УДК 519.688:517.443

*В.І. Волинець, к.т.н. (ВТЕІ КНТЕУ, Україна)*

# РЕКУРЕНТНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ МОДИФІКОВАНИХ БАГАТОВИМІРНИХ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ ДЛЯ ОКРЕМИХ РОЗМІРІВ ПЕРЕТВОРЕНЬ

*Отримано рекурентні вирази рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі ковзних фрагментів вхідного сигналу для розмірів перетворень по одному з вимірів, кратних двом і чотирьом, які забезпечують виграш при обчисленні модифікованих двовимірних перетворень у 2 – 2,4 рази за кількістю операцій множення та 1,2 – 1,33 рази за кількістю операцій додавання.*

В основі динамічного спектрального аналізу, який проводиться для ковзних або стрибкових фрагментів багатовимірного вхідного сигналу, тобто коли черговий фрагмент вхідного сигналу зсунутий відносно попереднього фрагменту вхідного сигналу на один або декілька відліків по одному або декількох вимірах, лежить використання рекурентних методів обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ), ефективність яких значно вища за ефективність прямих та швидких методів обчислення багатовимірних дискретних перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення для попередніх фрагментів вхідного сигналу.

Рекурентні методи обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ ґрунтуються на рекурентних виразах [1–3]. Зокрема, у праці [3] на основі загального підходу до розроблення рекурентних методів отримано рекурентні вирази обчислення звичайних та модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ ковзних і стрибкових фрагментів вхідного сигналу та проведений порівняльний аналіз їх арифметичної складності, який показав, що для обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ стрибкових та ковзних фрагментів вхідного сигналу по всіх і одному виміру доцільно використовувати рекурентні методи обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ ковзних фрагментів вхідного сигналу по одному виміру.

Також відомо [4], що при використанні рекурентних методів обчислення модифікованих одновимірних ДПФ і ДПХ можна досягти зменшення їх арифметичної складності для окремих розмірів перетворень. Однак аналіз рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ та ДПХ для окремих розмірів перетворень з метою виявлення можливостей зменшення їх арифметичної складності не проводився. Тому цю роботу присвячено розв'язанню цієї задачі.

Рекурентні вирази обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ та ДПХ ковзних фрагментів вхідного сигналу по одному виміру мають такий вигляд [3]:

$$F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+e^{-\frac{j2\pi i_r k_r}{N_r}}\cdot \Delta F(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}), \quad (1)$$

$$H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=H_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\cos\frac{2\pi i_r k_r}{N_r}\cdot \Delta H(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})+$$
$$+\sin\frac{2\pi i_r k_r}{N_r}\cdot \Delta H(-k_1,-k_2,\ldots,-k_{r-1}), \quad (2)$$

де $F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ і $H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $H_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ – значення $r$-вимірних ДПФ і ДПХ $r$-вимірних фрагментів вхідного сигналу $x(n_1,n_2,\ldots,n_r+1)$ та $x(n_1,n_2,\ldots,n_r)$ відповідно, де $k_i=\overline{0,N_i-1}$ та $n_i=\overline{0,N_i-1}$ для $i=\overline{1,r}$; $\Delta F(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})$ та $\Delta H(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})$ – значення $(r-1)$-вимірних ДПФ і ДПХ, які визначаються як

$$\Delta F(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\ldots\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}\left[x(n_1,n_2,\ldots,N_r)-x(n_1,n_2,\ldots,0)\right]\cdot e^{-j2\pi\sum_{i=1}^{r-1}\frac{n_i k_i}{N_i}},$$

$$\Delta H(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\cdots\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}\left[x(n_1,n_2,\ldots,N_r)-x(n_1,n_2,\ldots,0)\right]\cdot \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi n_i k_i}{N_i}\right),$$

де $\operatorname{cas}(2\pi n_i k_i/N_i)=\cos(2\pi n_i k_i/N_i)+\sin(2\pi n_i k_i/N_i)$.

З аналізу виразів (1) і (2) видно, що при їх обчисленні можна досягти скорочення кількості операцій множення для окремих розмірів перетворень, ураховуючи властивості функцій косинуса та синуса.

Для парних значень $N_r$ справедливі такі співвідношення:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos(2\pi i_r(N_r-k_r)/N_r)=\cos(2\pi i_r k_r/N_r)\\
&\sin(2\pi i_r(N_r-k_r)/N_r)=-\sin(2\pi i_r k_r/N_r)\\
&\cos(2\pi i_r(N_r/2-k_r)/N_r)=(-1)^{i_r}\cos(2\pi i_r k_r/N_r)\\
&\sin(2\pi i_r(N_r/2-k_r)/N_r)=-(-1)^{i_r}\sin(2\pi i_r k_r/N_r)\\
&\cos(2\pi i_r(N_r/2+k_r)/N_r)=(-1)^{i_r}\cos(2\pi i_r k_r/N_r)\\
&\sin(2\pi i_r(N_r/2+k_r)/N_r)=(-1)^{i_r}\sin(2\pi i_r k_r/N_r)
\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Ураховуючи співвідношення (3), рекурентний метод обчислення модифікованого багатовимірного ДПФ ковзних фрагментів вхідного сигналу по одному виміру для парних значень $N_r$ може ґрунтуватись на таких рекурентних виразах:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Re}[F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)]=\mathrm{Re}[F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)]+T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Im}[F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)]=\mathrm{Im}[F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)]+T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Re}[F_1(k_1,k_2,\ldots,-k_r)]=\mathrm{Re}[F_0(k_1,k_2,\ldots,-k_r)]+T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Im}[F_1(k_1,k_2,\ldots,-k_r)]=\mathrm{Im}[F_0(k_1,k_2,\ldots,-k_r)]+T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Re}[F_1(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)]=\mathrm{Re}[F_0(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)]+(-1)^{i_r}T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Im}[F_1(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)]=\mathrm{Im}[F_0(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)]+(-1)^{i_r}T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Re}[F_1(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)]=\mathrm{Re}[F_0(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)]+(-1)^{i_r}T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
&\mathrm{Im}[F_1(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)]=\mathrm{Im}[F_0(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)]+(-1)^{i_r}T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r)
\end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

де $\mathrm{Re}$ та $\mathrm{Im}$ – дійсні та уявні частини значень ДПФ;

$T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=T_{11}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+T_{12}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\cos(2\pi i_r k_r/N_r)\cdot\mathrm{Re}[\Delta F(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})]+$
$+\sin(2\pi i_r k_r/N_r)\cdot\mathrm{Im}[\Delta F(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})]$;

$T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r)=T_{21}(k_1,k_2,\ldots,k_r)-T_{22}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\cos(2\pi i_r k_r/N_r)\cdot\mathrm{Im}[\Delta F(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})]-$
$-\sin(2\pi i_r k_r/N_r)\cdot\mathrm{Re}[\Delta F(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})]$;

$T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r)=T_{11}(k_1,k_2,\ldots,k_r)-T_{12}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$;

$T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r)=T_{21}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+T_{22}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$;

$k_i=\overline{0,N_i-1}$ для $i=\overline{1,r-1}$ та $k_r=\overline{0,]N/4[}$, де $]X[$ – ціла частина значення $X$.

Додаткового скорочення кількості операцій множення можна досягти для $N_r$, кратних чотирьом, для яких справедливі такі співвідношення:

$$\cos(2\pi i_r(N_r/4-k_r)/N_r)=\cos(2\pi i_r(3N_r/4+k_r)/N_r)=\begin{cases}\cos(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l\\ \sin(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l+1\\ -\cos(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l+2\\ -\sin(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l+3\end{cases}$$

$$\sin(2\pi i_r(N_r/4-k_r)/N_r)=-\sin(2\pi i_r(3N_r/4+k_r)/N_r)=\begin{cases}-\sin(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l\\ \cos(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l+1\\ \sin(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l+2\\ -\cos(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l+3\end{cases}$$

$$\cos(2\pi i_r(N_r/4+k_r)/N_r)=\cos(2\pi i_r(3N_r/4-k_r)/N_r)=\begin{cases}\cos(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l\\ -\sin(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l+1\\ -\cos(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l+2\\ \sin(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l+3\end{cases}$$

$$\sin(2\pi i_r(N_r/4+k_r)/N_r)=-\sin(2\pi i_r(3N_r/4-k_r)/N_r)=\begin{cases}\sin(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l\\ \cos(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l+1\\ -\sin(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l+2\\ -\cos(2\pi i_r k_r/N_r), & i_r=4l+3\end{cases}, \quad (5)$$

де $l=0,1,2\ldots$.

Ураховуючи співвідношення (3) і (5), рекурентний метод обчислення модифікованого багатовимірного ДПФ ковзних фрагментів вхідного сигналу по одному виміру для значень $N_r$, кратних чотирьом, може ґрунтуватись на виразах (4) та таких рекурентних виразах:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Re}[F_1(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)]&=\mathrm{Re}[F_0(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)]+T_5(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
\mathrm{Im}[F_1(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)]&=\mathrm{Im}[F_0(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)]+T_6(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
\mathrm{Re}[F_1(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)]&=\mathrm{Re}[F_0(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)]+T_7(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
\mathrm{Im}[F_1(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)]&=\mathrm{Im}[F_0(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)]+T_8(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
\mathrm{Re}[F_1(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)]&=\mathrm{Re}[F_0(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)]+(-1)^{i_r}T_5(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
\mathrm{Im}[F_1(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)]&=\mathrm{Im}[F_0(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)]+(-1)^{i_r}T_6(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
\mathrm{Re}[F_1(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)]&=\mathrm{Re}[F_0(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)]+(-1)^{i_r}T_7(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\
\mathrm{Im}[F_1(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)]&=\mathrm{Im}[F_0(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)]+(-1)^{i_r}T_8(k_1,k_2,\ldots,k_r)
\end{aligned}\right\}, \quad (6)$$

де

$$T_5(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\begin{cases}T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l\\ T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l+1\\ -T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l+2\\ -T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l+3\end{cases};\ T_6(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\begin{cases}T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l\\ -T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l+1\\ -T_4(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l+2\\ T_3(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l+3\end{cases};$$

$$T_7(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\begin{cases}T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l\\ -T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l+1\\ -T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l+2\\ T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l+3\end{cases};\ T_8(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\begin{cases}T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l\\ T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l+1\\ -T_2(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l+2\\ -T_1(k_1,k_2,\ldots,k_r), i_r=4l+3\end{cases};$$

$k_i=\overline{0,N_i-1}$ для $i=\overline{1,r-1}$ та $k_r=\overline{0,]N/8[}$.

Рекурентні вирази обчислення модифікованого багатовимірного ДПХ ковзних фрагментів вхідного сигналу по одному виміру подібні до виразів (4) і (6).

Арифметичну складність рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ та ДПХ ковзних фрагментів вхідного сигналу по одному виміру для різних розмірів $N_r$ наведено в таблиці.

**Арифметична складність рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ та ДПХ**

| Розмір $N_r$ | $r$-вимірні перетворення | | Двовимірні перетворення (для $N_1 = N_2 = N$) | |
|---|---|---|---|---|
| | Кількість операцій | | Кількість операцій | |
| | множення | додавання | множення | додавання |
| Довільний (вирази (1) – (2)) | $\prod_{i=1}^{r-1} N_i^2 + 2\prod_{i=1}^{r} N_i$ | $\prod_{i=1}^{r-1} N_i^2 + 2\prod_{i=1}^{r} N_i$ | $3N^2$ | $3N^2$ |
| Кратний двом (вираз (4)) | $\prod_{i=1}^{r-1} N_i^2 + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{r} N_i$ | $\prod_{i=1}^{r-1} N_i^2 + \frac{3}{2}\prod_{i=1}^{r} N_i$ | $\frac{3}{2}N^2$ | $\frac{5}{2}N^2$ |
| Кратний чотирьом (вирази (4), (6)) | $\prod_{i=1}^{r-1} N_i^2 + \frac{1}{4}\prod_{i=1}^{r} N_i$ | $\prod_{i=1}^{r-1} N_i^2 + \frac{5}{4}\prod_{i=1}^{r} N_i$ | $\frac{5}{4}N^2$ | $\frac{9}{4}N^2$ |

На основі порівняльного аналізу виразів у таблиці можна зробити такі висновки:

1. Рекурентні методи обчислення модифікованих $r$-вимірних ($r > 2$) ДПФ і ДПХ для розмірів $N_r$, кратних двом та чотирьом, та довільних розмірів $N_r$ мають практично однакову арифметичну складність.

2. Рекурентні методи обчислення модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ для розмірів $N_2$, кратних двом і чотирьом, мають меншу арифметичну складність в порівнянні з арифметичною складністю рекурентних методів для довільних розмірів $N_2$ і, зокрема, для $N_1 = N_2 = N$ забезпечують виграш у 2 – 2,4 рази за кількістю операцій множення та 1,2 – 1,33 рази за кількістю операцій додавання.

## Висновки

У результаті аналізу рекурентних виразів, що лежать в основі рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ та ДПХ ковзних фрагментів вхідного сигналу по одному виміру для довільних розмірів $N_r$, з урахуванням властивостей функцій косинуса й синуса отримано рекурентні вирази рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ ковзних фрагментів вхідного сигналу по одному виміру для розмірів $N_r$, кратних двом та чотирьом. Порівняльний аналіз арифметичної складності рекурентних методів для розмірів $N_r$, кратних двом та чотирьом, з арифметичною складністю рекурентних методів для довільних розмірів $N_r$ показав, що вони забезпечують практичний виграш лише при обчисленні модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ, який для $N_1 = N_2 = N$ складає 2 – 2,4 рази за кількістю операцій множення та 1,2 – 1,33 рази за кількістю операцій додавання.

## Список літератури


1. *Ярославский Л.П.* Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
2. *Плотников В.Н., Белинский А.В., Суханов В.А., Жигулевцев Ю.Н.* Цифровые анализаторы спектра. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
3. *Волинець В.І.* Рекурентні методи обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник ВПІ. – 2003. – № 4. – С. 69–74.
4. *Волинець В.І.* Рекурентні методи обчислення модифікованих дискретних перетворень *Фур'є* та Хартлі для окремих розмірів перетворень // Електроніка та системи управління. – 2005. – № 4 (6). – С. 27–32.