6. Томашевський В. М. Моделювання систем / Томашевський В. М. — К. : Видавнича група BHV, 2005. — 352 с.

7. Hopfe C. J. Uncertainty analysis in building performance simulation for design support / C. J. Hopfe, J. L. M. Hensen // Energy and Buildings. — 2011. — Volume 43, Issue 10. — P. 2798 — 2805.

8. Jacques J. Sensitivity analysis in presence of model uncertainty and correlated inputs / J. Jacques, C. Lavergne, N. Devictor // Reliability Engineering & System Safety. — 2006. — Volume 91, Issues 10 — 11. — P. 1126 — 1134.

9. S. de Wit. Analysis of uncertainty in building design evaluations and its implications / S. de Wit, G. Augenbroe // Energy and Buildings. — 2002. — Volume 34, Issue 9. — P. 951 — 958.

10. Romanuke V. V. Adjusting the neuron transfer function with symmetric kernel matrix game / V. V. Romanuke // V International Conference on Optoelectronic Information Technologies "Photonics — ODS 2010", September 28 — 30, 2010, Vinnytsya : abstracts. — Vinnytsya : VNTU, 2010. — P. 61.

11. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : [учеб. пособие для вузов] / Гмурман В. Е. — [9-е изд., стер.]. — М. : Высш. шк., 2003. — 479 с. : ил.

12. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределённости / Трухаев Р. И. — М. : Наука, 1981. — 258 с.

13. Воробьёв Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры / Воробьёв Н. Н. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 496 с.

14. Романюк В. В. Мінімаксний підхід у реалізації стохастичного параметра з невідомим імовірнісним розподілом на інтервалі ненульової міри / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2010. — № 3. — С. 65 — 71.

15. Romanuke V. V. A removing uncertainty framework for approximating the probabilistic distribution over abrasive-adhesive-diffusive wear evaluation models off most-precautious distribution pattern / V. V. Romanuke, S. S. Kovalchuk // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка ; [редкол.: Ю. Г. Кривонос (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. — Вип. 6. — С. 176 — 181.

УДК 517.9

КОРЕКТНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО РІВНЯННЯ SIN-ГОРДОНА НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Рум'янцева К. Є., к. пед. н., доцент

Вінницький інститут економіки Тернопільського національного економічного університету

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи диференціальних рівнянь, яка описує нескінченну систему лінійно зв'язаних нелінійних атомів, розміщених на двовимірній ґратці. Одержано результат про існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для дискретного рівняння sin-Гордона на двовимірній ґратці.

Ключові слова: дискретне рівняння sin-Гордона, двовимірна ґратка, нелінійні осцилятори, задача Коші. глобальний розв'язок.

Румянцева К. Е. КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ SIN-ГОРДОНА НА ДВУМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ / Винницкий институт экономики Тернопольского национального экономического университета, Украина

Статья посвящена изучению бесконечной системы дифференциальных уравнений, описывающая бесконечную систему линейно связанных нелинейных атомов на двумерной решетке. Получен результат о существовании и единственности глобального решения задачи Коши для дискретного уравнения sin-Гордона на двумерной решетке.

Ключевые слова: дискретное уравнение sin-Гордона, двумерная решетка, нелинейные осцилляторы, задача Коши, глобальное решение.

Rumyantseva K. E. CORRECTNESS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR DISCRETE SIN-GORDON EQUATION FOR TWO DIMENSIONAL LATTICE / Vinnitsa Institute of Economy of Ternopil National Economic University, Ukraine

The article deals with infinite systems of differential equations that describe infinite system of nonlinear atoms on two dimensional lattice. It is obtained result on existence and uniqueness of global solution for discrete sin-Gordon equation for two dimensional lattice.

Key words: discrete sin-Gordon equation, two dimensional lattice, nonlinear oscillators, Cauchy problem, global solution.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних атомів, розміщених на плоскій цілочисловій ґратці:

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = q_{n+1,m}(t) + q_{n-1,m}(t) + q_{n,m+1}(t) + q_{n,m-1}(t) - 4q_{n,m}(t) - \sin q_{n,m}(t), \tag{1}$$

де $q_{n,m}(t)$ – узагальнена координата (n, m)-го атома в момент часу t. Розглядаються такі розв'язки системи (1), які задовольняють умову

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \tag{2}$$

тобто атоми знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці [7], [8], [9]. У статтях [1], [5], [10] вивчались біжучі хвилі в системах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірних ґратках, а в статті [2], [3] і [4] – питання коректності задачі Коші для таких систем.

Метою статті є доведення існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для дискретного рівняння sin-Гордона на двовимірній ґратці.

АНАЛІЗ ОСТАНІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

У статтях [2], [3] і [4] вивчалися рівняння

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + \\ + c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}),\ (n, m)\in Z^2,\end{gathered} \tag{3}$$

які описують динаміку лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Розглядаються розв'язки цієї системи, які задовольняють умову (2).

Враховуючи граничні умови (2), це рівняння зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \tag{4}$$

де

$$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m},$$

в просторі $l_2 = l_2(Z^2)$ дійсних послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$ зі скалярним добутком

$$\left(q^{(1)}, q^{(2)}\right) = \sum_{n,m\in Z} q^{(1)}_{n,m} q^{(2)}_{n,m}.$$

За означенням, розв'язком рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значеннями в l_2.

Задача Коші для рівняння (4) полягає у знаходженні розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$q(0) = q^{(0)},\ \dot{q}(0) = q^{(1)}. \tag{5}$$

Припускається, що виконуються умови:

(*i*) *послідовності* $\{a_{n,m}\}$ *і* $\{c_{n,m}\}$ *дійсних чисел обмежені;*

(*ii*) $V_{n,m}(r)$ *– функція класу* C^1 *на R, причому*

$$V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$$

і для будь-якого $R > 0$ *існує таке* $C = C(R) > 0$, *що для всіх* $n, m \in Z$

$$\left|V'_{n,m}(r_1) - V'_{n,m}(r_2)\right| \le C|r_1 - r_2|,\ |r_1|, |r_2| \le R. \tag{6}$$

У статті [3] одержано такі результати про існування та єдиність відповідно локального і глобального розв'язків задачі Коші:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (i) *та* (ii). *Тоді для будь-яких* $q^{(0)} \in l_2$ *і* $q^{(1)} \in l_2$ *задача ((4), (5) має єдиний розв'язок класу* C^2, *який визначений на деякому інтервалі* $(-t_0;\, t_0)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (i) *та* (ii) *з константою* C, *яка не залежить від* R. *Тоді для будь-яких* $q^{(0)} \in l_{2,2}$ *і* $q^{(1)} \in l_{2,2}$ *задача (4), (5) має єдиний розв'язок класу* C^2, *який визначений при всіх* $t \in R$.

В статті [2] одержано наступний результат про існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші:

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (i), (ii) *та оператор* A *недодатний, тобто* $(Aq,\, q) \le 0$ *для будь-якого* $q \in l_{2,2}$. *Крім того, нехай виконується одна із таких умов:*

(a) $V_{n,m}(r) \ge 0$ *для всіх* $n,\, m \in Z$ *і* $r \in R$;

(b) *існує така неспадна функція* $h(\xi)$, *визначена для* $\xi \ge 0$, *що* $\lim\limits_{\xi \to +\infty} h(\xi) = +\infty$ *і* $V_{n,m}(r) \ge h(|r|)$ *для всіх* $n,\, m \in Z$ *і* $r \in R$.

Тоді для будь-яких початкових даних $q^{(0)},\, q^{(1)} \in l_{2,2}$ *задача (4), (5) має єдиний розв'язок, визначений при всіх* $t \in R$.

У статті [4] одержано результат про існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші у випадку кубічної потенціальної функції. Покладемо

$$J(q) = -\frac{1}{2}(Aq,\, q) + \frac{1}{3}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} d_{n,m} q_{n,m}^3,$$

$$\gamma = \inf_q \left\{ \sup_{\lambda \ge 0} J(\lambda q) : q \in l_2,\, q \ne 0 \right\},$$

$$W_\gamma = \left\{ q \in l_2 : 0 \le J(\lambda q) < \gamma,\ \forall \lambda \in [0,1] \right\}.$$

Теорема 4. *Нехай* $V_{n,m}(r) = \dfrac{d_{n,m}}{3} r^3$, *де* $d_{n,m}$ *– обмежена послідовність, оператор* A *від'ємно визначений і* $q^{(0)} \in W_\gamma$, $q^{(1)} \in l_2$ *такі, що* $\frac{1}{2}\|q^{(1)}\|^2 + J(q^{(0)}) < \gamma$. *Тоді задача Коші з початковими даними* $q^{(0)},\, q^{(1)}$ *має єдиний глобальний розв'язок.*

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для одержання основного результату нам знадобиться теорема, яка є наслідком зі стандартного результату про існування та єдиність глобального розв'язке ([6, с. 392]). Розглянемо в банаховому просторі E нелінійне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{7}$$

Теорема 5. *Нехай існують* $M_0 > 0$, $M_1 > 0$ *і* $M_2 > 0$ *такі, що*

$$\|f(x)\| \le M_1 + M_0 \|x\|$$

і

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \le M_2 \|x_2 - x_1\|.$$

Тоді для будь-якого $x_0 \in E$ *рівняння ((7) має один і тільки один розв'язок* $x = x(t)$, *визначений при всіх* $t \in R$, *який задовольняє початкову умову* $x(0) = x_0$.

Аналогічно, як і вище, рівняння (1) можна розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = \Delta q - B(q), \tag{8}$$

де

$$(\Delta q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}$$

двовимірний дискретний оператор Лапласа, а нелінійний оператор B –

$$\left(B(q)\right)_{n,m} = \sin q_{n,m},$$

в просторі l_2.

Як відомо, оператор Δ є обмеженим самоспряженим оператором. Очевидно, що оператор В є також обмеженим і до того ж неперервним за Ліпшицем. Справді,

$$\left\|B(q)\right\| = \left(\sum_{n,\, m\in\mathbb{Z}} \left|\sin q_{n,\,m}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{n,\, m\in\mathbb{Z}} \left|q_{n,\,m}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|q\|,$$

$$\left|\sin r_1 - \sin r_2\right| = 2\left|\sin\frac{r_1 - r_2}{2}\cos\frac{r_1 + r_2}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{r_1 - r_2}{2}\right| \le 2\frac{\left|r_1 - r_2\right|}{2} = \left|r_1 - r_2\right|.$$

Однак частина умови (ii) для потенціалу $V_{n,m}(r) = -\cos r$ не виконується ($V_{n,m}(0) \neq 0$). Тому, щоб довести існування та єдиність розв'язку задачі Коші, аналогічно як і в [3], потрібно скористатися зведенням рівняння (1) до диференціального рівняння першого порядку:

$$\dot{x} = Gx,$$
$$Gx = \left(p, \Delta q - B(q)\right),$$
$$x = (q, p) \in E = l_2 \times l_2.$$

Неважко переконатися, що для оператора G виконуються умови теореми 5. А це означає, що задача Коші для рівняння (8) має єдиний глобальний розв'язок, тобто правильна теорема:

Теорема 6. *Для будь-яких $q^{(0)} \in l_2$ і $q^{(1)} \in l_2$ задача (8), (5) має єдиний розв'язок класу C^2, який визначений при всіх $t \in R$.*

ВИСНОВКИ

Таким чином, доведено існування глобального розв'язку задачі Коші для дискретного рівняння sin-Гордона. До перспективних напрямів дослідження відносимо дослідження питання про існування біжучих хвиль в таких системах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній гратці / С. М. Бак // Математичні студії. – 2011. – Т. 35, №1. – С. 60-65.
2. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній гратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання: збірник наукових праць. Серія: Фізико-математичні науки. – 2011. – Вип. 5. – С. 3-9.
3. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці / С. М. Бак, О. О. Баранова, Ю. П. Білик // Математичне та комп'ютерне моделювання: збірник наукових праць. Серія: Фізико-математичні науки. – 2010. – Вип. 4. – С. 18-24.
4. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній гратці / С. М. Бак, К. Є. Рум'янцева // Математичне та комп'ютерне моделювання: збірник наукових праць. Серія: Фізико-математичні науки. – 2012. – Вип. 6. – С. 29-36.
5. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. – 2010. – Т. 7, №2. – С. 154-175.
6. Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М: Наука, 1970.–534 с.
7. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization / S. Aubry // Physica D. – 1997. – 103. – P. 201-250.
8. Braun O. M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar // Physics Repts. – 1998. – 306. – P. 1-108.
9. Braun O. M. The Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar. – Berlin: Springer, 2004. – 427 pp.
10. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. – 2007. – 20. – P. 319-341.