УДК 519.688:517.443

В.І. Волинець, к.т.н. (ВТЕІ КНТЕУ, Україна)

БЕЗНАДЛИШКОВІ РЕКУРЕНТНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ МОДИФІКОВАНИХ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ ДЛЯ ОКРЕМИХ РОЗМІРІВ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Отримано рекурентні вирази безнадлишкових рекурентних методів обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на ковзних інтервалах для розмірів перетворень, кратних чотирьом та восьми. За рахунок зменшення кількості циклів обчислення запропоновані методи можуть бути використані для зменшення апаратурних витрат аналізаторів спектра.

В основі динамічного спектрального аналізу, який проводиться на ковзних або стрибкових інтервалах вхідного сигналу, тобто коли черговий інтервал вхідного сигналу включає відповідно один або декілька нових відліків і така ж кількість початкових відліків вхідного сигналу відкидається, лежить використання рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ), ефективність яких значно вища за ефективність прямих та швидких методів обчислення дискретних перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення на попередніх інтервалах вхідного сигналу.

Рекурентні методи обчислення ДПФ і ДПХ ґрунтуються на рекурентних виразах [1–8]. Зокрема, у працях [4; 7] на основі загального підходу до розроблення рекурентних методів отримано рекурентні вирази для обчислення звичайних [4] та модифікованих [7] ДПФ і ДПХ на ковзних та стрибкових інтервалах, порівняльний аналіз арифметичної складності яких показав [7], що рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ забезпечують виграш, який на ковзних інтервалах досягає двох разів за кількістю операцій множення та додавання, внаслідок чого вони можуть бути використані в аналізаторах спектра для підвищення їх швидкодії або зменшення апаратурних витрат. У праці [8] запропоновано рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ для окремих розмірів перетворень, арифметична складність яких за кількістю операцій множення в 2 – 4 рази менша від арифметичної складності рекурентних методів для довільних розмірів перетворень.

Однак запропоновані у [8] методи є надлишковими для розмірів перетворень, кратних чотирьом та восьми, оскільки деякі значення ДПФ і ДПХ обчислюються двічі. Тому цю роботу присвячено розв'язанню задачі усунення надлишковості цих методів.

Рекурентний метод обчислення модифікованого ДПФ на ковзних інтервалах для розмірів перетворень, кратних двом, ґрунтується на таких рекурентних виразах [8]:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}\big[F_{i+1}(k)\big] &= \mathrm{Re}\big[F_i(k)\big] + A_1(i,k) \\ \mathrm{Im}\big[F_{i+1}(k)\big] &= \mathrm{Im}\big[F_i(k)\big] + A_2(i,k) \\ \mathrm{Re}\big[F_{i+1}(N/2-k)\big] &= \mathrm{Re}\big[F_i(N/2-k)\big] + A_3(i,k) \\ \mathrm{Im}\big[F_{i+1}(N/2-k)\big] &= \mathrm{Im}\big[F_i(N/2-k)\big] + A_4(i,k) \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

де $F_{i+1}(k)$ та $F_i(k)$ – значення ДПФ вхідного сигналу $x(n+i+1)$ та $x(n+i)$ на $(i+1)$-му та i-му інтервалах відповідно, де $n=\overline{0,N-1}$, $i=0,1,2,...$ – номер попереднього інтервалу вхідного сигналу, N – розмір перетворення;

Re та Im – дійсні та уявні частини значень ДПФ;

$A_1(i,k)=[x(N+i)-x(i)]\cdot\cos(2\pi ik/N)$; $A_2(i,k)=[x(N+i)-x(i)]\cdot(-\sin(2\pi ik/N))$;

$A_3(i,k)=\begin{cases} A_1(i,k), & i=2l \\ -A_1(i,k), & i=2l+1 \end{cases}$; $A_4(i,k)=\begin{cases} -A_2(i,k), & i=2l \\ A_2(i,k), & i=2l+1 \end{cases}$, де $l=0,1,2\ldots$;

$k=\overline{0,]N/4[}$ ($]X[$ – ціла частина значення X).

Рекурентний метод обчислення модифікованого ДПХ на ковзних інтервалах для розмірів перетворень, кратних двом, ґрунтується на таких рекурентних виразах [8]:

$$\left.\begin{aligned} H_{i+1}(k) &= H_i(k) + B_1(i,k) \\ H_{i+1}(N-k) &= H_i(N-k) + B_2(i,k) \\ H_{i+1}(N/2+k) &= H_i(N/2+k) + B_3(i,k) \\ H_{i+1}(N/2-k) &= H_i(N/2-k) + B_4(i,k) \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

де $B_1(i,k) = [x(N+i) - x(i)] \cdot \mathrm{cas}(2\pi ik/N)$, де $\mathrm{cas}(X) = \cos(X) + \sin(X)$;

$B_2(i,k) = [x(N+i) - x(i)] \cdot \mathrm{cas}(2\pi i(N-k)/N)$;

$B_3(i,k) = \begin{cases} B_1(i,k), & i = 2l \\ -B_1(i,k), & i = 2l+1 \end{cases}$; $B_4(i,k) = \begin{cases} B_2(i,k), & i = 2l \\ -B_2(i,k), & i = 2l+1 \end{cases}$;

$k = \overline{0,]N/4[}$.

Рекурентний метод обчислення модифікованого ДПФ на ковзних інтервалах для розмірів перетворень, кратних чотирьом, ґрунтується на таких рекурентних виразах [8]:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}[F_{i+1}(k)] &= \mathrm{Re}[F_i(k)] + A_1(i,k) \\ \mathrm{Im}[F_{i+1}(k)] &= \mathrm{Im}[F_i(k)] + A_2(i,k) \\ \mathrm{Re}[F_{i+1}(N/2-k)] &= \mathrm{Re}[F_i(N/2-k)] + A_3(i,k) \\ \mathrm{Im}[F_{i+1}(N/2-k)] &= \mathrm{Im}[F_i(N/2-k)] + A_4(i,k) \\ \mathrm{Re}[F_{i+1}(N/4-k)] &= \mathrm{Re}[F_i(N/4-k)] + A_5(i,k) \\ \mathrm{Im}[F_{i+1}(N/4-k)] &= \mathrm{Im}[F_i(N/4-k)] + A_6(i,k) \\ \mathrm{Re}[F_{i+1}(N/4+k)] &= \mathrm{Re}[F_i(N/4+k)] + A_7(i,k) \\ \mathrm{Im}[F_{i+1}(N/4+k)] &= \mathrm{Im}[F_i(N/4+k)] + A_8(i,k) \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

де

$A_5(i,k) = \begin{cases} A_1(i,k), & i = 4l \\ A_2(i,k), & i = 4l+1 \\ -A_1(i,k), & i = 4l+2 \\ -A_2(i,k), & i = 4l+3 \end{cases}$; $A_6(i,k) = \begin{cases} -A_2(i,k), & i = 4l \\ A_1(i,k), & i = 4l+1 \\ A_2(i,k), & i = 4l+2 \\ -A_1(i,k), & i = 4l+3 \end{cases}$;

$A_7(i,k) = \begin{cases} A_1(i,k), & i = 4l \\ -A_2(i,k), & i = 4l+1 \\ -A_1(i,k), & i = 4l+2 \\ A_2(i,k), & i = 4l+3 \end{cases}$; $A_8(i,k) = \begin{cases} A_2(i,k), & i = 4l \\ A_1(i,k), & i = 4l+1 \\ -A_2(i,k), & i = 4l+2 \\ -A_1(i,k), & i = 4l+3 \end{cases}$;

$k = \overline{0,]N/8[}$.

Рекурентний метод обчислення модифікованого ДПХ на ковзних інтервалах для розмірів перетворень, кратних чотирьом, ґрунтується на таких рекурентних виразах [8]:

$$\left.\begin{aligned} H_{i+1}(k) &= H_i(k) + B_1(i,k) \\ H_{i+1}(N-k) &= H_i(N-k) + B_2(i,k) \\ H_{i+1}(N/2+k) &= H_i(N/2+k) + B_3(i,k) \\ H_{i+1}(N/2-k) &= H_i(N/2-k) + B_4(i,k) \\ H_{i+1}(N/4+k) &= H_i(N/4+k) + B_5(i,k) \\ H_{i+1}(3N/4-k) &= H_i(3N/4-k) + B_6(i,k) \\ H_{i+1}(3N/4+k) &= H_i(3N/4+k) + B_7(i,k) \\ H_{i+1}(N/4-k) &= H_i(N/4-k) + B_8(i,k) \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

де

$$B_5(i,k)=\begin{cases} B_1(i,k), & i=4l\\ B_2(i,k), & i=4l+1\\ -B_1(i,k), & i=4l+2\\ -B_2(i,k), & i=4l+3\end{cases};\quad B_6(i,k)=\begin{cases} B_2(i,k), & i=4l\\ -B_1(i,k), & i=4l+1\\ -B_2(i,k), & i=4l+2\\ B_1(i,k), & i=4l+3\end{cases};$$

$$B_7(i,k)=\begin{cases} B_1(i,k), & i=4l\\ -B_2(i,k), & i=4l+1\\ -B_1(i,k), & i=4l+2\\ B_2(i,k), & i=4l+3\end{cases};\quad B_8(i,k)=\begin{cases} B_2(i,k), & i=4l\\ B_1(i,k), & i=4l+1\\ -B_2(i,k), & i=4l+2\\ -B_1(i,k), & i=4l+3\end{cases};$$

$k=\overline{0,]N/8[}$.

З аналізу виразів (1) – (4) видно, що обчислення за виразами (1) – (2) та (3) – (4) вимагає $]N/4[+1$ та $]N/8[+1$ циклів обчислення для $k=\overline{0,]N/4[}$ та $k=\overline{0,]N/8[}$ відповідно. Однак для розмірів перетворень, кратних чотирьом та восьми, кількість циклів обчислення може бути скорочена відповідно до $N/4$ та $N/8$ за рахунок усунення надлишковості обчислення за виразами (1) – (4). Для цього перший цикл обчислення повинен проводитись за виразами, що усувають надлишковість обчислення для $k=0$ та $k=N/4$ ($k=N/8$), а інші цикли обчислення повинні проводитись за виразами (1) – (2) та (3) – (4) для $k=\overline{1,N/4-1}$ та $k=\overline{1,N/8-1}$ відповідно.

Рекурентні вирази для першого циклу обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ на ковзних інтервалах для розмірів перетворень, кратних чотирьом та восьми, що усувають надлишковість обчислення, мають відповідно такий вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}[F_{i+1}(0)]&=\mathrm{Re}[F_i(0)]+A_1(i,0)\\ \mathrm{Re}[F_{i+1}(N/2)]&=\mathrm{Re}[F_i(N/2)]+A_3(i,N/2)\\ \mathrm{Re}[F_{i+1}(N/4)]&=\mathrm{Re}[F_i(N/4)]+A_1(i,N/4)\\ \mathrm{Im}[F_{i+1}(N/4)]&=\mathrm{Im}[F_i(N/4)]+A_2(i,N/4)\end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} H_{i+1}(0)&=H_i(0)+B_1(i,0)\\ H_{i+1}(N/2)&=H_i(N/2)+B_3(i,N/2)\\ H_{i+1}(N/4)&=H_i(N/4)+B_1(i,N/4)\\ H_{i+1}(3N/4)&=H_i(3N/4)+B_2(i,3N/4)\end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}[F_{i+1}(0)]&=\mathrm{Re}[F_i(0)]+A_1(i,0)\\ \mathrm{Re}[F_{i+1}(N/2)]&=\mathrm{Re}[F_i(k)]+A_3(i,N/2)\\ \mathrm{Re}[F_{i+1}(N/4)]&=\mathrm{Re}[F_i(N/4)]+A_1(i,N/4)\\ \mathrm{Im}[F_{i+1}(N/4)]&=\mathrm{Im}[F_i(N/4)]+A_2(i,N/4)\\ \mathrm{Re}[F_{i+1}(N/8)]&=\mathrm{Re}[F_i(N/8)]+A_1(i,N/8)\\ \mathrm{Im}[F_{i+1}(N/8)]&=\mathrm{Im}[F_i(N/8)]+A_2(i,N/8)\\ \mathrm{Re}[F_{i+1}(3N/8)]&=\mathrm{Re}[F_i(3N/8)]+A_3(i,3N/8)\\ \mathrm{Im}[F_{i+1}(3N/8)]&=\mathrm{Im}[F_i(3N/8)]+A_4(i,3N/8)\end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&H_{i+1}(0) = H_i(0) + B_1(i,0) \\
&H_{i+1}(N/2) = H_i(N/2) + B_3(i,N/2) \\
&H_{i+1}(N/4) = H_i(N/4) + B_1(i,N/4) \\
&H_{i+1}(3N/4) = H_i(3N/4) + B_2(i,3N/4) \\
&H_{i+1}(N/8) = H_i(N/8) + B_1(i,N/8) \\
&H_{i+1}(7N/8) = H_i(7N/8) + B_2(i,7N/8) \\
&H_{i+1}(5N/8) = H_i(5N/8) + B_3(i,5N/8) \\
&H_{i+1}(3N/8) = H_i(3N/8) + B_4(i,3N/8)
\end{aligned}
\right\}. \tag{8}
$$

Оскільки запропоновані рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ на ковзних інтервалах для розмірів перетворень, кратних чотирьом та восьми, вимагають лише на один цикл обчислення менше за рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ на ковзних інтервалах для розмірів перетворень, кратних двом та чотирьом, то арифметична складність запропонованих і відомих методів практично однакова. Однак зменшення кількості циклів обчислення в запропонованих методах може бути використано для зменшення апаратурних витрат аналізаторів спектра, в основу функціонування яких покладено ці методи.

Висновки

В результаті аналізу рекурентних виразів, що лежать в основі рекурентних методів обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на ковзних інтервалах для розмірів перетворень, кратних двом та чотирьом, отримано рекурентні вирази безнадлишкових рекурентних методів обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на ковзних інтервалах для розмірів перетворень, кратних чотирьом та восьми. Арифметична складність запропонованих методів практично однакова з арифметичною складністю відомих методів, однак за рахунок зменшення кількості циклів обчислення вони можуть бути використані для зменшення апаратурних витрат аналізаторів спектра.

Список літератури

1. *Белецкий А.Я.* Рекуррентный алгоритм дискретного преобразования Фурье // Электронное моделирование. – 1987. – № 2. – С. 94–95.
2. *Иваненко В.Г.* Рекуррентное вычисление дискретного преобразования Фурье. – М.: Препринт МИФИ № 014-87. – 1987. – 16 с.
3. *Бернанди А., Брейсуэлл Р.Н.* Обновление спектральной функции действительного сигнала методом Хартли // ТИИЭР. – 1987. – Т. 75. – № 7. – С. 111–112.
4. *Волынец В.И.* Рекуррентные алгоритмы вычисления дискретных преобразований и энергетического спектра // Винницкий политехнический институт. – Винница. – 1988. – 14 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.11.88, № 2898-Ук88.
5. *Лейтес Р.Д., Соболев В.Н.* Цифровое моделирование систем синтетической полифонии. – М.: Связь, 1969. – 128 с.
6. *Плотников В.Н., Белинский А.В., Суханов В.А., Жигулевцев Ю.Н.* Цифровые анализаторы спектра. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
7. *Волинець В.І.* Рекурентні методи обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник ВПІ. – 2003. – № 1. – С. 77–80.
8. *Волинець В.І.* Рекурентні методи обчислення модифікованих дискретних перетворень *Фур'є* та Хартлі для окремих розмірів перетворень // Електроніка та системи управління. – 2005. – № 4 (6). – С. 27–32.