УДК 518.25

Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь із багатовимірними λ-матрицями для динамічної моделі Леонтьєва

Лідія Семчишин

Чортківський інститут підприємництва і бізнесу, Тернопільський національний економічний університет, вул. С. Бандери, 46, Чортків, Тернопільська область, 48500, e-mail: L_Semchyshyn@mail.ru

Запропоновано новий підхід до розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь із багатовимірними λ-матрицями для динамічної моделі Леонтьєва. Розглянуто скінченно-різницевий підхід до розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь із двовимірними λ-матрицями. Зведено систему лінійних алгебраїчних рівнянь із m-мірними λ-матрицями до системи з числовими елементами. Проведено оцінку характеристик системи з числовими елементами та підраховано кількість арифметичних операцій. Охарактеризовано складність алгоритму та показано його ефективність з точки зору комп’ютерної алгебри.

Ключові слова: динамічна модель Леонтьєва, скінченно-різницевий підхід, теорія різниць, схема розрізання, кількість арифметичних операцій, складність алгоритму.

Вступ. Системи алгебраїчних рівнянь з елементами, що задані наближено, здебільшого, розв’язують із застосуванням чисельних методів алгебри. Побудова ефективних методів визначення невідомих для таких систем є потрібна та доволі непроста задача. У багатьох застосуваннях виникає необхідність розгляду систем лінійних алгебраїчних рівнянь із λ-матрицями.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь із λ-матрицями від багатьох змінних виникають під час використання методів матричної лінеаризації для поліноміально-нелінійних рівнянь [1] в апроксимаціях Паде [2]. Випадок, коли λ-матриця залежить тільки від однієї змінної, вивчено достатньо добре. Зокрема, побудовано оптимізаційні моделі з матрицями міжгалузевого балансу, а також запропоновано ефективну обчислювальну схему, побудовану на теорії λ-матриць для числової системи [3]. Вивченням таких систем займалися В. Боюн [4], В. Григорків [5], М. Недашковський і О. Ковальчук [1], P. van Dooren, A. Hadjidimos, H. A. van der Vorst [6] та ін.

Метою цієї роботи є дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь із багатовимірними λ-матрицями для динамічної моделі Леонтьєва.

1. Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь із двовимірними λ-матрицями

Розглянемо систему диференціальних рівнянь, яка виникає в динамічній моделі Леонтьєва [3]

$$\mathbf{Y}(\lambda_1,\lambda_2)\left[\mathbf{E}-\mathbf{B}(\lambda_1,\lambda_2)\right]=\mathbf{C}(\lambda_1,\lambda_2), \tag{1}$$

де $\mathbf{B}(\lambda_1, \lambda_2)$ — відома квадратна матриця порядку n, а $\mathbf{C}(\lambda_1, \lambda_2) = \left(C_1(\lambda_1,\lambda_2),\right.$ $\left.C_2(\lambda_1,\lambda_2),...,C_n(\lambda_1,\lambda_2)\right)^{\mathrm{T}}$ — заданий вектор, $\mathbf{Y}(\lambda_1, \lambda_2) = \left(y_1(\lambda_1,\lambda_2), y_2(\lambda_1,\lambda_2),...,\right.$ $\left.y_n(\lambda_1,\lambda_2)\right)^{\mathrm{T}}$ — невідомий вектор, $\mathbf{E}$ — одинична матриця.

Розв'яжемо систему (1) методом двовимірних λ-матриць.

Для обчислення елементів довільного рядка матриці $\mathbf{B}(\lambda_1, \lambda_2)$ системи (1) запишемо рекурентні формули згідно скінченно-різницевого підходу [4].

Нехай $\Delta b_{j,i}$ — перша різниця між елементами j-го рядка матриці $\mathbf{B}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\Delta b_{j,i} = b_{j,i+1} - b_{j,i}$. Для другої різниці маємо $\Delta^2 b_{j,i} = \Delta b_{j,i+1} - \Delta b_{j,i}$, де $\Delta b_{j,i+1} = b_{j,i+2} - b_{j,i+1}$.

Аналогічно обчислюємо третю різницю $\Delta^3 b_{j,i}$ та наступні. Таким чином, обчисливши один раз значення різниці $\Delta^m b_{j,i}$ та коригуючи попередні різниці $\Delta^k b_{j,i}\,(1 \le k \le m-1)$, можна визначити елементи будь-якого рядка матриці $\mathbf{B}(\lambda_1, \lambda_2)$ з допомогою рекурентних формул

$$\begin{aligned}
&b_{j,i+1} = b_{j,i} + \Delta b_{j,i},\\
&\Delta b_{j,i+1} = \Delta b_{j,i} + \Delta^2 b_{j,i},\\
&\Delta^2 b_{j,i+1} = \Delta^2 b_{j,i} + \Delta^3 b_{j,i},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta^{m-1} b_{j,i+1} = \Delta^{m-1} b_{j,i} + \Delta^m b_{j,i}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Враховуючи співвідношення (2), запишемо формулу для обчислення елементів рядка матриці $\mathbf{B}(\lambda_1, \lambda_2)$ системи (1)

$$b_{j,k} = b_{j,1} + (k-1)\Delta b_{j,1} + \frac{(k-1)(k-2)}{2!}\Delta^2 b_{j,1} + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{3!}\Delta^3 b_{j,1} + ... + \\ + \frac{(k-1)(k-2)...(k-m)}{m!}\Delta^m b_{j,1}. \tag{3}$$

Варто зазначити, що немає необхідності окремо обчислювати кожний із коефіцієнтів, достатньо знайти лише множники, що стоять біля першої та другої різниць $\Delta b_{j,i}$ та $\Delta^2 b_{j,i}$.

Інші множники можна отримати з використанням співвідношень для раніше обчислених на два порядки нижчих різниць. Формулу (3) можна записати у вигляді

$$b_{j,k} = b_{j,1} + (k-1)\Delta b_{j,1} + \Delta^2 b_{j,1}\sum_{i=1}^{k-2} i + \Delta^3 b_{j,1}\sum_{i=1}^{k-3} i q_{k-(i+1)}\Delta b_{j,1} +$$

$$+\Delta^4 b_{j,1}\sum_{i=1}^{k-4} iq_{k-(i+1)}\Delta^2 b_{j,1}+\Delta^5 b_{j,1}\sum_{i=1}^{k-5} iq_{k-(i+1)}\Delta^3 b_{j,1}+\ldots+$$
$$+\Delta^l b_{j,1}\sum_{i=1}^{k-l} iq_{k-(i+1)}\Delta^{l-2} b_{j,1}+\ldots+\Delta^m b_{j,1}\sum_{i=1}^{k-m} iq_{k-(i+1)}\Delta^{m-2} b_{j,1}, \tag{4}$$

де $q_{k-(i+1)}\left(i=\overline{1,k-r}\right)$ — коефіцієнти при $\Delta^r b_{j,1}$.

Зупинимося на застосуванні теорії різниць для розв'язування систем алгебраїчних рівнянь. Введемо позначення

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{1,1}\\ b_{2,1}\\ \ldots\\ b_{n,1}\end{pmatrix},\ \Delta\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \Delta b_{1,1}\\ \Delta b_{2,1}\\ \ldots\\ \Delta b_{n,1}\end{pmatrix},\ \Delta^2\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \Delta^2 b_{1,1}\\ \Delta^2 b_{2,1}\\ \ldots\\ \Delta^2 b_{n,1}\end{pmatrix},\ \ldots,\ \Delta^m\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \Delta^m b_{1,1}\\ \Delta^m b_{2,1}\\ \ldots\\ \Delta^m b_{n,1}\end{pmatrix},\quad \mathbf{Y}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \ldots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

Тоді систему (1) можна записати у вигляді

$$y_1\left(\mathbf{E}-\mathbf{B}y_1\right)+y_2\left[\mathbf{E}-\left(\mathbf{B}+\Delta\mathbf{B}\right)y_2\right]+y_3\left[\mathbf{E}-\left(\mathbf{B}+2\Delta\mathbf{B}+\Delta^2\mathbf{B}\right)y_3\right]+\ldots=$$
$$=\mathbf{C}+3\Delta\mathbf{C}+3\Delta^2\mathbf{C}+\ldots+m\Delta^{m-1}\mathbf{C}.$$

Згрупувавши члени у лівій і правій частинах рівності біля $\mathbf{C},\ \Delta\mathbf{C},\Delta^2\mathbf{C},\ldots,\Delta^m\mathbf{C}$ та $\mathbf{B},\ \Delta\mathbf{B},\ \Delta^2\mathbf{B},\ldots,\Delta^m\mathbf{B}$, отримаємо систему

$$y_1-\mathbf{B}y_1^2+y_2\left(\mathbf{B}+\Delta\mathbf{B}\right)y_2^2+y_3\left(\mathbf{B}+2\Delta\mathbf{B}+\Delta^2\mathbf{B}\right)y_3^2+\ldots=$$
$$=\mathbf{C}+3\Delta\mathbf{C}+3\Delta^2\mathbf{C}+\ldots+m\Delta^{m-1}\mathbf{C}.$$

$$\begin{cases} y_1+y_2+y_3+y_4+\ldots+y_m+y_{m+1}=1,\\ y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2+y_4{}^2+\ldots+y_m{}^2+y_{m+1}^2=1^2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_{m+1}+\ldots+y_m\sum\limits_{i=1}^{n-m} iq_{n-i}\Delta^{m-2}b_{j,1}=\sum\limits_{i=1}^{n+1-m} iq_{n-1}\Delta^{m-2}b_{j,1}.\end{cases}$$

У силу введених позначень і з урахуванням порядку $n = m + 1$ систему (1) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} y_1+y_2+y_3+y_4+\ldots+y_m+y_{m+1}=1,\\ y_2+2y_3+3y_4+\ldots+(m-1)y_m+my_{m+1}=m+1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_{m+1}=\sum\limits_{i=1}^{2} iq_{m+1-i}\left(\Delta^{m-2}b_{j,1}\right).\end{cases} \tag{5}$$

2. Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь із *m*-мірними λ-матрицями

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{Y}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)\left[\mathbf{E}-\mathbf{B}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)\right]=\mathbf{C}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m), \tag{6}$$

в якій $\mathbf{B}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ — регулярна матриця розміру $n\times n$ рангу r, елементами якої є многочлени степеня l $\left(l=\overline{1,n}\right)$ від $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$. Кожен мінор k_i-го порядку $(i=\overline{1,m})$ матриці $\mathbf{B}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ є поліном. Права частина рівняння є вектор $\mathbf{C}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = =\left(C_1(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m),C_2(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m),...,C_n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)\right)^{\mathrm{T}}$ многочленів степеня l від $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, $\mathbf{Y}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=\left(y_1(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m),y_2(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m),...,y_n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)\right)^{\mathrm{T}}$ — невідомий вектор.

Із метою розв’язування системи (6) розглянемо алгоритм відсічених систем [1], що дозволяє звести системи лінійних алгебраїчних рівнянь з m-мірними λ-матрицями до системи з числовими елементами.

Оскільки $\mathbf{B}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ — поліноміальна матриця, а $\mathbf{C}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ — вектор, то їх можна подати у вигляді

$$\mathbf{B}(\lambda_1,...,\lambda_m)=\sum_{k_1+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}\mathbf{B}_{k_1...k_m},$$

$$\mathbf{C}(\lambda_1,...,\lambda_m)=\sum_{k_1+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}\mathbf{C}_{k_1...k_m},$$

де $\mathbf{B}_{k_1...k_m}$ — матриці, $\mathbf{C}_{k_1...k_m}$ — вектори.

Розв’язок системи будемо шукати у вигляді відношення двох поліномів [1]

$$\mathbf{Y}(\lambda_1,...,\lambda_m)=\sum_{k_1+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}\mathbf{X}_{k_1k_2...k_m}\Bigg/\sum_{k_1+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}Z_{k_1k_2...k_m}, \tag{7}$$

де $Z_{k_1k_2...k_m}$ — скалярні величини.

Невідомі $\mathbf{X}_{k_1k_2...k_m}$ і $Z_{k_1k_2...k_m}$ обчислимо методом невизначених коефіцієнтів. Враховуючи (7), систему (6) запишемо у вигляді

$$\sum_{k_1+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}\mathbf{X}_{k_1...k_m}\left(\mathbf{E}-\sum_{k_1+...+k_m=0}^{nl}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}\mathbf{B}_{k_1...k_m}\right)=$$
$$=\sum_{k_1+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}Z_{k_1...k_m}\sum_{k_1+...+k_m=0}^{nl}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}\mathbf{C}_{k_1...k_m}. \tag{8}$$

Звідси матимемо

$$\mathbf{X}_{00..0}+\sum_{k_1=1}^{nl}\lambda_1^{k_1}\mathbf{X}_{k_1 0..0}+...+\sum_{k_m=1}^{nl}\lambda_m^{k_m}\mathbf{X}_{00..0k_m}+\sum_{k_1+k_2=2}^{nl}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\mathbf{X}_{k_1k_2 0..0}+...+$$
$$+\sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_t=t\\ t<m}}^{nl}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_t^{k_t}\mathbf{X}_{k_1k_2..k_t 0..0}+\sum_{\substack{k_s+k_r+...+k_p=t\\ t<m}}^{nl}\lambda_s^{k_s}\lambda_r^{k_r}...\lambda_p^{k_p}\mathbf{X}_{0..0k_s..k_r..k_p 0..0}+...+$$
$$+\sum_{\substack{k_{m-t}+...+k_m=t\\ t<m}}^{l}\lambda_{m-t}^{k_{m-t}}...\lambda_m^{k_m}\mathbf{B}_{0..0k_{m-t}k_m}+...+\sum_{k_1+k_2+...+k_m=m}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}\mathbf{B}_{k_1k_2..k_m}=$$
$$=\left[Z_{00..0}+\sum_{k_1=1}^{nl}\lambda_1^{k_1}Z_{k_1 0..0}+...+\sum_{k_m=1}^{nl}\lambda_m^{k_m}Z_{00..0k_m}+\sum_{k_1+k_2=2}^{nl}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}Z_{k_1k_2 0..0}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\substack{k_{m-t}+...+k_m=t\\ t<m}}^{nl}\lambda_{m-t}^{k_{m-t}}...\lambda_m^{k_m}Z_{0..0k_{m-t}k_m}+...+\sum_{k_1+k_2+...+k_m=m}^{nl}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}Z_{k_1k_2..k_m}\right]\Big[\mathbf{C}_{00..0}+$$
$$\left.+\sum_{k_1=1}^{l}\lambda_1^{k_1}\mathbf{C}_{k_1 0..0}+...+\sum_{k_m=1}^{l}\lambda_m^{k_m}\mathbf{C}_{00..0k_m}+.....+\sum_{k_1+k_2+...+k_m=m}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}\mathbf{C}_{k_1k_2..k_m}\right].$$

Якщо згрупувати члени при однакових степенях λ_i, то для визначення невідомих коефіцієнтів $\mathbf{X}_{k_1k_2...k_m}$ і $Z_{k_1k_2...k_m}$ одержимо систему

$$\mathbf{X}_{00..0}\left(\mathbf{E}-\mathbf{B}_{00..0}\right)-Z_{00..0}\mathbf{C}_{00..0}=0,$$
$$\mathbf{X}_{10..0}\left(\mathbf{E}-\mathbf{B}_{00..0}\right)+X_{00..0}\left(\mathbf{E}-\mathbf{B}_{10..0}\right)-\left[Z_{10..0}\mathbf{C}_{00..0}+Z_{00..0}\mathbf{C}_{10..0}\right]=0,$$
$$..$$
$$\sum_{k_1=0}^{l}\mathbf{X}_{nl-k_1,0..0}\left(\mathbf{E}-\mathbf{B}_{k_1 0..0}\right)-\sum_{k_1=0}^{l}Z_{nl-k_1,0..0}\mathbf{C}_{k_1 0..0}=0,$$
$$..$$
$$\sum_{k_1=0}^{l}\underset{k_1+k_2+...+k_m=nl+l}{\sum_{k_2=0}^{l}}...\sum_{k_m=0}^{l}X_{nl+l-k_1,nl+l-k_2,...,nl+l-k_m}\left(\mathbf{E}-\mathbf{B}_{k_1k_2...k_m}\right)-$$
$$-\sum_{k_1=0}^{l}\underset{k_1+k_2+...+k_m=nl+l}{\sum_{k_2=0}^{l}}...\sum_{k_m=0}^{l}Z_{nl+l-k_1,nl+l-k_2,...,nl+l-k_m}\mathbf{C}_{k_1k_2...k_m}=0\,. \tag{9}$$

3. Розв'язування блочної системи з числовими елементами

Для розв'язування отриманої системи (9) використаємо алгоритм схеми розрізання [1]. Для цього систему (9) запишемо у спеціальному вигляді. З цією метою позначимо через $\mathbf{B}_r$ матрицю, елементами якої є матриці $\mathbf{B}_{k_1 \dots k_m}$, сума індексів яких задовольняє умову $\sum_{i=1}^{m} k_i = r \left(r = \overline{0,n} \right)$.

Запишемо матриці $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, ..., $\mathbf{B}_r$, ..., $\mathbf{B}_l$.

Матриця $\mathbf{B}_0$ складається з одного елемента $\mathbf{B}_0 = (\mathbf{B}_{00\dots0})$.

Матриці $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ мають розмірність $m \times m$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} B_{10\dots0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{010\dots0} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{0\dots01} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} B_{20\dots0} & B_{110\dots0} & B_{1010\dots0} & \cdots & B_{10\dots01} \\ 0 & B_{020\dots0} & B_{0110\dots0} & \cdots & B_{010\dots01} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{0\dots02} \end{pmatrix}.$$

Матриця $\mathbf{B}_3$ містить m стовпців і $1 + 2 + 3 + \ldots + m = (1 + m)m / 2$ рядків

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} B_{30\dots0} & B_{210\dots0} & B_{2010\dots0} & B_{20010\dots0} & \cdots & B_{20\dots010} & B_{20\dots001} \\ 0 & B_{120\dots0} & B_{1110\dots0} & B_{11010\dots0} & \cdots & B_{110\dots010} & B_{110\dots001} \\ 0 & 0 & B_{1020\dots0} & B_{10110\dots0} & \cdots & B_{1010\dots010} & B_{1010\dots01} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & B_{0\dots030} & B_{0\dots021} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_{0\dots012} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_{0\dots03} \end{pmatrix}.$$

Аналогічно записуємо матриці $\mathbf{B}_4$, $\mathbf{B}_5$, $\mathbf{B}_6$, ..., $\mathbf{B}_l$, кожна з яких містить m стовпців, а кількість рядків у матриці $\mathbf{B}_l$ не перевищує $(l + m)! / (l!m!)$.

Використовуючи означення тензорного добутку [1], систему (9) запишемо у вигляді

$$\mathbf{X} \otimes \left(\mathbf{E} - \mathbf{B} \right) - \mathbf{Z} \otimes \mathbf{C} = \mathbf{0} \tag{10}$$

або

$$\mathbf{X} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{Z} \otimes \mathbf{C} = \mathbf{0}, \tag{11}$$

де « $\otimes$ » — знак тензорного добутку [1].

Систему (11) можна розв’язати за алгоритмом схеми розрізання [1]. Для цього достатньо матрицю системи (11) розділити на блоки $\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}$, де $\mathbf{M}_{11}$ — квадратна матриця, розміри якої не перевищують $\frac{\left(nl + l + m \right)!}{\left(nl + l \right)! m! \left(n + 1 \right)}$, а $\mathbf{M}_{12}$, $\mathbf{M}_{21}$, $\mathbf{M}_{22}$ — прямокутні матриці відповідних розмірів. Розглядаючи $\left(n + 1 \right) \frac{\left(nl + m \right)!}{\left(nl \right)! m!} - \frac{\left(nl + l + m \right)!}{\left(nl + l \right)! m!}$ невідомі як параметри, отримаємо неоднорідну квадратну систему.

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2009, вип. 10, 123-131

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix},$$

де $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ — задані, а $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ — невідомі вектори. Порядок цієї системи обмежено числом $\dfrac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!}$, а розв'язки дають параметричне сімейство розв'язків системи (11). Таким чином, знаходження невідомих $\mathbf{U}$ та $\mathbf{V}$ зводиться до розв'язування двох систем меншого порядку. Вектор $\mathbf{V}$ визначається з системи

$$\left[\mathbf{M}_{22} - \mathbf{M}_{21} \otimes \left(\mathbf{M}_{11}^{-1} \otimes \mathbf{M}_{12}\right)\right] \otimes \mathbf{V} = \mathbf{N}_2 - \mathbf{M}_{21} \otimes \left(\mathbf{M}_{11}^{-1} \otimes \mathbf{N}_1\right), \tag{12}$$

до того ж $\mathbf{M}_{11} \neq 0$. Невідомий вектор $\mathbf{U}$ можна знайти з рівнянь

$$\mathbf{M}_{11} \otimes \mathbf{U} = \mathbf{N}_1 - \mathbf{M}_{12} \otimes \mathbf{V}. \tag{13}$$

Розв'язування отриманих систем (12) і (13) вимагає деяких проміжних матричних операцій [3]. Для обчислення добутку $\mathbf{M}_{11}^{-1} \otimes \mathbf{N}_1$ достатньо знайти розв'язки систем

$$\begin{bmatrix} B_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ B_1 & B_0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} W_0^{(i)} \\ W_1^{(i)} \\ \ldots \\ W_{(nl+l+m)!/(nl+l)!m!(n+1)}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

де $i = \overline{0, nl}$. Перш за все, потрібно розв'язати систему для $i = 0$, а решта невідомих визначити за співвідношеннями

$$W_0^{(i)} = W_1^{(i)} = \ldots = W_{i-1}^{(i)} = 0,$$

$$W_0^{(i)} = W_1^{(i)} = \ldots = W_{i-1}^{(i)} = 0,$$

$$W_{i+1}^{(i)} = W_1^{(0)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$W^{(i)}_{\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}} = W^{(0)}_{\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}-1}.$$

Розв'язки системи (14) можна обчислювати за формулами [1]

$$W_i^{(0)} = B_0^{-1} \otimes \left[B_i - \sum_{j=1}^{i} B_j \times W_{i-j}^{(0)} \right] \quad \left(i = \overline{0, l}\right),$$

$$W_i^{(0)} = B_0^{-1} \otimes \left[B_i - \sum_{j=1}^{i} B_j \times W_{i-j}^{(0)} \right], \quad \left(i = \overline{l+1, \frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}} \right). \tag{15}$$

Для знаходження всіх $W_j^{(0)}\left(j=\overline{l+1,\dfrac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}}\right)$ треба виконати близько $n^3 m\dfrac{(l+m)!}{l!m!}\dfrac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}$ арифметичних операцій. Обчислення добутків $\mathbf{M}_{21}\otimes\left(\mathbf{M}_{11}^{-1}\otimes\mathbf{M}_{12}\right)$ і $\mathbf{M}_{21}\otimes\left(\mathbf{M}_{11}^{-1}\otimes\mathbf{N}_1\right)$ вимагає виконання $n^3\left[\dfrac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}\right]^2$ арифметичних дій. Для визначення невідомих $\mathbf{V}$ з системи $\dfrac{(nl+l+m)!n}{(nl+l)!m!(n+1)}$-го порядку треба затратити $O\left(\dfrac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!}\right)^{\beta}$ операцій. За алгоритмом відсічених систем $\beta = 3$.

Для знаходження розв'язків системи (15) насамперед треба знайти добуток $\mathbf{M}_{12}\otimes\mathbf{V}$. Для цього необхідно виконати $n^2\left[\dfrac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}\right]^2$ операцій, після чого систему можна розв'язати за формулами (15), на що потрібно $n^3\left[\dfrac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}\right]^2$ дій. Таким чином, для повної реалізації алгоритму схеми розрізання для системи (14) потрібно виконати $n^3\left[\dfrac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}\right]^2 + {}$ $+O\left(\dfrac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!}\right)^{\beta}$ арифметичних операцій на комп'ютері.

Висновки. У статті розглянуто скінченно-різницевий підхід до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь із двовимірними λ-матрицями, а також розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з m-мірними λ-матрицями, які виникають у динамічній моделі Леонтьєва.

Запропонований алгоритм можна ефективно використовувати в системах комп'ютерної алгебри та для аналітично-числового розв'язування інженерних прикладних задач механіки.

На основі запропонованого підходу в пакеті MatLab були проведені числові експерименти для лінійних алгебраїчних рівнянь із двовимірними (m-мірними) λ-матрицями. Вони підтверджують ефективність алгоритму.

Література

[1] *Недашковський, М. О.* Обчислення з λ-матрицями / *М. О. Недашковський, О. Я. Ковальчук*. — Київ: Наук. думка, 2007. — 294 с.
[2] *Бейкер Дж.,* Аппроксимации Паде / *Дж. Бейкер, П. Грейвс-Морис*. — Москва: Мир, 1986. — 502 с.
[3] *Недашковський, М. О.* Узагальнені динамічні міжгалузеві моделі / *М. О. Недашковський, Л. М. Семчишин* // Вісник ТНЕУ. — Тернопіль: Економічна думка, 2009. — Вип. 1. — С. 169-187.
[4] *Боюн, В. П.* Скінченно-різницеві підходи до оптимізації обчислень матриць із складними елементами і множення їх на довільний вектор // В зб. наук. праць. — Київ: Ін-т кібернетики імені В. М. Глушкова, 1999. — С. 61-64.
[5] *Григорків, В. С.* Моделювання економіки. Ч. 2: Навч. посібник / *В. С. Григорків*. — Чернівці: Рута, 2006. — 100 с.
[6] *Van Dooren, P. M.* Numerical Analysis. Vol. 3: Linear Algebra - Linear Systems and Eigenvalues / *P. M. van Dooren, A. Hadjidimos, H. A. van der Vorst*. — 2000. — 526 p.

Solution of the linear algebraic equation with multidimensional λ-matrix system for the Leontyev's dynamic model

Lidia Semchyshyn

New approach to the solution of the system of linear algebraic equation with multidimensional λ-matrix for the Leontyev's dynamic model is proposed. A finite-differential approach to the solution of linear algebraic equation with two-dimensional λ-matrix system is examined. The linear algebraic equation with m-dimensional λ-matrix system is reduced to the numerical elements system. The characteristics of the system with numerical elements were evaluated and a number of the arithmetic operations was calculated. The algorithm complexity was characterized. The effectiveness of the suggested algorithm from the viewpoint of computer algebra is shown.

Решения систем линейных алгебраических уравнений с многомерными λ-матрицами для динамической модели Леонтьева

Лидия Семчишин

Предложен новый подход к решению систем линейных алгебраических уравнений с многомерными λ-матрицами, для динамической модели Леонтьева. Рассмотрен конечно-разностный подход к решению систем линейных алгебраических уравнений с двумерными λ-матрицами. Система линейных алгебраических уравнений с m-мерными λ-матрицами сведена к системе с числовыми элементами. Проведена оценка характеристик системы с числовыми элементами и подсчитано количество арифметических операций. Охарактеризована сложность алгоритма и показана его эффективность с точки зрения компьютерной алгебры.

Представлено професором М. Сухорольским

Отримано 10.06.09