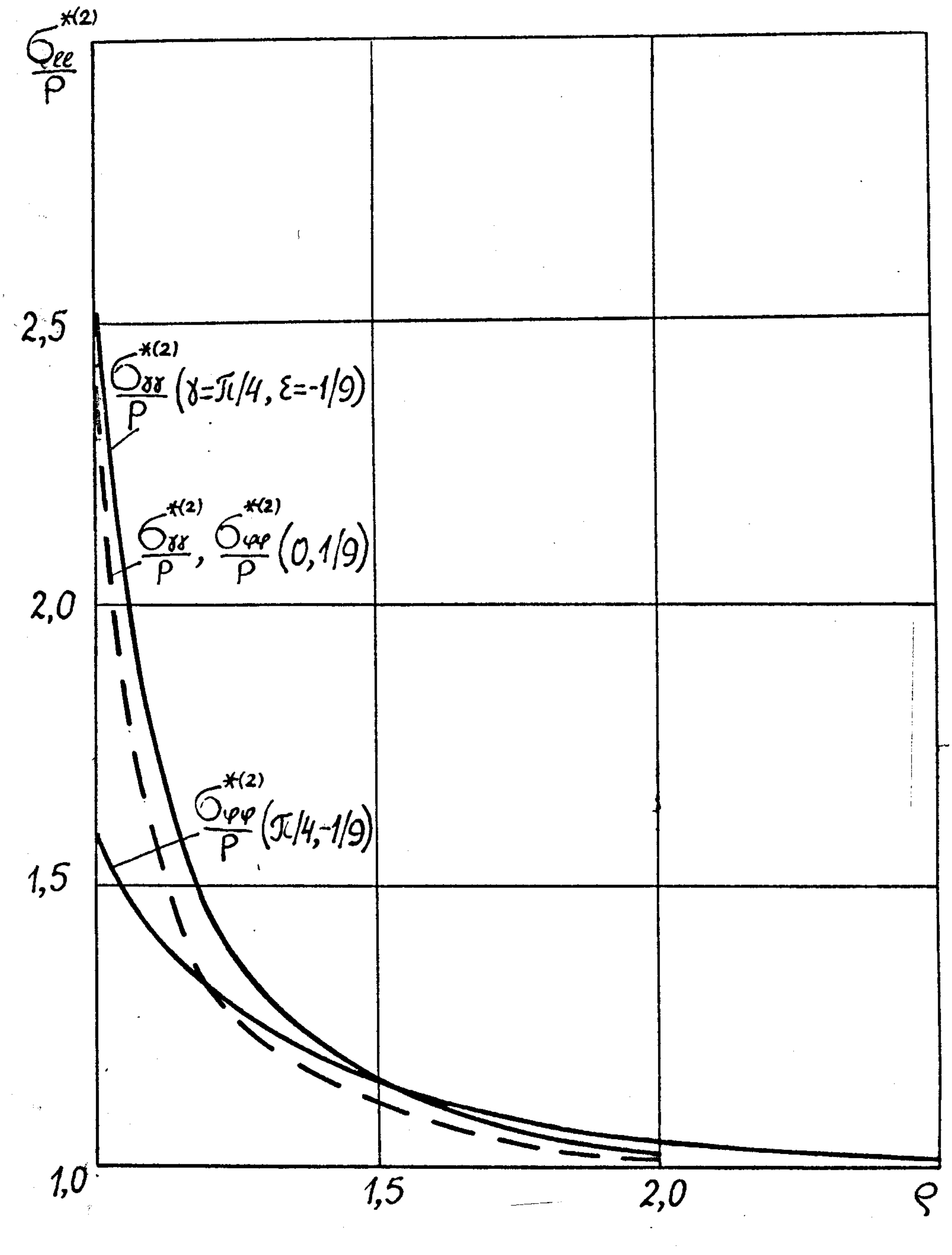

$\frac{\sigma_{\varrho\varrho}^{*(2)}}{P}$
2,5
2,0
1,5
1,0
1,5
2,0
ϱ
$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}(\gamma=\pi/4,\ \varepsilon=-1/9)$
$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P},\ \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}(0,1/9)$
$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}(\pi/4,-1/9)$

Рис.26

На рис.24,25 показано распределение напряжений вдоль четверти меридионального сечения биконической ($\varepsilon=1/9$) и замкнутой цилиндрической ($\varepsilon=-1/9$) полостей. Штрих-пунктирные линии соответствуют компонентам напряженного состояния в нулевом, штриховые - в первом, а сплошные - во втором приближениях.

Кривые на рис. 26 построены для $\gamma=\pi/4$, $\nu=0,3$, $\varepsilon=-1/9$ (штриховая линия соответствует напряжениям $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/p$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}/p$ при $\gamma=0$, $\varepsilon=1/9$). Графики показывают, что на незначительном расстоянии от поверхности полости концентрация напряжений резко уменьшается. Так, максимальное значение относительного отклонения

$$\frac{|\sigma_{ee}^{*(2)}-\hat{\sigma}_{ee}|}{\hat{\sigma}_{ee}}\cdot 100\% \ (e=\gamma,\varphi),$$

т.е. нормальных напряжений от соответствующих значений для среды без полости, не превышает 6,4 % при $\rho=2$ и 1,9 % при $\rho=3$.

Отклонение коэффициента концентрации $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/p$ на поверхности биконической полости при $\gamma=0$ и $\gamma=\pi/2$ от таких же значений на сферической поверхности составляет соответственно 37,6 % и 41,6 %. На цилиндрической поверхности при $\gamma=\pi/4$ такое отличие составляет 40,5 %.

Об эффективности применяемого приближенного метода можно судить, например, на основании табл. 31, где показано процентное содержание $\Delta_{\gamma\gamma}^{(n)}=\varepsilon^n\sigma_{\gamma\gamma}^{(n)}/p$ каждого из трех приближений в сумму их абсолютных величин, которая условно принята за 100 %. Вычисленное, на основании неравенства (8.10), третье приближение $\Delta_{\gamma\gamma}^{(3)}$ составляет не более 4,5 %. В этом случае мажорантное напряжение, найденное по формуле (5.19), равно $\sigma_{\gamma\gamma}^{M}=2,7642\,p$; это достигается при $\gamma=\pi/2$, $\varepsilon=1/9$.

Таблица 31

Параметры	$\frac{\sigma^{*(0)}_{\gamma\gamma}}{p}$	$\Delta^{(0)}_{\gamma}$, %	$\frac{\varepsilon\sigma^{(1)}_{\gamma\gamma}}{p}$	$\Delta^{(1)}_{\gamma}$, %	$\frac{\varepsilon^2\sigma^{(2)}_{\gamma\gamma}}{p}$	$\Delta^{(2)}_{\gamma}$, %
$\gamma=0, \varepsilon=1/9$	1,5	62,4	0,819	34,0	0,086	3,6
$\gamma=\pi/2, \varepsilon=1/9$	1,5	58,4	0,765	29,8	0,302	11,8
$\gamma=\pi/4, \varepsilon=-1/9$	1,5	59,5	0,738	29,3	0,283	11,2

ГЛАВА IУ. РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ

§ 15. Общее решение для трансверсально изотропной среды в сферических координатах

Рассмотрим упругую однородную трансверсально изотропную среду с плоскостью изотропии перпендикулярной оси r, совпадающей с осью анизотропии. В сферической системе координат ($\theta\alpha r$) обобщенный закон Гука имеет вид [31]

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} &= C_{11} e_{\theta\theta} + C_{12} e_{\alpha\alpha} + C_{13} e_{rr}, \\
\sigma_{\alpha\alpha} &= C_{12} e_{\theta\theta} + C_{11} e_{\alpha\alpha} + C_{13} e_{rr}, \\
\sigma_{rr} &= C_{13}(e_{\theta\theta} + e_{\alpha\alpha}) + C_{33} e_{rr}, \\
\sigma_{r\theta} &= C_{44} e_{r\theta}, \quad \sigma_{r\alpha} = C_{44} e_{r\alpha}, \\
\sigma_{\theta\alpha} &= 0{,}5\,(C_{11} - C_{12})\, e_{\theta\alpha}.
\end{aligned} \tag{15.1}$$

Представим компоненты перемещений U_θ, U_α, U_r через некоторые потенциалы $\Phi_n(\theta,\alpha,r)$ и $\Psi_n(\theta,\alpha,r)$ в форме [85,113]

$$\begin{aligned}
U_\theta &= \frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_n}{\partial\theta} + \frac{1}{r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Psi_n}{\partial\alpha}, \\
U_\alpha &= \frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi_n}{\partial\alpha} - \frac{1}{r_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi_n}{\partial\theta}, \\
U_r &= \frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty} K_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \quad (K_n = const)
\end{aligned} \tag{15.2}$$

(r – безразмерная переменная, отнесенная к линейной величине r_0).

Согласно (1.7), (1.8), (15,1) компоненты тензора напряжений будут [45,85]

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta}+\sigma_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\begin{pmatrix} C_{13} \\ C_{11}+C_{12} \end{pmatrix}\left(\Pi_1+\frac{2K_n}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix} C_{33} \\ 2C_{13} \end{pmatrix} K_n \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]\Phi_n \,, \qquad (15.3)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\alpha\alpha} \\ \sigma_{\theta\alpha} \end{pmatrix} = \frac{C_{11}-C_{12}}{2r_0^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} 2\Pi_2 \\ \Pi_3 \end{pmatrix}\Phi_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} 2\Pi_3 \\ \Pi_2 \end{pmatrix}\Psi_n\right],$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{C_{44}}{r_0^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\Pi_4+\frac{K_n}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}\right)\Phi_n + \sum_{n=1}^{\infty}\Pi_5\Psi_n\right],$$

$$\sigma_{r\alpha} = \frac{C_{44}}{r_0^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\Pi_5+\frac{K_n}{r\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\alpha}\right)\Phi_n - \sum_{n=1}^{\infty}\Pi_4\Psi_n\right].$$

Здесь $\Pi_j\,(j=1,2,\ldots,5)$ –дифференциальные операторы

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\pm\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\pm \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right),$$

$$\Pi_3 = \frac{2}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial\alpha} - \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right), \qquad (15.4)$$

$$\Pi_4 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \quad \Pi_5 = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right).$$

Если потенциалы $\Phi_n(\theta,\alpha,r)$, $\Psi_n(\theta,\alpha,r)$ представить через сферические функции $Y_n(\theta,\alpha)$ в форме

$$\Phi_n(\theta,\alpha,r) = r^{\nu_n+0,5}\,Y_n(\theta,\alpha)\,, \quad \Psi_n(\theta,\alpha,r) = r^{\lambda_n+0,5}\,Y_n(\theta,\alpha), \qquad (15.5)$$

то на основе уравнений равновесия (I.3) и формул (I5.I)-(I5.5), с учетом рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра (§ 3), получим алгебраические уравнения для определения параметров

$$\nu_n^4 - 2a_n \nu_n^2 + \beta_n = 0\,, \qquad \lambda_n^2 - \left[\frac{C_{11}-C_{12}}{2C_{44}}(n-1)(n+2)+\frac{9}{4}\right] = 0\,. \tag{I5.6}$$

Следовательно, корнями этих уравнений будут

$$\begin{pmatrix}\nu_n^{(1)}\\ \nu_n^{(2)}\end{pmatrix} = \pm\left[a_n + (a_n^2 - b_n)^{1/2}\right]^{1/2}, \quad \begin{pmatrix}\nu_n^{(3)}\\ \nu_n^{(4)}\end{pmatrix} = \pm\left[a_n - (a_n^2 - b_n)^{1/2}\right]^{1/2}, \tag{I5.7}$$

$$\lambda_n^{(2)} = -\lambda_n^{(1)}\,.$$

Здесь через a_n и b_n обозначено

$$a_n = \frac{1}{2C_{33}C_{44}}\Big\{ n(n+1)\left[C_{44}^2 + C_{11}C_{33} - (C_{13}+C_{44})^2\right] +$$

$$+ C_{33}C^- + 2C_{44}(C_{11}+C_{12}-C_{13}) + 0{,}5\,C_{33}C_{44}\Big\}\,, \tag{I5.8}$$

$$b_n = \frac{1}{C_{33}C_{44}}\Big\{\left[C_{44}\,n(n+1) + 2(C_{11}+C_{12}-C_{13}) + 0{,}25\,C_{33}\right]\times$$

$$\times\left[C_{11}\,n(n+1) + C^- + 0{,}25\,C_{44}\right] - n(n+1)\left[C^+ - 0{,}5(C_{13}+C_{44})\right]^2\Big\}$$

$$\left(C^{\pm} = \pm C_{11} + C_{12} + 2C_{44}\right).$$

Коэффициенты $K_n^{(i)}$ $(i=1,2,3,4)$ определяются выражением

$$\mathcal{K}_n^{(i)} \equiv K_n^{(i)}(\nu_n^{(i)}+0{,}5) = \frac{C_{11}\,n(n+1) - C_{44}(\nu_n^{(i)2} - 0{,}25) + C^-}{(C_{13}+C_{44})(\nu_n^{(i)} - 0{,}5) + C^+}\,. \tag{I5.9}$$

Общее представление, например, функции $\Phi_n(\theta,\alpha,r)$ для действительных (разных) корней $\nu_n^{(i)}$ имеет вид

$$\Phi_n(\theta,\alpha,r) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{i=1}^{4} \begin{matrix} A_{n,m}^{(i)} \cos m\alpha \\ B_{n,m}^{(i)} \sin m\alpha \end{matrix} \, r^{\nu_n^{(i)}+0,5} P_{n,m}(\mu), \qquad (15.10)$$

где $P_{n,m}(\mu)$ – присоединенные функции Лежандра; $A_{n,m}^{(i)}, B_{n,m}^{(i)}$ – произвольные постоянные. Потенциал $\Psi_n(\theta,\alpha,r)$ имеет вид, аналогичный (15.10).

Допустим, что трансверсально изотропная среда характеризуется такими упругими постоянными c_{ij}, при которых справедливо представление (15.10). В осесимметричном случае $(m=0)$ компоненты напряжений $\sigma_{rr}^{(j)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(j)}$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}$, $\sigma_{r\theta}^{(j)}$ записываются на основе соответствующих им выражений в безразмерных сферических координатах после формальной замены переменных r,θ,α на ρ,γ,φ. Следовательно, согласно (15.3),(15.10) имеем

$$\sigma_{rr}^{(j)} = \frac{1}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=2,4} A_n^{(i,j)} \rho^{\nu_n^{(i)}-1,5}\, \gamma_n^{(i)} P_n(\mu),$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\theta\theta}^{(j)} \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{(j)} \end{pmatrix} = \frac{1}{r_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=2,4} A_n^{(i,j)} \rho^{\nu_n^{(i)}-1,5}\left[\begin{pmatrix} \eta_n^{(i)} \\ g_n^{(i)} \end{pmatrix} P_n(\mu) \pm (c_{11}-c_{12})\mu P_n'(\mu)\right]$$

$$(15.11)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(j)} = \frac{1}{r_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2,4} A_n^{(i,j)} \rho^{\nu_n^{(i)}-1,5}\, \delta_n^{(i)} \frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \qquad \left(P_n'(\mu) = \frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right)$$

Здесь

$$\gamma_n^{(i)} = K_n^{(i)}\left[2c_{13} + c_{33}(\nu_n^{(i)}-0,5)\right] - n(n+1)c_{13},$$

$$\begin{pmatrix} \eta_n^{(i)} \\ g_n^{(i)} \end{pmatrix} = K_n^{(i)}\left[c_{11}+c_{12}+c_{13}(\nu_n^{(i)}-0,5)\right] - n(n+1)\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix}, \qquad (15.12)$$

$$\delta_n^{(i)} = c_{44}\left(K_n^{(i)} + \nu_n^{(i)} - 1,5\right).$$

Произвольные постоянные $A_n^{(i,j)}$ находятся из рекуррентных соотношений (4.14) и краевых условий (13.2), которые в осесимметричном случае приводятся к системе уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{i=2,4} A_n^{(i,j)}\gamma_n^{(i)} P_n(\mu)\Big] = \sum_{n=0} c_n^{(j)} P_n(\mu) \\ &\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{i=2,4} A_n^{(i,j)}\delta_n^{(i)}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big] = \sum_{n=1} d_n^{(j)}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad (15.13)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых полиномах Лежандра и их производных, получим

$$A_0^{(2,j)} = \frac{C_0^{(j)}}{\gamma_0^{(2)}}, \quad A_n^{(2,j)} = -\frac{c_n^{(j)}\delta_n^{(4)} - d_n^{(j)}\gamma_n^{(4)}}{\delta_n^{(2)}\gamma_n^{(4)} - \delta_n^{(4)}\gamma_n^{(2)}},$$

$$A_n^{(4,j)} = \frac{c_n^{(j)}\delta_n^{(2)} - d_n^{(j)}\gamma_n^{(2)}}{\delta_n^{(2)}\gamma_n^{(4)} - \delta_n^{(4)}\gamma_n^{(2)}}. \qquad (15.14)$$

Здесь $C_n^{(j)}, d_n^{(j)}$ - известные выражения, зависящие от формы поверхности, упругих свойств среды и решения задачи в предыдущих приближениях.

§ 16. Растяжение-сжатие трансверсально изотропной среды с замкнутой конической полостью

Рассмотрим осесимметричную задачу о напряженном состоянии трансверсально изотропной среды, ограниченной изнутри свободной от напряжений конической полостью (рис.2), находящейся в однородном поле равномерных внешних усилий (5.12). Компоненты основного напряженного состояния в криволинейных ортогональных координатах имеют вид (5.14). Постановка и аналитическое решение аналогичной задачи для изотропной среды рассмотрены подробнее в § 13.

В нулевом приближении, соответствующем точному решению поставленной задачи в случае сферической полости, на основе (13.2), (15.1), справедливы выражения

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\rho\rho}^{*(0)} \\ \sigma_{\gamma\gamma}^{*(0)} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{*(0)} \end{Bmatrix} = p + \frac{1}{r_0^2} A_0^{(2,0)} \rho^{\nu_0^{(2)}} \begin{Bmatrix} \gamma_0^{(2)} \\ \eta_0^{(2)} \\ g_0^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{16.1}$$

$$\left(A_0^{(2,0)} = - \frac{r_0^2 p}{\gamma_0^{(2)}} \right) .$$

Напряжения, полученные согласно формул (11.3), (15.11), в первом приближении определяются при $K=2$ следующими формулами

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\rho\rho}^{(1)} \\ \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr}^{(1)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{(1)} \end{Bmatrix} + \frac{1}{r_0^2} A_0^{(2,0)} (\nu_0^{(2)} - 1{,}5) \rho^{\nu_0^{(2)} - K - 2{,}5} \cos(K+1)\gamma \begin{Bmatrix} \gamma_0^{(2)} \\ \eta_0^{(2)} \\ g_0^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{16.2}$$

$$\sigma_{\rho\gamma}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(1)} + \frac{1}{r_0^2} A_0^{(2,0)} (K+1)(\eta_0^{(2)} - \gamma_0^{(2)}) \rho^{\nu_0^{(2)} - K - 2{,}5} \sin(K+1)\gamma .$$

Из граничных условий (13.2) в первом приближении, в обозначениях (15.13), находим

$$c_1^{(1)} = \frac{3}{5} c , \quad c_3^{(1)} = -\frac{8}{5} c , \quad d_1^{(1)} = -\frac{3}{5} d , \quad d_3^{(1)} = \frac{8}{5} d , \tag{16.3}$$

где

$$c = A_0^{(2,0)} \gamma_0^{(2)} (\nu_0^{(2)} - 1{,}5) , \quad d = A_0^{(2,0)} (\eta_0^{(2)} - \gamma_0^{(2)}) . \tag{16.4}$$

Во втором приближении имеем

$$c_0^{(2)} = -\frac{1}{5} \left\{ \frac{A_0^{(2,0)}}{28} \left[\gamma_0^{(2)} (\nu_0^{(2)} - 1{,}5)(34 \nu_0^{(2)} - 49) + 648 (\eta_0^{(2)} - \gamma_0^{(2)}) \right] - \right.$$

$$- \frac{1}{3}\sum_{i=2,4} A_1^{(i,1)}\left[3\gamma_1^{(i)}(\nu_1^{(i)}-1,5)+2(\gamma_1^{(i)}-6\,\delta_1^{(i)})\right] +$$

$$+\frac{8}{7}\sum_{i=2,4} A_3^{(i,1)}\left[\gamma_3^{(i)}(\nu_3^{(i)}-1,5)+4(\gamma_3^{(i)}-6\,\delta_3^{(i)})\right]\Big\},$$

$$C_2^{(2)}=\frac{1}{21}\Big\{A-2\sum_{i=2,4} A_1^{(i,1)}\left[3\gamma_1^{(i)}(\nu_1^{(i)}-1,5)+11(\gamma_1^{(i)}-6\,\delta_1^{(i)})\right]-$$

$$-\sum_{i=2,4} A_3^{(i,1)}\left[\gamma_3^{(i)}(\nu_3^{(i)}-1,5)+12(\gamma_3^{(i)}-6\,\delta_3^{(i)})\right]\Big\},$$

$$C_4^{(2)}=\frac{4}{35}\Big\{\frac{24}{11}A+8\sum_{i=2,4} A_1^{(i,1)}\left[(\gamma_1^{(i)}-6\,\delta_1^{(i)})-\gamma_1^{(i)}(\nu_1^{(i)}-1,5)\right]-$$

$$-\frac{3}{11}\sum_{i=2,4} A_3^{(i,1)}\left[\gamma_3^{(i)}(\nu_3^{(i)}-1,5)+19(\gamma_3^{(i)}-6\,\delta_3^{(i)})\right]\Big\},$$

$$C_6^{(2)}=-\frac{32}{231}\Big\{4A-5\sum_{i=2,4} A_3^{(i,1)}\left[3(\gamma_3^{(i)}-6\delta_3^{(i)})-\gamma_3^{(i)}(\nu_3^{(i)}-1,5)\right]\Big\}, \quad \text{(I6.5}$$

$$d_2^{(2)}=-\frac{1}{21}\Big\{B-\sum_{i=2,4} A_1^{(i,1)}\left[15(\eta_1^{(i)}-\gamma_1^{(i)}+C_{11}-C_{12})+\delta_1^{(i)}(9\nu_1^{(i)}-8,5)\right]$$

$$-\sum_{i=2,4} A_3^{(i,1)}\left[4\delta_3^{(i)}(\nu_3^{(i)}-1,5)+5(\eta_3^{(i)}-\gamma_3^{(i)})+60(C_{11}-C_{12})\right]\Big\},$$

$$d_4^{(2)}=-\frac{1}{385}\Big\{96\,B-88\sum_{i=2,4} A_1^{(i,1)}\left[\delta_1^{(i)}(2,5-\nu_1^{(i)})+3(\eta_1^{(i)}-\gamma_1^{(i)}+C_{11}-C\right.$$

$$-3\sum_{i=2,4} A_3^{(i,1)}\left[\delta_3^{(i)}(9\nu_3^{(i)}-62,5)+13(\eta_3^{(i)}-\gamma_3^{(i)})+303(C_{11}-C_{12})\right]\Big\},$$

$$d_6^{(2)} = \frac{16}{231}\left\{8B + 5\sum_{i=2,4} A_3^{(i,1)}\left[\delta_3^{(i)}(4,5-\nu_3^{(i)}) + \eta_3^{(i)} - \gamma_3^{(i)} + 3(c_{11}-c_{12})\right]\right\}.$$

Здесь

$$A = A_o^{(2,0)}\left[\gamma_o^{(2)}(\nu_o^{(2)}-1,5)(\nu_o^{(2)}-3,5) - 18(\eta_o^{(2)}-\gamma_o^{(2)})\right],$$

$$B = A_o^{(2,0)}(\eta_o^{(2)}-\gamma_o^{(2)})(\nu_o^{(2)}-0,5). \qquad (16.6)$$

Компоненты напряженного состояния определяются формулами (при $K=2$)

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)} = \sigma_{rr}^{(2)} + \frac{1}{4r_o^2}A_o^{(2,0)}\rho^{\nu_o^{(2)}-2K-3,5}\left\{\gamma_o^{(2)}(\nu_o^{(2)}-1,5)^2 + \right.$$

$$+ 2(\eta_o^{(2)}-\gamma_o^{(2)})(K+1)^2 + \left[\gamma_o^{(2)}(\nu_o^{(2)}-1,5)(\nu_o^{(2)}-3,5) - \right.$$

$$\left.\left. - 2(\eta_o^{(2)}-\gamma_o^{(2)})(K+1)^2\right]\cos 2(K+1)\gamma\right\} + \frac{1}{r_o^2}\sum_{n=1,3}\sum_{i=2,4}A_n^{(i,1)}\times$$

$$\times\rho^{\nu_n^{(i)}-K-2,5}\left\{(\nu_n^{(i)}-1,5)\gamma_n^{(i)}\cos(K+1)\gamma\, P_n(\mu) - \right.$$

$$\left. - \left[\gamma_n^{(i)} - 2(K+1)\delta_n^{(i)}\right]\sin(K+1)\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\right\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} = \sigma_{\theta\theta}^{(2)} + \frac{1}{4r_o^2}A_o^{(2,0)}\rho^{\nu_o^{(2)}-2K-3,5}\left\{\eta_o^{(2)}(\nu_o^{(2)}-1,5)^2 - \right.$$

$$- 2(\eta_o^{(2)}-\gamma_o^{(2)})(K+1)^2 + \left[\eta_o^{(2)}(\nu_o^{(2)}-1,5)(\nu_o^{(2)}-3,5) + \right.$$

$$\left.\left. + 2(\eta_o^{(2)}-\gamma_o^{(2)})(K+1)^2\right]\cos 2(K+1)\gamma\right\} +$$

$$+\frac{1}{r_0^2}\sum_{n=1,3}\sum_{i=2,4}A_n^{(i,1)}\rho^{\nu_n^{(i)}-K-2,5}\Big[(\nu_n^{(i)}-1,5)\Big(\eta_n^{(i)}P_n(\mu)-$$

$$-(C_{11}-C_{12})\,\mathrm{ctg}\,\gamma\,\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big)\cos(K+1)\gamma-\Big(\eta_n^{(i)}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}-(C_{11}-C_{12})\times$$

$$\times\Big(\mathrm{ctg}\,\gamma\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}-\frac{1}{\sin^2\gamma}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}+2(K+1)\delta_n^{(i)}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big)\Big)\sin(K+1)\gamma\Big]\Big\},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}=\sigma_{\alpha\alpha}^{(2)}+\frac{1}{4r_0^2}A_0^{(2,0)}(\nu_0^{(2)}-1,5)g_0^{(2)}\rho^{\nu_0^{(2)}-2K-3,5}\Big[\nu_0^{(2)}-1,5+$$

$$+(\nu_0^{(2)}-3,5)\cos 2(K+1)\gamma\Big]+\frac{1}{r_0^2}\sum_{n=1,3}\sum_{i=2,4}A_n^{(i,1)}\rho^{\nu_n^{(i)}-K-2,5}\times$$

$$\times\Big\{(\nu_n^{(i)}-1,5)\Big[g_n^{(i)}P_n(\mu)+(C_{11}-C_{12})\,\mathrm{ctg}\,\gamma\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big]\cos(K+1)\gamma-$$

$$-\Big[g_n^{(i)}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}+(C_{11}-C_{12})\Big(\mathrm{ctg}\,\gamma\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}-\frac{1}{\sin^2\gamma}\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}\Big)\Big]\sin(K+1)\gamma\Big\},\qquad (16.7)$$

$$\sigma_{\rho\gamma}^{(2)}=\sigma_{r\theta}^{(2)}+\frac{1}{2r_0^2}A_0^{(2,0)}(\eta_0^{(2)}-\gamma_0^{(2)})(\nu_0^{(2)}+K-2,5)(K+1)\sin 2(K+1)\gamma\times$$

$$\times\rho^{\nu_0^{(2)}-2K-3,5}+\frac{1}{r_0^2}\sum_{n=1,3}\sum_{i=2,4}A_n^{(i,1)}\rho^{\nu_n^{(i)}-K-2,5}\Big\{(\nu_n^{(i)}-1,5)\times$$

$$\times\delta_n^{(i)}\cos(K+1)\gamma\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}+(K+1)\Big[(\eta_n^{(i)}-\gamma_n^{(i)})P_n(\mu)-$$

$$-(C_{11}-C_{12})\,\mathrm{ctg}\,\gamma\frac{dP_n(\mu)}{d\gamma}-\delta_n^{(i)}\frac{d^2P_n(\mu)}{d\gamma^2}\Big]\sin(K+1)\gamma\Big\}.$$

Компоненты $\sigma_{rr}^{(j)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(j)}$, $\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}$, $\sigma_{r\theta}^{(j)}$ в первом и втором приближениях ($j=1,2$) определяются выражениями (15.11), а коэффициенты $A_n^{(i,j)}$ – формулами (15.14), причем $j=1$ соответствует $n=1,3$, $j=2 \sim n=0,2,4,6$.

При конкретных расчетах приняты трансверсально изотропные материалы, упругие постоянные которых приведены в табл. 32.

Таблица 32

Материал	ν_{12}	ν_{13}	$\frac{E_1}{G}$	$\frac{E_3}{G}$	$\frac{E_1}{E_3}$
1	0,365	0,288	2,244	2,712	0,828
2	0,065	0,246	2,951	2,614	1,129
3	0,357	0,253	2,771	3,094	0,896

Заметим, что эти материалы использовались в работе [85]; они близки к упругим постоянным некоторых кристаллов [81]. Значение коэффициентов $A_n^{(i,j)}/r_0^2 p$ для рассматриваемых материалов приведено в табл.33.

Таблица 33

$A_n^{(i,j)}/r_0^2 p$ \ Материал	1	2	3
$n=0,\ i=2,\ j=0$	– 0,0595	– 0,0518	– 0,1459
$n=1,\ i=2,\ j=1$	0,0278	0,0420	0,0973
$n=1,\ i=4,\ j=1$	0	0	0
$n=3,\ i=2,\ j=1$	– 0,0750	– 0,0990	–0,2094
$n=3,\ i=4,\ j=1$	0,0016	– 0,0011	–0,0160
$n=0,\ i=2,\ j=2$	0,0208	0,0437	–0,0171
$n=2,\ i=2,\ j=2$	0,0695	0,1532	0,2397
$n=2,\ i=4,\ j=2$	0,0371	0,0639	0,1227
$n=4,\ i=2,\ j=2$	0,1246	0,1821	0,3284
$n=4,\ i=4,\ j=2$	– 0,0281	– 0,0169	– 0,0082
$n=6,\ i=2,\ j=2$	– 0,3350	– 0,2895	– 0,6427
$n=6,\ i=4,\ j=2$	0,1570	0,0375	0,0515

Относительные напряжения, в соответствии с обозначениями (5.7), на поверхности замкнутой конической полости $\rho=1$ имеют следующие представления по полиномам Лежандра

материал I

$$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{p} \approx 1,5306 - 0,5006\,P_1(\mu) - 0,2399\,P_2(\mu) + 1,6108\,P_3(\mu) - 0,6264\,P_4(\mu) + 1,0436\,P_6(\mu),$$

$$\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{p} \approx 1,4417 + 0,4890\,P_1(\mu) + 0,0282\,P_2(\mu) + 0,6212\,P_3(\mu) - 0,2539\,P_4(\mu) + 0,4919\,P_6(\mu), \qquad (16.8)$$

материал 2

$$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{p} \approx 1,4319 - 0,7543\,P_1(\mu) - 0,3542\,P_2(\mu) + 1,5946\,P_3(\mu) - 0,9979\,P_4(\mu) + 1,2432\,P_6(\mu),$$

$$\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{p} \approx 1,4777 + 0,7462\,P_1(\mu) - 0,0112\,P_2(\mu) + 0,0940\,P_3(\mu) - 0,0193\,P_4(\mu) - 0,1241\,P_6(\mu),$$

материал 3

$$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{p} \approx 1,4030 - 0,6033\,P_1(\mu) - 0,3329\,P_2(\mu) + 0,9115\,P_3(\mu) - 0,8862\,P_4(\mu) + 1,5350\,P_6(\mu),$$

$$\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{p} \approx 1,4240 + 0,5296\,P_1(\mu) - 0,0011\,P_2(\mu) + 0,7786\,P_3(\mu) - 0,3408\,P_4(\mu) + 0,6368\,P_6(\mu).$$

Приведенные графики на рис. 27 и числовые значения в табл.34 характеризуют распределение напряжений вдоль половины произволь-

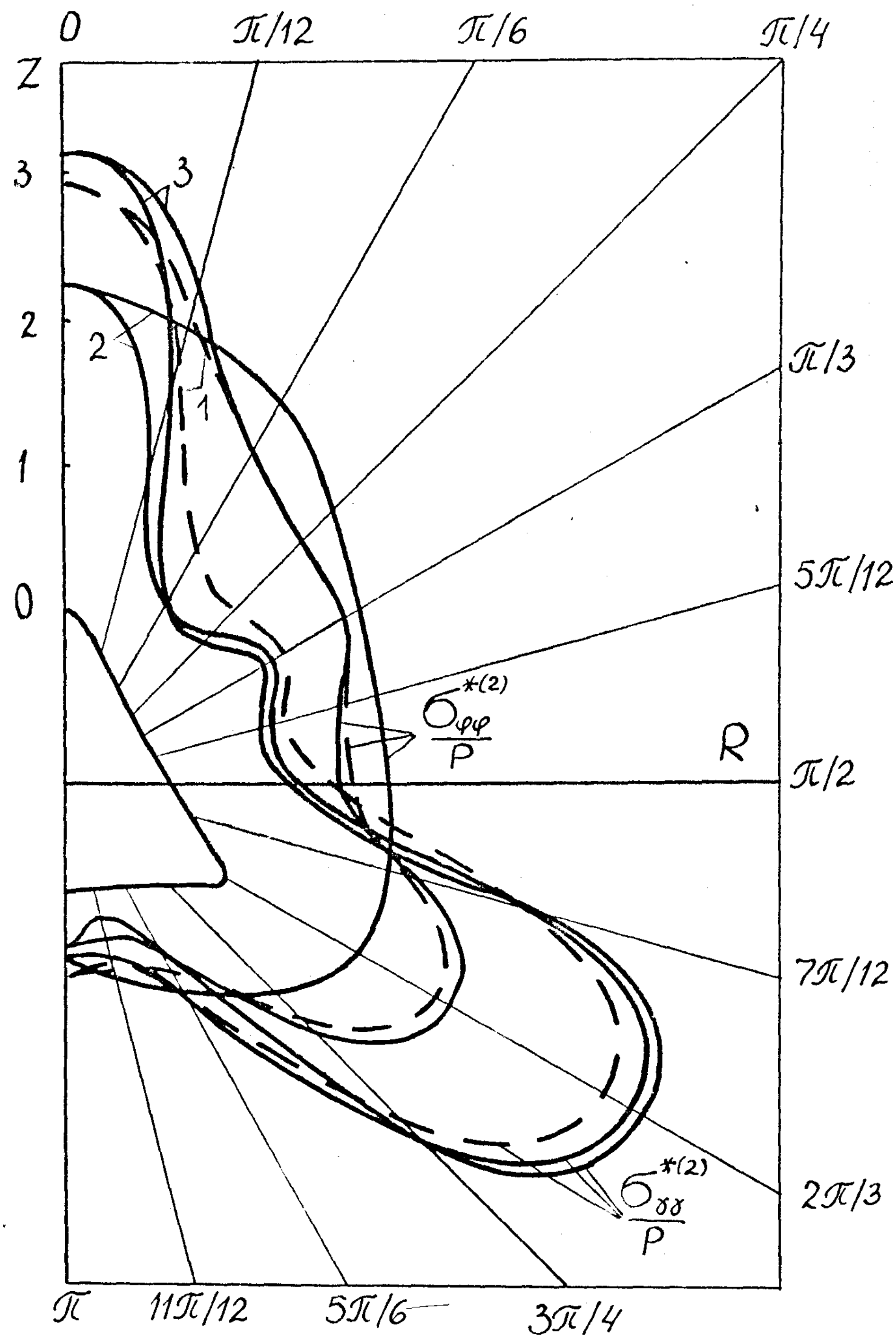

0
π/12
π/6
π/4
Z
3
2
1
0
π/3
5π/12
R
π/2
7π/12
2π/3
π
11π/12
5π/6
3π/4
$\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{P}$

Рис.27

Таблица 34

γ	$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}$			$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}$		
	I	2	3	I	2	3
0	2,8I8	2,I63	3,027	2,8I8	2,I63	3,027
$\pi/12$	2,II3	I,479	2,063	2,46I	2,20I	2,58I
$\pi/6$	I,065	0,587	0,699	I,895	2,I94	I,889
$\pi/4$	0,93I	0,749	0,687	I,7I5	2,0I2	I,704
$\pi/3$	I,I24	I,092	I,059	I,643	I,777	I,653
$5\pi/12$	0,897	0,739	0,660	I,328	I,635	I,272
$\pi/2$	I,090	0,846	0,757	I,I79	I,5I5	I,098
$7\pi/12$	2,267	2,229	2,29I	I,503	I,3I3	I,535
$2\pi/3$	3,034	3,24I	3,335	I,698	I,II3	I,804
$3\pi/4$	2,209	2,380	2,2I7	I,243	0,990	I,23I
$5\pi/6$	0,886	0,858	0,502	0,644	0,840	0,466
$11\pi/12$	0,490	0,372	0,I54	0,5I7	0,609	0,306
π	0,598	0,483	0,4II	0,598	0,483	0,4II

Таблица 35

ρ	$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}$, $\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}$			$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}$			$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}$		
	$\gamma=0$			$\gamma=2\pi/3$					
	I	2	3	I	2	3	I	2	3
I,00	2,8I8	2,I63	3,027	3,034	3,24I	3,335	I,698	I,II3	I,804
I,I0	I,730	I,487	I,7I9	2,057	2,I63	2,I62	I,426	I,I24	I,458
I,25	I,244	I,205	I,227	I,49I	I,55I	I,535	I,245	I,II2	I,255
I,50	I,083	I,097	I,086	I,202	I,23I	I,224	I,I27	I,082	I,I34
2,00	I,035	I,043	I,040	I,067	I,075	I,077	I,052	I,04I	I,056
3,00	I,0I3	I,0I4	I,0I5	I,0I8	I,0I9	I,02I	I,0I6	I,0I4	I,0I7

вольного меридионального сечения конической поверхности.

Изменение напряжений $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/p$ и $\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}/p$ по сечению $\gamma=0$ и $\gamma=2\pi/3$ приведено в табл.35 и показано на рис. 28,29. Штриховые линии соответствуют сечению $\gamma=2\pi/3$ (нумерация кривых на рис.27-29 и граф в табл. 34,35 соответствует нумерации материалов). Эти кривые построены по следующим формулам

материал I

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=0}=\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=0}\approx 1+\frac{0,5007}{\rho^3}-\frac{0,5742}{\rho^4}+\frac{0,0405}{\rho^5}+\frac{1,6845}{\rho^6}-\frac{3,3716}{\rho^7}+\frac{3,5382}{\rho^9},$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=2\pi/3}\approx 1+\frac{0,4838}{\rho^3}-\frac{0,0584}{\rho^4}-\frac{0,0470}{\rho^5}+\frac{1,0135}{\rho^6}-\frac{0,9149}{\rho^7}+\frac{1,5570}{\rho^9},$$

$$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=2\pi/3}\approx 1+\frac{0,4370}{\rho^3}-\frac{0,0388}{\rho^4}-\frac{0,0682}{\rho^5}+\frac{0,0660}{\rho^6}+\frac{0,0180}{\rho^7}+\frac{0,2837}{\rho^9},$$

материал 2

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=0}=\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=0}\approx 1+\frac{0,5288}{\rho^3}-\frac{0,4611}{\rho^4}-\frac{0,1953}{\rho^5}+\frac{0,8908}{\rho^6}+\frac{0,4538}{\rho^7}-\frac{1,1600}{\rho^8}-\frac{2,4692}{\rho^9}+\frac{3,5755}{\rho^{10}},$$

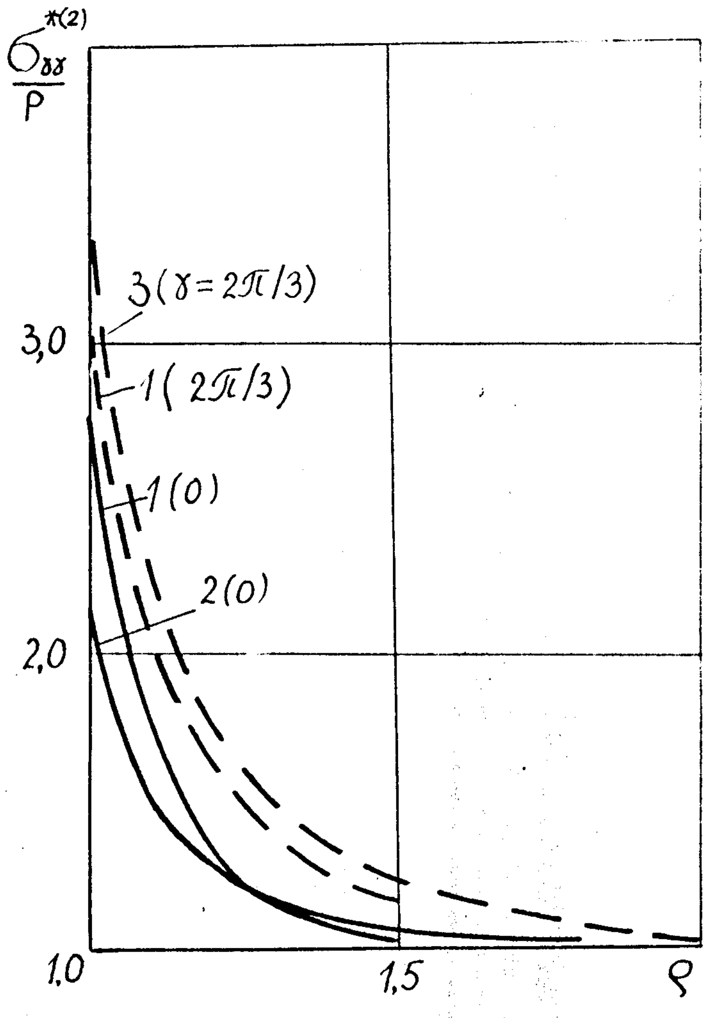


Рис.28

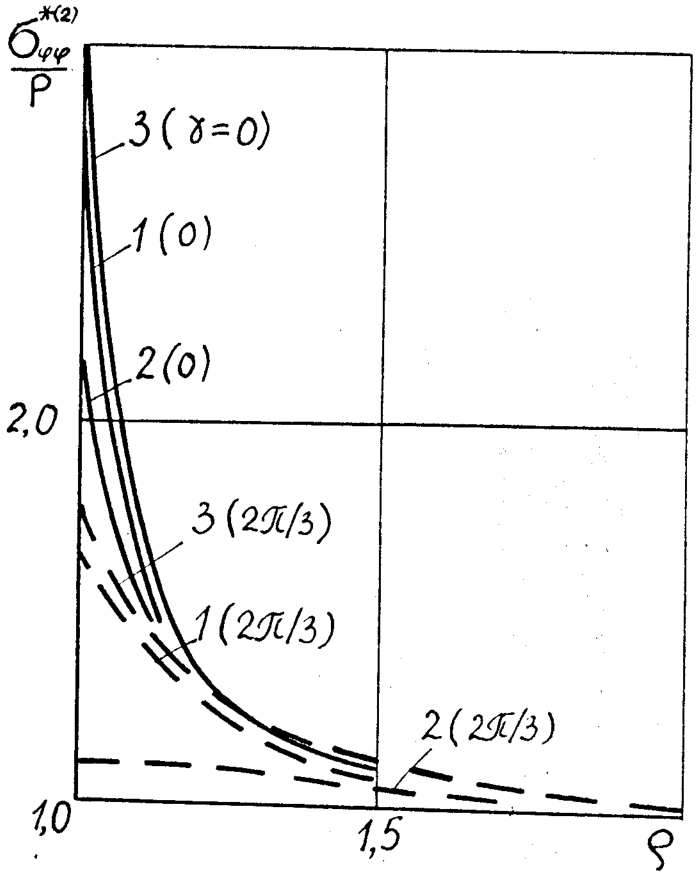


Рис.29

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=2\pi/3} \approx 1+\frac{0,4791}{\rho^3}+\frac{0,0038}{\rho^4}+\frac{0,0802}{\rho^5}+\frac{0,7728}{\rho^6}-\frac{0,0047}{\rho^7}+\frac{0,5752}{\rho^8}-\frac{2,1000}{\rho^9}+\frac{2,4348}{\rho^{10}},$$

$$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=2\pi/3} \approx 1+\frac{0,3893}{\rho^3}-\frac{0,0116}{\rho^4}-\frac{0,0906}{\rho^5}-\frac{0,2877}{\rho^6}+\frac{0,0104}{\rho^7}+\frac{0,0955}{\rho^8}+\frac{0,1305}{\rho^9}-\frac{0,1233}{\rho^{10}}, \qquad \text{(I6}$$

материал 3

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=0} = \left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=0} \approx 1+\frac{0,5601}{\rho^3}-\frac{0,3495}{\rho^4}-\frac{0,3528}{\rho^5}-\frac{0,7620}{\rho^6}+\frac{2,6153}{\rho^7}-\frac{1,3196}{\rho^8}+\frac{0,1955}{\rho^9}-\frac{3,6499}{\rho^{10}}+\frac{5,0900}{\rho^{11}},$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=2\pi/3} \approx 1+\frac{0,5407}{\rho^3}+\frac{0,0526}{\rho^4}+\frac{0,1006}{\rho^5}-\frac{0,5856}{\rho^6}+\frac{1,3382}{\rho^7}+\frac{0,5265}{\rho^8}+\frac{0,1955}{\rho^9}-\frac{2,4309}{\rho^{10}}+\frac{2,5973}{\rho^{11}},$$

$$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{p}\right|_{\gamma=2\pi/3} \approx 1+\frac{0,4829}{\rho^3}-\frac{0,0157}{\rho^4}-\frac{0,0124}{\rho^5}-\frac{0,4329}{\rho^6}+\frac{0,4200}{\rho^7}+\frac{0,2364}{\rho^8}+\frac{0,1955}{\rho^9}-\frac{0,7628}{\rho^{10}}+\frac{0,6933}{\rho^{11}}.$$

Следует отметить, что при незначительном отдалении от поверхности конической полости все напряжения резко падают и приближаются к величине основного напряженного состояния. Максимальное относительное отклонение при $\rho=2$ составляет 7,7 %, а при $\rho=3$ - 2,I %.

Наибольший коэффициент концентрации напряжений $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/P$ на поверхности конической полости при $\gamma=0$ и $\gamma=2\pi/3$ превышает такое же значение на сферической полости соответственно на 50,0 % и 54,6 %.

§ I7. Растяжение-сжатие трансверсально изотропной среды с биконической или замкнутой цилиндрической полостью.

Предположим, что упругая трансверсально изотропная среда с биконической (рис.5) или замкнутой цилиндрической (рис.6) полостью находится под действием равномерно распределенных усилий (I3.I).Постановка аналогичной задачи для изотропной среды изложена более подробнее в § I4. В рассматриваемом случае имеют место формулы (5.I4),(I6.I).Составляющие напряженного состояния среды в первом и втором приближениях определяются формулами (I6.2),(I6.7) при $K=3$.

Выражения $c_n^{(j)}, d_n^{(j)}$ $(j=1 \sim n=0,2,4\ ;\ j=2 \sim n=0,2,4,6,8)$ входящие в правые части системы алгебраических уравнений (I5.I3), в рассматриваемом случае имеют вид

$$c_0^{(1)}=\frac{1}{15}c\ ,\quad c_2^{(1)}=\frac{16}{21}c\ ,\quad c_4^{(1)}=-\frac{64}{35}c\ ,\quad d_2^{(1)}=-\frac{16}{21}d\ ,$$

$$d_4^{(1)}=\frac{64}{35}d$$

$$\left[c=A_0^{(2,0)}\gamma_0^{(2)}(\nu_0^{(2)}-1{,}5)\ ,\quad d=A_0^{(2,0)}(\eta_0^{(2)}-\gamma_0^{(2)})\ ,\quad A_0^{(2,0)}=-\frac{r_0^2 P}{\gamma_0^{(2)}}\right],$$

$$C_0^{(2)} = -\frac{A_0^{(2,0)}}{252}\left[\gamma_0^{(2)}(\nu_0^{(2)}-1{,}5)(62\,\nu_0^{(2)}-91)+2048(\eta_0^{(2)}-\gamma_0^{(2)})\right]+\frac{1}{15}A_0^{(2,1)}\gamma_0^{(2)}(\nu_0^{(2)}-1{,}$$

$$+\frac{8}{105}\sum_{i=2,4}A_2^{(i,1)}\left[3(\gamma_2^{(i)}-8\,\delta_2^{(i)})+2\,\gamma_2^{(i)}(\nu_2^{(i)}-1{,}5)\right]-$$

$$-\frac{64}{315}\sum_{i=2,4}A_4^{(i,1)}\left[5(\gamma_4^{(i)}-8\,\delta_4^{(i)})+\gamma_4^{(i)}(\nu_4^{(i)}-1{,}5)\right],$$

$$C_2^{(2)} = \frac{1}{21}\left\{\frac{16}{33}A^{*}+16\,A_0^{(2,1)}\gamma_0^{(2)}(\nu_0^{(2)}-1{,}5)-\right.$$

$$-\sum_{i=2,4}A_2^{(i,1)}\left[24(\gamma_2^{(i)}-8\,\delta_2^{(i)})+5\,\gamma_2^{(i)}(\nu_2^{(i)}-1{,}5)\right]-$$

$$\left.-\frac{16}{33}\sum_{i=2,4}A_4^{(i,1)}\left[25(\gamma_4^{(i)}-8\,\delta_4^{(i)})+2\,\gamma_4^{(i)}(\nu_4^{(i)}-1{,}5)\right]\right\},$$

$$C_4^{(2)} = \frac{1}{7}\left\{\frac{64}{143}A^{*}-\frac{64}{5}A_0^{(2,1)}\gamma_0^{(2)}(\nu_0^{(2)}-1{,}5)-\right.$$

$$-\frac{32}{55}\sum_{i=2,4}A_2^{(i,1)}\left[9(\gamma_2^{(i)}-8\,\delta_2^{(i)})+\gamma_2^{(i)}(\nu_2^{(i)}-1{,}5)\right]-$$

$$\left.-\frac{1}{715}\sum_{i=2,4}A_4^{(i,1)}\left[2960(\gamma_4^{(i)}-8\,\delta_4^{(i)})+157\,\gamma_4^{(i)}(\nu_4^{(i)}-1{,}5)\right]\right\}, \qquad (17.1)$$

$$C_6^{(2)} = \frac{16}{77}\left\{\frac{64}{45}A^{*}+4\sum_{i=2,4}A_2^{(i,1)}\left[2(\gamma_2^{(i)}-8\,\delta_2^{(i)})-\gamma_2^{(i)}(\nu_2^{(i)}-1{,}5)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{9}\sum_{i=2,4}A_4^{(i,1)}\left[26(\gamma_4^{(i)}-8\,\delta_4^{(i)})+\gamma_4^{(i)}(\nu_4^{(i)}-1{,}5)\right]\right\},$$

$$C_8^{(2)} = \frac{128}{1287}\left\{-\frac{32}{5}A^{*}+7\sum_{i=2,4}A_4^{(i,1)}\left[4(\gamma_4^{(i)}-8\,\delta_4^{(i)})-\gamma_4^{(i)}(\nu_4^{(i)}-1{,}5)\right]\right\},$$

$$d_2^{(2)} = -\frac{1}{21}\left\{\frac{16}{33}B^* + 16A_0^{(2,1)}(\eta_0^{(2)} - \gamma_0^{(2)}) - \sum_{i=2,4} A_2^{(i,1)}\left[16(\eta_2^{(i)} - \gamma_2^{(i)}) + \right.\right.$$

$$\left. + \delta_2^{(i)}(11\nu_2^{(i)} + 3,5) + 16(C_{11} - C_{12})\right] - \frac{32}{33}\sum_{i=2,4} A_4^{(i,1)}\left[6(\eta_4^{(i)} - \right.$$

$$\left.\left. - \gamma_4^{(i)}) + 5\delta_4^{(i)}\nu_4^{(i)} + 90(C_{11} - C_{12})\right]\right\},$$

$$d_4^{(2)} = -\frac{1}{7}\left\{\frac{64}{143}B^* - \frac{64}{5}A_0^{(2,1)}(\eta_0^{(2)} - \gamma_0^{(2)}) - \frac{16}{55}\sum_{i=2,4} A_2^{(i,1)}\left[5(\eta_2^{(i)} - \right.\right.$$

$$\left. - \gamma_2^{(i)}) + 3\delta_2^{(i)}(\nu_2^{(i)} - 3,5) + 54(C_{11} - C_{12})\right] - \frac{1}{715}\sum_{i=2,4} A_4^{(i,1)} \times$$

$$\left.\times\left[592(\eta_4^{(i)} - \gamma_4^{(i)}) + 5\delta_4^{(i)}(87\nu_4^{(i)} - 374,5) + 16720(C_{11} - C_{12})\right]\right\},$$

$$d_6^{(2)} = -\frac{16}{231}\left\{\frac{64}{15}B^* - 4\sum_{i=2,4} A_2^{(i,1)}\left[2(\eta_2^{(i)} - \gamma_2^{(i)}) - \delta_2^{(i)}(\nu_2^{(i)} - 3,5) + \right.\right.$$

$$\left. + 4(C_{11} - C_{12})\right] - \frac{1}{3}\sum_{i=2,4} A_4^{(i,1)}\left[3(\eta_4^{(i)} - \gamma_4^{(i)}) + 2\delta_4^{(i)}(\nu_4^{(i)} - 10,5) + \right.$$

$$\left.\left. + 132(C_{11} - C_{12})\right]\right\},$$

$$d_8^{(2)} = \frac{64}{1287}\left\{\frac{64}{5}B^* - 7\sum_{i=2,4} A_4^{(i,1)}\delta_4^{(i)}(\nu_4^{(i)} - 5,5) + 7\sum_{i=2,4}\left[A_4^{(i,1)} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times(\eta_4^{(i)} - \gamma_4^{(i)}) + 4A_4^{(i,1)}(C_{11} - C_{12})\right]\right\}$$

$$\left\{ A^* = A_0^{(2,0)}\left[\gamma_0^{(2)}(\nu_0^{(2)} - 1,5)(\nu_0^{(2)} - 3,5) - 32(\eta_0^{(2)} - \gamma_0^{(2)})\right],\right.$$

$$\left. B^* = A_0^{(2,0)}(\eta_0^{(2)} - \gamma_0^{(2)})(\nu_0^{(2)} + 0,5)\right\}.$$

В частности, для трансверсально изотропных материалов, упруги постоянные которых приведены в табл.36, имеем следующие

Таблица 36

Материал	ν_{12}	ν_{13}	$\frac{E_1}{G}$	$\frac{E_3}{G}$	$\frac{E_1}{E_3}$
I	0,365	0,288	2,244	2,7I2	0,828
2	0,300	0,I00	5,000	I,250	4,000
3	0,357	0,253	2,77I	3,094	0,896

значения коэффициентов $A_n^{(i,j)}$, вычисленных по формулам (I5.I4),

материал I

$$A_0^{(2,0)} \approx -0,0595\, r_0^2 p\,,\quad A_0^{(2,1)} \approx 0,0117\, r_0^2 p\,,\quad A_2^{(2,1)} \approx 0,0323\, r_0^2 p\,,\quad A_2^{(4,1)} \approx 0,0091\, r_0^2$$

$$A_4^{(2,1)} \approx -0,0953\, r_0^2 p\,,\quad A_4^{(4,1)} \approx 0,0252\, r_0^2 p\,,\quad A_0^{(2,2)} \approx 0,0091\, r_0^2 p\,,\quad A_2^{(2,2)} \approx 0,0951\, r_0^2$$

$$A_2^{(4,2)} \approx 0,0549\, r_0^2 p\,,\quad A_4^{(2,2)} \approx 0,0709\, r_0^2 p\,,\quad A_4^{(4,2)} \approx -0,0195\, r_0^2 p\,,\quad A_6^{(2,2)} \approx 0,2350\, r_0$$

$$A_6^{(4,2)} \approx -0,1189\, r_0^2 p\,,\quad A_8^{(2,2)} \approx -0,8500\, r_0^2 p\,,\quad A_8^{(4,2)} \approx 0,6173\, r_0^2 p\,,$$

материал 2

(I7.2

$$A_0^{(2,0)} \approx -0,1044\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,\quad A_0^{(2,1)} \approx 0,0330\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,\quad A_2^{(2,1)} \approx 0,2258\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,$$

$$A_2^{(4,1)} \approx 0,1129\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,\quad A_4^{(2,1)} \approx -0,6085\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,\quad A_4^{(4,1)} \approx -0,0175\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,$$

$$A_0^{(2,2)} \approx -0,2176\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,\quad A_2^{(2,2)} \approx 1,0420\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,\quad A_2^{(4,2)} \approx 1,8238\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,$$

$$A_4^{(2,2)} \approx 0,7873\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,\quad A_4^{(4,2)} \approx 0,0278\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,\quad A_6^{(2,2)} \approx 1,5811\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,$$

$$A_6^{(2,4)} \approx -0,2799\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,\quad A_8^{(2,2)} \approx -3,2693\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,\quad A_8^{(4,2)} \approx 0,8235\, \frac{r_0^2 p}{C_{33}}\,,$$

материал 3

$$A_0^{(2,0)} \approx -0,1459\, r_0^2 p\,,\quad A_0^{(2,1)} \approx 0,0294\, r_0^2 p\,,\quad A_2^{(2,1)} \approx 0,1056\, r_0^2 p\,,$$

$$A_2^{(4,1)} \approx 0{,}0233\ r_0^2 P\ ,\quad A_4^{(2,1)} \approx -0{,}2218\ r_0^2 P\ ,\quad A_4^{(4,1)} \approx 0{,}0074\ r_0^2 P\ ,$$

$$A_0^{(2,2)} \approx -0{,}0683\ r_0^2 P\ ,\quad A_2^{(2,2)} \approx 0{,}3288\ r_0^2 P\ ,\quad A_2^{(4,2)} \approx 0{,}1832\ r_0^2 P\ ,$$

$$A_4^{(2,2)} \approx 0{,}1748\ r_0^2 P\ ,\quad A_4^{(4,2)} \approx -0{,}0065\ r_0^2 P\ ,\quad A_6^{(2,2)} \approx 0{,}4288\ r_0^2 P\ ,$$

$$A_6^{(4,2)} \approx -0{,}0449\ r_0^2 P\ ,\quad A_8^{(2,2)} \approx -0{,}8747\ r_0^2 P\ ,\quad A_8^{(4,2)} \approx 0{,}1082\ r_0^2 P\ .$$

Заметим, что значения коэффициентов $A_n^{(i,j)}$ для материалов I и 3 близки к изотропному случаю.

Разложение нормальных напряжений по полиномам Лежандра для биконической и цилиндрической полостей при $\rho = 1$ такие

материал I

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=1/9} \approx 1{,}4693 - 0{,}5579\, P_2(\mu) + 1{,}2590\, P_4(\mu) - 0{,}3141\, P_6(\mu) + 0{,}5928\, P_8(\mu)\ ,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=-1/9} \approx 1{,}5265 + 0{,}4179\, P_2(\mu) - 1{,}4457\, P_4(\mu) - 0{,}3141\, P_6(\mu) + 0{,}5928\, P_8(\mu)\ ,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=1/9} \approx 1{,}4854 + 0{,}3030\, P_2(\mu) + 0{,}5277\, P_4(\mu) - 0{,}1287\, P_6(\mu) + 0{,}2617\, P_8(\mu)\ ,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=-1/9} \approx 1{,}4283 - 0{,}2852\, P_2(\mu) - 0{,}4987\, P_4(\mu) - 0{,}1287\, P_6(\mu) + 0{,}2617\, P_8(\mu)\ ,$$

материал 2

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=1/9} \approx 1,9632 - 1,4471\, P_2(\mu) + 2,2853\, P_4(\mu) - 1,2816\, P_6(\mu) + 2,1406\, P_8(\mu)\,,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=-1/9} \approx 2,1372 + 0,8566\, P_2(\mu) - 3,1984\, P_4(\mu) - 1,2816\, P_6(\mu) + 2,1406\, P_8(\mu)\,,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=1/9} \approx 2,2836 + 0,8588\, P_2(\mu) + 0,3756\, P_4(\mu) - 0,4323\, P_6(\mu) + 0,5747\, P_8(\mu)\,,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=-1/9} \approx 2,1096 - 1,0387\, P_2(\mu) - 0,5589\, P_4(\mu) - 0,4323\, P_6(\mu) + 0,5747\, P_8(\mu)\,,$$

материал 3 (I7.3)

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=1/9} \approx 1,4443 - 0,6718\, P_2(\mu) + 1,4417\, P_4(\mu) - 0,4325\, P_6(\mu) + 0,8236\, P_8(\mu)\,,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=-1/9} \approx 1,5080 + 0,4827\, P_2(\mu) - 1,6938\, P_4(\mu) - 0,4325\, P_6(\mu) + 0,8236\, P_8(\mu)\,,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=1/9} \approx 1,5043 + 0,3162\, P_2(\mu) + 0,6178\, P_4(\mu) - 0,1684\, P_6(\mu) + 0,3354\, P_8(\mu)\,,$$

$$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\right|_{\varepsilon=-1/9} \approx 1,4407 - 0,3171\, P_2(\mu) - 0,6025\, P_4(\mu) - 0,1684\, P_6(\mu) + 0,3354\, P_8(\mu)\,.$$

Числовые значения табл.37 и линии на рис.30,3I показывают характер изменения относительных напряжений $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/P$ и $\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}/P$

Таблица 37

$\frac{\sigma_{ee}^{*(2)}}{P}$	Материал \ γ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}\right\|_{\varepsilon=1/9}$	I	2,449	I,76I	I,067	I,042	I,030	I,758	2,48I
	2	3,660	I,932	0,866	I,502	0,9I2	2,450	4,530
	3	2,605	I,734	0,94I	I,00I	0,9II	I,76I	2,68I
$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\right\|_{\varepsilon=1/9}$	I	2,449	2,093	I,647	I,444	I,234	I,390	I,644
	2	3,660	3,I96	2,796	2,58I	I,886	I,878	2,287
	3	2,605	2,I77	I,666	I,458	I,207	I,402	I,722
$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}\right\|_{\varepsilon=-1/9}$	I	0,777	0,844	I,67I	2,442	I,747	I,038	I,036
	2	0,654	0,4I3	2,352	4,479	2,383	0,9I7	I,495
	3	0,688	0,689	I,653	2,627	I,737	0,9I3	0,992
$\left.\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}\right\|_{\varepsilon=-1/9}$	I	0,777	0,804	I,I98	I,657	I,547	I,42I	I,496
	2	0,654	0,676	I,4I4	2,3I3	2,2I9	2,328	2,7I2
	3	0,688	0,708	I,I78	I,73I	I,575	I,4I7	I,5I8

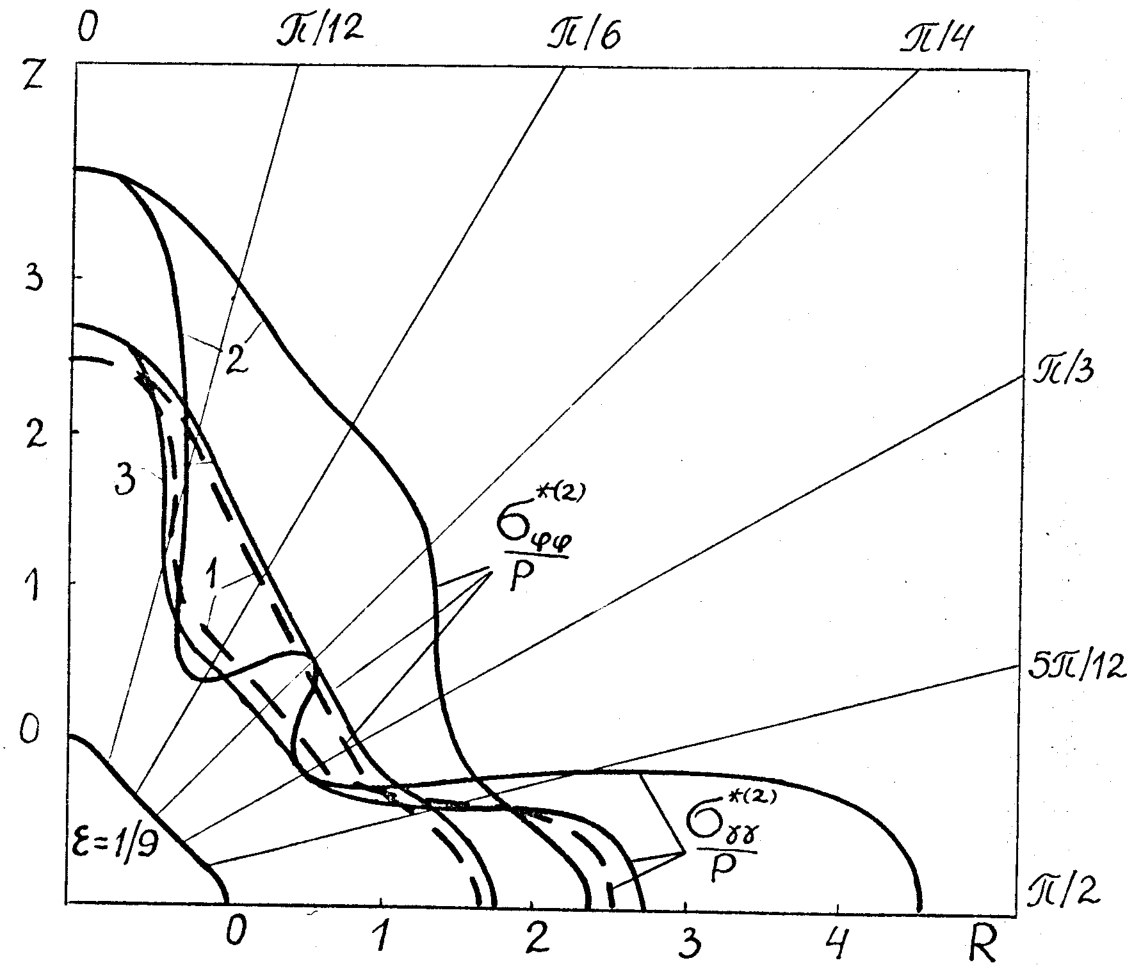

0
π/12
π/6
π/4
π/3
5π/12
π/2
Z
3
2
1
0
2
3
1
$\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{P}$
ε=1/9
0
1
2
3
4
R

Рис.30

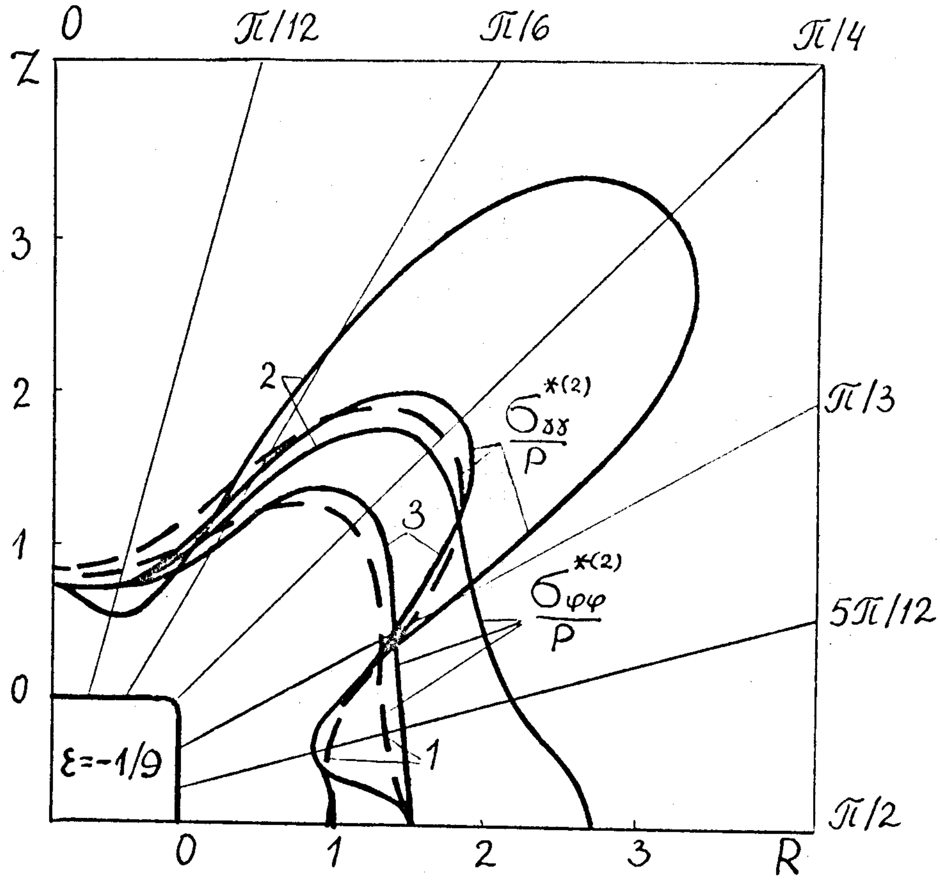

0
π/12
π/6
π/4
Z
3
2
1
0
π/3
5π/12
π/2
2
3
1
$\frac{\sigma^{*(2)}_{\vartheta\vartheta}}{P}$
$\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}$
ε=-1/9
0
1
2
3
R

Рис.31

вдоль четверти меридиональных сечений рассматриваемых поверхностей. Заметим, что кривые для материала I практически совпадают с кривыми для изотропного материала.

Аналитическая структура напряжений по степеням ρ при $\gamma=const$ существенно зависит от типа материала, например,

материал I

$$\left.\frac{\overset{*(2)}{\sigma}_{\gamma\gamma}}{P}\right|_{\substack{\gamma=0\\ \varepsilon=1/9}} = \left.\frac{\overset{*(2)}{\sigma}_{\varphi\varphi}}{P}\right|_{\substack{\gamma=0\\ \varepsilon=1/9}} \approx 1 + \frac{0,4901}{\rho^3} - \frac{0,7733}{\rho^5} + \frac{1,8260}{\rho^7} - \frac{3,8554}{\rho^9} + \frac{5,0279}{\rho^{10}} - \frac{1,2662}{\rho^{11}},$$

$$\left.\frac{\overset{*(2)}{\sigma}_{\gamma\gamma}}{P}\right|_{\substack{\gamma=\pi/4\\ \varepsilon=-1/9}} \approx 1 + \frac{0,4812}{\rho^3} - \frac{0,3306}{\rho^5} + \frac{1,0170}{\rho^7} - \frac{1,4978}{\rho^9} + \frac{2,6016}{\rho^{10}} - \frac{0,8295}{\rho^{11}},$$

$$\left.\frac{\overset{*(2)}{\sigma}_{\varphi\varphi}}{P}\right|_{\substack{\gamma=\pi/4\\ \varepsilon=-1/9}} \approx 1 + \frac{0,4857}{\rho^3} - \frac{0,0419}{\rho^5} + \frac{0,0690}{\rho^7} - \frac{0,0959}{\rho^9} + \frac{0,3985}{\rho^{10}} - \frac{0,1586}{\rho^{11}},$$

материал 2 (I7.

$$\left.\frac{\overset{*(2)}{\sigma}_{\gamma\gamma}}{P}\right|_{\substack{\gamma=0\\ \varepsilon=1/9}} = \left.\frac{\overset{*(2)}{\sigma}_{\varphi\varphi}}{P}\right|_{\substack{\gamma=0\\ \varepsilon=1/9}} \approx 1 + \frac{0,2257}{\rho^4} + \frac{1,3600}{\rho^5} - \frac{1,0025}{\rho^6} - \frac{1,1102}{\rho^7} - \frac{0,0333}{\rho^8} - \frac{0,0955}{\rho^9} + \frac{4,4114}{\rho^{10}} - \frac{1,4311}{\rho^{11}} - \frac{1,8826}{\rho^{13}} - \frac{4,6064}{\rho^{14}} + \frac{6,8249}{\rho^{16}},$$

$$\left.\frac{\overset{*(2)}{\sigma}_{\gamma\gamma}}{P}\right|_{\substack{\gamma=\pi/4\\ \varepsilon=-1/9}} \approx 1 + \frac{0,0364}{\rho^4} + \frac{1,4565}{\rho^5} - \frac{0,5526}{\rho^6} + \frac{0,0644}{\rho^7} + \frac{0,0189}{\rho^8} - \frac{0,8467}{\rho^9} + \frac{3,2467}{\rho^{10}} - \frac{1,0236}{\rho^{11}} +$$

$$+\frac{0,5885}{\rho^{13}}-\frac{2,5310}{\rho^{14}}+\frac{3,3219}{\rho^{16}},$$

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}\right|_{\substack{\gamma=\pi/4\\ \varepsilon=-1/9}}\approx 1-\frac{0,0043}{\rho^{4}}+\frac{1,4565}{\rho^{5}}-\frac{0,6110}{\rho^{6}}+\frac{0,1144}{\rho^{7}}-\frac{0,0022}{\rho^{8}}-$$

$$-\frac{0,8312}{\rho^{9}}+\frac{1,3061}{\rho^{10}}-\frac{0,4555}{\rho^{11}}+\frac{0,5012}{\rho^{13}}-$$

$$-\frac{0,9117}{\rho^{14}}+\frac{0,7503}{\rho^{16}},$$

материал 3

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{P}\right|_{\substack{\gamma=0\\ \varepsilon=1/9}}=\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}\right|_{\substack{\gamma=0\\ \varepsilon=1/9}}\approx 1+\frac{0,5320}{\rho^{3}}-\frac{0,1619}{\rho^{4}}-\frac{0,3719}{\rho^{5}}+$$

$$+\frac{0,0643}{\rho^{6}}-\frac{0,3768}{\rho^{7}}+\frac{1,5325}{\rho^{8}}+\frac{0,1673}{\rho^{9}}-\frac{0,6323}{\rho^{11}}-$$

$$-\frac{1,4272}{\rho^{12}}+\frac{2,2793}{\rho^{14}},$$

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}}{P}\right|_{\substack{\gamma=\pi/4\\ \varepsilon=-1/9}}\approx 1+\frac{0,5266}{\rho^{3}}-\frac{0,0941}{\rho^{4}}+\frac{0,0259}{\rho^{5}}-\frac{0,0111}{\rho^{6}}-\frac{0,2864}{\rho^{7}}+$$

$$+\frac{1,1624}{\rho^{8}}-\frac{0,0240}{\rho^{9}}+\frac{0,1528}{\rho^{11}}-\frac{0,9284}{\rho^{12}}+\frac{1,1029}{\rho^{14}},$$

$$\left.\frac{\sigma^{*(2)}_{\varphi\varphi}}{P}\right|_{\substack{\gamma=\pi/4\\ \varepsilon=-1/9}}\approx 1+\frac{0,5282}{\rho^{3}}-\frac{0,0658}{\rho^{4}}+\frac{0,0645}{\rho^{5}}-\frac{0,0080}{\rho^{6}}-\frac{0,1858}{\rho^{7}}+$$

$$+\frac{0,3082}{\rho^{8}}-\frac{0,0597}{\rho^{9}}+\frac{0,1237}{\rho^{11}}-\frac{0,2312}{\rho^{12}}+\frac{0,2571}{\rho^{14}}.$$

Графики на рис.32,33, построенные для материалов I и 2, иллюстрируют локальность поля напряжений. Аналогичный характер имеют графики для материала 3 – это следует из табл.38 .

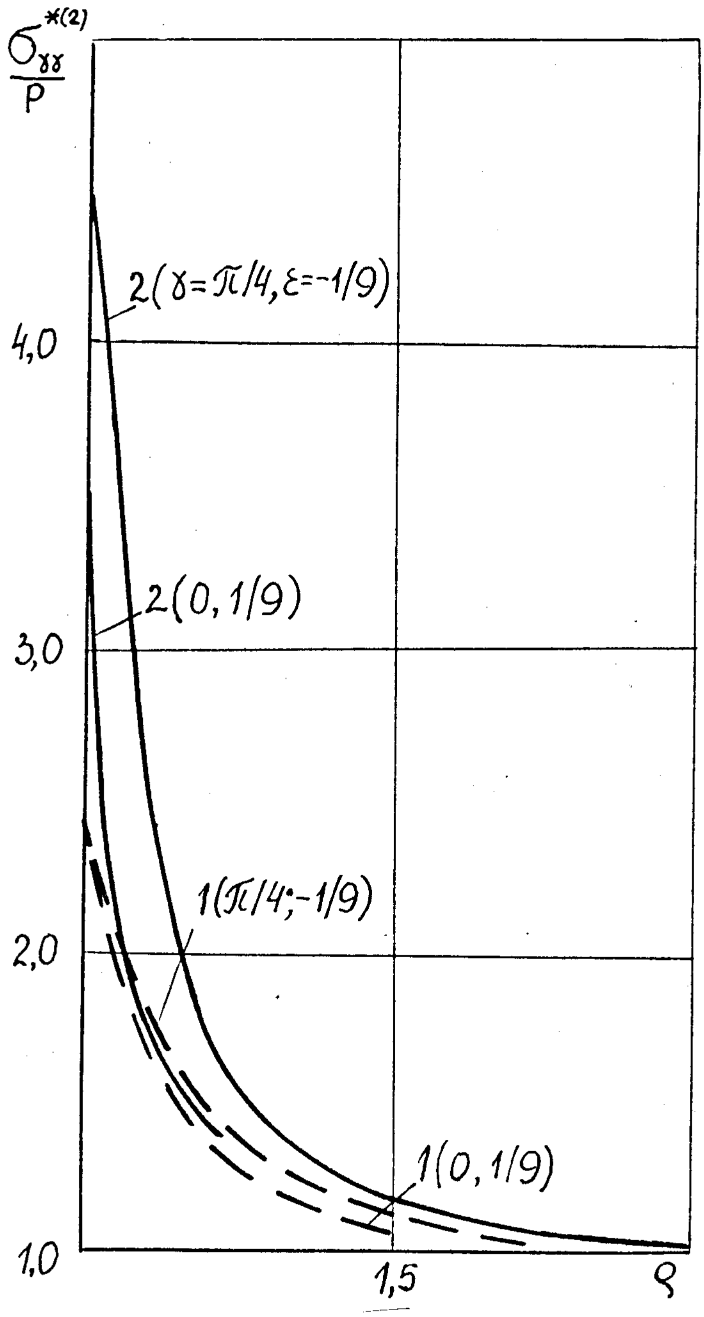

$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{P}$
$2(\gamma=\pi/4, \varepsilon=-1/9)$
4,0
$2(0, 1/9)$
3,0
$1(\pi/4; -1/9)$
2,0
$1(0, 1/9)$
1,0
1,5
ρ

Рис.32

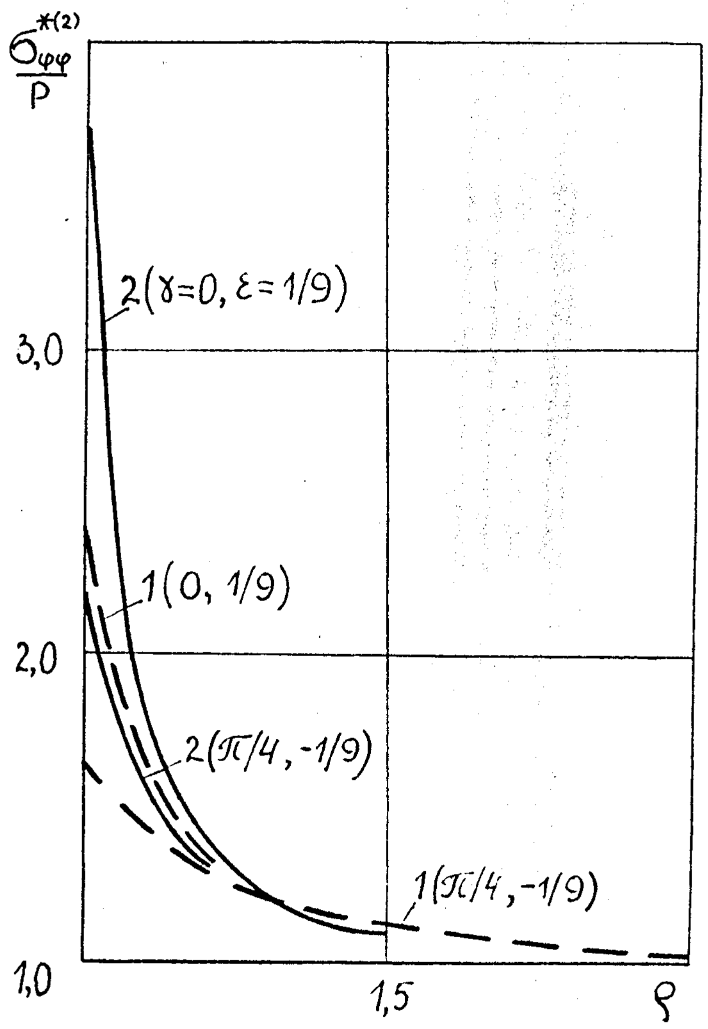

$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)}}{P}$
2(γ=0, ε=1/9)
3,0
1(0, 1/9)
2,0
2(π/4, -1/9)
1(π/4, -1/9)
1,0
1,5
ρ

Рис.33

Таблица 38

$\frac{\overset{*(2)}{\sigma}_{\ell\ell}}{P}$	Пара-метры	Ма-териалы \ ρ	I,00	I,I0	I,25	I,50	2,00	3,00
$\frac{\overset{*(2)}{\sigma}_{\gamma\gamma}}{P}, \frac{\overset{*(2)}{\sigma}_{\varphi\varphi}}{P}$	$\gamma=0$ $\varepsilon=1/9$	I	2,449	I,685	I,294	I,I23	I,048	I,0I6
		2	3,660	I,733	I,26I	I,II2	I,035	I,007
		3	2,605	I,6II	I,250	I,II9	I,049	I,0I6
$\frac{\overset{*(2)}{\sigma}_{\gamma\gamma}}{P}$	$\gamma=\pi/4$, $\varepsilon=-1/9$	I	2,442	I,755	I,358	I,I55	I,057	I,0I7
		2	4,479	2,34I	I,5I2	I,I76	I,04I	I,006
		3	2,627	I,775	I,366	I,I66	I,063	I,0I9
$\frac{\overset{*(2)}{\sigma}_{\varphi\varphi}}{P}$		I	I,657	I,432	I,266	I,I45	I,060	I,0I8
		2	2,3I3	I,674	I,337	I,I40	I,036	I,005
		3	I,73I	I,448	I,273	I,I5I	I,064	I,0I9

Для рассматриваемых трех материалов максимальное значение относительного отклонения

$$\frac{\left|\overset{*(2)}{\sigma}_{\ell\ell} - \hat{\sigma}_{\ell\ell}\right|}{\hat{\sigma}_{\ell\ell}} \cdot 100\% \quad (\ell = \gamma, \varphi),$$

т.е. отклонение нормальных напряжений от соответствующих им значений для среды без полости, не превышает 6,3 % при $\rho=2$ и I,9 % при $\rho=3$.

В табл.39 показано содержание каждого из трех приближений относительного напряжения $\overset{*(2)}{\sigma}_{\gamma\gamma}/P$.Максимальное значение величины $\Delta_{\gamma}^{(3)} = \varepsilon^3 \overset{(3)}{\sigma}_{\gamma\gamma}/P$, вычисленной согласно неравенства (8.I0), меньше 5,4 %; оно соответствует материалу 2 при $\gamma=\pi/4$ и $\gamma=\pi/2$.

Величина наибольших напряжений $\overset{*(2)}{\sigma}_{\gamma\gamma}/P$ на поверхности биконической полости при $\gamma=0$ и $\gamma=\pi/2$ больше от таких

Таблица 39

Материал	$\frac{\sigma^{*(0)}_{\gamma\gamma}}{p}$	$\Lambda^{(0)}_{\gamma}$, %	$\frac{\lvert\varepsilon\sigma^{(1)}_{\gamma\gamma}\rvert}{p}$	$\Lambda^{(1)}_{\gamma}$, %	$\frac{\lvert\varepsilon^2\sigma^{(2)}_{\gamma\gamma}\rvert}{p}$	$\Lambda^{(2)}_{\gamma}$, %
			$\gamma=0,\ \varepsilon=1/9$			
I	I,475	60,3	0,836	34,I	0,I38	5,6
2	2,373	58,0	I,503	36,7	0,2I6	5,3
3	I,5I3	58,I	0,959	36,8	0,I33	5,I
			$\gamma=\pi/2,\ \varepsilon=1/9$			
I	I,475	59,5	0,723	29,I	0,283	II,4
2	2,373	52,4	I,527	33,7	0,629	I3,9
3	I,5I3	56,5	0,845	3I,5	0,323	I2,0
			$\gamma=\pi/4,\ \varepsilon=-1/9$			
I	I,475	60,4	0,700	28,7	0,267	I0,9
2	2,373	53,0	I,489	33,2	0,6I8	I3,8
3	I,5I3	57,6	0,8I3	3I,0	0,300	II,4

же значений на сферической полости соответственно на 35,2 % и 47,6%. При $\gamma=\pi/4$ на поверхности цилиндрической полости такое отклонение составляет 47,0 %.

Таким образом, если упругие постоянные значительно отличаются от соответствующих им значений в изотропном случае, то, как видно из рис.30-33, анизотропия материала существенно влияет на напряженное состояние в окрестности неканонической полости. Так, для материала 2 такое влияние анизотропии на величину максимальных напряжений $\sigma^{*(2)}_{\gamma\gamma}/p$ при $\rho=1$ в сечениях $\gamma=0$, $\gamma=\pi/4$, $\gamma=\pi/2$ доходит до 78 % по сравнению с изотропным случаем.

§ 18. О приближенном определении напряженного состояния в окрестности гипотрохоидальной поверхности

Рассмотрим упругую однородную среду с гипотрохоидальной поверхностью (рис.34). Она образована вращением гипотрохоиды [40] вокруг своей диагонали, как оси симметрии. Уравнение контура в произвольной меридиональной плоскости zOR имеет вид

$$z = \cos\gamma + \varepsilon\cos 3\gamma, \quad R = \sin\gamma - \varepsilon\sin 3\gamma \ \left(0 \leq \varepsilon < \tfrac{1}{3}\right). \qquad (18.1)$$

Вопрос влияния радиуса кривизны поверхности на напряженное состояние среды выясним с помощью двух задач.

<u>Жесткое гипотрохоидальное включение в упругой среде.</u> Предположим, что изотропная среда с впаянным жестким гипотрохоидальным включением находится на "бесконечности" в поле равномерных всесторонних внешних усилий (11.5). Тогда напряженное состояние среды характеризуется выражениями (11.15),(12.4),(12.11). Постановка и аналитическое решение аналогичной задачи для биконического жесткого включения рассмотрены подробнее в § 12.

Концентрация нормальных напряжений $\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}/p$ в вершине гипотрохоидального включения $(\rho = 1,\ \gamma = 0, \pi)$, полученная приближенным методом "возмущения формы границы", определяется формулой

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}^{*(2)}}{p} = 1{,}6154 + 3{,}2562\,\varepsilon + 11{,}1392\,\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \qquad (18.2)$$

На рис. 35 показано зависимость коэффициента концентрации напряжений $K_{\rho\rho}^{(2)} = \sigma_{\rho\rho}^{*(2)}/p$ и мажорантного напряжения $K_{\rho\rho}^{M} = \sigma_{\rho\rho}^{M}/p$, вычисленного согласно неравенства (5.19), от величины параметра ε. Соответствующие числовые значения приведены в табл.40. Здесь же дано значения радиуса кривизны ρ^* поверхности.

<u>Свободная от напряжений гипотрохоидальная полость.</u> Допустим, что требуется определить напряженное состояние трансверсально изотропной среды со свободной от напряжений гипотрохоидальной полостью,

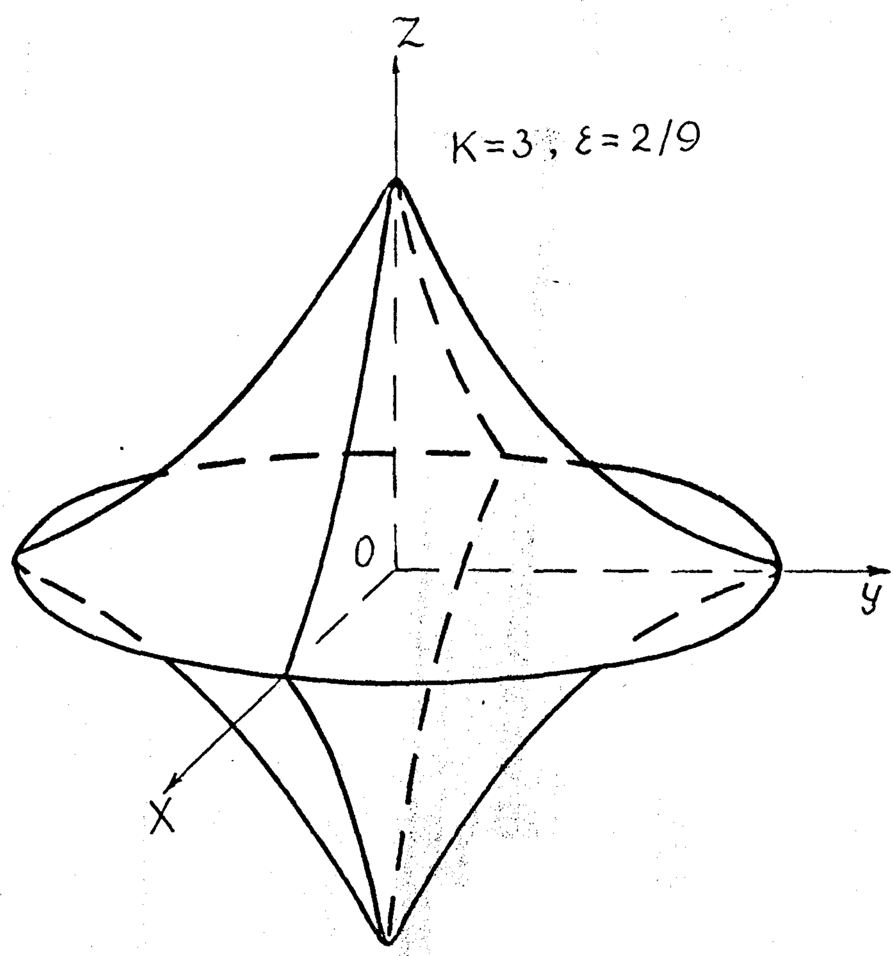


Рис.34

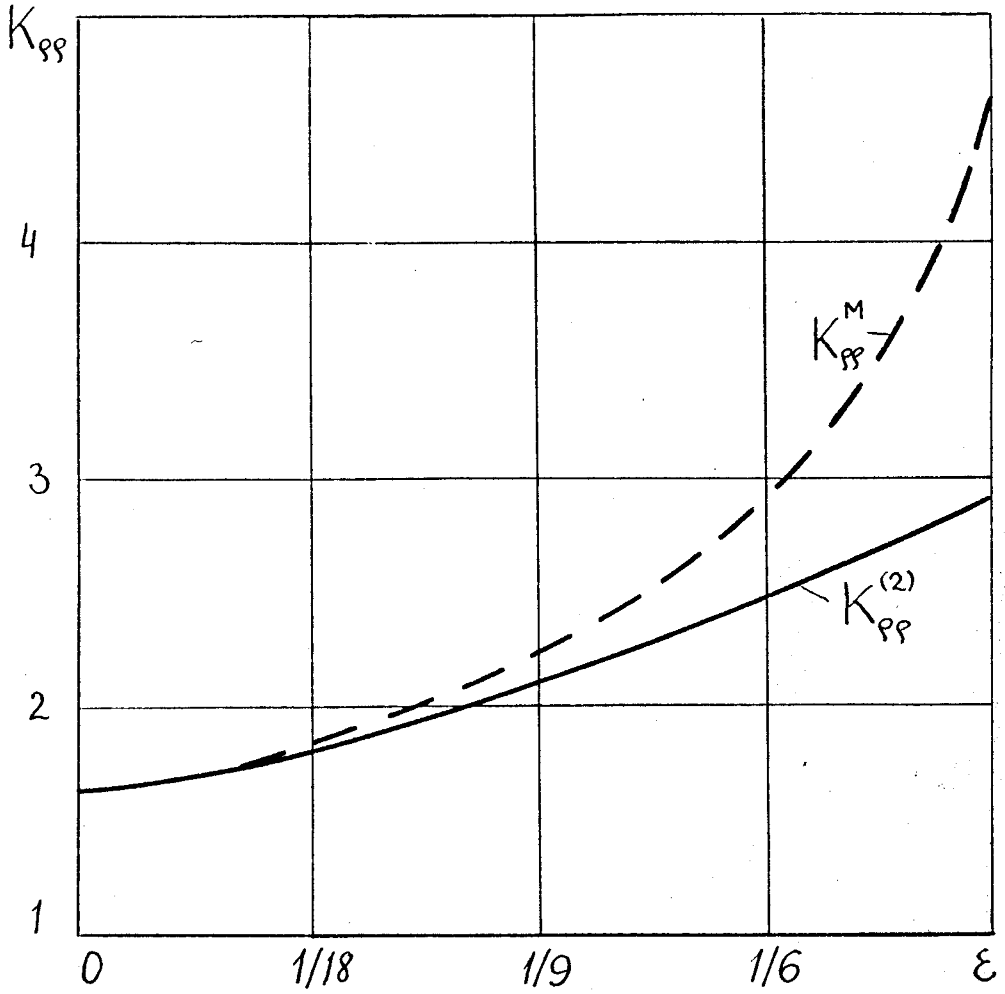


Рис.35

Таблица 40

ε	0	$1/18$	$1/9$	$1/6$	$2/9$
$K^{(2)}_{\rho\rho}$	1,615	1,831	2,115	2,468	2,889
$K^{M}_{\rho\rho}$	1,615	1,839	2,199	2,878	4,633
ρ^*	1,000	0,463	0,222	0,100	0,037

Таблица 41

Материал	$K_{\gamma\gamma}$ \ ε	0	$1/18$	$1/9$	$1/6$	$2/9$
1	$K^{(2)}_{\gamma\gamma}$	1,475	1,928	2,449	3,040	3,699
	$K^{M}_{\gamma\gamma}$	1,475	1,931	2,476	3,142	3,971
2	$K^{(2)}_{\gamma\gamma}$	2,373	3,071	3,660	4,142	4,517
	$K^{M}_{\gamma\gamma}$	2,373	3,075	3,696	4,275	4,864
3	$K^{(2)}_{\gamma\gamma}$	1,513	2,026	2,605	3,251	3,964
	$K^{M}_{\gamma\gamma}$	1,513	2,028	2,627	3,330	4,169
4	$K^{(2)}_{\gamma\gamma}$	1,500	1,931	2,405	2,923	3,483
	$K^{M}_{\gamma\gamma}$	1,500	1,932	2,415	2,959	3,575

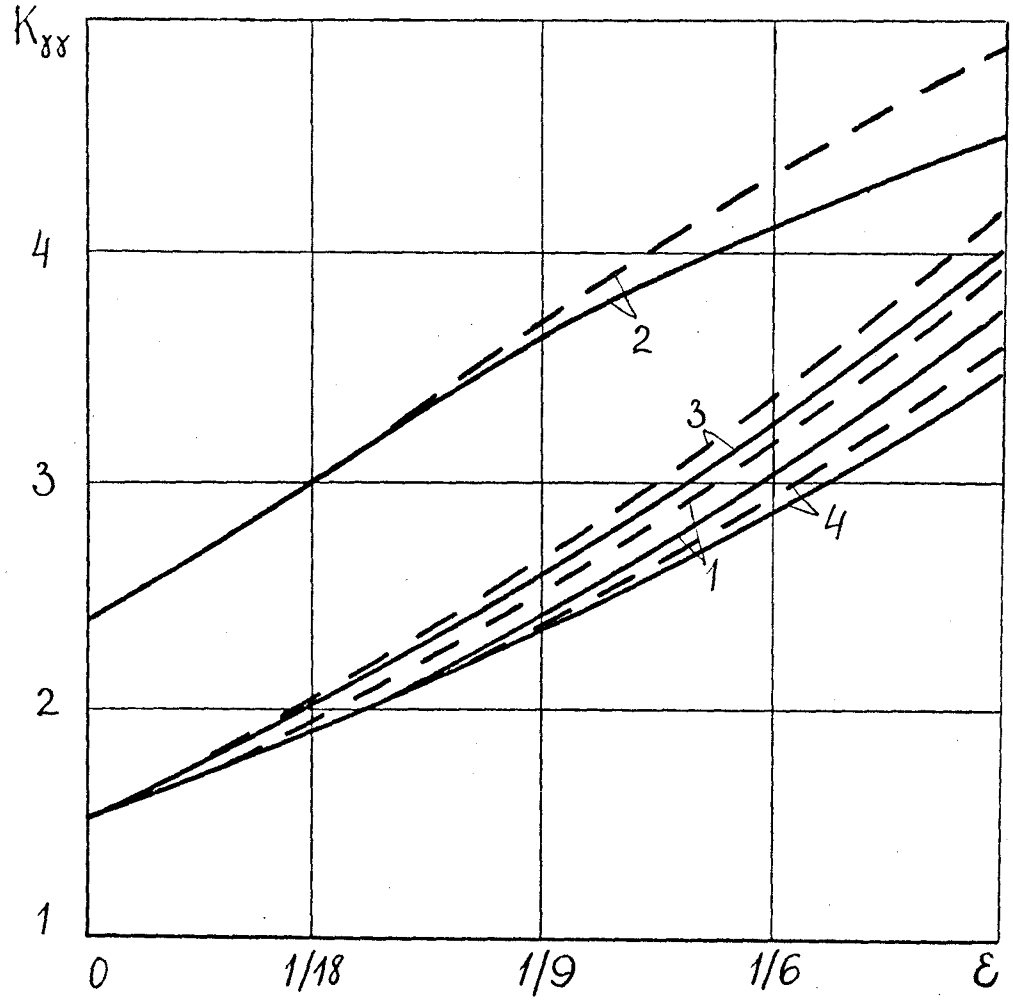


Рис.36

в случае растяжения-сжатия. Компоненты напряжений имеют вид (16,1), (16.2),(16.7) при $K=3$. Аналогичная задача рассмотрена более подробно в § 14 для изотропной и § 17 для трансверсально изотропной среды с биконической полостью.

В вершине гипотрохоидальной полости, т.е. при $\rho=1$, $\gamma=0,\pi$, распределение напряжений $\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/p$ для материалов 1,2,3 (табл. 36) определяется выражениями

материал 1
$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}=1,4753+7,5230\varepsilon+11,1773\varepsilon^2+O(\varepsilon^3),$$
материал 2
$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}=2,3729+13,5272\varepsilon-17,4595\varepsilon^2+O(\varepsilon^3),$$
материал 3
$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}=1,5134+8,6279\varepsilon+10,7941\varepsilon^2+O(\varepsilon^3), \tag{18.3}$$
материал 4
$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}}{p}=1,5000+7,3732\varepsilon+6,9765\varepsilon^2+O(\varepsilon^3).$$
(материал 4 соответствует изотропному случаю).

Числовые значения в табл.41 характеризуют изменение коэффициента концентрации напряжений $K_{\gamma\gamma}^{(2)}=\sigma_{\gamma\gamma}^{*(2)}/p$ и мажорантного напряжения $K_{\gamma\gamma}^{M}=\sigma_{\gamma\gamma}^{M}/p$ при некоторых значениях малого параметра ε. На рис. 36 кривые построены для $K_{\gamma\gamma}^{(2)}$ (сплошные линии) и $K_{\gamma\gamma}^{M}$ (пунктирные линии), причем нумерация их соответствует нумерации рассматриваемых материалов.

Таким образом, при растяжении - сжатии изотропной среды с гипотрохоидальным жестким включением и трансверсально изотропной среды с гипотрохоидальной полостью, напряженное состояние существенным образом зависит от кривизны поверхности: с ростом малого параметра ε, т.е. при уменьшении радиуса кривизны поверхности, коэффициенты концентрации напряжений увеличиваются.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Работа посвящена одному из важных разделов механики твердого деформируемого тела - пространственным осесимметричным задачам математической теории упругости. Основное внимание в ней уделяется исследованию напряженно-деформированного состояния тел, ограниченных поверхностями вращения специального вида (биконическая, замкнутые коническая и цилиндрическая поверхности). Так как переменные в таких краевых задачах не разделяются, то получить точное решение не представляется возможным. К решению конкретных задач указанного класса впервые применен приближенный метод "возмущения формы границы", с помощью которого граничные задачи для неканонических поверхностей формально сводятся к решению последовательности краевых задач для сферических поверхностей.

2. Коэффициент концентрации напряжений на неканонических полостях и включениях в точках наименьшего радиуса кривизны поверхности существенно отличается от соответствующих максимальных значений в случае сферических граничных поверхностей. Это особенно проявляется в трансверсально изотропных средах с сильной анизотропией. Так, например, при кручении цилиндрических валов с неканоническими полостями такое максимальное отклонение составляет 44,7 % в интервале изменения отношения модулей сдвига $7/16 \leq G_1/G_2 \leq 9/2$. В случае растяжения-сжатия изотропной и трансверсально изотропной среды с неканоническими полостями и включениями для рассматриваемых материалов превышение напряжений в характерных точках над значениями в соответствующих точках сферической поверхности доходит до 54,6 %.

3. Напряженное состояние в окрестности полостей и включений носит локальный характер, т.е. при незначительном отдалении от по-

верхности полости (включения) максимальные напряжения резко падают и приближаются к соответствующим значениям в деформируемой среде без концентраторов напряжений (основное напряженное состояние). Так, например, при кручении или растяжении-сжатии упругих тел со свободными от напряжений неканоническими полостями на расстоянии двух радиусов максимальные напряжения отличаются от соответствующего основного напряженного состояния не более чем на 3 %. В случае впаянных жестких включений аналогичный вывод сохраняется, если расстояния от поверхности включений не менее трех радиусов.

4. Полученные результаты можно распространить на некоторые пространственные многосвязные области, тела конечных размеров, а также на толстостенные неканонические оболочки, если их граничные поверхности находятся на таком расстоянии друг от друга, что взаимным влиянием этих поверхностей можно пренебречь.

5. Аналитические решения рассмотренного класса пространственных осесимметричных задач теории упругости для неканонических областей близких к сферическим, полученные приближенным методом "возмущения формы границы" с погрешностью до 5 % можно принять за истинные. Это следует из сравнения приближенных числовых результатов с точными значениями для эллипсоидальных областей, а также из анализа процентного содержания найденных последовательных приближений в рассмотренных конкретных задачах.

6. Результаты диссертационной работы могут быть использованы при исследовании напряженного состояния упругих валов больших диаметров с полостями и инородными включениями работающих в различных силовых полях.

Применение результатов работы возможно при исследовании напряженного состояния горных массивов с полостями (выработками) или включениями из других пород, находящихся под внутренним (природные газы) или внешним (собственный вес) давлением.

Полученные результаты могут быть использованы при определении прочности композиционных материалов, армированных короткими волокнами. При этом можно оценить, какова должна быть концентрация волокон в материале, чтобы избежать их взаимного влияния на поле напряжений.

Результаты исследования могут найти применение в конструкторских бюро машиностроительного профиля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Я. Решение пространственных задач теории упругости для тел вращения при помощи аналитических и обобщенных аналитических функций.-Сб.тр.Новосиб.ин-та инж.ж.-д.трансп.,1970, вып.96,с.5-35.
2. Александров А.Я. О решении основных трехмерных задач теории упругости для тел произвольной формы.- В кн.: Тр.XIII Междунар. конгр.по теор. и прикл.мех., М.:Наука,1972,с.26 (англ.), 27 (рус.).
3. Александров А.Я. Решение некоторых классов трехмерных задач теории упругости при помощи аналитических функций.-В кн.: Мех. сплош.среды и родств.пробл.анализа,М.: Наука,1972,с.13-29.
4. Александров А.Я. Решение основных трехмерных задач теории упругости для тел произвольной формы путем численной реализации метода интегральных уравнений.- Докл.АН СССР, 1973, 208 ,№ 2, с.291-294.
5. Александров А.Я.,Вольперт В.С.Решение пространственных задач теории упругости для трансверсально-изотропного тела вращения при помощи аналитических функций.- Инженерный журнал.Мех.твердого тела,1967, № 5, с.84-91.
6. Александров А.Я.,Вольперт В.С.Некоторые задачи о концентрации напряжений около эллипсоидальной полости в трансверсально-изотропном теле.- Изв.АН СССР. Мех.твердого тела,1970, № 1, с.115-121.
7. Арутюнян Н.Х.,Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел.-М.:Физматгиз, 1963.-686 с.
8. Вольперт В.С. Решение основных задач осесимметричной теории упругости для эллипсоида вращения и пространства с эллипсоидальной полостью.-Сб.тр.Новосиб.ин-та инж.ж.-д.трансп.,1967, вып.62,с.103-110.

9. Вольперт В.С. Концентрация напряжений в трансверсально-изотропном теле.- Сб.тр.Новосиб. ин-та инж. ж.-д.трансп.,1972,вып.137, с.56-78.

10. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций.-М.: ИЛ, 1952. - 476 с.

11. Головчан В.Т. Кручение цилиндра конечной длины со сферической полостью.- Прикл.механика, 1972, 8 , № 3, с.37-41.

12. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров.-Киев: Наук.думка,1978. - 264 с.

13. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Точное решение задачи Кирша.- Прикл.механика, 1970, 6, № 5, с.10-17.

14. Гузь О.М. Про наближений метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках. - Прикл.механіка, 1962, 8 , № 6, с.605-612.

15. Гузь А.Н. О решении двумерных и трехмерных задач механики сплошной среды для многосвязных областей.- В кн.: Концентрация напряжений, Киев: Наук.думка, 1968, вып.2, с.54-58.

16. Гузь О.М. Про один метод розв"язування тривимірних лінійних задач механіки суцільного середовища для неканонічних областей.- Доп.АН УРСР, сер.А, 1970, № 4, с.352-355.

17. Гузь А.Н. О дифракции волн на конечных телах вращения.-Прикл. механика, 1973, 9, № 7, с.10-18.

18. Гузь А.Н.,Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах.-Киев: Наук.думка, 1972. - 254 с.

19. Залесов Г.Ф. Решение внешней и внутренней задач теории упругости для трансверсально-изотропного эллипсоида вращения при помощи аналитических и обобщенных аналитических функций.-Новосибирск,1976. - 8 с. - Деп. в ВИНИТИ, № 3527-76 Деп.

20. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела.- М.: Наука, 1978. - 208 с.

21. Ионов В.Н.,Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. - М.: Высшая школа, 1972. - 752 с.

22. Кизыма Я.М., Немиш В.Н., Немиш Ю.Н. Напряженное состояние трансверсально изотропных тел,ограниченных неканоническими поверхностями вращения.- В кн.: Тез.докл.конф. "Повыш.качества изделий, изготовл.из полимерных материалов", секция I,Выпуск 2. Киев: УкрНИИНТИ, 1977, с.8-9.

23. Коваленко А.Д., Карнаухов В.Г. О приближенном методе решения пространственных задач теории упругости и вязкоупругости.- Прикл.механика, 1969, 5, № 8, с.1-10.

24. Коваленко А.Д., Карнаухов В.Г. О приближенном методе расчета напряженного состояния толстостенных оболочек вращения.-Прикл. механика, 1970, 6, № 6, с.3-12.

25. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями,вырезами и выступами. - Киев: Вища школа, 1975. - 226 с.

26. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. - Киев; Донецк: Вища школа,1976. - 200 с.

27. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г.,Башелейшвили М.О.,Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости.- Тбилиси. Изд-во Тбилис.ун-та, 1968.- 627 с.

28. Куценко Г.В., Улитко А.Ф. Осесимметричная деформация полого эллипсоида вращения. - В кн.: Теплов.напряжения в элементах конструкций, Киев: Наук.думка, 1971, вып.11,с.37-42.

29. Куценко Г.В., Улитко А.Ф. Упругое равновесие эллипсоида под действием сосредоточенных сил.- Прикл.механика, 1973, 9, № 4, с.16-22.

30. Куценко Г.В.,Улитко А.Ф. Точное решение осесимметричной задачи теории упругости для полого эллипсоида вращения.-Прикл.механика -

ника, 1975, II, № 10, с.3-8.

31. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.- М.:Наука, 1977. - 416 с.

32. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней.- М.: Наука, 1971. - 240 с.

33. Лобанов А.И., Сидляр М.М. Нестационарная связанная задача термоупругости для тонких пластинок.- Прикл.механика, 1970, 6, № 10, с.120-124.

34. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел.- М.: Наука, 1970. - 139 с.

35. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1955. - 492 с.

36. Лурье А.И. Теория упругости. - М.: Наука, 1970. - 939 с.

37. Ляв А. Математическая теория упругости. - М.; Л.: ОНТИ, 1935.- 674 с.

38. Лялюк Д.Ф., Немиш Ю.Н. Приближенный метод исследования напряженного состояния толстостенных неканонических оболочек вращения. - В кн.: Тр.IX Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Л.: Судостроение, 1975, с.280-282.

39. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики.Т. 2.- М.: ИЛ, 1960. - 886 с.

40. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 707 с.

41. Нейбер Г. Концентрация напряжений. - М.;Л.: Гостехиздат, 1947.- 204 с.

42. Немиш В.Н. Пространственная деформация изотропной среды с неканоническими включениями. -Мат.физика, 1976, вып.19, с.104-109.

43. Немиш В.Н. Распределение напряжений около замкнутых осесимметричных полостей и включений при кручении. - Прикл.механика, 1977, 13, № 11, с.32-40.

44.Немиш В.Н.,Кизыма Я.М. Решение трехмерных задач механики сплошной среды с неканоническими включениями. - В кн.: Тез. докл. конф. "Повыш. качества изделий, изготовл. из полимерных матеоиалов", секция 2. Киев:УкрНИИНТИ, I977, с.I2.

45.Немиш Ю.Н. О приближенном решении пространственных задач теории упругости для трансверсально-изотропной среды.- Прикл.механика, I969, 5 , № 8, с.26-34.

46.НемIш Ю.М. Про напружений стан товстостIнних оболонок обертання.Доп. АН УРСР, сер.А. I970, № 6, с.542-547.

47.НемIш Ю.М. Про граничнI задачI теорII пружностI для просторових багатозвязних неканонIчних областей.- Доп.АН УРСР,сер.А. I974, № 8, с.743-748.

48.Немиш Ю.Н. Метод "возмущения формы границы" в пространственных задачах механики деформируемых сред. - Изв. АН СССР. Мех. твердого тела, I975, № I, с.I7-26.

49.Немиш Ю.Н. Об одном методе решения трехмерных задач механики деформируемых тел, ограниченных произвольными поверхностями.- Докл. АН УССР, I976, № I, с.48-52.

50.Немиш Ю.Н. К обоснованию метода возмущения в трехмерных задачах механики деформируемых сред. - Прикл. механика, I977, I3, № I2, с.25-33.

5I.Немиш Ю.Н., Лялюк Д.Ф. О сходимости метода возмущения и точности удовлетворения граничным условиям на неканонических поверхностях. - Прикл. механика, I978, I4, № 4, с.4I-49.

52.Немиш Ю.Н., Немиш В.Н. Кручение ортотропных тел вращения с неканоническими полостями и включениями. - Изв. АН СССР.Мех. твердого тела, I976, № 6, с.I0I-III.

53.Немиш Ю.Н., Немиш В.Н. К решению пространственных задач теории упругости трансверсально изотропной среды для неканонических областей. - Прикл. механика, I976, I2 , № I2, с.73-82.

54.Немиш Ю.Н.,Немиш В.Н.,Ярема П.Ф. Распределение напряжений около неканонических поверхностей. - Прикл. механика, 1971, 7, № 12, с.41-50.

55.Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. - 872 с.

56.Новожилов В.В. Теория упругости. - Л.: Судпромгиз, 1958.-370 с.

57.Пальмов В.А. Зависимость концентрации напряжений от качества обработки поверхности деталей. - Изв. АН СССР, ОТН.Механика и машиностроение, 1963, № 5, с.60-66.

58.Пальмов В.А. Колебания упруго- пластических тел. - М.: Наука, 1976. - 328 с.

59.Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Стадник М.М. Упругое равновесие неограниченного тела с тонким включением. - Докл. АН УССР,1976, № 7, с.637-640.

60.Папкович П.Ф. Теория упругости. - М.;Л.: Оборонгиз, 1939.- 539 с.

61.Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения основных пространственных и плоских задач упругого равновесия. - В кн.: Мех. тверд. деформ.тел. Т.8.(Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). - М.,1975, с.5-84.

62.ПодІльчук Ю.М. Напружений стан бІля елІпсоІдального пружного включення. - Прикл. механІка, 1964, 10, № 5, с.527-532.

63.ПодІльчук Ю.М. Напружений стан навколо елІпсоІдальноІ порожнини при довІльних сталих зусиллях на нескІнченостІ.- Доп.АН УРСР. сер. А. 1964, № 9, с.1150-1154.

64. Подильчук Ю.Н. Деформация осесимметрично нагруженного упругого сфероида. - Прикл. механика, 1965, 1 , № 6,с.85-91.

65.Подильчук Ю.Н. Деформация упругого сфероида. - Прикл.механика, 1967, 3 , № 12, с.34-42.

66.Подильчук Ю.Н. Точные решения некоторых пространственных задач теории упругости. - В кн.: 3-й Всес.съезд по теор. и прикл.мех., Аннот.докл. М., 1968, с.244.

67. Подильчук Ю.Н. О напряженном состоянии неограниченной среды с упругим эллипсоидальным включением. - Прикл. механика, 1968, 4, № 5, с.28-37.

68. Подильчук Ю.Н. Приближенный метод решения краевых задач теории упругости для фигур, близких к эллипсоиду вращения. - Прикл. механика, 1970, 6, № 9, с.23-30.

69. Подільчук Ю.М., Кириченко А.М. Про наближений метод розв"язування крайових задач теорії пружності для фігур, близьких до еліпсоїда обертання.-Доп. АН УРСР.сер. А.1970, № 7, с.650-655.

70. Подильчук Ю.Н., Незнакина Л.А. Распределение напряжений в окрестности короткого волокна, впаянного в матрицу.- Прикл. механика, 1977, 13, № 5, с.3-10.

71. Подильчук Ю.Н., Незнакина Л.А. Об одном приближенном методе решения трехмерных задач теории упругости. - Прикл.механика, 1977, 13, № 10, с.100-107.

72. Положий Г.Н. О краевых задачах осесимметричной теории упругости. Метод p-аналитических функций комплексного переменного.- Укр.матем.журнал, 1963, 15, № 1, с.25-45.

73. Положий Г.Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. - Киев. Изд-во Киев.ун-та, 1965. - 442 с.

74. Положий Г.Н. Об интегральных представлениях X^k - аналитических функций и решений осесимметричных задач теории упругости.- Прикл. механика, 1969, 5, № 4, с.1-17.

75. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. - Киев: Наук. думка, 1968. - 887 с.

76. Савін Г.М., Подільчук Ю.М. Напружений стан біля еліпсоїдальної порожнини. - Доп. АН УРСР, сер. А. 1968, № 1, с.69-72.

77. Сидляр М.М. О применении метода возмущений к расчету температурных полей. - В кн.: Теплов.напряжения в элементах конструк-

ций, Киев: Наук.думка, 1964, вып.4, с.9-14.

78. Соловьев Ю.И. Решение осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропных тел при помощи аналитических функций.- Прикл. матем. и механика, 1974, 38, № 2, с.379-38

79. Соляник-Красса К.В. Кручение валов переменного сечения.-Л.;М Гостехиздат, 1949. - 166 с.

80. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений.- Киев: Наук. думка, 1964. - 351 с.

81. Хантингтон Г. Упругие постоянные кристаллов. - Успехи физ. наук, 1961, 74 , № 3, с.462-520.

82. Хусу А.П., Витенберг Ю.Р.,Пальмов В.А. Шероховатость поверхностей. - М.: Наука, 1975. - 343 с .

83. Чемерис В.С. Про один метод наближеного розв"язування другоI основноI осесиметричноI задачI теорII пружностI. - Прикл. механIка, 1963, 9 , № I, с.68-76.

84. Чемерис В.С. Об интегральных уравнениях осесимметричной теории упругости. - Прикл. механика, 1965, I , № 5, с.36-46.

85. Чен В.Т. О некоторых задачах для упругих материалов со сферической изотропией. - Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Прикл. механика, 1966, 33 , № 3, с.71-79.

86. Шапиро Г.С. Осесимметричная деформация эллипсоида вращения.- Докл. АН СССР, 1947, 58 , № 7, с.1309-1313.

87. Швец Р.Н. Постановка и метод решения стохастических задач теплопроводности и термоупругости твердых тел с шероховатыми поверхностями. - В кн.: Тез. докл. XIУ научного совещания по тепловым напряжениям в элементах конструкций, Киев: Наук. думка, 1977, с.114.

88. Швец Р.Н.,Елейко В.И. Стохастические температурные напряжения в цилиндре с шероховатой поверхностью.- Прикл.механика,1977,13, № 12, с.39-45.

89.Швець Р.М.,Єлейко В.І. Стохастична задача теплопровідності і термопружності для деформівного тіла з шорсткою поверхнею.- Доп. АН УРСР.сер.А. 1977, № 11, с. 1020-1023.

90.Янке Е., Емде Ф., Леш Ф. Специальные функции. - М.: Наука, 1977. - 342 с.

91. Astre-Pierre, Trucasson Christian. Traction simple appliguée á un milien infini comportant une inclusion sphérigue lisse.- C.r. Acad. sci., 1968, 267, N2, p.A 751-A 753.

92. Bhowmick Smriti Kana. Stress due to spheroidal inclusion of material having curvilinear aeolotropy on the axis of a large twisted isotropic cylinder. - Arch. mech. stosowanej, 1961, 13, N3, s.321-325.

93. Bhowmick Smriti Kana. Stress concentrations around a small rigid spheroidal inclusion on the axis of a transversely isotropic cylinder under torsion. - AIAA Journal, 1963, 1, N5, p.1219-1220.

94. Bors C.I. Teoria elasticitátii corpurilor anisotrope. - Buchuresti, Editura Akademiei R.S. Romania, 1970.- 518p.

95. Bose S.C. On the torsion of a circular cylinder of transversely isotropic material having a spherical inclusion of spherically isotropic material on its axis. - Indian J.Theoret. Phys., 1964, 12, N2, p.29-38.

96. Bose S.C. Torsion of an aeolotropic cylinder having a spheroidal inclusion on its axis. - AIAA Journal, 1965, 3, N7, p.1352-1354.

97. Bose S.C. On the torsion of a transversely isotropic circular cylinder having a small spherical elastic inclusion of an isotropic material. - Z. angew. Math. and Mech., 1965, 45, N2-3, p.133-135.

98.Brethauer G.E. Stress around pressurized spherical cavities in tria xial stress fields. - Int. J.Rock Mech. and Mining Sci. and Geomech. Abstrs, 1974, 11, N3, p.91-96.

99.Chattarji P.P. Torsion of a circular cylinder having a rigid spherical inclusion. - Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, 49, N4, p.199-205.

100.Chattarji P.P. Stress concentrations around a small inclusion on the axic of a circular cylinder under torsion. - Indian J. Theoret. Phys., 1958, 6, N2, p.51-64.

101.Cattarji P.P. Stress concentrations around a small spherical inclusion on the axis of a transversely isotropic circular cylinder under torsion. - J. Assoc. Appl. Physicists, 1958, 5, p.10-15.

102.Chatterjee R.N. Torsion of a non-homogeneous circular cylinder having a spherical cavity. - Arch. mech. stosowanej, 1965, 17, N2, s.211-218.

103.Chatterjee R.N. Torsion of a non-homogeneous circular cylinder having a rigid spherical inclusion. - Indian J. Theoret. Phys., 1966, 13, N1, p.29-38.

104.Chen W.T. On a spheroidal elastic inclusion in a transversely isotropic material inter an axisymmetric torsion field. - Trans. ASME, 1966, E33, N4, p.944-945.

105.Chen W.T. Axisymmetric stress field around spheroidal inclusions and cavities in a transversely isotropic material. - Trans. ASME, 1968, E35, N4, p.770-773.

106.Chen W.T. Elastic analysis of an axisymmetric stress field perturbbed by a spheroidal inhomogeneity.-Quart. Appl.Math. 1971, 28, N4, p.517-525.

107.Chu W.L.,Conway H.D. A numerical method for computig the stresses around an axisymmetrical inclusion. - Int.J. Mech. Sci., 1970, 10, N7, p.579-588.

108.Collins W.D. Note on displacements in an infinite elastic solid bounded internally by a rigid spherical inclusion. - J.London Math. Soc., 1959, 34, N3, p.345-351.

109.Das S.C. Stress concentration around a small spherical and spheroidal inclusion on the axis of a circular cylinder in torsion. - Journ. appl. mech. (Trans. ASME, ser.E) 21, N1, 1954, p.83-87.

110.Dutt S.B. Stress concentrations around a small spherically isotropic spherical inclusion on the axis of an isotropic circular cylinder on torsion. - Journ. of technology(Calcutta) 3, N1, 1958, p.13-17.

111.Dutt S.B. Stress concentrations around a small inclusion (formed by the revolution of a cardioid about its axis) on the axis of a circular cylinder under torsion. - Bull. Calcutta Math. Soc., 1958, 50, N1, p.29-33.

112.Erdogan F. On the integral equations of three - dimensional multiple indusion problems. -Lett. Appl. and Eng. Sci., 1973, 1, N4, p.305-311.

113.Hai-Chang Hu. On the general theory of elasticity for a spherically isotropic medium. - Acta sci. sinica, 1954, vol.3, p.247-260.

114.Hung Y.C. The effect of a spherical inclusion in an anisotropic solid. - Appl.Scient. Res., 1968, 18, N6, p.436-445.

115.Miyamoto Hiroshi. On the problem of the theory of elasticity for a region containing more than two spherical cavities. - Bull. JSME, 1958, 1, N", p.103-108.

116.Mulville D.R.,Kies J.A..Tensile stresses on the surface of an ellipsoidal cavity in compressive loading situations. - U.S. Naval Res. Lab. (Clearinghouse Feder. Scient. and Tech. Inform NAD - 613552) Washington, D.C. 1965, ii, 10p.

117.Mura T., Mori T. The elastic field caused by an ellipsoidal inclusion with nonuniform eigenstrains. - Theor. and Appl. Mech. 14 th IUTAM Congr., Delft, 1976. Abstrs. - Amsterdam e.a., 1976, p.50.

118.Nariboli G.A. Effect of rigid inclusions and cavities in a large body under torsion. - Appl. Scient. Res., 1963, A-11, N 4-6, p.352-360.

119.Nisitani Hironobu. Tension of an infinite elastic body having an infinite row of spheroidal cavities. - Bull. JSME, 1964, 7, N25, p.36-39.

120.Parhi H., Itou S., Atsumi A. Stress in a transversely isotropic medium containing an infinite row of spherical cavities under all round tension. - Lett. Appl. and Eng. Sci., 1975, 3, N6, p.453-467.

121.Sawin G.N., Guź A.N., Kosmodamianskij A.S. Zagadnienia mechaniki ośrodków ciagtych dla obszrów niekanonicznych. - Mechanika teoretyczna i stosowana, 1970, 8, z.1, s.3-18.

122.Selvadurai A.P.S. The distribution of stress in a rubberlike elastic material bounded internally by a rigid spherical inclusion subjected to a central force. - Mech. Res. Communs, 1975, 2, N3, p.99-106.

123.Shelley Joseph Francis. The axisymmetric problem for an infinite elastic solid containing two spherical cavities or inclusions of different diameters. - Doct. diss. Polytechn. Inst. Brooklyn, 1965, 147p.

124.Shelley Joseph F., Yu Yi-yan. The effect of two rigid spherical inclusions on the stresses in an infinite elastic solid. – Trans. ASME, 1966, E 33, N1, p.68-74.

125. Subramanian R. Stress concentration around a small anisotropic spheroidal inclusion on the axis of a circular cylinder in torsion. – Arch. mech. stosowanej, 1968, 20, N 1, s.29-35.

126. Subramanian R. Stress concentration around a small spherical inhomogeneous inclusion on the axis of a circular cylinder in torsion. – Appl. Sci. Res., 1970, 22, N 2, p.89-96.

127. Walpole L.J. The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium. – Proc Roy. Soc., 1967, A 300, N 1461, p.270-289.

128. Złatanowa Elena. Zagadnienie osiowo-symetryczne dla obszarów sprężystych nieściśliwych ograniczonych kulistymi powierzchniami. – Mech. teor. i stosow., 1969, 7, N 3, s.353-364.

Упругое равновесие вращения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. [illegible] 19[illegible] 16 с.

В. [signature]

1. Упругое равновесие трехмерных [illegible] тел, ограниченных поверхностями вращения. – В кн.: „Материалы 6-й конф. молод. ученых ин-та" прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР. Секц. мех. деформир. тверд. тела, 1978". Львов, 1979. – 4с. – Деп. в ВИНИТИ, № 3851-79 Деп.

(стр. 52-55, Деп. 13 нояб. 1979 г.)