

ВИЗНАЧЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ВХІДНИХ СИГНАЛІВ НА ОСНОВІ РЕКУРЕНТНИХ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ

Волинець В. І.

Вінницький інститут економіки ТНЕУ

Запропоновано вирази для визначення значень вхідних сигналів на основі рекурентних методів обчислення звичайних та модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі та проведено порівняльний аналіз їх арифметичної складності.

Expression for determination of values of input signals on the basis of recurrent methods of calculation of ordinary and modified discrete Fourier and Hartley transforms are offered and the comparative analysis of their arithmetic complication is executed.

В пристроях відновлення та синтезу вхідних сигналів [1] на основі їхніх спектрів використовується обернене дискретне перетворення Фур'є (ОДПФ) [2, 3]. Якщо сигнали необхідно відновлювати або синтезувати на основі їхніх ковзних спектрів, то визначення значень вхідних сигналів доцільно здійснювати на основі рекурентного методу обчислення дискретного перетворення Фур'є (ДПФ), арифметична складність якого значно нижча за складність прямих та швидких методів обчислення ДПФ [4, 5].

Рекурентний метод обчислення ДПФ для ковзних спектрів ґрунтується на такому виразі [4, 5]:

$$F_{i+1}(k) = [F_i(k) + [x(N) - x(0)]] \cdot e^{j2\pi/N}, \quad (1)$$

де $F_{i+1}(k)$, $F_i(k)$ – значення k -их спектральних гармонік Фур'є на $(i+1)$ -му та i -му ковзних інтервалах вхідного сигналу ($k = 0, N/2 - 1$, $i = 0, 1, 2, \dots$); $x(N)$, $x(0)$ – значення дійсного вхідного сигналу, зсунути відносно один одного на N відліків, де N – розмір перетворення.

З виразу (1) значення $x(N)$ визначається за такою формулою [3]:

$$x(N) = \operatorname{Re}[F_{i+1}(k)] \cdot \cos(2\pi k / N) + \operatorname{Im}[F_{i+1}(k)] \cdot \sin(2\pi k / N) - \operatorname{Re}[F_i(k)] + x(0), \quad (2)$$

де $\operatorname{Re}[F_{i+1}(k)]$, $\operatorname{Im}[F_{i+1}(k)]$ – дійсна та уявна частини значення $F_{i+1}(k)$.

Тобто, як видно з виразу (2) значення вхідного сигналу можна визначити через значення будь-яких спектральних гармонік на суміжних інтервалах вхідного сигналу та значення вхідного сигналу, яке передувало значенню, що визначається, на N відліків.

Окрім звичайного ДПФ для спектрального аналізу використовуються модифіковане ДПФ та звичайне і модифіковане дискретне перетворення Хартлі (ДПХ), для обчислення яких на ковзних інтервалах використовують рекурентні методи обчислення [5, 6]. Однак вирази для визначення значень

вхідного сигналу, що ґрунтуються на цих методах обчислення не відомі. Тому цю роботу присвячено розв'язанню цієї задачі.

Рекурентний метод обчислення модифікованого ДПФ для ковзних спектрів ґрунтується на виразі [6]

$$F_{i+1}(k) = F_i(k) + [x(N) - x(0)] \cdot e^{-j2\pi/N}, \quad (3)$$

з якого

$$x(N) = [F_{i+1}(k) - F_i(k)] \cdot e^{j2\pi/N} + x(0) = (\operatorname{Re}[F_{i+1}(k)] - \operatorname{Re}[F_i(k)]) \times \\ \times \cos(2\pi k / N) - (\operatorname{Im}[F_{i+1}(k)] - \operatorname{Im}[F_i(k)]) \cdot \sin(2\pi k / N) + x(0). \quad (4)$$

Рекурентний метод обчислення звичайного ДПХ для ковзних спектрів ґрунтується на виразі [6]

$$H_{i+1}(k) = [H_i(k) + [x(N) - x(0)]] \cdot \cos(2\pi k / N) - \\ - [H_i(N - k) + [x(N) - x(0)]] \cdot \sin(2\pi k / N), \quad (5)$$

де $H_{i+1}(k)$, $H_i(k)$ – значення k -их спектральних гармонік Хартлі на $(i+1)$ -му та i -му ковзних інтервалах вхідного сигналу ($k = \overline{0, N-1}$, $i = 0, 1, 2, \dots$).

Оскільки на підставі виразу (5)

$$H_{i+1}(N - k) = [H_i(k) + [x(N) - x(0)]] \cdot \sin(2\pi k / N) + \\ + [H_i(N - k) + [x(N) - x(0)]] \cdot \cos(2\pi k / N), \quad (6)$$

то помноживши ліві та праві частини виразів (5) і (6) відповідно на $\cos(2\pi k / N)$ і $\sin(2\pi k / N)$ та склавши отримані результати отримаємо

$$H_{i+1}(k) \cdot \cos(2\pi k / N) + H_{i+1}(N - k) \cdot \sin(2\pi k / N) = H_i(k) + [x(N) - x(0)], \quad (7)$$

звідки

$$x(N) = H_{i+1}(k) \cdot \cos(2\pi k / N) + H_{i+1}(N - k) \cdot \sin(2\pi k / N) - H_i(k) + x(0). \quad (8)$$

Рекурентний метод обчислення модифікованого ДПХ для ковзних спектрів ґрунтується на виразі [6]

$$H_{i+1}(k) = H_i(k) + [x(N) - x(0)] \cdot [\cos(2\pi k / N) + \sin(2\pi k / N)], \quad (9)$$

на підставі якого

$$H_{i+1}(N - k) = H_i(N - k) + [x(N) - x(0)] \cdot [\cos(2\pi k / N) - \sin(2\pi k / N)]. \quad (10)$$

Оскільки з виразів (9) і (10)

$$H_{i+1}(k) - H_i(k) = [x(N) - x(0)] \cdot [\cos(2\pi k / N) + \sin(2\pi k / N)], \quad (11)$$

$$H_{i+1}(N - k) - H_i(N - k) = [x(N) - x(0)] \cdot [\cos(2\pi k / N) - \sin(2\pi k / N)], \quad (12)$$

то помноживши ліві та праві частини виразів (11) і (12) відповідно на $\cos(2\pi k / N)$ і $\sin(2\pi k / N)$ та знайшовши різницю отриманих результатів отримаємо

$$[H_{i+1}(k) - H_i(k)] \cdot \cos(2\pi k / N) - [H_{i+1}(N - k) - H_i(N - k)] \cdot \sin(2\pi k / N) = \\ = x(N) - x(0), \quad (13)$$

звідки

$$x(N) = [H_{i+1}(k) - H_i(k)] \cdot \cos(2\pi k / N) - [H_{i+1}(N - k) - H_i(N - k)] \cdot \sin(2\pi k / N) + x(0). \quad (14)$$

Порівнюючи арифметичну складність виразів для визначення значень вхідних сигналів, можна зробити такі висновки:

1. Арифметична складність виразів для визначення значень вхідних сигналів, побудованих на основі рекурентних методів обчислення звичайних ДПФ і ДПХ збігається і складає дві операції множення та три операції додавання в загальному випадку або лише три операції додавання у випадку $k = 0$.

2. Арифметична складність виразів для визначення значень вхідних сигналів, побудованих на основі рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ збігається і складає дві операції множення та чотири операції додавання в загальному випадку або лише дві операції додавання у випадку $k = 0$.

3. Вирази для визначення значень вхідних сигналів, побудовані на основі рекурентних методів обчислення звичайних ДПФ і ДПХ, мають в загальному випадку на одну операцію додавання меншу арифметичну складність, ніж вирази для визначення значень вхідних сигналів, побудовані на основі рекурентних методів обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ, і на одну операцію додавання більшу арифметичну складність у випадку $k = 0$.

Таким чином, в роботі запропоновано вирази для визначення значень вхідних сигналів на основі рекурентних методів обчислення звичайних та модифікованих ДПФ і ДПХ та проведено порівняльний аналіз їх арифметичної складності, який показав, що вирази на основі звичайних ДПФ і ДПХ мають меншу арифметичну складність в загальному випадку та більшу арифметичну складність у випадку $k = 0$. Запропоновані вирази поруч з відомим виразом можуть бути використані для відновлення та синтезу вхідних сигналів на основі їхніх спектрів.

Список літератури

1. Афонский А.А., Дьяконов В.П. *Цифровые анализаторы спектра, сигналов и логики* / Под ред. проф. В.П. Дьяконова. – М.: СОЛОН-Пресс, 2009. – 248 с.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. *Цифровая обработка сигналов*. – 2-е изд., испр. – М.: Техносфера, 2007. – 856 с.
3. Сергиенко А.Б. *Цифровая обработка сигналов*. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2007. – 751 с.
4. *Рекуррентные алгоритмы вычисления дискретных преобразований и энергетического спектра* // Вольнец В.И.; Винницкий политехн. ин-т. – Винница, 1988. – 14 с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 18.11.88; № 2898 – Ук88.
5. *Цифровые анализаторы спектра* / В.Н. Плотников, А.В. Белинский, В.А. Суханов, Ю.Н. Жигулевцев. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
6. Волинець В.І. *Рекурентні методи обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі* // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 1. – С. 77-80.